$$b = D_z a = A_{02} = D_z A^{20} = D_u A^{20} = 0 ,$$

$$D_x A^{20} = a^2 . \varphi \left(\frac{(A^{20})^5}{a^5} \right) ,$$

gdzie φ jest funkcyą dowolną.

Niezmiennik względny a jest określony wzorem (35), $b = \omega_{03}$, niezmienniki zaś A_{20} i A^{20} mają wartości, określone wzorem (116).

STANISLAUS JOLLES.

Konstruktion der linearen Kongruenz aus vier und des linearen Komplexes aus fünf gegebenen Strahlen.

Plücker's Untersuchungen [1] über die Grundeigenschaften der linearen Kongruenz brachten wenig Neues. Knapper, umfassender und tiefer hat vor ihm v. Staudt [2] die Theorie dieses Strahlengebildes begründet und ausgebaut. Aber selbst bei Synthetikern fanden v. Staudt's Ergebnisse nicht die gebührende Beachtung; man übersah, dass tieferes Eindringen in die Theorie des linearen Komplexes und seines Nullraumes genaue Kenntnis der linearen Kongruenz und ihres geschart involutorischen Raumes erfordert.

Im folgenden wird auf Grund neuer Beweise v. Staudtscher Sätze die lineare Kongruenz aus vier gegebenen Doppelstrahlen eines geschart involutorischen Raumes konstruiert, und als Schnitt von ∞^1 linearen Komplexen dargestellt. Letzteres führt unmittelbar zur Konstruktion des linearen Komplexes aus fünf Strahlen, die keiner linearen Kongruenz angehören. Überhaupt sollte sich jede Konstruktion des linearen Komplexes aus fünf gegebenen Strahlen auf einer Konstruktion der linearen Kongruenz aus vier gegebenen Strahlen aufbauen. Der umgekehrte von Plücker eingeschlagene Weg führt zu Beweisen und Konstruktionen, die oft schärferer Prüfung nicht standhalten.

1. Ein geschart involutorischer Raum Σ_g enthält unendlich viele Regelflächen II. Grades, deren eine Regelschar aus einander zugeordneten Strahlen und deren andere Regelschar aus Doppelstrahlen von Σ_g besteht [3]. Diese „einscharig involutorischen" Regelflächen von Σ_g schneiden eine Ebene η in

[1] Plücker, Neue Geometrie der Raumes, 1868, № 51—79.
[2] v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, § 6.
[3] v. Staudt, a. a. O., № 105.

Strahlenpaaren oder Kegelschnitten, je nachdem sie den mit η inzidenten Doppelstrahl von Σ_g enthalten oder nicht. Sei F^2 eine einscharig involutorische Regelfläche II. Grades von Σ_g, die mit η einen Kegelschnitt e^2 gemein hat. Ihre involutorische Regelschar $a a_1 . b b_1 ....$ trifft e^2 in einer zu ihr perspektiven involutorischen Punktinvolution $AA'. BB'...$, in deren Involutionszentrum E_1 sich die Geraden AA', BB',... schneiden. Die Berührungsebene α von F^2 im Punkte A enthält den Strahl a der Fläche und schneidet sie ausserdem in einem Doppelstrahle p von Σ_g. Der Ebene α ist in Σ_g die Ebene $\alpha_1 = p a_1 = p E_1$ zugeordnet; sie berührt F^2 in dem A in Σ_g zugeordneten Punkte $A_1 = p a_1$. Beschreibt der Punkt A den Kegelschnitt e^2, so dreht sich seine Berührungsebene α um den Pol E von η für F^2 und umhüllt den Tangentenkegel $E(e^2)$ von F^2. Zugleich dreht sich die ihr zugeordnete Ebene α_1 um den Punkt E_1 und umhüllt den Tangentenkegel $E_1(e_1^2)$ von F^2, dessen Berührungskegelschnitt e_1^2 mit F^2 aus der Fläche durch die Polarebene η_1 von E_1 für F^2 ausgeschnitten wird. Die Punkte E, E_1 sind folglich in Σ_g einander zugeordnet, ebenso ihre Polarebenen η, η_1 für F^2, und jeder liegt in der Polarebene des andern. Kurz:

„Einander zugeordnete Ebenen oder Punkte des geschart involutorischen Raumes Σ_g sind konjugiert für jede einscharig involutorische Regelfläche II. Grades F^2 von Σ_g [1]. Die Pole einer Ebene η für die Flächen F^2 sind mit der ihr zugeordneten Ebene η_1, die Polarebenen eines Punktes E mit dem ihm zugeordneten Punkte E_1 inzident. Der geschart involutorische Raum ist demnach mit allen seinen Elementenpaaren durch die Kongruenz seiner Doppelstrahlen bestimmt".

