O CAŁKOWANIU UKŁADÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH RZĘDU PIERWSZEGO, LINIOWYCH I JEDNORODNYCH Z JEDNĄ ZMIENNĄ ZALEŻNĄ

NAPISAŁ

K. ŻORAWSKI.

Całkowanie każdego układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego, liniowych i jednorodnych z jedną zmienną zależną, które posiadają rozwiązania wspólne, zawsze można sprowadzić do całkowania tak zwanego układu Jacobi'ego. Układ Jacobi'ego całkować można sposobem Jacobi'ego lub też sposobem A. Mayera.[1]) Redukcya wszakże danego układu do układu Jacobi'ego, sama przez się, jest dosyć uciążliwa, oraz doprowadza często do równań, których całkowanie nawet sposobem Jacobi'ego jest dość skomplikowane. Jakkolwiek sposób A. Mayera znacznie zmniejsza liczbę całkowań, jest on w praktyce często jeszcze trudniejszy niż sposób Jacobi'ego, bo często wymaga całkowania bardzo skomplikowanego układu równań różniczkowych zwyczajnych.

---

[1]) Wł. Zajączkowski. „Wykład nauki o równaniach różniczkowych", str. 592—614, lub też

Clebsch. „Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen". Crelle's Journal. Tom 65.

A. Mayer. „Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen". Mathemat. Annal. 5, wreszcie

Sophus Lie. „Theorie der Transformationsgruppen". Erster Theil. str. 82—107.

Studyując ten przedmiot, zauważyłem, że oprócz układu Jacobi'ego można całkować sposobem Jacobi'ego pewne inne układy równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, liniowych i jednorodnych z jedną zmienną zależną, jeżeli całkowanie równań wykonywać będziemy nie w dowolnym, lecz w pewnym określonym porządku. W pracy niniejszéj staram się wyznaczyć najogólniejszy z tych układów oraz do ich całkowania sprowadzić całkowanie każdego innego układu rzeczonych równań. Zdaje mi się, że w pewnych przypadkach metoda ta, która jest modyfikacyą metody Jacobi'ego, praktyczniejsza będzie od pierwotnego sposobu Jacobi'ego i metody A. Mayera. Badania własne poprzedzam krótkim wykładem teoryi układów wspomnianych równań różniczkowych według Jacobi'ego i Clebscha. Wstęp ten wydaje mi się koniecznym dla dokładnego uzasadnienia wywodów, w następnych §§ zawartych, zwłaszcza, że zamieszczam w nim parę twierdzeń, które, o ile wiem, dotychczas w matematycznéj literaturze polskiéj uwzględnione nie były.

Teoryą całkowania jednego równania różniczkowego cząstkowego rzędu pierwszego, liniowego i jednorodnego z jedną zmienną zależną, przyjmuję za znaną; poprzestaję tu na przytoczeniu zasadniczych jej wyników.

Ażeby znaleść wszystkie funkcye, czyniące zadość równaniu:

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,, \tag{1}$$

gdzie ξ *są funkcyami danemi zmiennych* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *należy zcałkować układ* $n-1$ *równań różniczkowych zwyczajnych:*

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n}\,.$$

Jeżeli $n-1$ *równań całkowych tego układu wyrazimy w postaci:*

$$\varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_h\,, \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1)$$

gdzie c_h *są stałe dowolne, natenczas, podstawiając w równanie* (1) $f = \varphi_h$, *otrzymamy tożsamości. Funkcye* φ_h *nazywają się całkami równania* (1); *wszystkie one są od siebie niezależne, t. j. nie może istnieć żadna tożsamość kształtu:*

$$\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = 0\,,$$

najogólniejszém zaś rozwiązaniem równania (1) *jest dowolna funkcya całek* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$.

§ 1. Układ zupełny.

Niech będzie $q < n$ równań:

$$X_k(f) = \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,, \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{2}$$

gdzie ξ są funkcyami danemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Załóżmy, że równania te są niezależne, t. j., że nie może istnieć żadna tożsamość kształtu:

$$\chi_1 X_1(f) + \chi_2 X_2(f) + \ldots + \chi_q X_q(f) = 0\,,$$

gdzie χ oznaczają funkcye zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lub, inaczéj mówiąc, że nie wszystkie wyznaczniki stopnia q macierzy [1])

$$\left|\begin{matrix} \xi_{11}, & \xi_{12}, & \ldots\ldots, & \xi_{1n} \\ \xi_{21}, & \xi_{22}, & \ldots\ldots, & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{q1}, & \xi_{q2}, & \ldots\ldots, & \xi_{qn} \end{matrix}\right| \tag{3}$$

znikają tożsamościowo.

Jeżeli istnieją takie funkcye zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które, podstawione zamiast f w równaniach układu (2), zamieniają wszystkie te równania na tożsamości, natenczas widocznie muszą funkcye te czynić zadość $\frac{q(q-1)}{1.2}$ równaniom:

$$X_l(X_k(f)) - X_k(X_l(f)) = 0 \quad (l = 2, 3, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, l-1).$$

Z równań (2) mamy:

$$X_l(X_k(f)) = \sum_1^n{}_i\, X_l(\xi_{ki}) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_{i'} \sum_1^n{}_i\, \xi_{li'}\, \xi_{ki} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i'}\, \partial x_i}\,;$$

przestawiając zaś znaczki k i l, otrzymujemy:

$$X_k(X_l(f)) = \sum_1^n{}_i\, X_k(\xi_{li}) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_{i'} \sum_1^n{}_i\, \xi_{ki'}\, \xi_{li} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i'}\, \partial x_i}\,.$$

Jeżeli obecnie w ostatniéj sumie podwójnéj przestawimy znaczki i i i', przez co widocznie wartość jéj się nie zmieni, oraz drugą tożsamość odejmiemy od pierwszéj, otrzymamy:

$$X_l(X_k(f)) - X_k(X_l(f)) = \sum_1^n{}_i\, (X_l(\xi_{ki}) - X_k(\xi_{li})) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$+ \sum_1^n{}_{i'} \sum_i^n{}_i\, \xi_{li'}\, \xi_{ki} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i'}\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_{i'}}\right);$$

ponieważ zaś muszą istnieć znane warunki całkowalności:

[1]) „macierz" (spolszczone „matrix") jest symbolem, oznaczającym wszystkie możliwe wyznaczniki, które z elementów, wewnątrz macierzy napisanych, utworzyć się dają przez wykreślenie pewnéj ilości kolumn i wierszy.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i'}\,\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_{i'}} \qquad (i' = 2, 3, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, i'-1)\,.$$

mamy więc:

$$X_l\,(X_k\,(f)) - X_k\,(X_l\,(f)) = \sum_1^n{}^i\,(X_l\,(\xi_{ki}) - X_k\,(\xi_{li}))\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,. \tag{4}$$

Część pierwsza téj tożsamości znika dla rozwiązań układu (2), część więc druga musi być funkcyą jednorodną liniową wyrażeń: $X_1\,(f), X_2\,(f), \ldots, X_q\,(f)$. Stąd, wprowadzając dla skrócenia symbol Poissona:

$$X_l\,(X_k\,(f)) - X_k\,(X_l\,(f)) = (X_l\ X_k)\,,$$

mamy:

Twierdzenie I. *Ażeby q równań niezależnych:*

$$X_k\,(f) = \xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

miało rozwiązania wspólne, konieczném jest istnienie $\frac{q\,(q-1)}{1.\ 2}$ *tożsamości:*

$$(X_l\ X_k) = \omega_{lk1}\,X_1\,(f) + \omega_{lk2}\,X_2\,(f) + \ldots + \omega_{lkq}\,X_q\,(f)\,, \tag{5}$$

$$(l = 2, 3, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, l-1)\,,$$

gdzie ω są pewnemi funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Układ, który posiada tę własność, nazwiemy według Clebsch'a q—częściowym układem zupełnym. [1])

Że warunki te są zarazem dostateczne dla istnienia rozwiązań wspólnych równań (2), pokażemy niżej, podając sposób obliczania rozwiązań układu (2) w przypadku, gdy zachodzą warunki (5). Teraz zaś udowodnimy, że *zagadnienie całkowania jakichkolwiek układów równań różniczkowych cząstkowych, liniowych i jednorodnych z jedną zmienną zależną sprowadza się do zagadnienia o całkowaniu układów zupełnych.*

Przypuśćmy, że układ $q < n$ równań niezależnych:

$$X_1\,(f) = 0,\ X_2\,(f) = 0, \ldots, X_q\,(f) = 0\,, \tag{6}$$

nie jest układem zupełnym, t. j., że znikanie wyrażeń: $X_1\,(f), X_2\,(f), \ldots, X_q\,(f)$ nie wywołuje znikania wszystkich symbolów $(X_l\ X_k)$; natenczas wnioskujemy, że rozwiązania wspólne równań (6), muszą być jednocześnie rozwiązaniami pewnéj liczby λ równań: $X_{q+1}\,(f) = 0, \ldots\ldots, X_{q+\lambda}\,(f) = 0$, które wraz z poprzedniemi q równaniami wywołują znikanie wszystkich symbolów $(X_l\ X_k)$. Obliczając symbole $(X_l\ X_k)$ dla tego nowego układu:

---

[1]) Clebsch; loco cit. str. 257 „*q—gliedrieges vollständiges System*"

$$X_1\,(f) = 0, \ldots, X_q\,(f) = 0,\ X_{q+1}\,(f) = 0, \ldots, X_{q+\lambda}\,(f) = 0\,,$$

albo przekonamy się, że układ ten już jest układem zupełnym, lub też, że nim nie jest. W ostatnim przypadku postępujemy z tym nowym układem taksamo, jak z poprzednim i t. d., póki nie dojdziemy do układu zupełnego. Gdy jednak z rachunków tych otrzymamy n równań niezależnych, natenczas wniesiemy, że dane równania (6) nie mają żadnego rozwiązania wspólnego, oprócz widocznego $f = \text{const.}$ W przeciwnym zaś razie, gdy liczba $q + \sigma$ równań, stanowiących układ zupełny, mniejszą będzie od n, przyjdziemy do wniosku, że wszystkie rozwiązania danych q równań (6) muszą być zarazem rozwiązaniami układu zupełnego:

$$X_1\,(f) = 0,\ X_2\,(f) = 0, \ldots, X_{q+\sigma}\,(f) = 0$$

Wobec tego w dalszym ciągu rozważać będziemy tylko układy zupełne i obecnie podamy parę ich własności.

Jeżeli układ dany q równań niezależnych:

$$X_1\,(f) = 0,\ X_2\,(f) = 0, \ldots, X_q\,(f) = 0 \tag{7}$$

czyni zadość warunkom (5), to łatwo dowieść, że tosamo stosuje się do wszelkiego układu:

$$Z_1\,(f) = 0,\ Z_2\,(f) = 0, \ldots, Z_q\,(f) = 0\,,$$

równoważnego z układem danym, t. j. do takiego, który z danego układu otrzymuje się na podstawie wzorów:

$$\begin{aligned} Z_1\,(f) &= \psi_{11}\,X_1\,(f) + \psi_{12}\,X_2\,(f) + \ldots + \psi_{1q}\,X_q\,(f)\,, \\ Z_2\,(f) &= \psi_{21}\,X_1\,(f) + \psi_{22}\,X_2\,(f) + \ldots + \psi_{2q}\,X_q\,(f)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_q\,(f) &= \psi_{q1}\,X_1\,(f) + \psi_{q2}\,X_2\,(f) + \ldots + \psi_{qq}\,X_q\,(f)\,, \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie oczywiście funkcye ψ wielkości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ muszą być tak dobrane, aby wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \psi_{11}, \psi_{12}, \ldots, \psi_{1q} \\ \psi_{21}, \psi_{22}, \ldots, \psi_{2q} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \psi_{q1}, \psi_{q2}, \ldots, \psi_{qq} \end{vmatrix}$$

nie był tożsamościowo równy zeru. Z równań (8) mamy:

$$Z_\nu\,(Z_\mu\,(f)) = \sum_1^q{}^k\,Z_\nu\,(\psi_{\mu k})\,X_k\,(f) + \sum_1^q{}^l\,\sum_1^q{}^k\,\psi_{\nu l}\,\psi_{\mu k}\,X_l\,(X_k\,(f))\,;$$

przestawiając tu znaczki μ i ν, otrzymujemy:

$$Z_\mu(Z_\nu(f)) = \sum_1^q{}^k Z_\mu(\psi_{\nu k})\, X_k(f) + \sum_1^q{}^l \sum_1^q{}^k \psi_{\mu l}\,\psi_{\nu k}\, X_l(X_k(f))$$

