

F. LEJA.

Własności niezmiennicze równań różniczkowych zwyczajnych 3 rzędu ze względu na przekształcenia stycznościowe.

Propriétés invariantes des équations différentielles ordinaires du 3-ème ordre par rapport
aux transformations tangentielles.

WSTĘP.

Pojęcie ciągłej grupy przekształceń odgrywa w teorii równań różniczkowych rolę pierwszorzędną. Jak wiadomo, zdołał S. Lie stworzyć przy pomocy pojęcia ciągłej grupy skończonej osobną metodę całkowania równań różniczkowych. Równocześnie kwestya, czy pewne równanie różniczkowe można przekształcić na inne za pomocą pewnej nieskończonej grupy przekształceń, okazała się ważnym środkiem badania własności i całkowania tych równań. Kwestyą tą zajmowali się po raz pierwszy Laguerre i Halphen.¹⁾ Sprowadza się ona, jak wiadomo, do wyszukania pewnych niezmienników różniczkowych ze względu na daną grupę przekształceń, do czego nadają się przede wszystkim metody Liego z ich pojęciem pierwszorzędnego znaczenia, jakim jest pojęcie przekształcenia nieskończonościowego.

Pojęcie to zastosował po raz pierwszy z tego rodzaju zagadnieniach K. Żorawski²⁾ i zwrócił uwagę na korzyść tej metody, bez której obywateli się prace Laguerre'a i innych. Tą drogą wyznaczył nieco później A.

¹⁾ Laguerre, Sur quelques invariants des équat. diff. linéaires. Sur les équat. lin. du 3-e ordre (Comptes R. 88).
Halphen, Mém. sur la réduction des équat. diff. aux formes intégrables (Rec. des Sav. Etrang. XXVIII).

²⁾ K. Żorawski, Przyczynek do teorii zamiany zmiennych w równ. różn. rzędu 1 (Rozp. Ak. Um. w Krakowie 1893).

Tresse¹⁾ wszystkie niezmienniki różniczkowe równań różniczkowych drugiego rzędu ze względu na wszelkie przekształcenia punktowe.

Przedmiotem tej pracy jest wyszukanie niezmienników równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 3-go ze względu na grupę wszystkich przekształceń stycznych płaszczyzny, wśród których przekształcenia punktowe stanowią tylko pewną podgrupę. Liczba tych niezmienników jest nieograniczona, jednak już pewna skończona ich liczba wystarcza do znalezienia innych.²⁾ W tym celu posługuję się pojęciem przekształcenia nieskończonostkowego i znajduję za przykładem wspomnianej pracy Tressego najpierw t. zw. niezmienniki względne. Ułatwia to znacznie rozumowanie, a znajomość trzech tego rodzaju niezmienników wystarcza do utworzenia jednego niezmiennika w ścisłym tego słowa znaczeniu. Otrzymane wyniki są następujące:

Najogólniejsze równanie różniczkowe zwyczaj. rzędu 3-go $y''' = \omega(xy y' y'')$ posiada ze względu na grupę wszystkich przekształceń stycznych jeden niezmiennik względny rzędu 3-go, dwa rzędu 4-go, szesnaście rzędu 5-go, a w przypadku $n \geq 6$

$$\binom{n-1}{3} + 3 \binom{n-2}{2} + 3(n-4) + 1$$

niezmienników względnych rzędu n -tego. Niezmienniki te są funkcjami algebraicznymi i wymiernymi pochodnych funkcji ω . Znajomość czterech parametrów różniczkowych i czterech tylko niezmienników względnych wystarcza w przypadku ogólnym do znalezienia wszystkich innych niezmienników. Z każdych trzech niezmienników względnych można utworzyć jeden niezmiennik w ścisłym tego słowa znaczeniu

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby równanie różniczkowe $y''' = \omega(xy y' y'')$, gdzie $z = y'$, $u = y''$ nie posiadało żadnych niezmienników jest, aby funkcja ω spełniała dwa równania następujące:

$$\omega_{04} = 0, \\ \alpha^{10} + 6\omega^{01} + \omega_{\alpha 01} - \frac{2}{3}\omega_{01}\alpha = 0,$$

gdzie symbol φ_{ki}^{ij} oznacza, że na pochodnej $\frac{\partial^{i+j+1}\varphi}{\partial y^i \partial z^k \partial u^j}$ wykonano i -krotnie

¹⁾ A. Tresse, Déterm. des invar. ponct. de l'équat. diff. ordin. du second ordre (Preisschrift der Jablon-Gesellschaft, Leipzig 1896).

