W SIERPIŃSKI.

O szeregu potęgowym, który jest zbieżny na całem swem kole zbieżności jednostajnie, ale nie bezwzględnie.

(Sur une série potentielle qui converge sur tout son cercle de convergence uniformément, mais non absolument).

W r. 1913 udowodnił Hardy, że szeregiem o wymienionej w tytule własności jest szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n} \left(\frac{-i}{n}\right) z^n;$$

dowód Hardy'ego jest jednak nieelementarny [1]. Wcześniej jeszcze znalazł podobny szereg p. H. Steinhaus, ale ogłosił go dopiero w r. 1918 [2]. P. Steinhaus udowodnił mianowicie, że szereg

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{E\frac{\log n}{\log 2}}}{n \log n} z^n,$$

podany jeszcze w r. 1885 przez Pringsheima, jako przykład szeregu, zbieżnego warunkowo na całem swem kole zbieżności [3], jest na całem tem kole zbieżny jednostajnie.

Bliższa analiza dowodu p. Steinhausa doprowadziła mnie do pewnego prostego przykładu na szereg o żądanej własności, którym się tutaj zajmiemy.

[1] Por. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916, p. 61.

[2] Biuletyn Akademii Krakowskiej, czerwiec 1918.

[3] Mathematische Annalen **25**, p. 424.

Weźmy pod rozwagę szereg

$$P(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}\left(z^{2^{n-1}}+z^{2^{n-1}+1}+\ldots+z^{2^n-1}\right), \tag{1}$$

czyli szereg

$$\frac{z}{2}-\frac{1}{2^2.2}(z^2+z^3)+\frac{1}{2^3.3}(z^4+z^5+z^6+z^7)-\frac{1}{2^4.4}(z^8+\ldots+z^{15})+\ldots$$

Opuszczając nawiasy, otrzymamy z szeregu tego szereg potęgowy

$$Q(z)=\frac{z}{2}-\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{8}+\frac{z^4}{24}+\frac{z^5}{24}+\frac{z^6}{24}+\frac{z^7}{24}-\frac{z^8}{64}-\ldots, \tag{2}$$

który jest na całem swem kole zbieżności zbieżny jednostajnie, ale nie bezwzględnie.

Dla dowodu okażemy przedewszystkiem, że szereg (1) jest zbieżny jednostajnie dla $|z|=1$.

Oznaczmy przez $P_n(z)$ sumę n pierwszych składników szeregu (1). Dla $z=1$ szereg (1) staje się szeregiem

$$P(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

o składnikach naprzemian dodatnich i ujemnych, malejących bezwzględnie; mamy zatem:

$$|P_q(1)-P_p(1)|<\frac{1}{2(p+1)}, \quad \text{dla} \quad q>p. \tag{3}$$

Dla $z\neq 1$ możemy napisać:

$$P_q(z)-P_p(z)=\sum_{n=p+1}^{q}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}\cdot\frac{z^{2^n}-z^{2^{n-1}}}{z-1},$$

skąd, z uwagi że, wobec $|z|=1$, mamy $|z^{2^n}-z^{2^{n-1}}|\leqslant 2$:

$$|P_q(z)-P_p(z)|\leqslant\frac{2}{|z-1|}\sum_{n=p+1}^{q}\frac{1}{2^n n}<\frac{2}{|z-1|(p+1)}\sum_{n=p+1}^{q}\frac{1}{2^n}$$
$$<\frac{2}{2^p(p+1)|z-1|}.$$

Stąd, w jednej chwili:

$$|P_q(z)-P_p(z)|<\frac{2}{p+1}, \quad \text{dla} \quad |z-1|\geqslant\frac{1}{2^p}, \quad |z|=1, \quad q>p. \tag{4}$$

Załóżmy teraz, że $|z-1|<\frac{1}{2^p}$, $z\neq 1$. Istnieje wówczas liczba naturalna $k\geqslant p$ (zależna od z), taka iż

$$\frac{1}{2^{k+1}}\leqslant|z-1|<\frac{1}{2^k}. \tag{5}$$

Tożsamość

$$z^m-1=(z-1)(z^{m-1}+z^{m-2}+\ldots+z+1)$$

daje dla $|z|=1$:

$$|z^m-1|\leqslant m\,|z-1|.$$

Kładąc kolejno $m=2^{n-1}, 2^{n-1}+1,\ldots, 2^n-1$, wnosimy stąd, że każda z 2^{n-1} różnic $z^{2^{n-1}}-1$, $z^{2^{n-1}+1}-1,\ldots, z^{2^n-1}-1$ jest bezwzględnie mniejsza od $2^n\,|z-1|$, skąd w jednej chwili:

$$|z^{2^{n-1}}+z^{2^{n-1}+1}+\ldots+z^{2^n-1}-2^{n-1}|<2^{2n-1}|z-1|.$$

Mamy zatem, dla $q\leqslant k+1$, wobec (5):

$$|P_q(z)-P_p(z)-(P_q(1)-P_p(1))|$$
$$=\left|\sum_{n=p+1}^{q}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}\left(z^{2^{n-1}}+z^{2^{n-1}+1}+\ldots+z^{2^n-1}-2^{n-1}\right)\right|$$
$$\leqslant\sum_{n=p+1}^{q}\frac{2^{2n-1}|z-1|}{2^n n}\leqslant\frac{1}{2^k(p+1)}\sum_{n=p+1}^{q}2^{n-1}<\frac{2^q}{2^k(p+1)}\leqslant\frac{2}{p+1},$$

skąd, wobec (3):

$$|P_q(z)-P_p(z)|<\frac{5}{2(p+1)}, \quad \text{dla} \quad p<q\leqslant k+1. \tag{6}$$

Stąd, w szczególności, dla $q=k+1$:

$$|P_{k+1}(z)-P_p(z)|<\frac{5}{2(p+1)}. \tag{7}$$

Zastępując we wzorze (4) p przez $k+1$, możemy, wobec (5), napisać, z uwagi, że $k\geqslant p$:

$$|P_q(z)-P_{k+1}(z)|<\frac{2}{k+2}\leqslant\frac{2}{p+2}, \quad \text{dla} \quad q>k+1,$$

co, wobec (7), daje:

$$|P_q(z)-P_p(z)|<\frac{5}{p+1}, \quad \text{dla} \quad p<q, \quad q>k+1. \tag{8}$$

Wzory (6) i (8) dowodzą, że, w każdym razie, w uważanym przypadku $\left(0 < |z-1| < \frac{1}{2^p}\right)$ zachodzi nierówność

$$|P_q(z) - P_p(z)| < \frac{5}{p+1}, \quad \text{dla} \quad q > p, \tag{9}$$

Lecz, wobec (4), nierówność (9) zachodzi również dla $|z-1| \geqslant \frac{1}{2^p}$, jakoteż, wobec (3), dla $z=1$; nierówność (9) zachodzi więc zawsze dla $|z| = 1$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu (1) na kole $|z| = 1$.

Niech teraz m oznacza dowolny dany wskaźnik >1. Oznaczmy przez k_m największą liczbę naturalną, spełniającą nierówność $2^k \leqslant m$; będzie więc

$$2^{k_m} \leqslant m < 2^{k_m+1},$$

i przeto, oznaczając przez $Q_m(z)$ sumę m pierwszych składników szeregu (2), będziemy mieli:

$$Q_m(z) = P_{k_m}(z) + \frac{(-1)^{k_m}}{2^{k_m+1}(k_m+1)}\left(z^{2^{k_m}} + z^{2^{k_m}+1} + \ldots + z^m\right),$$

skąd, z uwagi, że dla $|z| = 1$ mamy

$$\left|z^{2^{k_m}} + z^{2^{k_m}+1} + \ldots + z^m\right| \leqslant m+1-2^{k_m} \leqslant 2^{k_m+1} - 2^{k_m} = 2^{k_m},$$

znajdujemy:

$$|Q_m(z) - P_{k_m}(z)| < \frac{1}{2(k_m+1)},$$

co, z uwagi, że k_m wzrasta nieograniczenie wraz z m, oraz że ciąg $P_{k_m}(z)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ jest dla $|z| = 1$ zbieżny jednostajnie, dowodzi jednostajnej zbieżności ciągu $Q_m(z)$, a więc i szeregu $Q(z)$ dla $|z| = 1$.

Z drugiej strony, szereg (2) nie jest dla $z = 1$ zbieżny bezwzględnie, gdyż, łącząc odpowiednio w grupy jego składniki, otrzymujemy z niego szereg (1), który jest dla $z=1$ zbieżny warunkowo (wynika stąd zarazem, że koło $|z| = 1$ jest kołem zbieżności badanego szeregu potęgowego).

Wszystkie żądane własności szeregu (2) zostały więc udowodnione.