Jeżeli obecnie w ostatniéj sumie podwójnéj przestawimy znaczki k i l, przez co widocznie wartość jéj się nie zmieni, oraz drugą tożsamość odejmiemy od pierwszéj, otrzymamy:

$$(Z_\nu\, Z_\mu) = \sum_1^q{}^k (Z_\nu(\psi_{\mu k}) - Z_\mu(\psi_{\nu k}))\, X_k(f) + \sum_1^q{}^l \sum_1^q{}^k \psi_{\nu l}\,\psi_{\mu k}\,(X_l\, X_k)$$

Według założenia, układ dany (7) jest układem zupełnym, więc $(X_l\, X_k)$ są funkcyami liniowemi jednorodnemi wielkości $X_1(f), X_2(f), \ldots, X_q(f)$. Stąd wniosek, że $(Z_\nu\, Z_\mu)$ można wyrazić liniowo i jednorodnie przez $X_1(f), X_2(f), \ldots, X_q(f)$; obliczając zaś te ilości z równań (8), otrzymamy dla wszystkich $(Z_\nu\, Z_\mu)$ funkcye liniowe i jednorodne wielkości $Z_1(f), Z_2(f), \ldots, Z_q(f)$. Mamy więc:

Twierdzenie II. *Każdy układ q niezależnych równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego z jedną zmienną zależną, liniowych i jednorodnych, równoważny z pewnym q — częściowym układem zupełnym, jest także q — częściowym układem zupełnym.* [1])

Ze względu na ciąg dalszy podstawmy w wyrażeniu:

$$X(f) = \sum_1^\sigma{}^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$f = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\sigma),$$

gdzie ψ są pewnemi funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ponieważ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_1^\sigma{}^\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_\lambda} \cdot \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_i},$$

więc:

$$X(\Phi) = \sum_1^\sigma{}^\lambda \left(\sum_1^n{}^i \xi_i \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_\lambda},$$

skąd:

$$X(\Phi) = \sum_1^\sigma{}^\lambda X(\Phi_\lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_\lambda}. \tag{9}$$

Nim przystąpimy do całkowania układu zupełnego, damy dowód pewnego twierdzenia, które, pomimo założeń bardzo szczególnej natury, ważném jest dla późniejszych wywodów.

[1]) Clebsch, loco cit. str. 258.

Twierdzenie III. *Jeżeli równania:*

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$$

tworzą q— częściowy układ zupełny, pewna zaś funkcya $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ czyni zadość równaniom:

$$X_1(f) = 0, \ldots, X_{m-1}(f) = 0,\ X_m(f) = 1,\ X_{m+1}(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0,$$

natenczas symbole Poissona równań układu nie zależą od $X_m(f)$, skąd w szczególności wynika, że równania

$$X_1(f) = 0, \ldots, X_{m-1}(f) = 0,\ X_{m+1}(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0.$$

tworzą $(q-1)$ — częściowy układ zupełny.

Ponieważ układ dany jest układem zupełnym, więc mamy:

$$(X_l\, X_k) = \omega_{lk1} X_1(f) + \ldots + \omega_{lkm-1} X_{m-1}(f) + \omega_{lkm} X_m(f) + \omega_{lkm+1} X_{m+1}(f) + \ldots$$
$$+ \omega_{lkq} X_q(f), \quad (i = 2, 3, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, l-1)$$

Podstawiając tu $f = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, widzimy, że dla wszystkich możliwych wartości skaźników k i l część pierwsza napisanego równania jest zerem; w części zaś drugiéj znikają wszystkie wyrazy oprócz wyrazu $\omega_{lkm} X_m(f)$, który staje się równym ω_{lkm}; stąd wnosimy, że $\omega_{lkm} = 0$ $(l = 2, 3, \ldots, q;$ $k = 1, 2, \ldots, l-1)$, co też należało dowieść.

Zauważmy, że zmienna x_i wtedy i tylko wtedy jest całką równania $X(f) = 0$, gdy współczynnik w równaniu tém przy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jest równy zeru, t. j. gdy $X(f)$ nie zawiera pochodnéj $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Podobnież zmienna x_i wtedy i tylko wtedy czyni zadość równaniu $X(f) = 1$, gdy współczynnik w równaniu tém przy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ równy jest jedności. Na podstawie więc twierdzenia III, mamy:

Wniosek. *Jeżeli z równań q— częściowego układu zupełnego $q-1$ równań:*

$$X_1(f) = 0, \ldots, X_{m-1}(f) = 0,\ X_{m+1}(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$$

nie zawiera pochodnéj $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, współczynnik zaś przy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w równaniu $X_m(f) = 0$ jest jednością, to symbole Poissona równań układu nie zależą od $X_m(f)$, skąd w szczególności wynika, że $q-1$ wyżéj napisanych równań tworzy $(q-1)$ — częściowy układ zupełny.

Wniosek ten można także udowodnić niezależnie od twierdzenia III.

§ 2. Układ Jacobi'ego.

Na podstawie twierdzenia III można dać bardzo ogólną metodę redukcyi jakiegokolwiek układu zupełnego do tak zwanego *układu Jacobi'ego.*

Symbole Poissona równań układu Jacobi'ego są wszystkie tożsamościowo równe zeru.

Twierdzenie IV. *Jeżeli rozwiążemy układ q równań liniowych:*

$$\begin{aligned} X_1(f) &= X_1(\psi_1)\,Y_1(f) + X_1(\psi_2)\,Y_2(f) + \ldots + X_1(\psi_q)\,Y_q(f), \\ X_2(f) &= X_2(\psi_1)\,Y_1(f) + X_2(\psi_2)\,Y_2(f) + \ldots + X_2(\psi_q)\,Y_q(f), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_q(f) &= X_q(\psi_1)\,Y_1(f) + X_q(\psi_2)\,Y_2(f) + \ldots + X_q(\psi_q)\,Y_q(f) \end{aligned} \qquad (10)$$

względem $Y_1(f), Y_2(f), \ldots, Y_q(f)$, gdzie

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$$

tworzą q — częściowy układ zupełny, a ψ_m są poddane warunkowi, aby wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} X_1(\psi_1), X_1(\psi_2), \ldots, X_1(\psi_q) \\ X_2(\psi_1), X_2(\psi_2), \ldots, X_2(\psi_q) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_q(\psi_1), X_q(\psi_2), \ldots, X_q(\psi_q) \end{vmatrix}$$

nie był tożsamościowo równy zeru, zresztą zaś są zupełnie dowolnemi funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to

$$Y_1(f) = 0,\ Y_2(f) = 0, \ldots, Y_q(f) = 0 \qquad (11)$$

będzie układem Jacobi'ego, t. j. zachodzić będą tożsamości:

$$(Y_l\ Y_k) = 0,$$

każda zaś z funkcyj ψ_m będzie rozwiązaniem $q - 1$ równań:

$$Y_1(f) = 0, \ldots, Y_{m-1}(f) = 0,\ Y_{m+1}(f) = 0 \ \ldots, Y_q(f) = 0.$$ [1]

Zauważmy najprzód, że układ (11) jest równoważny z układem danym, więc na podstawie twierdzenia II jest on także q — częściowym układem zupełnym; następnie podstawmy w równaniach (10) $f = \psi_m$; rozwiązując układ otrzymany względem $Y_1(\psi_m), Y_2(\psi_m), \ldots, Y_q(\psi_m)$, mamy:

$$Y_1(\psi_m) = 0, \ldots, Y_{m-1}(\psi_m) = 0,\ Y_m(\psi_m) = 1,\ Y_{m+1}(\psi_m) = 0, \ldots Y_q(\psi_m) = 0.$$

Ponieważ działanie to, które wykonaliśmy dla jednéj funkcyi ψ_m, z takim samym rezultatem powtórzyć możemy dla pozostałych funkcyj ψ, więc druga część twierdzenia jest dowiedziona. Pierwsza zaś wynika stąd, że na podstawie twierdzenia III symbole Poissona równań układu (11) nie mogą zależyć od żadnego z wyrażeń $Y_1(f), Y_2(f), \ldots, Y_q(f)$, muszą więc zachodzić tożsamości $(Y_l\ Y_k) = 0$, co też było do dowiedzenia.

[1] Clebsch, loco cit. str. 259.

Przypadkiem szczególnym twierdzenia IV jest wniosek następujący:

Wniosek. *Rozwiązując q — częściowy układ zupełny względem q pochodnych: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_q}$ w przypuszczeniu, że właśnie wyznacznik*

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1q} \\ \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots, \xi_{2q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{q1}, \xi_{q2}, \ldots, \xi_{qq} \end{vmatrix}$$

nie równa się tożsamościowo zeru, otrzymujemy układ Jacobi'ego.

Wynika to bezpośrednio z wniosku z twierdzenia III; zważywszy bowiem, że układ otrzymany równoważny jest z danym układem, że więc musi być także układem zupełnym, oraz że współczynnik przy pochodnéj względem każdéj ze zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_q$ w jedném tylko równaniu tego układu równy jest jedności, wszystkie zaś inne równania pochodnéj téj zawierać nie mogą, wnioskujemy, że symbole Poissona otrzymanego układu muszą być tożsamościowo równe zeru, t. j., że układ ten jest układem Jacobi'ego.

Na podstawie ostatnich dowodzeń całkowanie każdego układu zupełnego zredukować można do całkowania układu Jacobi'ego. Przypuśćmy więc, że układ:

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0 \qquad (12)$$

jest układem Jacobi'ego t. j., że zachodzą tożsamości:

$$X_l(X_k(f)) - X_k(X_l(f)) = 0 \qquad (l = 2, 3, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, l-1)$$

Dla większéj ogólności załóżmy, że żadna z całek żadnego z równań (12) nie jest nam znana, pomimo że wyłożona metoda redukcyi układu zupełnego do układu Jacobi'ego daje przed całkowaniem pewną liczbę tych całek.

Metoda całkowania układu Jacobi'ego opiera się na twierdzeniu Jacobi'ego, które tu w nieco ogólniejszéj wypowiadam postaci.

Twierdzenie V. *Jeżeli $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest całką jakiéjkolwiek liczby $k < q$ którychkolwiek równań układu Jacobi'ego:*

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$$

więc np. równań:

$$X_{\sigma_1}(f) = 0,\ X_{\sigma_2}(f) = 0, \ldots, X_{\sigma_k}(f) = 0,$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ są którekolwiek k z liczb: 1, 2, ..., q, natenczas $X_{\sigma_{k+1}}(\varphi)$, gdzie σ_{k+1} jest którąkolwiek z liczb: 1, 2, ..., q, niezawartych w szeregu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, jest również całką równań:

$$X_{\sigma_1}(f)=0,\ X_{\sigma_2}(f),\ \ldots,\ X_{\sigma_k}(f)=0$$

Ponieważ układ dany jest układem Jacobi'ego, więc możemy napisać k tożsamości:

$$X_{\sigma_{k+1}}(X_{\sigma_\varrho}(f))-X_{\sigma_\varrho}(X_{\sigma_{k+1}}(f))=0, \quad (\varrho=1,2,\ldots,k);$$

zważywszy zaś, że $X_{\sigma_\varrho}(\varphi)=0$, otrzymujemy:

$$X_{\sigma_\varrho}(X_{\sigma_{k+1}}(f))=0; \quad (\varrho=1,2,\ldots,k),$$

co jest też dowodem przytoczonego twierdzenia.

Zwracamy się do metody całkowania układu (12). Zauważmy przedtém, że, z powodu niezależności równań tego układu, nie wszystkie wyznaczniki stopnia q macierzy (3) są tożsamościowo równe zeru. Ponieważ każde $k<q$ równań tego układu są także od siebie niezależne, więc w szczególności dla równań:

$$X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ \ldots,\ X_k(f)=0, \quad (k=1,2,\ldots,q)$$

nie wszystkie wyznaczniki stopnia k macierzy:

$$\left|\begin{matrix}\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1n}\\ \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots, \xi_{2n}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{kn}\end{matrix}\right| \quad (k=1,2,\ldots,q)$$

są tożsamościowo równe zeru. Przypuśćmy mianowicie, że wyznaczniki:

$$\left|\begin{matrix}\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1k}\\ \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots, \xi_{2k}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{kk}\end{matrix}\right| \quad (k=1,2,\ldots,q) \tag{13}$$

są nierówne zeru. Po tych założeniach przystępujemy do metody całkowania.