²⁾ A. Tresse, Sur les invar. diff. des groupes cont. (Acta math. 18).

działanie $\frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial z}$ i gdzie

$$\alpha = \omega_{01}^{10} - 3\omega_{10} + \omega_{\omega 02} - \frac{2}{3}\omega_{01}\omega_{01}.$$

Równanie $y''' = \omega(xy y' y'')$ można w tym przypadku przekształcić na równanie $y''' = 0$ za pomocą pewnego przekształcenia stycznego.

Przy pomocy znalezionych niezmienników podaję równocześnie warunki dostateczne, jakim musi czynić zadość funkcja ω , aby równanie $y''' = \omega(xy y' y'')$ można było przekształcić na równanie liniowe

$$y''' + \lambda y'' + \mu y' + \nu y + \rho = 0,$$

gdzie λ, μ, ν, ρ są funkcjami tylko zmiennej x .

Praca ta dzieli się na sześć następujących części:

1. Przekształcenie nieskończonostkowe i własności wprowadzonych symboli.
2. Zamiana zmiennych i pochodne klasy drugiej.
3. Niezmienniki względne.
4. Parametry różniczkowe.
5. Niezmienniki bezwzględne.
6. Równoważność dwóch równań rzędu 3-go ze względu na przekształcenie styczne.

I. Przekształcenie nieskończonostkowe i własności wprowadzonych symboli.

1. Najogólniejsze przekształcenie styczne płaszczyzny ma, jak wiadomo, postać

$$x' = X(xy z), \quad y' = Y(xy z), \quad z' = \frac{dy'}{dx'}, \quad (1)$$

gdzie $z = \frac{dy}{dx}$, a funkcje X, Y są tak dobrane, aby symbol Poissona

$$[XY] = \frac{\partial X}{\partial z} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + z \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - \frac{\partial Y}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + z \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

był tożsamościowo zerem i aby jacobian $\frac{D(x' y' z')}{D(xy z)}$ był różny od zera. Poza tem mogą być funkcje X, Y zupełnie dowolne.

Zauważmy dowolne równanie różniczkowe zwyczajne rzędu 3-go w zmiennych x', y' :

$$\frac{d^3 y'}{dx'^3} = \omega'(x' y' z' u'), \quad (2)$$

gdzie $z' = \frac{dy'}{dx'}$, $u' = \frac{dz'}{dx'}$. Po wykonaniu na niem powyższego przekształcenia stycznościowego otrzymamy równanie

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \omega(xyzu), \quad (3)$$

gdzie $z = \frac{dy}{dx}$, $u = \frac{dz}{dx}$. Zadaniem naszym będzie znaleźć tego rodzaju wyrażenia

$$N\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial z}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \dots, xyzu\right),$$

zależne od ω , pochodnych funkcji ω dowolnego rzędu i ewentualnie od zmiennych x, y, z, u , aby ze względu na powyższe przekształcenie zachodziła równość:

$$N\left(\omega', \frac{\partial \omega'}{\partial x'}, \dots, x', y', z', u'\right) = N\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots, x, y, z, u\right)$$

i to bez względu na postać funkcji X, Y , charakteryzujących przekształcenie stycznościowe. Funkcje N nazywamy niezmiennikami równania (3) ze względu na wszystkie przekształcenia stycznościowe, a najwyższy rząd pochodnych funkcji ω , od których N zależy, nazywamy rzędem niezmiennika.

2. Celem znalezienia tych niezmienników zauważmy najogólniejsze nieskończonostkowe przekształcenie stycznościowe. Oznaczając przez W dowolną funkcję różniczkowalną zmiennych x, y, z , można, jak wiadomo, przedstawić najogólniejsze przekształcenie nieskończonostkowe w następujący sposób:¹⁾

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial z}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = W - z \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial x} + z \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (4)$$

Na oznaczenie tego przekształcenia używamy zwykle symbolu

$$Sf = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial z},$$

dogodnego zwłaszcza w teorii niezmienników różniczkowych.