Satz und Beweis gelten auch für den parabolisch geschart involutorischen Raum.

Die Doppelstrahlen $\eta\eta_1$ und EE_1 von Σ_g sind reziprok polar für F^2. Da η eine beliebige Ebene und somit $\eta\eta_1$ ein beliebiger Doppelstrahl von Σ_g ist, so folgt aus dem vorstehenden Hauptsatze:

„Die Kongruenz der Doppelstrahlen eines geschart involutorischen Raumes Σ_g ist polarinvariant für jede einscharig involutorische Regelfläche II. Grades von Σ_g".

2. Die Gerade $\eta\eta_1$ ist als Polare des Involutionszentrums E_1 die Involutionsachse des involutorischen Kegelschnittes e^2. Sie ist ebenso die Involutionsachse des involutorischen Kegelschnittes e_1^2 und jedes zur involutorischen Regelschar $a a_1 . b b_1 ...$ perspektiven Kegelschnittes, dessen Ebene durch $\eta\eta_1$ geht. Die Gerade $\eta\eta_1$ heisst eine „Involutionsachse" [2] der involutorischen Regelschar $a a_1 . b b_1 ....$ Die Doppelstrahlen von Σ_g sind die ∞^2 Involutionsachsen dieser involutorischen Regelschar und als solche leicht zu konstruieren.

[1] v. Staudt, a. a. O., № 105.

[2] v. Staudt, a. a. O., № 79.

Die Punkte A, A' ebenso B, B';... auf dem Kegelschnitte e^2 werden durch E_1 und $\eta\eta_1$ harmonisch getrennt, die ihnen zugeordneten Punkte A_1, A_1'; B_1, B_1';... durch E und $\eta\eta_1$. Die Strahlenpaare a, a_1; b, b_1;... der involutorischen Regelschar sind folglich durch die Geraden EE_1 und $\eta\eta_1$ harmonisch getrennt. Kurz:

„Sind zwei Doppelstrahlen EE_1 und $\eta\eta_1$ eines geschart involutorischen Raumes Σ_g reziprok polar für eine in ihm enthaltene einscharig involutorische Regelfläche II. Grades F^2, so trennen sie je zwei einander zugeordnete Strahlen von F^2 harmonisch".

Eine Gerade und ihre Polare für eine einscharig involutorische Regelfläche II. Grades F^2 heissen „zusammengehörige Involutionsachsen" der involutorischen Regelschar [1], wenn sie jedes Strahlenpaar harmonisch trennen. Die involutorische Regelschar bestimmt einen geschart involutorischen Raum, [2] dessen ∞^2 Doppelstrahlen paarweise reziprok polar für F^2 und zusammengehörige Involutionsachsen der involutorischen Regelschar sind.

3. Drei windschiefe Strahlen p, q, r bestimmen als Leitstrahlen eine Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und eine sie enthaltende Fläche II. Grades F^2. Wir paaren die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ involutorisch mittelst zweier zusammengehörigen Involutionsachsen s, s'; bestimmen also die ∞^1 Strahlenpaare von $\mathfrak{R}^2$, deren Elemente durch s, s' harmonisch getrennt werden. Dann geht durch diese involutorische Regelschar ein und nur ein geschart involutorischer Raum, der die fünf Strahlen p, q, r, s, s' und alle Leitstrahlen der Regelschar zu Doppelstrahlen hat (2). Also ergibt sich:

„Vier Strahlen p, q, r, s, die mit höchstens zwei Geraden inzident sind, bestimmen als Doppelstrahlen einen geschart involutorischen Raum und somit eine lineare Kongruenz. [3]"

Gehören die vier Strahlen zu einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz eines linearen Strahlenkomplexes Γ, so sind die Leitgeraden u, v der Kongruenz in dem Nullraume von Γ einander zugeordnet, und die Kongruenz gehört zum Komplexe Γ. Die Kongruenz wird parabolisch und besteht aus den mit einem Komplexstrahle l inzidenten Komplexstrahlen, wenn die Leitgeraden u, v sich mit l vereinigen. Bestimmen p, q, r, s eine elliptische lineare Kongruenz, so geht durch p, q, r eine in der Kongruenz und in dem Komplexe enthaltene Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}^2$. Ein

[1] v. Staudt, a. a. O., № 79.

[2] v. Staudt, a. a. O., № 104.