Ażeby znaleść całki równania:

$$X_1(f)=\xi_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_{12}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\xi_{1n}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

obliczamy najprzód jedną całkę $n-1$ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{dx_1}{\xi_{11}}=\frac{dx_2}{\xi_{12}}=\ldots=\frac{dx_n}{\xi_{1n}}$$

Oznaczmy całkę tę przez φ_{12}. Na podstawie twierdzenia V. $X_2(\varphi_{12})$, $X_3(\varphi_{12}), \ldots, X_q(\varphi_{12})$ są także całkami równania $X_1(f)=0$. Jeżeli do tych całek zastosujemy znów twierdzenie V., t. j. wykonamy nad każdą z nich szereg działań: $X_2, X_3, \ldots, X_q$, to otrzymamy znów szereg całek równania $X_1(f)=0$, do których możemy stosować znowu twierdzenie V. i t. d. Ponieważ jednak równanie $X_1(f)=0$ ma tylko $n-1$ całek niezależnych, więc tym sposobem możemy z całki φ_{12} otrzymać najwyżej $n-2$ nowych, t. j. od φ_{12} i od siebie niezależnych, całek równania $X_1(f)=0$. Gdybyśmy wszakże za pomocą tych działań otrzymali tylko $\varrho-2<n-2$ nowych całek, t. j. gdybyśmy otrzymali takie całki $\varphi_{1\lambda}$ $(\lambda=3,4,\ldots,\varrho)$, że następnie

$$X_k(\varphi_{1\lambda})=f_{k\lambda}(\varphi_{12},\varphi_{13},\ldots,\varphi_{1\varrho}) \quad (k=2,3,\ldots,q;\ \lambda=2,3,\ldots,\varrho)$$

to, ażeby znaleść resztę całek równania $X_1(f)=0$, należy znów za pomocą całkowania odpowiedniego układu równań zwyczajnych obliczyć jedną całkę równania $X_1(f)=0$; jeżeli całka ta jest funkcyą całek $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \ldots, \varphi_{1\varrho}$, nie może ona dać nam żadnych nowych rozwiązań, przeto musimy całkować dopóty, póki nie otrzymamy całki od $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \ldots, \varphi_{1\varrho}$ niezależnéj. Taką całkę oznaczmy przez $\varphi_{1\varrho+1}$ i stosujmy do niéj tęsamę metodę, którą poprzednio stosowaliśmy do całki φ_{12}; da nam ona pewną liczbę nowych całek i t. d. Działania te trzeba prowadzić dopóty, póki nie znajdziemy $n-1$ niezależnych całek równania $X_1(f)=0$. Oznaczmy je przez:

$$\varphi_{12}, \varphi_{13}, \ldots, \varphi_{1n};$$

najogólniejszém więc rozwiązaniem tego równania jest:

$$\Pi_1(\varphi_{12}, \varphi_{13}, \ldots, \varphi_{1n}),$$

gdzie Π_1 jest symbolem funkcyi dowolnéj. Funkcyą tę należy wyznaczyć tak, aby czyniła ona zadość innym równaniom układu (12). Wprowadzamy ją zamiast f w równanie $X_2(f)=0$; wówczas na podstawie wzoru (9) otrzymujemy:

$$X_2(\varphi_{12})\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_{12}}+X_2(\varphi_{13})\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_{13}}+\ldots+X_2(\varphi_{1n})\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_{1n}}=0$$

Zastąpmy we współczynnikach przy pochodnych zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ przez zmienne $x_1, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{1n}$. Zamiana ta jest możliwa, bo $x_1, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{1n}$ są niezależnemi funkcyami argumentów $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Istotnie, przypuszczając, że istnieje pewien związek tożsamościowy:

$$\Omega(x_1, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{1n})=0$$

i podstawiając w $X_1(f)=0$ zamiast $f \ldots \Omega$, powinniśmy otrzymać tożsamościowo zero. Po wstawieniu mamy (wzór (9)):

$$\xi_{11}\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}+X_1(\varphi_{12})\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_{12}}+\ldots+X_1(\varphi_{1n})\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_{1n}}=0;$$

ponieważ zaś $X_1(\varphi_{12})=\ldots=X_1(\varphi_{1n})=0$ i $\xi_{11}=0$ (na podstawie założenia (13)), więc $\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}=0$, t. j. tożsamość $\Omega=0$ nie może zależyć bezpośrednio od x_1; tożsamość zaś $\Omega\,(\varphi_{12}, \varphi_{13}, \ldots, \varphi_{1n})=0$ istnieć nie może, bo całki φ_1 są niezależne. Widocznémjest następnie, że współczynniki przy pochodnych w równaniu dla Π_1, po wstawieniu nowych zmiennych, od zmiennych x zależyć nie będą; więc równanie to całkujemy tak, jak poprzednio równanie $X_1\,(f)=0$. Po obliczeniu jednéj całki φ_{23} w zmiennych φ_1, obliczamy ją w zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i następnie, o ile można, za pomocą działań X_3, X_4, $\ldots, X_q$, wreszcie przez całkowanie odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych w zmiennych φ_1, obliczamy całki równania dla Π_1, których jest $n-2$, ponieważ równanie to ma $n-1$ zmiennych niezależnych. Całki te będą wspólnemi rozwiązaniami równań: $X_1\,(f)=0$ i $X_2\,(f)=0$. Oznaczmy całki te przez:

$$\varphi_{23}, \varphi_{24}, \ldots, \varphi_{2n},$$

więc najogólniejszém rozwiązaniem wspólném tych dwóch równań jest:

$$\Pi_1\,(\varphi_{23}, \varphi_{24}, \ldots, \varphi_{2n}),$$

gdzie Π_2 jest symbolem funkcyi dowolnéj, którą należy tak wyznaczyć, aby czyniła zadość pozostałym równaniom układu (12). Widocznèm jest, jak działania te w dalszym ciągu prowadzić należy. Trzeba tylko dowieść, że daléj ciągle można będzie zmienne niezależne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zastępować przez całki wspólne równaniom już zcałkowanym. Zauważmy, że, widocznie, po zcałkowaniu każdego równania układu (12) liczba całek zmniejsza się o jedność. Przeto po zcałkowaniu k równań otrzymamy $n-k$ całek wspólnych wszystkim równaniom już zcałkowanym. Przypuśćmy, że, całkując równania:

$$X_1\,(f)=0,\; X_2\,(f)=0, \ldots, X_k\,(f)=0,$$

otrzymaliśmy całki:

$$\varphi_{kk+1}, \varphi_{kk+2}, \ldots, \varphi_{kn},$$

że więc najogólniejszém tych równań rozwiązaniem wspólném jest:

$$\Pi_k\,(\varphi_{kk+1}, \varphi_{kk+2}, \ldots, \varphi_{kn})$$

gdzie Π_k oznacza funkcyą dowolną. Podstawiając funkcyą tę w równanie $X_{k+1}\,(f)=0$, otrzymujemy:

$$X_{k+1}\,(\varphi_{kk+1})\frac{\partial\Pi_k}{\partial\Pi_{kk+1}}+X_{k+1}\,(\varphi_{kk+2})\frac{\partial\Pi_k}{\partial\varphi_{kk+2}}+\ldots+X_{k+1}\,(\varphi_{kn})\frac{\partial\Pi_k}{\partial\varphi_{kn}}=0.$$

Wprowadźmy we współczynniki tego równania zamiast zmiennych: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zmienne: $x_1, \ldots, x_k, \varphi_{kk+1}, \ldots, \varphi_{kn}$. Jest to możliwe tylko wtedy, jeżeli nie może istnieć żadna tożsamość kształtu:

$$\Omega\,(x_1, \ldots, x_k, \varphi_{kk+1}, \ldots, \varphi_{kn})=0$$

Podstawiając Ω w równania już zcałkowane, otrzymujemy k tożsamości:

$$\xi_{11}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}+\ldots+\xi_{1k}\frac{\partial\Omega}{\partial x_k}+X_1\,(\varphi_{kk+1})\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_{kk+1}}+\ldots+X_1\,(\varphi_{kn})\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_{kn}}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{k1}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}+\ldots+\xi_{kk}\frac{\partial\Omega}{\partial x_k}+X_k\,(\varphi_{kk+1})\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_{kk+1}}+\ldots+X_k\,(\varphi_{kn})\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_{kn}}=0$$

Ponieważ $X_\mu\,(\varphi_{k\nu})=0$, $(\mu=1,2,\ldots,k;\ \nu=k+1,k+2,\ldots,n)$ i wyznacznik (13) nie równa się zeru, więc otrzymujemy: $\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}=\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}=\ldots$ $=\frac{\partial\Omega}{\partial x_k}=0$; lecz Ω nie może zależyć od samych φ_k, bo są to całki niezależne, czyli, że tożsamość $\Omega=0$ istnieć nie może, a zamiana zmiennych jest możliwa. Współczynniki przy pochodnych w równaniu dla Π_k, po zamianie zmiennych, zależyć będą na zasadzie twierdzenia V. tylko od φ_k, więc znów możemy całkować wyżéj opisanym sposobem, t. j. w części przez całkowanie odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych, w części zaś przez zastosowanie działań: $X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots, X_q$. Widoczna, że metodę tę możemy prowadzić do końca; zwracamy jednak uwagę na to, że gdy dojdziemy do ostatniego równania $X_q\,(f)=0$ i wyrazimy część pierwszą tego równania przez całki wspólne wszystkim równaniom poprzednim, jako nowe zmienne, wtedy rozwiązania całego układu obliczać można ostatecznie tylko przez całkowanie układu równań różniczkowych zwyczajnych, odpowiadającego przekształconemu równaniu $X_q\,(f)=0$. Oczywista, że niezależnych całek układu tego otrzymamy $n-q$; mamy więc:

Twierdzenie VI. *Każdy q — częściowy układ zupełny posiada n—q całek niezależnych, gdzie n jest liczba zmiennych niezależnych; najogólniéjszém zaś rozwiązaniem tego układu jest funkcya dowolna tych n—q całek.*

Zwracamy tu uwagę na tę ważną okoliczność, że *porządek, w którym całkujemy równania układu Jacobi'ego, jest zupełnie dowolny.* Ponieważ każde k równań układu Jacobi'ego (gdzie k jest którąkolwiek z liczb $2, 3, \ldots, q$) są niezależne, więc, chcąc dowodzenia poprzednie powtórzyć dla jakiegokolwiek innego porządku całkowania, zawsze znajdziemy odpowiednie wyznaczniki nierówne zeru i metodę tę całkowicie przeprowadzić będziemy mogli. Widocznèm jest, że całkowanie w porządku, wskazanym skaźnikami, równań $X_k\,(f)=0$ oraz założenia (13), warunkujące symetryczną zamianę zmiennych, wprowadziliśmy jedynie tylko dla symetryi. Dowolność porządku całkowania oraz możność korzystania ze wszystkich równań niezcałkowanych dla obliczania całek wspólnych równaniom pozostałym są cechami charakterystycznemi układu Jacobi'ego.

§ 3. Układ całkowalny w pewnym kierunku.

Wyłożony wyżéj sposób całkowania daje się z pewnemi zastrzeżeniami zastosować nietylko do układu Jacobi'ego, lecz i do pewnych innych daleko ogólniejszych układów zupełnych. Postaramy się obecnie rozwiązać zagadnienie następujące:

Jakie wyrażenia dla symbolów Poissona powinien mieć q—częściowy układ zupełny:

$$X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ldots,\ X_q(f)=0\,, \tag{14}$$

ażeby, po obliczeniu całek wspólnych każdych l—1 równań:

$$X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ldots,\ X_{l-1}(f)=0\,, \tag{15}$$

gdzie l kolejno przyjmuje wartości: 2, 3, ..., q i podstawieniu funkcyi dowolnéj tych całek w wyrażenie $X_l(f)$, współczynniki przy pochodnych dowolnéj funkcyi w wyrażeniu tém były również całkami poprzednich l — 1 równań?

Według wzoru (9) układ ten powinien być taki, aby, jeżeli φ jest całką równań (15), $X_l(\varphi)$ było także całką równań (15). Widoczném jest, że jeżeli znajdziemy taki układ, zawsze będziemy mogli znaleść rozwiązanie jego najogólniejsze przez całkowanie równań $X_k(f)=0$ w porządku wskazanym ich skaźnikami, bo zamiana zmiennych pierwotnych x_i na całki wspólne równań już zcałkowanych da z każdego równania równanie, od pierwotnych zmiennych niezależne.