Rozszerzmy przekształcenie (4) na pochodne $u = \frac{dz}{dx}$, $\omega = \frac{du}{dx}$ w założeniu, że pozostawia ono bez zmiany równania o różniczkach zupełnych

$$dz - u dx = 0, \quad du - \omega dx = 0.$$

Stosunki przyrostów tych pochodnych do δt mają w tem założeniu kształt następujący:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{d}{dx} \frac{\delta z}{\delta t} - u \frac{d}{dx} \frac{\delta x}{\delta t}, \quad \frac{\delta \omega}{\delta t} = \frac{d}{dx} \frac{\delta u}{\delta t} - u \frac{d}{dx} \frac{\delta x}{\delta t}. \quad (5)$$

Przekształcenia (4), (5) tworzą, jak wiadomo, grupę nieskończoną, zadanie zaś, o które chodzi, polega na wyszukaniu niezmienników różniczkowych tej grupy w założeniu, że ω jest funkcją czterech zmiennych niezależnych x, y, z, u . Grupę tę możemy przedstawić za pomocą symbolu

$$S''f = \frac{\delta x}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\delta y}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\delta z}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\delta u}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\delta \omega}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \omega}. \quad (6)$$

Celem wyszukania wszystkich niezmienników, zawierających pochodne funkcji ω aż do rzędu n -tego, należy przedewszystkiem rozszerzyć przekształcenie nieskończonostkowe (6) ma pochodne funkcji ω aż do n -tego rzędu.¹⁾ W ten sposób otrzymamy przekształcenie

$$S^{(n)}f = S'f + \sum_{\nu=0}^n \sum_p \frac{\partial \omega_p^{(\nu)}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \omega_p^{(\nu)}},$$

gdzie przez $S'f$ oznaczyliśmy trzy pierwsze wyrazy symbolu (6), a przez $\omega_p^{(\nu)}$ pochodne $\frac{\partial^{i+j+k+l} \omega}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \partial u^l}$ rzędu $i+j+k+l = \nu$. Następnie należy zcałkować równanie liniowe i jednorodne o pochodnych cząstkowych

$$S^{(n)}f = 0$$

w założeniu, że funkcja W jest zupełnie dowolna. Ze względu na to sprowadza się całkowanie tego równania do całkowania pewnego układu równań liniowych, który przy dostatecznie dużym n posiada całki różne od wielkości stałych.

Przeprowadzenie tego zagadnienia wprost w tej formie natrafia jednak na znaczne trudności, wobec czego obierzemy drogę do pewnego stopnia odmienną. Przedewszystkiem wprowadzimy kilka symboli, które pozwolą przedstawić zawiłe z natury rzeczy działania w formie nieco prostszej.

3. Mając daną dowolną funkcję różniczkowalną φ zmiennych x, y, z, u , oznaczmy przez φ^{10} , φ^{01} , φ_{10} , φ_{01} działania następujące:

¹⁾ S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen t. II.

¹⁾ S. Lie, Über Differentialinvarianten (Math. Ann. XXIV).

$$\varphi^{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\varphi^{01} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \varphi^{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \varphi^{01} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}. \quad (8)$$

Ogólnie będziemy rozumieli przez φ^{i0} działanie $\frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial z}$, wykonane i -krotnie na funkcji φ , a przez φ_{kl}^{0j} działanie, $\frac{\partial}{\partial y}$ j -krotnie, $\frac{\partial}{\partial z}$ k -krotnie, $\frac{\partial}{\partial u}$ l -krotnie wykonane na funkcji φ i to w dowolnym porządku, gdyż działania te, jako cząstkowe pochodne, są ze sobą przemienne. Podobnie przemienne są ze sobą działania $\frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$; natomiast nie są przemienne działania

$$\frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial u}.$$

Położmy:

$$\varphi_{kl}^{ij} = (\varphi_{kl}^{0j})^{i0}; \quad (9)$$

niech więc symbol φ_{kl}^{ij} oznacza, że na pochodnej

$$\varphi_{kl}^{0j} = \frac{\partial^{j+k+l} \varphi}{\partial y^j \partial z^k \partial u^l}$$