[3] v. Staudt, a. a. O., № 106.

nicht zu $\mathfrak{R}^2$ gehöriger Kongruenzstrahl x liegt mit s und einem beliebigen Strahle y von $\mathfrak{R}^2$ in einer Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{Y}^2$ der Kongruenz. Die Regelschar $\mathfrak{Y}^2$ enthält ausser y noch einen Strahl z von $\mathfrak{R}^2$ und besteht, da sie drei Komplexstrahlen s, y, z enthält, aus lauter Komplexstrahlen. Auch jeder Strahl x durch vier Komplexstrahlen bestimmten elliptischen linearen Kongruenz gehört also dem Komplexe an.

4. „Durch eine lineare Kongruenz K_1^1 gehen ∞^1 lineare Komplexe [1]". Zwei Leitstrahlen g, g_1 einer Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}^2$ von K_1^1 und ein nicht in $\mathfrak{R}^2$ enthaltener Kongruenzstrahl s bestimmen nämlich einen Nullraum, in dem g, g_1 einander zugeordnet und s ein Nullstrahl ist [2]. Zu den Nullstrahlen des Nullraumes gehört ausser s jeder Strahl von $\mathfrak{R}^2$, folglich geht der lineare Komplex des Nullraumes durch die Kongruenz K_1^1 (3). Wird g festgehalten und beschreibt g_1 die Leitschar von $\mathfrak{R}^2$, so bestimmen g, g_1 als einander zugeordnete Geraden und s als Nullstrahl die ∞^1 sich in K_1^1 schneidenden linearen Komplexe.

5. Durch einen Punkt A eines nicht zu unserer Kongruenz K_1^1 gehörigen Strahles t geht ein Strahl a von K_1^1. Wird nun auf dem Schnittkegelschnitte r^2 der Ebene at und der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ eine Punktinvolution mit dem Involutionszentrum A hervorgerufen, so ist auch die zu r^2 perspektive Leitschar $\mathfrak{L}^2$ von $\mathfrak{R}^2$ involutorisch gepaart. Die involutorische Regelschar bestimmt einen sie enthaltenden Nullraum [3]. Zu seinen Nullstrahlen gehören die Strahlen a, t und die Regelschar $\mathfrak{R}^2$, und, da a und $\mathfrak{R}^2$ zu K_1^1 gehören, alle Strahlen der Kongruenz.

„Eine lineare Strahlenkongruenz K_1^1 und ein nicht zu ihr gehöriger Strahl t können also durch einen und nur einen linearen Strahlenkomplex miteinander verbunden werden".

Die lineare Kongruenz K_1^1 ist aber durch vier ihrer Strahlen p, q, r, s bestimmt, die mit höchstens zwei windschiefen Geraden inzident sind (3). Somit folgt:

„Durch fünf Strahlen, die keiner linearen Kongruenz angehören, geht ein und nur ein linearer Strahlenkomplex". [4]

Berlin—Halensee, d. 31. Juli 1916.

---

[1]) Plücker, Neue Geometrie des Raumes, 1868, № 53. Zwölf Jahre vorher bewies v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, № 105: die Strahlen einer linearen Kongruenz sind stets Nullstrahlen von Nullräumen.

[2]) Plücker, a. a. O., № 29.

[3]) Chasles, Propriétés nouvelles de l'hyperboloide à une nappe, Journ. de Math., 1839, Bd. 4, S. 348.

[4]) Sylvester, Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considérées comme des axes de rotation, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Bd. **52**, Paris 1861, S. 741—45.

STRESZCZENIE.

Badania Plückera nad własnościami podstawowemi kongruencyi liniowej dały niewiele nowego. Przed nim v. Staudt [1] uzasadnił i zbudował teoryę tego utworu promieniowego zwięźlej, ogólniej i głębiej. Lecz nawet u syntetyków wyniki, osiągnięte przez v. Staudta, nie znalazły należnego uznania. Nie dostrzeżono, że głębsze wniknięcie w teoryę kompleksu liniowego i jego przestrzeni zerowej wymaga dokładnej znajomości kongruencyi liniowej i jej skośnie-inwolucyjnej przestrzeni.

W artykule powyższym, na podstawie nowych dowodów twierdzeń v. Staudta, podaję konstrukcyę kongruencyi liniowej z czterech danych promieni podwójnych przestrzeni skośnie-inwolucyjnej i jako przecięcie ∞_1 kompleksów liniowych. Prowadzi to bezpośrednio do konstrukcyi kompleksu liniowego z pięciu danych promieni, nie należących do żadnej kongruencyi liniowej. Wogóle wszelka konstrukcya kompleksu liniowego z pięciu danych promieni powinnaby się opierać na konstrukcyi kongruencyi liniowej z czterech promieni danych. Droga odwrotna, stosowana przez Plückera, prowadzi do dowodów i konstrukcyj, nie wytrzymujących nieraz próby ściślejszej.

---

[1]) v. Staudt, Beträge zur Geometrie der Lage, 1856, § 6.