Rozwiązanie zagadnienia jest bardzo łatwe. Przypuśćmy, że znaleźliśmy całki równania $X_1(f)=0$; jeżeli zmiennych niezależnych x_i jest n, liczba tych całek jest $n-1$; oznaczmy je przez $\varphi_{1\sigma}$ $(\sigma=2,3,\ldots,n)$. Ażeby $X_2(\varphi_{1\sigma})$ były także całkami równania $X_1(f)=0$, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest:

$$X_2(X_1(f))-X_1(X_2(f))=\omega_{211}X_1(f);$$

podstawiając tu bowiem $f=\varphi_{1\sigma}$, otrzymamy $X_1(X_2(\varphi_{1\sigma}))=0$; równania zaś te byłyby niemożliwe, gdyby (X_2X_1) zależało jeszcze od innych $X_k(f)$, bo wszystkie funkcye $\varphi_{1\sigma}$ nie mogą być całkami wspólnemi kilku równań, niezależnych, które, jak wiemy, zawsze posiadają mniéj całek wspólnych niż $n-1$.[1] Gdy warunek poprzedni ma miejsce, możemy, jak zaznaczyliśmy wyżéj, znaleść całki wspólne równań: $X_1(f)=0$ i $X_2(f)=0$. Oznaczmy je przez $\varphi_{2\sigma}$ $(\sigma=3,4,\ldots,n)$. Ażeby $X_3(\varphi_{2\sigma})$ były także całkami równań poprzednich, warunkiem koniecznym i dostatecznym są tożsamości:

$$X_3(X_1(f))-X_1(X_3(f))=\omega_{311}X_1(f)+\omega_{312}X_2(f)$$
$$X_3(X_2(f))-X_2(X_3(f))=\omega_{321}X_1(f)+\omega_{322}X_2(f),$$

co taksamo jak poprzednio udowodnioném być może. Prowadząc te wywody daléj, zauważymy, że symbole Poissona każdego wyrażenia $X_l(f)$ z poprze-

[1]) Jeżeli p równań niezależnych tworzą układ zupełny, natenczas liczba ich całek na podstawie twierdzenia VI jest $n-p$, jeżeli zaś nie tworzą one układu zupełnego, liczba ich całek wspólnych jest jeszcze mniejszą.

dniemi $X_k(f)$ $(k=1,2,\ldots,l-1)$ mogą zależyć tylko od wyrażeń $X_1(f)$, $X_2(f),\ldots,X_{l-1}(f)$ t. j. że symbole Poissona całego układu są:

$$X_l(X_k(f))-X_k(X_l(f))=\omega_{lk1}X_1(f)+\omega_{lk2}X_2(f)+\ldots+\omega_{lkl-1}X_{l-1}(f). \tag{16}$$
$$(l=2,3,\ldots,q;\ k=1,2,\ldots,l-1)$$

Przypuszczając, że wzór ten odpowiada warunkom zagadnienia, jeżeli w nim l zastąpimy przez $l-1$ i że obliczyliśmy całki równań:

$$X_1(f)=0,\ldots,X_{l-1}(f)=0,$$

widzimy, że, jeżeli oznaczymy całki te przez $\varphi_{l-1,\sigma}$ $(\sigma=l,l+1,\ldots,n)$, to $X_l(\varphi_{l-1,\sigma})$ będą także całkami równań (15). Powtóre, symbole (X_lX_k) $(k=1,2,\ldots,l-1)$ nie mogą zależyć od żadnego z wyrażeń $X_k(f)$ dla $k>l-1$, bo $n-l+1$ funkcyj $\varphi_{l-1,\sigma}$ nie mogą wszystkie być całkami równań, któch liczba przewyższa $l-1$. Więc układ zupełny, którego symbole Poissona mają kształt (15), jest rozwiązaniem zagadnienia.

Zauważmy, że układ zupełny, posiadający własności (16), można całkować tylko w kolejnym porządku, oznaczonym skaźnikami równań układu; nie przypuszczamy bowiem wogóle, aby którekolwiek z funkcyj ω były równe zeru: ta tylko okoliczność mogłaby być powodem pewnéj dowolności w porządku całkowania. Powtóre całkowanie układu tego może być ułatwione przez tę okoliczność, że, po znalezieniu jednéj całki wspólnéj równań:

$$X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ldots,X_{l-1}(f)=0\,,$$

pewna liczba innych całek wspólnych otrzymuje się za pomocą działania X_l. Widoczną jest rzeczą, że działań $X_{l+1},\ldots,X_q$ wogóle stosować tu nie można (jak to miało miejsce przy całkowaniu układu Jacobi'ego); koniecznym tego warunkiem jest znikanie pewnych określonych funkcyj ω, co późniéj rozważać będziemy. Obecnie możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie VII. *Jeżeli równania q — częściowego układu zupełnego:*

$$X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ldots,X_q(f)=0 \tag{14}$$

mają symbole Poissona:

$$(X_lX_k)=\omega_{lk1}X_1(f)+\omega_{lk2}X_2(f)+\ldots+\omega_{lkl-1}X_{l-1}(f),\ ^{1)} \tag{16}$$
$$(l=2,3,\ldots,q;\ k=1,2,\ldots,l-1)$$

to, korzystając z tego, że $X_l(\varphi)$ jest zawsze całką równań:

$$X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ldots,X_{l-1}(f)=0, \tag{15}$$

[1]) Sophus Lie w „Theorie der Transformationsgruppen" rozważa grupy przekształceń o podobnych własnościach; patrz Erster Theil. str. 585—597. O układach zupełnych twierdzenia VII, o ile wiem, nikt nie pisał dotychczas.

gdy φ jest ich całką, możemy rozwiązania układu tego znaleść przez kolejne całkowanie jego równań w porządku oznaczonym skaźnikami. Układ ten nazwiemy całkowalnym w kierunku $1, 2, \ldots, q$.

Z definicyi téj wynika wniosek bezpośredni, że każdy układ Jacobi'ego jest układem całkowalnym w każdym dowolnym kierunku.

W pewnych przypadkach można do pewnego stopnia ułatwić całkowanie układu całkowalnego w kierunku $1, 2, \ldots, q$. Mianowicie widoczne jest twierdzenie następujące:

Twierdzenie VIII. *Jeżeli dany układ*

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0,$$

całkowalny w kierunku $1, 2, \ldots, q$, *ma tę własność, że dla pewnych* $l, l+1, \ldots, l'$ *z liczb:* $1, 2, \ldots, q$:

$$(X_\lambda X_k) = \omega_{\lambda k 1} X_1(f) + \omega_{\lambda k 2} X_2(f) + \ldots + \omega_{\lambda k, l-1} X_{l-1}(f),$$
$$(\lambda = l, l+1, \ldots, l'; k = 1, 2, \ldots, l-1)$$

wtedy z pewnej wspólnej całki równań:

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_{l-1}(f) = 0$$

otrzymamy szereg innych całek tych równań za pomocą działań $X_l, X_{l+1}, \ldots, X_l$

Wreszcie z twierdzenia tego wynika:

Wniosek. *Do q — częściowego układu zupełnego:*

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$$

z symbolami Poissona:

$$(X_l X_k) = \omega_{lk1} X_1(f) + \omega_{lk2} X_2(f) + \ldots + \omega_{lkk} X_k(f)$$
$$(l = 2, 3, \ldots, q; k = 1, 2, \ldots, l-1)$$

można, całkując w kierunku $1, 2, \ldots, q$, *w całości zastosować metodę całkowania układu Jacobi'ego* [1])

Ponieważ zawsze mamy tu $k < l$, więc układ ten jest szczególnym przypadkiem układu całkowalnego w kierunku $1, 2, \ldots, q$. Dla téj saméj przyczyny z symbolów Poissona widzimy, że każdemu l odpowiada z twierdzenia VIII. $l' = q$; mając więc jednę całkę wspólną $l-1$ równań:

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_{l-1}(f) = 0,$$

możemy otrzymać szereg innych całek tych równań za pomocą działań X_l, $X_{l+1}, \ldots, X_q$, co też było do dowiedzenia.

---

[1]) wyłożoną w § 2.

§ 4. Metoda redukcyi układów zupełnych do układów całkowalnych w danym kierunku.

Każdy układ zupełny można zastąpić przez równoważny mu układ całkowalny w danym kierunku. Podstawą metody téj, zarówno jak i metody redukcyi do układu Jacobi'ego, wyłożonéj w twierdzeniu IV, jest twierdzenie III. Zasadzając się na tém twierdzeniu, damy obecnie dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie IX. *Jeżeli z danego q — częściowego układu zupełnego:*

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0 \tag{17}$$

na podstawie wzorów redukcyjnych:

$$Y_1^{(1)}(f) = X_1(f) - \frac{X_1(\psi_q)}{X_q(\psi_q)} X_q(f), \ \ldots, \ Y_{q-1}^{(1)}(f) = X_{q-1}(f) - \frac{X_{q-1}(\psi_q)}{X_q(\psi_q)} X_q(f), \ Y_q(f) = \frac{X_q(f)}{X_q(\psi_q)},$$

$$Y_1^{(2)}(f) = Y_1^{(1)}(f) - \frac{Y_1^{(1)}(\psi_{q-1})}{Y_{q-1}^{(1)}(\psi_{q-1})} Y_{q-1}^{(1)}(f), \ \ldots, \ Y_{q-2}^{(2)}(f) = Y_{q-2}^{(1)}(f) - \frac{Y_{q-2}^{(1)}(\psi_{q-1})}{Y_{q-1}^{(1)}(\psi_{q-1})} Y_{q-1}^{(1)}(f),$$

$$Y_{q-1}(f) = \frac{Y_{q-1}^{(1)}(f)}{Y_{q-1}^{(1)}(\psi_{q-1})},$$

. . . .

$$Y_1^{(\lambda)}(f) = Y_1^{(\lambda-1)}(f) - \frac{Y_1^{(\lambda-1)}(\psi_{q-\lambda+1})}{Y_{q-\lambda+1}^{(\lambda-1)}(\psi_{q-\lambda+1})} Y_{q-\lambda+1}^{(\lambda-1)}(f), \ldots, Y_{q-\lambda}^{(\lambda)}(f) = Y_{q-\lambda}^{(\lambda-1)}(f) - \frac{Y_{q-\lambda}^{(\lambda-1)}(\psi_{q-\lambda+1})}{Y_{q-\lambda+1}^{(\lambda-1)}(\psi_{q-\lambda+1})} Y_{q-\lambda+1}^{(\lambda-1)}(f),$$

$$Y_{q-\lambda+1}(f) = \frac{Y_{q-\lambda+1}^{(\lambda-1)}(f)}{Y_{q-\lambda+1}^{(\lambda-1)}(\psi_{q-\lambda+1})}$$

. . . .

$$Y_1(f) = Y_1^{(q-2)}(f) - \frac{Y_1^{(q-2)}(\psi_2)}{Y_2^{(q-2)}(\psi_2)} Y_2^{(q-2)}(f), \ Y_2(f) = \frac{Y_2^{(q-2)}(f)}{Y_2^{(q-2)}(\psi_2)},$$

gdzie $\psi_q, \psi_{q-1}, \ldots, \psi_2$ *są funkcyami dowolnemi zmiennych niezależnych układu, poddanemi tylko warunkom, aby ilości:*

$$X_q(\psi_q), Y_{q-1}^{(1)}(\psi_{q-1}), \ldots, Y_{q-\lambda+1}^{(\lambda-1)}(\psi_{q-\lambda+1}), \ldots, Y_2^{(q-2)}(\psi_2)$$

były wszystkie od zera różne, obliczymy układ:

$$Y_1(f) = 0, Y_2(f) = 0, \ldots, Y(f) = 0, \tag{18}$$

natenczas układ ten będzie równoważny z układem danym i całkowalny w kierunku $1, 2, \ldots, q$.

Zauważmy, że, na podstawie równań przekształcenia, ze znikania wyrażeń $X_1(f), X_2(f), \ldots, X_q(f)$ wynika znikanie wyrażeń $Y_1(f), Y_2(f), \ldots, Y_q(f)$ i odwrotnie; więc układ (18) jest równoważny z układem (17), skąd, na podstawie twierdzenia II, wnosimy, że układ (18) jest układem zupełnym. Z tych samych wzorów redukcyjnych mamy:

$$Y_1(\psi_q)=0,\ Y_2(\psi_q)=0,\ldots,\ Y_{q-\lambda+1}(\psi_q)=0,\ldots,\ Y_{q-1}(\psi_q)=0,\ Y_q(\psi_q)=1; \quad (19_q)$$

$$Y_1(\psi_{q-1})=0,\ Y_1(\psi_{q-1})=0,\ldots,\ Y_{q-\lambda+1}(\psi_{q-1})=0,\ldots,\ Y_{q-1}(\psi_{q-1})=1; \quad (19_{q-1})$$

. . . .

$$Y_1(\psi_{q-\lambda+1})=0,\ Y_2(\psi_{q-\lambda+1})=0,\ldots,\ Y_{q-\lambda+1}(\psi_{q-\lambda+1})=1; \quad (19_{q-\lambda+1})$$

. . . .

$$Y_1(\psi_2)=0,\ Y_2(\psi_2)=1. \quad (19_2)$$

Stąd, na podstawie twierdzenia III, wyprowadzamy następujące wnioski:

z (19_q): $(Y_q\, Y_k)=\omega_{qk1}\, Y_1(f)+\omega_{qk2}\,\omega_2(f)+\ldots+\omega_{qkq-1}\, Y_{q-1}(f);$ $(k=1, 2, \ldots, q-1)$

$Y_1(f)=0,\ldots,\ Y_{q-1}(f)=0$ tworzą układ zupełny;

„ (19_{q-1}): $(Y_{q-1}\, Y_k)=\omega_{q-1k1}\, Y_1(f)+\omega_{q-1k2}\, Y_2(f)+\ldots+\omega_{q-1kq-2}\, Y_{q-2}(f);$
$(k=1, 2,\ldots, q-2)$

$Y_1(f)=0,\ldots,\ Y_{q-2}(f)=0$ tworzą układ zupełny i t. d.