wykonano i -krotnie działanie (7). Z powyższych definicji wynika wprost, że

$$(\varphi_{kl}^{ij})^{10} = \varphi_{kl}^{i+1, j}, \quad (\varphi_{kl}^{ij})^{01} = \varphi_{kl}^{i, j+1}; \quad (10)$$

możemy zaś wykazać, że

$$(\varphi_{kl}^{ij})_{10} = \varphi_{k+1, l}^{ij} + i \cdot \varphi_{kl}^{i-1, j+1} \quad (11)$$

$$(\varphi_{kl}^{ij})_{01} = \varphi_{k, l+1}^{ij} + i \cdot \varphi_{k+1, l}^{i-1, j} + \binom{i}{2} \cdot \varphi_{k, l}^{i-2, j+1}, \quad \text{gdy } i \geq 2, \quad (12)$$

przyczem w przypadku $i = 1$ ostatni wyraz wzoru (12) jest zerem.¹⁾

Istotnie, nazwijmy dla krótkości $\varphi_{kl}^{0j} = \psi$ i zajmijmy się najpierw przypadkami $i = 1, i = 2$. Stosując do ψ dwukrotnie działanie (7), otrzymamy:

¹⁾ W przypadku $i = 0$ redukują się prawe strony wzorów (11), (12) do wyrazów pierwszych, co wynika wprost z własności pochodnych.

$$\psi^{10} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} + u \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$\psi^{20} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2u \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + 2zu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + u \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Z pierwszego wzoru wynika, że pochodna $\frac{\partial \psi^{10}}{\partial z} = (\psi^{10})_{10}$ jest następująca:

$$(\psi^{10})_{10} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_{10}^{10} + \psi^{01};$$

wstawiając zaś za ψ jej wartość, otrzymamy wzór (11) w przypadku $i = 1$. Podobnie biorąc pochodne $\frac{\partial \psi^{10}}{\partial u}, \frac{\partial \psi^{20}}{\partial u}$, otrzymamy:

$$(\psi^{10})_{01} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial z} = \psi_{01}^{10} + \psi_{10}$$

$$(\psi^{20})_{10} = \psi_{10}^{20} + 2\psi_{10}^{10} + \psi^{01},$$

z czego, po wstawieniu za ψ jej wartości, wynika, że wzór (12) jest prawdziwy w przypadku $i = 2$, a z ograniczeniem, wyżej podanem w przypadku $i = 1$.

Załóżmy teraz, że wzór (11) jest prawdziwy w przypadku $i = n$; wykazemy, że jest on prawdziwy w przypadku $i = n + 1$. Istotnie

$$(\psi^{n+1, 0})_{10} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \psi^{n0}}{\partial x} + z \frac{\partial \psi^{n0}}{\partial y} + u \frac{\partial \psi^{n0}}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi^{n0}}{\partial z} \right) + z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi^{n0}}{\partial z} \right) + u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi^{n0}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \psi^{n0}}{\partial y};$$

ponieważ zaś według założenia jest

$$\frac{\partial \psi^{n0}}{\partial z} = \psi_{10}^{n0} + n \psi^{n-1, 1},$$

zatem:

$$(\psi^{n+1, 0})_{10} = \psi_{10}^{n+1, 0} + (n+1) \psi^{n, 1}.$$

Po wstawieniu za funkcję ψ jej wartości, otrzymamy wzór (11) w przypadku $i = n + 1$.

Podobnie, przyjmując, że wzór (12) jest prawdziwy w przypadku $i = n \geq 2$, możemy wykazać, że jest on prawdziwy w przypadku $i = n + 1$. Istotnie,

$$(\psi^{n+1,0})_{01} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial x} + z \frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial y} + u \frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial u} \right) + z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial u} \right) + u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial u} \right) + \frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial z} = \left(\frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial u} \right)^{10} + \frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial z}.$$

Otóż, ponieważ wzór (12) jest prawdziwy w przypadku $i = n$, zatem:

$$\frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial u} = \psi_{01}^{n,0} + n \psi_{10}^{n-1,0} + \binom{n}{2} \psi^{n-2,1}.$$

Wstawiając nadto za $\frac{\partial \psi^{n,0}}{\partial z}$ poprzednio znaną wartość, otrzymamy:

$$(\psi^{n+1,0})_{01} = \psi_{01}^{n+1,0} + (n+1) \psi_{01}^{n,0} + \binom{n+1}{2} \psi^{n-1,1},$$

co stwierdza wzór (12) w przypadku $i = n+1$.

Celem uproszczenia pisowni oznaczać będziemy poniżej stosunek $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ krótko przez $\partial \varphi$. Nadto, ponieważ funkcja W , zwana funkcją charakterystyczną przekształcenia nieskończonościowego, nie zależy od zmiennej u , oznaczać będziemy wyrażenie W_{k0}^{ij} krótko przez W_k^{ij} . Należy jednak zauważyć, że wyrażenie W_k^{ij} nie jest niezależne od zmiennej u , jeżeli $i > 0$, wobec czego $(W_k^{ij})_{01}$ nie jest w tym przypadku zerem.¹⁾

4. Wróćmy teraz do naszej grupy nieskończonej (4), (5). W nowej pisowni możemy przedstawić jej przekształcenia jak następuje:²⁾

$$\delta x = -W_1, \quad \delta y = W - z W_1, \quad \delta z = W^{10} - u W_1, \quad (4')$$

$$\delta u = W^{20}, \quad \delta \omega = \omega (W^{01} + 3 W_1^{10}) + W^{30}. \quad (5')$$

¹⁾ Z wzoru (12) wynika, że

$$(W_k^{ij})_{01} = i W_{k+1}^{i-1,j} + \binom{i}{2} W_k^{i-2,j+1}$$

w przypadku $i \geq 2$, przyczem prawa strona tej równości redukuje się do wyrazu pierwszego, gdy $i = 1$.

²⁾ Co do przekształcenia $\frac{\partial u}{\partial t}$ należy zauważyć, że $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^{10}$, gdyż $\frac{\partial z}{\partial t}$ zależy tylko od zmiennych x, y, z . Podobnie $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^{10}$, natomiast $\frac{\partial u}{\partial t}$ zależy nadto od zmiennej u , zatem

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{10} + \omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Rozszerzając tę grupę na pochodne funkcji ω , zastąpimy przytem każdą pochodną $\frac{\partial^i \omega}{\partial x^i}$ wyrażeniem ω^{i0} , gdyż pochodna $\frac{\partial^i \omega}{\partial x^i}$ zawiera się w wyrażeniu ω^{i0} , a przyrosty $\delta \omega^{i0}$ mają kształt nieco prostszy niż przyrosty $\delta \frac{\partial^i \omega}{\partial x^i}$, jak to wkrótce zobaczymy. W ogólności zastąpimy pochodną $\frac{\partial^{i+j+k+l} \omega}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \partial u^l}$ przez ω_{kl}^{ij} , gdyż wyrażenie to zawiera poprzednią pochodną, a przyrost jego ma kształt nieco prostszy.

Celem obliczenia przyrostu $\delta \omega_{kl}^{ij}$ zauważmy dowolną funkcję φ zmiennych x, y, z, u i obliczmy przyrosty $\delta \varphi^{10}, \delta \varphi^{01}, \delta \varphi_{10}, \delta \varphi_{01}$ pochodnych $\varphi^{10}, \varphi^{01}, \varphi_{10}, \varphi_{01}$, przyjmując, że przyrost $\delta \varphi$ jest znany.¹⁾ Ponieważ

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du,$$

zatem przyrosty pochodnych cząstkowych są:

$$\delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \delta y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \delta z - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} \delta u,$$

$$\delta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \delta z - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} \delta u,$$

$$\delta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \delta y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \delta z - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial z} \delta u,$$

$$\delta \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} \delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u} \delta y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial u} \delta z - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \delta u.$$

Na podstawie tych wzorów obliczymy więc z łatwością przyrost $\delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$, czyli $\delta \varphi^{10}$, a uwzględniając wzory (4'), (5') i własności wprowadzonych symboli, otrzymamy:

¹⁾ Na oznaczenie wyrażenia φ^{10} używać będziemy nazw pochodnej według x , co nie da powodu do żadnego nieporozumienia, gdyż z pochodną $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ nie będziemy się później spotykali.