„ (19_2): $(Y_2\, Y_1)=\omega_{211}\, Y_1(f).$

Wszystkie te symbole P o i s s o n a możemy wyrazić za pomocą jednego wzoru:

$$(Y_l\, Y_k)=\omega_{lk1}\, Y_1(f)+\omega_{lk2}\, Y_2(f)+\ldots+\omega_{lkl-1}\, Y_{l-1}(f),$$
$$(l=2, 3,\ldots, q;\ k=1. 2,\ldots, l-1)$$

skąd wynika, że układ (18) jest układem całkowalnym w kierunku $1, 2, \ldots, q,$ co też było do dowiedzenia.

Przy zamianie układu zupełnego na układ całkowalny w danym kierunku, równania tego ostatniego przyjmują taki kształt, że pewna liczba całek pewnych równań znana jest przed całkowaniem. Całki te widoczne są z równań (19).

Metoda powyższa zastępowania układów zupełnych przez układy całkowalne w danym kierunku zezwala na wyprowadzenie nieskończenie wielu układów całkowalnych w danym kierunku z danego układu zupełnego z powodu dowolności funkcyj ψ. Oprócz téj dowolności panuje jeszcze inna, polegająca na tém, że $X_q(f)$ jest którémkolwiek z wyrażeń $X_k(f)$, byle tylko zachowany był warunek co do funkcyi ψ_q oraz wogóle $Y^{(\lambda-1)}_{q-\lambda+1}(f)$ jest którémkolwiek z wyrażeń $Y^{(\lambda-1)}_k(f)$, byle tylko zachowany był warunek co do funkcyi $\psi_{q-\lambda+1}$. W pewnych przypadkach można korzystać z téj dowolności, o czem niżéj.

Na podstawie wniosku z twierdzenia III możemy dać metodę redukcyi układów zupełnych do układów całkowalnych w kierunku, analogiczną do metody zastępowania układów zupełnych przez układy J a c o b i' e g o, podanéj we wniosku z twierdzenia IV.

Niech będzie q — częściowy układ zupełny:

$$X_k(f)=\xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\xi_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \quad (k=1, 2,\ldots, q); \qquad (20)$$

przypuśćmy, że $\xi_{q1}\neq 0$; rozwiązując $X_q(f)=0$ względem $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ i podstawiając otrzymaną wartość w inne równania $X_k(f)=0$, otrzymamy układ kształtu:

$$Y^{(1)}_k(f)=\xi^{(1)}_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\xi^{(1)}_{k3}\frac{\partial f}{\partial x_3}+\ldots+\xi^{(1)}_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0, \quad (k=1, 2,\ldots, q-1)$$

$$Y_q(f)=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi^{(1)}_{q2}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\xi^{(1)}_{qn}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0; \qquad (21_q)$$

w przypuszczeniu, że $\xi^{(1)}_{q-1,2}\neq 0$, postępujemy taksamo z układem $Y^{(1)}_k(f)=0$ $(k=1, 2,\ldots, q-1)$, co daje nam:

$$Y^{(2)}_k(f)=\xi^{(2)}_{k3}\frac{\partial f}{\partial x_3}+\xi^{(2)}_{k4}\frac{\partial f}{\partial x_4}+\ldots+\xi^{(2)}_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0, \quad (k=1, 2,\ldots, q-2)$$

$$Y_{q-1}(f)=\frac{\partial f}{\partial x_2}+\xi^{(2)}_{q-13}\frac{\partial f}{\partial x_3}+\ldots+\xi^{(2)}_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \qquad (21_{q-1})$$

i t. d.; w przypuszczeniu, że $\xi^{(2)}_{q-2\,3}\neq 0$, $\xi^{(3)}_{q-3\,4}\neq 0$, . . . , $\xi^{(\lambda)}_{q-\lambda\,\lambda+1}\neq 0$, układ:

$$Y^{(\lambda)}_k(f)=\xi^{(\lambda)}_{k\lambda+1}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda+1}}+\xi^{(\lambda)}_{k\lambda+2}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda+2}}+\ldots+\xi^{(\lambda)}_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \quad (k=1, 2,\ldots, q-\lambda),$$

przez rozwiązanie równania $Y^{(\lambda)}_{q-\lambda}(f)=0$ względem $\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda-1}}$ i podstawienie otrzymanéj wartości w inne równania układu, daje:

$$Y^{(\lambda+1)}_k(f)=\xi^{(\lambda+1)}_{k\lambda+2}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda+2}}+\xi^{(\lambda+1)}_{k\lambda+3}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda+3}}+\ldots+\xi^{(\lambda+1)}_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0, \quad (k=1, 2,\ldots, q-\lambda-1)$$

$$Y_{q-\lambda}(f)=\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda+1}}+\xi^{(\lambda+1)}_{q-\lambda\,\lambda+2}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda+2}}+\ldots+\xi^{(\lambda+1)}_{q-\lambda n}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \qquad (21_{q-\lambda})$$

i t. d. póki nareszcie, wciąż wprowadzając przypuszczenia, że: $\xi^{(\lambda+1)}_{q-\lambda-1\,\lambda+2}\neq 0$, . . . , $\xi^{(q-2)}_{2q-1}\neq 0$, nie dojdziemy do równań:

$$Y_1(f)=\xi^{(q-1)}_{1q}\frac{\partial f}{\partial x_q}+\xi^{(q-1)}_{1q+1}\frac{\partial f}{\partial x_{q+1}}+\ldots+\xi^{(q-1)}_{1n}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0, \qquad (21_1)$$

$$Y_2(f)=\frac{\partial f}{\partial x_{q-1}}+\xi^{(q-1)}_{2q}\frac{\partial f}{\partial x_q}+\ldots+\xi^{(q-2)}_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_n}=0. \qquad (21_2)$$

Zauważmy, że zawsze możemy z każdego układu q równań niezależnych:

$$X_1(f)=0,\ X_2(f)=0,\ldots,\ X''_q(f)=0$$

otrzymać w ten sposób układ:

$$Y_1(f) = 0,\ Y_2(f) = 0, \ldots, Y_q(f) = 0. \tag{21}$$

Istotnie, gdyby dla danego układu (20) nie wszystkie funkcye $\xi^{(\lambda)}_{q-\lambda\, \lambda+1}$ ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots, q-2$) były od zera różne, wtedy należałoby z odpowiednich równań wyznaczać takie mianowicie pochodne, które w te równania wchodzą t. j. dla których współczynniki w równaniach tych nie równają się zeru. Takie pochodne w każdém z otrzymanych równań istnieć muszą, w przeciwnym bowiem razie równanie to byłoby tożsamością, co z powodu niezależności równań (20) jest niemożliwe. Widoczne jest także, że układy $X_k(f) = 0$ i $Y_k(f) = 0$ są równoważne. Wreszcie, stosując do równań (21) wniosek z twierdzenia III, otrzymamy taki sam szereg wniosków, jaki na podstawie twierdzenia III otrzymaliśmy przy dowodzie twierdzenia IX. Jest to dowodem, że układ (21) jest układem całkowalnym w kierunku $1, 2, \ldots, q$. Oprócz tego widoczną jest rzeczą, że metoda ta jest szczególnym przypadkiem metody twierdzenia IV, możemy więc jako szczególny przypadek twierdzenia IX podać:

Wniosek. *Każdy q — częściowy układ zupełny*

$$X_k(f) = \xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_{kn}\frac{\partial f}{d x_n} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

można zastąpić przez równoważny mu układ kształtu:

$$H_1(f) = \qquad \eta_{1\sigma_q}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_q}} + \eta_{1\sigma_{q+1}}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_{q+1}}} + \ldots + \eta_{1\sigma_n}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_n}} = 0,$$

$$H_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_{q-1}}} + \eta_{2\sigma_q}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_q}} + \eta_{2\sigma_{q+1}}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_{q+1}}} + \ldots + \eta_{2\sigma_n}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_n}} = 0,$$

$$H_3(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_{q-2}}} + \eta_{3\sigma_{q-1}}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_{q-1}}} + \eta_{3\sigma_q}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma q}} + \ldots + \eta_{3\sigma_n}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_n}} = 0,$$

. . . .

$$H_q(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_1}} + \eta_{q\sigma_2}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_2}} + \eta_{q\sigma_3}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_3}} + \ldots + \eta_{q\sigma_n}\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_n}} = 0,$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ są liczby $1, 2, \ldots, n$ w tymsamym, lub w innym napisane porządku. Układ $H_k(f) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, q$), jest układem całkowalnym w kierunku $1, 2, \ldots, q$.

Widoczne jest, że metoda ta ma także pewne cechy dowolności; z każdego danego układu $X_k(f) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, q$) można wyprowadzić pewną liczbę układów kształtu $H_k(f) = 0$. ($k = 1, 2, \ldots, q$)

Obecnie zwracamy się do pewnych przypadków szczególnych, w których powyższa metoda redukcyi nieco ułatwiona być może. Damy dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie X. *Jeżeli ϱ równań:*

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots, X_\varrho(f) = 0 \tag{22}$$

q — częściowego układu zupełnego:

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots, X_\varrho(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$$

tworzy układ całkowalny w kierunku $1, 2, \ldots, \varrho$, to, obliczając równania:

$$Y_{\varrho+1}(f) = 0,\ Y_{\varrho+2}(f) = 0, \ldots, Y_q(f) = 0$$

na podstawie wzorów redukcyjnych:

$$Y'^{(1)}_{\varrho+1}(f) = X_{\varrho+1}(f) - \frac{X_{\varrho+1}(\varphi_q)}{X_q(\varphi_q)}X_q(f), \ldots, Y'^{(1)}_{q-1}(f) = X_{q-1}(f) - \frac{X_{q-1}(\varphi_q)}{X_q(\varphi_q)}X_q(f),$$

$$Y_q(f) = \frac{X_q(f)}{X_q(\varphi_q)},$$

$$Y'^{(2)}_{\varrho+1}(f) = Y'^{(1)}_{\varrho+1}(f) - \frac{Y'^{(1)}_{\varrho+1}(\varphi_{q-1})}{Y'^{(1)}_{q-1}(\varphi_{q-1})}Y'^{(1)}_{q-1}(f), \ldots, Y'^{(2)}_{q-2}(f) = Y'^{(1)}_{q-2}(f) - \frac{Y'^{(1)}_{q-2}(\varphi_{q-1})}{Y'^{(1)}_{q-1}(\varphi_{q-1})}Y'^{(1)}_{q-1}(f),$$

$$Y_{q-1}(f) = \frac{Y'^{(1)}_{q-1}(f)}{Y'^{(1)}_{q-1}(\varphi_{q-1})},$$

. . . .

$$Y'^{(q-\varrho-1)}_{\varrho+1}(f) = Y^{(q-\varrho-2)}_{\varrho+1}(f) - \frac{Y'^{(q-\varrho-2)}_{\varrho+1}(\varphi_{\varrho+2})}{Y'^{(q-\varrho-2)}_{\varrho+2}(\varphi_{\varrho+2})}Y'^{(q-\varrho-2)}_{\varrho+2}(f),\ Y_{\varrho+2}(f) = \frac{Y'^{(q-\varrho-2)}_{\varrho+2}(f)}{Y'^{(q-\varrho-2)}_{\varrho+2}(\varphi_{\varrho+2})},$$

$$Y_{\varrho+1}(f) = \frac{Y'^{(q-\varrho-1)}_{\varrho+1}(f)}{Y'^{(q-\varrho-1)}_{\varrho+1}(\varphi_{\varrho+1})},$$

gdzie $\varphi_q, \varphi_{q-1}, \ldots, \varphi_{\varrho+1}$ są takiemi całkami układu $X_k(f) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, \varrho$), dla których:

$$X_q(\varphi_q),\ Y'^{(1)}_{q-1}(\varphi_{q-1}), \ldots, Y'^{(q-\varrho-1)}_{\varrho+1}(\varphi_{\varrho+1})$$

są od zera różne, otrzymujemy układ:

$$X_1(f) = 0,\ X_2(f) = 0, \ldots, X_\varrho(f) = 0,\ Y_{\varrho+1}(f) = 0, \ldots, Y_q(f) = 0$$

całkowalny w kierunku $1, 2, \ldots, \varrho, \varrho+1 \ldots, q$, równoważny z układem danym.

Twierdzenie to jest prawie widoczne. Równania (22) mają $n-\varrho$ wspólnych całek (n—liczba zmiennych niezależnych). Ponieważ równania:

$$X_q(f) = 0,\ Y'^{(1)}_{q-1}(f) = 0, \ldots, Y'^{(q-\varrho-1)}_{\varrho+1}(f) = 0$$

są od równań (22) niezależne, więc żadnemu z nich nie mogą zadosyćczynić wszystkie całki równań (22), w przeciwnym bowiem razie doszlibyśmy do niemożliwego wniosku, że $\varrho+1$ równań posiada aż $n-\varrho$ całek wspólnych.

Więc z pomiędzy $n-\varrho$ całek równań (22) można zawsze wybrać $n-q < n-\varrho$ całek, czyniących zadość warunkom, w twierdzeniu wyszczególnionym. Podstawiając zaś we wzory twierdzenia IX $\psi_\sigma = \varphi_\sigma$ $(\sigma = \varrho+1, \ldots, q)$, otrzymamy wzory redukcyjne twierdzenia X, bo przy tych przekształceniach równania (22) żadnéj nie mogą uledz zmianie. Pozostałe przekształcenia twierdzenia IX stosują się tylko do równań (22), których przekształcać nie potrzebujemy, bo tworzą już one układ całkowalny w oznaczonym kierunku. Wobec tego twierdzenie X jest prostym wnioskiem z twierdzenia IX. Przy całkowaniu układu danego w twierdzeniu X należy najprzód znaleść całki ϱ — częściowego układu całkowalnego w oznaczonym kierunku, następnie przeprowadzić wskazane przekształcenia i całkować daléj w kierunku $\varrho+1, \varrho+2, \ldots, q$.

Z twierdzenia X wynikają dwa następujące wnioski.

Wniosek A. *Jeżeli* $q-1$ *równań:*

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_{q-1}(f) = 0 \tag{23}$$

q—*częściowego układu zupełnego:*

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_{q-1}(f) = 0, X_q(f) = 0$$

tworzy układ całkowalny w kierunku $1, 2, \ldots, q-1$, *to równania:*

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_{q-1}(f) = 0, Y_q = \frac{X_q(f)}{X_q(\varphi)} = 0,$$

gdzie φ *jest całką równań* (23) *i nie jest całką równania* $X_q(f) = 0$, *tworzy układ całkowalny w kierunku* $1, 2, \ldots, q$ *równoważny z układem danym.*

Wniosek ten nie potrzebuje żadnych wyjaśnień. Widoczne jest także, jak należy całkować układ, o którym mowa.

Wniosek B. *Jeżeli* q *częściowy układ zupełny:*

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0 \tag{24}$$

ma tę własność, że każde k *równań:*

$$X_1(f) = 0, X_2(f) = 0, \ldots, X_k(f) = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, q)$$

tego układu, same przez się tworzą k—*częściowy układ zupełny, natenczas równania:*

$$X_1(f) = 0, Y_2(f) = \frac{X_2(f)}{X_2(\varphi_2)} = 0, \ldots, Y_k(f) = \frac{X_k(f)}{X_k(\varphi_k)} = 0, \ldots,$$
$$Y_q(f) = \frac{X_q(f)}{X_q(\varphi_q)} = 0,$$

gdzie każda z funkcyj φ_k *jest całą* $k-1$ *równań:*

$$X_1(f) = 0, Y_2(f) = 0, \ldots, Y_{k-1}(f) = 0,$$

nie jest zaś całką równania $X_k(f) = 0$, *stanowią układ całkowalny w kierunku* $1, 2, \ldots, q$, *równoważny z układem danym.*

Równanie $X_1(f) = 0$ możemy rozważać jako układ całkowalny w oznaczonym kierunku; to da nam możność zawnioskowania na podstawie wniosku A, że $X_1(f) = 0$, $Y_2(f) = 0$ jest układem całkowalnym w kierunku 1, 2, bo $X_1(f) = 0$, $X_2(f) = 0$ tworzą układ zupełny; stąd zaś znów, na podstawie wniosku A, otrzymujemy, że $X_1(f) = 0$, $Y_2(f) = 0$, $Y_3(f) = 0$ jest układem całkowalnym w kierunku 1, 2, 3, bo $X_1(f) = 0$, $X_2(f) = 0$, $X_3(f) = 0$ stanowią także układ zupełny i t. d. za pomocą takich rozumowań dojdziemy w końcu do dowodu wniosku B. Celem zcałkowania układu (24) obliczamy za pomocą całkowania równania $X_1(f) = 0$ taką jednę jego całkę, która nie jest zarazem całką równania $X_2(f) = 0$; tworzymy równanie $Y_2(f) = 0$ i przy obliczaniu innych całek równania $X_1(f) = 0$ korzystamy z działania Y_2. Gdy wszystkie całki równania $X_1(f) = 0$ są znane, za pomocą całkowania obliczamy taką jednę całkę wspólną równań $X_1(f) = 0$ i $Y_2(f) = 0$, która nie czyni zadość równaniu $X_3(f) = 0$, i tworzymy równanie $Y_3(f) = 0$. Następnie obliczamy wszystkie całki wspólne dwóch równań $X_1(f) = 0$ i $Y_2(f) = 0$, korzystając, o ile można, z działania Y_3 i t. d. w ten sam sposób prowadzimy całkowanie w dalszym ciągu.

Przekształcenia równań, polegające jedynie na pomnożeniu ich przez pewien mnożnik, mogłyby się wydawać zbytecznemi, bo w gruncie rzeczy równania pozostają bez zmiany. Tak jednak nie jest; opuszczając rzeczony mnożnik w pewném równaniu, nie jesteśmy w możności korzystać z niego dla obliczania całek równań poprzednich, co jest znaczną niedogodnością. Z drugiéj strony, ponieważ mnożenie przez pewną funkcyą wystarcza, aby po wprowadzeniu w równanie całek równań poprzednich, współczynniki przy pochodnych zależały tylko od tych całek, przychodzimy do wniosku, że gdybyśmy mnożnik ów opuścili, zmienne pierwotne pozostałyby w równaniu tylko w postaci wspólnego wszystkim wyrazom równania mnożnika, który naturalnie możnaby było opuścić. Ponieważ układ, o którym mowa we wniosku B, redukuje się do układu całkowalnego w oznaczonym kierunku tylko za pomocą mnożenia przez pewne funkcye, więc obliczając wszystkie całki tylko za pomocą całkowania, moglibyśmy go zupełnie nie zastępować przez układ całkowalny w oznaczonym kierunku i pomimo tego, całkując w kierunku $1, 2, \ldots, q$, wszystkie działania przeprowadzić do samego końca. Sposób ten jednak byłby od poprzedniego o wiele uciążliwszy.

§ 5. Przykłady.

Wywody teoretyczne w dwóch ostatnich §§ zawarte zastosujemy do dwóch przykładów, zaczerpniętych z teoryi przekształceń (Theorie der Transformationsgruppen) Lie'go. Odpowiednie wyjaśnienia zamieszczamy w przypiskach.

№ 1. Obliczyć całki układu: [1])

$$\left.\begin{aligned}
X_1(f)&=2x\frac{\partial f}{\partial x}-2z\frac{\partial f}{\partial y}-(x-z)\frac{\partial f}{\partial z}+2x'\frac{\partial f}{\partial x'}-2z'\frac{\partial f}{\partial z'}-(x'-z')\frac{\partial f}{\partial z'}=0\\
X_2(f)&=2z\frac{\partial f}{\partial x}+2y\frac{\partial f}{\partial y}+(y+z)\frac{\partial f}{\partial z}+2z'\frac{\partial f}{\partial x'}+2y'\frac{\partial f}{\partial y'}+(y'+z')\frac{\partial f}{\partial z'}=0\\
X_3(f)&=2x\frac{\partial f}{\partial x}+(4y-6z)\frac{\partial f}{\partial y}-3(x-z)\frac{\partial f}{\partial z}+2x'\frac{\partial f}{\partial x'}+(4y'-6z')\frac{\partial f}{\partial y'}-3(x'-z')\frac{\partial f}{\partial z'}=0\\
X_4(f)&=2(x+z)\frac{\partial f}{\partial x}-4y\frac{\partial f}{\partial y}+(y-z)\frac{\partial f}{\partial z}+2(x'+z')\frac{\partial f}{\partial x'}-4y'\frac{\partial f}{\partial y'}+(y'-z')\frac{\partial f}{\partial z'}=0
\end{aligned}\right\}(a)$$

Równania te są niezależne, bo wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 2x, & -2z, & -(x-z), & 2x' \\ 2z, & 2y, & (y+z), & 2z' \\ 2x, & 4y-6z, & -3(x-z), & 2x' \\ 2(x+z), & -4y, & y-z, & 2(x'+z') \end{vmatrix}$$

nie równa się tożsamościowo zeru. Ażeby to mogło mieć miejsce, koniecznem jest, aby współczynniki przy x' i z' były tożsamościowo równe zeru; współczynnik zaś przy $2z'$ jest:

$$\begin{vmatrix} 2x, & -2z, & -(x-z) \\ 2x, & 4y-6z, & -3(x-z) \\ 2(x+z), & -4y, & y-z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2x, & -2z, & -(x-z) \\ 2z, & 2y, & y+z \\ 2x, & 4y-6z, & -3(x-z) \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} x, & -z, & -(x-z) \\ x, & 2y-3z, & -3(x-z) \\ x, & -3y, & -2z \end{vmatrix}$$

i nie równa się zeru, bo w ostatnim wyznaczniku współczynnik przy y jest $-4x^2$.

[1]) Wyrażenia:

$$Z_1(f)=2x\frac{\partial f}{\partial x}-2z\frac{\partial f}{\partial y}-(x-z)\frac{\partial f}{\partial z};\quad Z_2(f)=2z\frac{\partial f}{\partial x}+2y\frac{\partial f}{\partial y}+(y+z)\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$Z_3(f)=2x\frac{\partial f}{\partial x}+(4y-6z)\frac{\partial f}{\partial y}-3(x-z)\frac{\partial f}{\partial z};\; Z_4(f)=2(x+z)\frac{\partial f}{\partial x}-4y\frac{\partial f}{\partial y}+(y-z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

Lie nazywa nieskończenie małemi przekształceniami (infinitesimale Transformationen; Theorie der Transformationsgruppen str. 54). Łatwo sprawdzić, że nie może istnieć żadna tożsamość kształtu: $e_1 Z_1(f)+e_2 Z_2(f)+e_3 Z_3(f)+e_4 Z_4(f)=0$, gdzie e_1, e_2, e_3, e_4 są stałe, od zera różne. Przekształcenia, własność tę posiadające, nazywają się niezależnemi (unabhängig; loco cit. str. 61). Widoczne jest, że symbole Poissona wyrażeń $Z(f)$ są te same co i odpowiednich wyrażeń $X(f)$. Wobec tych własności nieskończenie małe przekształcenia $Z(f)$ tworzą według Lie'go 4-częściową grupę przekształceń (4 gliedriege Transformationsgruppe; loco cit. str. 158). Przekształcenia $Z(f)$ możemy rozważać jako przekształcenia punktów o współrzędnych x, y, z 3-wymiarowéj przestrzeni. Rozwiązania zaś danego układu równań będą niezmiennikami dla dwóch punktów: x, y, z i x', y', z' przy wszystkich przekształceniach grupy: $Z_1(f)$, $Z_2(f)$, $Z_3(f)$, $Z_4(f)$; patrz: Killing. Mathem. Ann. Tom 36 „Erweiterung des Begriffes der Invarianten von Transformationsgruppen".

Łatwo sprawdzić rachunkiem według wzoru (4), że:

$$(X_2X_1)=2X_1(f)+X_2(f)-X_3(f),\; (X_3X_1)=5X_1(f)+2X_2(f)-3X_3(f)-2X_4(f),$$

$$(X_4X_1)=-3X_1(f)-X_2(f)+2X_3(f)+2X_4(f),\; (X_3X_2)=-9X_1(f)-X_2(f)+4X_3(f)+2X_4(f),$$

$$(X_4X_2)=3X_1(f)-2X_2(f)-X_3(f)-2X_4(f),\; (X_4X_3)=-6X_1(f)-5X_2(f)+5X_3(f)+4X_4(f).$$

więc układ dany jest 4-częściowym układem zupełnym, nie jest on wszakże układem całkowalnym w żadnym kierunku.