Możemy tu zaznaczyć, że działanie $\frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial z}$ posiada niektóre własności pochodnej. I tak np. jeżeli $\varphi = u + v$, to $\varphi^{10} = u^{10} + v^{10}$, jeżeli zaś $\varphi = u \cdot v$, to $\varphi^{10} = u v^{10} + v u^{10}$ i t. p.

$$\begin{aligned}\partial \varphi^{10} &= (\partial \varphi)^{10} + \varphi^{10} W_1^{10} - \varphi_{01} W^{20} \\ \partial \varphi^{01} &= (\partial \varphi)^{01} - \varphi^{01} W^{01} - \varphi_{10} W^{11} + \varphi^{10} W_1^{10} - \varphi_{01} W^{21} \\ \partial \varphi^{10} &= (\partial \varphi)_{10} - \varphi_{10} (W^{01} + W_1^{10}) + \varphi^{10} W_2 - \varphi_{01} (2 W^{11} + W_1^{20}) \\ \partial \varphi_{01} &= (\partial \varphi)_{01} - \varphi_{01} (W^{01} + 2 W_1^{10}).\end{aligned}\quad (13)$$

Znając przyrost $\partial \omega$ (5'), możemy na podstawie tych wzorów znaleźć przyrosty pochodnych funkcji ω rzędu pierwszego, a następnie kolejno rzędów coraz do wyższych.

5. Powyższe wzory następczą kilka ważnych na przyszłość uwag:

1°. Przekształcenie nieskończonościowe (6), rozszerzone na pochodne ω_{ki}^{ij} aż do rzędu n -tego, ma kształt:

$$S^{(n)} f = -W_1 \frac{\partial f}{\partial x} + (W - z W_1) \frac{\partial f}{\partial y} + (W^{20} - u W_1) \frac{\partial f}{\partial z} + W^{20} \frac{\partial f}{\partial u} + \sum \delta \omega_{ki}^{ij} \frac{\partial f}{\partial \omega_{ki}^{ij}}, \quad (14)$$

gdzie znak sumowania ma być rozciągnięty na wszystkie układy liczb naturalnych i, j, k, l od zera aż do $i + j + k + l = n$.

Zauważmy, że funkcja W występuje w przyroście δy , nie występuje zaś ani w $\delta \omega$, ani we wzorach (13), zatem nie może występować w żadnym $\delta \omega_{ki}^{ij}$. Wynika stąd, że w układzie równań cząstkowych, którego całkami są szukane niezmienniki, znajduje się równanie $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, a więc żaden niezmiennik nie może zależeć od zmiennej y . Podobnie pochodna W^{10} występuje tylko w przyroście δz , W^{20} tylko w przyroście δu , gdyż z kształtu przyrostu $\delta \omega$ i wzorów (13) wynika, że nie mogą się one znajdować w żadnym $\delta \omega_{ki}^{ij}$. Ponieważ zaś pochodne W^{10} , W^{20} są funkcjami całkiem dowolnymi podobnie jak i W , zatem $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} = 0$, czyli że żaden niezmiennik nie może zależeć wyraźnie ani od z , ani od u . Z tych samych względów nie może żaden niezmiennik zależeć od zmiennej x , gdyż pochodna W_1 występuje tylko w przyrostach δx , δy , δz , a ponieważ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, zatem i $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Niezmienniki mogą więc zależeć tylko od ω_{ki}^{ij} , ponieważ zaś te ostatnie zawierają obok pochodnych $\frac{\partial^{i+j+k+l} \omega}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \partial u^l}$ tylko zmienne z, u , zatem:

Twierdzenie 1. Żaden niezmiennik równania $y''' = \omega(xyzu)$ ze względu na wszystkie przekształcenia stycznościowe nie zależy od zmiennych x, y , od zmiennych zaś z, u może zależeć tylko w połączeniach ω_{ki}^{ij} .