Układ ten zcałkujemy według metody wynikającéj z twierdzenia X. Rozważając równanie $X_1(f)=0$ jako układ całkowalny w kierunku, obliczymy najprzód całki jego przez całkowanie układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{-2z}=\frac{dz}{z-x}=\frac{dx'}{2x'}=\frac{dy'}{-2z'}=\frac{dz'}{z'-x'}.$$

Z równania $\frac{dx}{x}=\frac{dx'}{x'}$ mamy:

$$c_{11}=\frac{x'}{x}. \tag{b$_1$}$$

Z równania $\frac{dx}{2x}=\frac{dz}{z-x}$, które piszemy w kształcie $\frac{dz}{dx}-\frac{z}{2x}=-\frac{1}{2}$, i całkując według wzoru dla całkowania równań liniowych, otrzymujemy: $z=\sqrt{x}\,(c_{12}-\sqrt{x})$, czyli:

$$c_{12}=\frac{z}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}. \tag{b$_2$}$$

Podstawiając otrzymaną wartość z w równanie $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-z}$ i całkując, mamy:

$$c_{13}=x+y+2z. \tag{b$_3$}$$

Dwie pozostałe całki są widocznie:

$$c_{14}=\frac{z'}{\sqrt{x'}}+\sqrt{x'},\; c_{15}=x'+y'+2z'. \qquad (b_4),\ (b_5)$$

Podstawmy obecnie całki te zamiast f w wyrażenia: $X_2(f)$, $X_3(f)$ i $X_4(f)$. Otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned}
&X_2(c_{11})=2\,\frac{xz'-zx'}{x^2},\ X_3(c_{11})=0,\ X_4(c_{11})=2\,\frac{xz'-zx'}{x^2};\\
&X_2(c_{12})=\frac{xy-z^2+2xz}{(\sqrt{x})^3},\ X_3(c_{12})=-2\,\frac{x-z}{\sqrt{x}},\ X_4(c_{12})=\frac{xy-z^2+x(x-z)}{(\sqrt{x})^3};\\
&X_2(c_{13})=4(y+z),\ X_3(c_{13})=-4(x-y),\ X_4(c_{13})=2(x-y);\\
&X_2(c_{14})=\frac{x'y'-z'^2+2x'z'}{(\sqrt{x'})^3},\ X_3(c_{14})=-2\,\frac{x'-z'}{\sqrt{x'}},\ X_4(c_{14})=\frac{x'y'-z'^2+x'(x'-z')}{(\sqrt{x'})^3};\\
&X_2(c_{15})=4(y'+z'),\ X_2(c_{15})=-4(x'-y'),\ X_4(c_{15})=2(x'-y').
\end{aligned}\right\}\text{(c)}$$

Dla naszego układu (twierdzenie X) $q=4$, $\varrho=1$, więc według wzorów redukcyjnych, przyjmując $\varphi_4=c_{13}$, mamy:

$$Y_2^{(1)}(f)=X_2(f)-2\,\frac{y+z}{x-y}\,X_4(f),\ Y_3^{(1)}(f)=X_3(f)+2\,X_4(f),\ Y_4(f)=\frac{X_4(f)}{2(x-y)};$$

biorąc następnie $\varphi_3=c_{11}$, otrzymujemy:

$$Y_2^{(2)}(f)=X_2(f)-X_4(f)-\frac{x-y-2(y+z)}{2(x-y)}\,X_3(f),\ Y_3(f)=\frac{x^2}{4(xz'-zx')}\,[X_3(f)+2\,X_4(f)];$$

przyjmując wreszcie $\varphi_2=c_{12}$, mamy:

$$Y_2(f)=-\frac{\sqrt{x}}{4(xy-z^2)}\,[(x-y)(2X_2(f)-2X_4(f)-X_3(f))+2(y+z)X_3(f)]$$

W dalszym ciągu więc całkować będziemy równania:

$$Y_2(f)=0,\ Y_3(f)=0,\ Y_4(f)=0 \tag{d}$$

w porządku oznaczonym wskaźnikami. Zauważmy, że dwie całki równania $Y_2(f)=0$, mianowicie c_{13} i c_{11} i jedna całka równania $Y_3(f)=0$, mianowicie c_{13}, są wiadome. Oprócz tego mamy:

$$Y_2(c_{12})=1,\ Y_3(c_{11})=1,\ Y_4(c_{13})=1.$$

Ponieważ w równanie $Y_2(f)=0$ trzeba będzie zamiast zmiennych $x, y, \ldots, z'$ wprowadzać całki $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{15}$, więc rozwiążemy równania (*b*) względem pięciu ze zmiennych $x, y, \ldots, z'$ np. względem $y, z, \ldots, z'$. Otrzymujemy:

$$y=c_{13}+x-2\,c_{12}\sqrt{x},\ z=\sqrt{x}\,(c_{12}-\sqrt{x}),\ x'=c_{11}\,x,$$
$$y'=c_{15}+c_{11}\,x-2\,c_{14}\sqrt{c_{11}\,x},\ z'=\sqrt{c_{11}\,x}\,(c_{14}-\sqrt{c_{11}\,x}).$$

Według wzoru (9) z równania $Y_2(f)=0$, otrzymujemy, zwracając uwagę na to, że $Y_2(c_{11})=0$, $Y_2(c_{13})=0$ i $Y_2(c_{12})=1$, następujące równanie dla dowolnej funkcyi $\Pi_1(c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{15})$:

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial c_{12}}+Y_2(c_{14})\frac{\partial\Pi_1}{\partial c_{14}}+Y_2(c_{15})\frac{\partial\Pi_1}{\partial c_{15}}=0. \tag{f}$$

$Y_2(c_{14})$ i $Y_2(c_{15})$ obliczamy za pomocą tabelki (*c*) i otrzymujemy:

$$Y_2(c_{14})=-\sqrt{\frac{x}{x'}}\,\frac{1}{xy-z^2}\,(xz'-zx'+zz'-yx'),$$
$$Y_2(c_{15})=-2\,\frac{\sqrt{x}}{xy-z^2}\,(xy'-yx'+xz'-zx'+zy'-yz');$$

ponieważ zaś z równań (*c*) mamy:

$$\frac{x}{x'}=\frac{1}{c_{11}},\ xy-z^2=x\,(c_{13}-c_{12}^2),\ zz'-yx'=x\sqrt{c_{11}}\,[c_{12}c_{14}-c_{13}\sqrt{c_{11}}+\sqrt{x}\,(c_{12}\sqrt{c_{11}}-c_{14})],$$
$$xy'-yx'=x\,(c_{15}-c_{11}\,c_{13})-2x\sqrt{xc_{11}}\,(c_{14}-c_{12}\sqrt{c_{11}}),$$
$$xz'-zx'=x\sqrt{xc_{11}}\,(c_{14}-c_{12}\sqrt{c_{11}}),$$
$$zy'-yz'=\sqrt{x}\,(c_{12}c_{15}-c_{14}c_{13}\sqrt{c_{11}})-x\,(c_{15}-c_{11}c_{13})+x\sqrt{xc_{11}}\,(c_{14}-c_{12}\sqrt{c_{11}}),$$

więc otrzymujemy:

$$Y_2(c_{14})=\frac{c_{13}\sqrt{c_{11}}-c_{12}\,c_{14}}{c_{13}-c_{12}^2},$$
$$Y_2(c_{15})=2\,\frac{c_{13}\,c_{14}\sqrt{c_{11}}-c_{12}\,c_{15}}{c_{13}-c_{12}^2}.$$

Stąd mamy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych, odpowiadający równaniu (*f*):

$$\frac{dc_{12}}{c_{13}-c_{12}^2}=\frac{dc_{14}}{c_{13}\sqrt{c_{11}}-c_{12}\,c_{14}}=\frac{dc_{15}}{2(c_{13}\,c_{14}\sqrt{c_{11}}-c_{12}c_{15})}.$$

Pierwsze z tych równań piszemy w kształcie:

$$\frac{dc_{14}}{dc_{12}}+\frac{c_{12}}{c_{13}-c_{12}^2}\,c_{14}=\frac{c_{13}\sqrt{c_{11}}}{c_{13}-c_{12}^2}$$

i na podstawie wzoru, służącego do całkowania równań liniowych, otrzymujemy: $c_{14}=c_{21}\sqrt{c_{13}-c_{12}^2}+c_{12}\sqrt{c_{11}}$, gdzie c_{21} jest stałą dowolną; mamy więc po wprowadzeniu zmiennych pierwotnych całkę:

$$c_{21}=\frac{xz'-zx'}{\sqrt{xx'\,(xy-z^2)}}.$$

W celu znalezienia ostatniéj (czwartéj) całki równań $X_1(f)=0$ i $Y_2(f)=0$ obliczamy $Y_3(c_{21})$; otrzymujemy:

$$Y_3(c_{21}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x'}\cdot\frac{xz' - zx'}{\sqrt{xx'(xy - z^2)}}\cdot\frac{x^2(x'y' - z'^2) - x'^2(xy - z^2)}{(xz' - zx')^2}$$

i przyjmując za nową całkę:

$$c_{22} = \frac{xy' - zx'}{\sqrt{xx'(x'y' - z'^2)}},$$

mamy:

$$Y_3(c_{21}) = \frac{1}{2}\frac{c_{21}}{c_{11}}\left(\frac{1}{c_{11}c_{22}^2} - \frac{c_{11}}{c_{21}^2}\right);$$

podobnym rachunkiem przekonywamy się, że:

$$Y_3(c_{22}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x'}\cdot\frac{xz' - zx'}{\sqrt{xx'(x'y' - z'^2)}}\cdot\frac{x^2(x'y' - z'^2) - x'^2(xy - z^2)}{(xz' - zx')^2},$$

skąd:

$$Y_3(c_{22}) = \frac{1}{2}\frac{c_{22}}{c_{11}}\left(\frac{1}{c_{11}c_{22}^2} - \frac{c_{11}}{c_{21}^2}\right);$$

więc równanie dla dowolnéj funkcyi $\Pi_2(c_{11}, c_{13}, c_{21}, c_{22})$:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{11}} + Y_3(c_{21})\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{21}} + Y_3(c_{22})\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{22}} = 0 \qquad (g)$$

ma odpowiedni układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$dc_{11} = \frac{dc_{21}}{\frac{1}{2}\frac{c_{21}}{c_{11}}\left(\frac{1}{c_{11}c_{22}^2} - \frac{c_{11}}{c_{21}^2}\right)} = \frac{dc_{22}}{\frac{1}{2}\frac{c_{22}}{c_{11}}\left(\frac{1}{c_{11}c_{22}^2} - \frac{c_{11}}{c_{21}^2}\right)}. \qquad (g')$$

Ostatnie z tych równań daje widocznie całkę:

$$c_{31} = \frac{c_{21}^2}{c_{22}^2} = \frac{x'y' - z'^2}{xy - z^2}.$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić:

$$Y_4(c_{31}) = 0,$$

więc c_{31} jest jedną całką danego układu, ostatnią zaś całkę wspólną trzech pierwszych równań należy obliczyć przez całkowanie. Podstawiając w pierwsze z równań (g) $\frac{1}{c_{22}^2} = \frac{c_{31}}{c_{21}^2}$, możemy je napisać w kształcie:

$$\left(1 - \frac{c_{31}}{c_{11}^2}\right)dc_{11} + 2\,c_{21}\,d\,c_{21} = 0,$$

skąd otrzymujemy nową całkę:

$$c_{32} = \frac{c_{31}}{c_{11}} + c_{11} + c_{21}^2 = \frac{xy' + x'y - 2zz'}{xy - z^2}.$$

Podstawiając c_{32} w $Y_4(f)$, otrzymujemy:

$$Y_4(c_{32}) = 0,$$

więc równanie dla dowolnéj funkcyi $\Pi_3(c_{13}, c_{31}, c_{32})$ redukuje się do

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial c_{13}} = 0.$$

Stąd wynika, że c_{31} i c_{32} są całkami danego układu, zamiast których weźmiemy:

$$c_1 = \frac{xy' + x'y - 2zz'}{xy - z^2} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{xy' + x'y - 2zz'}{x'y' - z'^2}.$$

Funkcya dowolna tych dwóch całek jest najogólniejszém rozwiązaniem naszego układu (a).

№ 2. Obliczyć całki układu: [1])

$$X_1(f) = 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_x\frac{\partial f}{\partial \varphi_x} + \psi_x\frac{\partial f}{\partial \psi_x} = 0,$$

$$X_2(f) = E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + \varphi_x\frac{\partial f}{\partial \varphi_y} + \psi_x\frac{\partial f}{\partial \psi_y} = 0,$$

$$X_3(f) = 2G\frac{\partial f}{\partial G} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_y\frac{\partial f}{\partial \varphi_y} + \psi_y\frac{\partial f}{\partial \psi_y} = 0,$$

$$X_4(f) = G\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial E} + \varphi_y\frac{\partial f}{\partial \varphi_x} + \psi_y\frac{\partial f}{\partial \psi_x} = 0.$$

Równania tego układu są niezależne, bo wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \varphi_x, & 0, & \psi_x, & 0 \\ 0, & \varphi_x, & 0, & \psi_x \\ 0, & \varphi_y, & 0, & \psi_y \\ \varphi_y, & 0, & \psi_y, & 0 \end{vmatrix} = \varphi_x \begin{vmatrix} \varphi_x, & 0, & \psi_x \\ \varphi_y, & 0, & \psi_y \\ 0, & \psi_y, & 0 \end{vmatrix} - \varphi_y \begin{vmatrix} 0, & \psi_x, & 0 \\ \varphi_x, & 0, & \psi_x \\ \varphi_y, & 0, & \psi_y \end{vmatrix} = -(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2$$

nie jest równy zeru.

---

[1]) Do rozwiązania tego układu redukuje się zagadnienie obliczenia pewnych niezmienników, jakie zachodzą przy gięciu powierzchni bez jéj rozciągania, t. j. przy takiém odkształceniu powierzchni, które nie zmienia w żadnym punkcie jéj elementu liniowego $ds = \sqrt{Edx^2 + 2\,Fdxdy + Gdy^2}$, gdzie x i y są współrzędnemi punktów na powierzchni·

Symbole Poissona naszego układu (co łatwo sprawdzić rachunkiem) są następujące:

$$(X_2\, X_1) = -X_2\,(f),\ (X_3\, X_1) = 0,\ (X_4\, X_1) = X_4\,(f),$$

$$(X_3\, X_2) = -X_2\,(f),\ (X_4\, X_2) = X_3\,(f) - X_1\,(f),\ (X_4\, X_3) = -X_4\,(f).$$

Układ ten więc nie jest układem całkowalnym w żadnym kierunku, lecz można znaleść cztery takie kierunki całkowania, że trzy pierwsze równania będą tworzyły w każdym układ całkowalny w kierunku. Kierunki te są:

2, 1, 3, 4; 2, 3, 1, 4; 4, 1, 3, 2 i 4, 3, 1, 2.

Przeprowadźmy całkowanie np. w kierunku 4, 1, 3, 2. Korzystać tu będziemy z wniosku A twierdzenia X.

Układ równań zwyczajnych odpowiadający równaniu $X_4\,(f) = 0$ jest:

$$\frac{dF}{G} = \frac{dE}{2F} = \frac{d\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{d\psi_x}{\psi_y},$$

więc mamy następujące całki równania $X_4\,(f) = 0$:

$$G,\ \varphi_y,\ \psi_y,\ c_{41} = EG - F^2,\ c_{42} = F\varphi_y - G\varphi_x,\ c_{43} = \varphi_x\,\psi_y - \varphi_y\,\psi_x;$$

ponieważ zaś:

$$X_1\,(G) = 0,\ X_1\,(\varphi_y) = 0,\ X_1\,(\psi_y) = 0,\ X_1\,(c_{41}) = 2\,c_{41},\ X_1\,(c_{42}) = c_{42},\ X_1\,(c_{43}) = c_{43}$$

więc dla dowolnej funkcyi tych całek otrzymuje się z $X_1\,(f) = 0$ równanie:

$$2c_{41}\frac{\partial \Pi_4}{\partial c_{41}} + c_{42}\frac{\partial \Pi_4}{\partial c_{42}} + c_{43}\frac{\partial \Pi_4}{\partial c_{43}} = 0,$$

którego całki są widocznie:

$$G,\ \varphi_y,\ \psi_y,\ c_{11} = \frac{c_{42}^2}{c_{41}} = \frac{(F\varphi_y - G\varphi_x)^2}{EG - F^2},\ c_{12} = \frac{c_{43}}{\sqrt{c_{11}}} = \frac{\varphi_x\,\psi_y - \varphi_y\,\psi_x}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Podstawiając całki te w wyrażenie $X_3\,(f)$, otrzymujemy:

$$X_3\,(G) = 2G,\ X_3\,(\varphi_y) = \varphi_y,\ X_3\,(\psi_y) = \psi_y,\ X_3\,(c_{11}) = 2c_{11},\ X_3\,(c_{12}) = 0,$$

więc otrzymujemy z $X_3\,(f) = 0$ dla dowolnej funkcyi Π_1 tych całek równanie:

$$2G\frac{\partial \Pi_1}{\partial G} + \varphi_y\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_y} + \psi_y\frac{\partial \Pi_1}{\partial \psi_y} + 2c_{11}\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_{11}} = 0.$$

φ i ψ są funkcyami dowolnemi, zmiennych x i y, nie zmieniającemi przy odkształceniu swéj wartości liczebnéj; φ_x, φ_y, ψ_x, ψ_y oznaczają pochodne tych funkcyj względem wskazanych zmiennych. Metodę obliczania tych niezmienników za pomocą całkowania pewnych układów zupełnych wskazał Sophus Lie. Mathem. Ann. Tom 24 „Ueber Differentialinvarianten" str. 574.

Całkami równania tego są:

$$c_{12},\ c_{31} = \frac{\varphi_y^2}{G},\ c_{32} = \frac{\psi_y}{\varphi_y},\ c_{33} = \frac{c_{11}}{G} = \frac{(F\varphi_y - G\varphi_x)^2}{G\,(EG - F^2)}.$$

Podstawiając całki te w $X_2\,(f)$, mamy:

$$X_2\,(c_{12}) = 0,\ X_2\,(c_{31}) = -2\,\frac{\varphi_y}{G^2}\,(F\varphi_y - G\varphi_x),\ X_2\,(c_{32}) = -\frac{\varphi_x\,\psi_y - \psi_x\,\varphi_y}{\varphi_y{}^2};$$

$$X_2\,(c_{33}) = 2\,\frac{\varphi_y}{G^2}\,(F\varphi_y - G\varphi_x).$$

Bierzemy $\varphi = c_{31}$, t. j.

$$Y_2\,(f) = -\frac{G^2}{2\varphi_y\,(F\varphi_y - G\varphi_x)}\,X_2\,(f),$$

skąd otrzymujemy:

$$Y_2\,(c_{31}) = 1,\ Y_2\,(c_{32}) = \frac{(\varphi_x\,\psi_y - \psi_x\,\varphi_y)\,G^2}{2\,(F\varphi_y - G\varphi_x)\,\varphi_y^3} = \frac{1}{2}\,\frac{c_{12}}{\sqrt{c_{31}^3\,c_{33}}},\ Y_2\,(c_{33}) = -1;$$

więc układ równań różniczkowych zwyczajnych, odpowiadający równaniu, które otrzymujemy dla dowolnéj funkcyi $\Pi_3\,(c_{12}, c_{31}, c_{32}, c_{33})$, jest:

$$dc_{31} = \frac{2\sqrt{c_{31}^3\,c_{33}}\;dc_{32}}{c_{12}} = -\,dc_{33}.$$

Z równania $dc_{31} + dc_{33} = 0$ otrzymujemy całkę:

$$c_1 = c_{31} + c_{33};$$

więc pierwsze z napisanych równań możemy przedstawić w kształcie:

$$\frac{dc_{31}}{2\sqrt{(c_1 - c_{31})\,c_{31}^3}} - \frac{dc_{32}}{c_{12}} = 0,$$

podstawiając zaś $c_{31} = \frac{1}{\varrho}$, mamy:

$$\frac{d\varrho}{2\sqrt{c_1\varrho - 1}} + \frac{dc_{32}}{c_{12}} = 0.$$

skąd znajdujemy nową i ostatnią całkę układu:

$$c_2 = \frac{\sqrt{c_1\varrho - 1}}{c_1} + \frac{c_{32}}{c_{12}} = \frac{\sqrt{c_1 - c_{31}}}{c_1\sqrt{c_{31}}} + \frac{c_{32}}{c_{12}}.$$

Obliczając całki te w zmiennych pierwotnych, otrzymujemy:

$$c_1 = \frac{E\varphi_y^2 - 2\,F\,\varphi_y\,\varphi_x + G\,\varphi_x^2}{E\,G - F^2},$$

$$c_2 = \frac{E\varphi_y\,\psi_y - F(\varphi_x\,\psi_y + \psi_x\,\varphi_y) + G\varphi_x\,\psi_x}{EG - F^2},$$

$$c_3 = c_{12} = \frac{\varphi_x\,\psi_y - \varphi_y\,\psi_x}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Ponieważ równania układu naszego są symetryczne względem funkcyj φ i ψ, więc z istnienia całki c_1 wynika wprost, że

$$c_1' = \frac{E\psi_y^2 - 2F\psi_y\,\psi_x + G\psi_x^2}{EG - F^2}$$

musi być także całką układu. Istotnie łatwo sprawdzić tożsamość:

$$c_1\,c_1' - c_2^2 = c_3^2,$$

która dowodzi, że całka c' jest funkcyą całek c_1, c_2 i c_3.

Wobec tego możemy przyjąć, że najogólniejszém rozwiązaniem danego układu jest funkcya dowolna całek:

$$\frac{E\varphi_y^2 - 2F\varphi_y\,\varphi_x + G\varphi_x^2}{EG - F^2}, \quad \frac{\varphi_x\,\psi_y - \varphi_y\,\psi_x}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{E\psi_y^2 - 2F\psi_y\,\psi_x + G\psi_x^2}{EG - F^2}. \text{ [1]}$$

Zauważmy, że wszystkie całki obliczaliśmy w przykładzie tym przez całkowanie. Przeglądając przebieg rachunków łatwo dostrzedz, że w jednym tylko przypadku, przy obliczaniu całek wspólnych równań $X_4(f) = 0$, $X_1(f) = 0$, $X_3(f) = 0$, można się było raz obejść bez całkowania, korzystając z działania Y_2. Całkowanie to jednak było tak proste, żeśmy tego zaniechali.

Szczuki, wrzesień 1890.

[1]) Otrzymane niezmienniki znane są pod nazwą *niezmienników różniczkowych* B e l t r a m i' e g o (Beltrami'sche Differentialinvarianten). B e l t r a m i pierwszy otrzymał jej metodą, od podanéj tu zupełnie odmienną. Patrz: B e l t r a m i. Giornale di Matematiche. Tom 2 i 3. „Ricerche di analisi applicata alla geometria", rozdział XIV, a także:]
B e l t r a m i. Mathem. Ann. Tom 1. „Zur Theorie des Krümmungsmaasses".

O PRAWIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA UKŁADU BŁĘDÓW, JAKO ZDARZEŃ WOGÓLE ZALEŻNYCH.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Kwestya uzasadnienia, a nawet oznaczenia prawa prawdopodobieństwa błędów dostrzeżeń, jest jeszcze do dzisiaj otwartą. W artykulikach [1]) poprzednich, poświęconych temu samemu przedmiotowi, kwestyę tę traktowałem bardzo niefortunnie. Obecnie sądzę, że natrafiłem na taką definicyą, która, będąc dość prostą i naturalną, wystarcza zarazem do rozwiązania zadania, w całéj zresztą ogólności.

Uderzony analogią między prawem M a x w e l l a rozdziału prędkości w gazie doskonałym, a prawem G a u s s a rozdziału błędów między dostrzeżeniami, powziąłem myśl, aby, dla otrzymania tego ostatniego, wyjść z podobnego punktu widzenia jak M a x w e l l. Zadanie M a x w e l l a [2]) przedstawić można tak.

Jest układ nieskończonéj liczby poruszających się punktów, równych co do masy, a różnych co do prędkości, w ten sposób, że jakąbądź pomyślimy

[1]) Wł. G o s i e w s k i. O prawdopodobieństwie błędów przypadkowych. (Prace mat. fiz. t. I.)

M. A. B a r a n i e c k i. O pewném wnioskowaniu analityczném w t. I tego wydawnictwa. (Prace mat. fiz. t. II)

Wł. G o s i e w s k i. Dowód prawa G a u s s a, które dotyczy błędów przypadkowych (Prace mat. fiz. t. II)

C. R u s s j a n (z Odessy). O pewnym dowodzie prawa G a u s s a. (Prace mat. fiz. t. niniejszy—III. Patrz niżéj).

[2]) Philosophical Magazine, January, 1860. Również Scientific Papers of. l. Cl. M a x w e l l, Cambridge, 1890, Vol. I., p. 380.