2°. Ze wszystkich pochodnych rzędu 1-go funkcji charakterystycznej W występuje w przyrostach $\delta \omega_{ki}^{ij}$ tylko pochodna W^{01} . Zwróćmy uwagę na jej współczynnik. W przyroście $\delta \omega$ współczynnikiem tym jest ω , z wzorów zaś (13) łatwo wynioskować, że w przyroście $\delta \omega_{ki}^{ij}$ jest nim pochodna ω_{ki}^{ij} , pomnożona przez pewną liczbę całkowitą, która może być zerem. Podobnie rzecz się ma ze współczynnikiem pochodnej W_1^{10} tak, że przyrost $\delta \omega_{ki}^{ij}$ zawiera między innymi wyraz następujący:

$$\delta \omega_{ki}^{ij} = \omega_{ki}^{ij} (r W^{01} + s W_1^{10}) + \dots, \quad (15)$$

gdzie r, s są liczbami całkowitymi. Co więcej, z wzorów (13) wynika, że odwrotnie współczynnikami pochodnej ω_{ki}^{ij} w przyroście $\delta \omega_{ki}^{ij}$ mogą być tylko pochodne W^{01}, W_1^{10} .

Zajmiemy się bliżej liczbami r, s . Wykażemy mianowicie, że mają one następujące wartości:

$$\begin{aligned}r &= 1 - j - k - l, \\ s &= 3 + i - k - 2l.\end{aligned}\quad (16)$$

Istotnie, wzory te są prawdziwe dla $\delta \omega$, wystarczy zatem przyjąć, że są prawdziwe dla przyrostu $\delta \varphi$, gdzie $\varphi = \omega_{ki}^{ij}$, i wykazać, że są również prawdziwe dla $\delta \varphi^{10}, \delta \varphi^{01}, \delta \varphi_{10}, \delta \varphi_{01}$. Otóż z pierwszego z wzorów (13) wynika, że

$$\delta \varphi^{10} = \varphi^{10} (r W^{01} + s W_1^{10}) + \varphi^{10} W_1^{10} + \dots$$

gdzie wyrazy dalsze nie zależą od pochodnych W^{01}, W_1^{10} . Wynika stąd, że liczba s jest w tym przypadku o 1 większa, podczas gdy r nie ulega zmianie, zgodnie z wzorami (16), gdyż rząd i jest w tym przypadku o 1 większy. Podobnie łatwo wykazać prawdziwość wzorów (16) w trzech dalszych przypadkach.

Liczby r, s mają w tej teorii ważne znaczenie; nazywać je będziemy wykładnikami pochodnej ω_{ki}^{ij} i to r pierwszym, s zaś drugim.

Zauważmy dwie pochodne $\omega_{ki}^{ij}, \omega_{vp}^{\lambda \mu}$, których wykładniki są identyczne i równe kolejno r, s . Pochodne te mają tę szczególną własność, że przyrost sumy

$$\varphi = A \omega_{ki}^{ij} + B \omega_{vp}^{\lambda \mu},$$

gdzie A, B są liczbami dowolnymi, ma kształt (15), mianowicie:

$$\delta \varphi = \varphi (r W^{01} + s W_1^{10}) + \dots$$

przyczem wyrazy dalsze nie zależą ani od W^{01}, W_1^{10} , ani też od φ . Przeciwi-

nie, własności tej nie posiada suma, której poszczególne wyrazy nie mają identycznych wykładników.

Zauważmy jeszcze iloczyn $\psi = \omega_{k,l}^{i,j} \cdot \omega_{\nu,\rho}^{\lambda,\mu}$ dwóch pochodnych funkcji ω . i przyjmijmy, że wykładniki pierwszego czynnika są kolejno r, s , drugiego zaś r', s' . Przyrost $\delta\psi$ ma kształt (15), przyczem wykładniki jego są kolejno $r+r', s+s'$. Istotnie:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \omega_{k,l}^{i,j} \delta\omega_{\nu,\rho}^{\lambda,\mu} + \omega_{\nu,\rho}^{\lambda,\mu} \delta\omega_{k,l}^{i,j} \\ &= \psi(r' W^{01} + s' W_1^{10}) + \dots + \psi(r W^{01} + s W_1^{10}) + \dots, \end{aligned}$$

gdzie wyrazy dalsze nie zależą ani od iloczynu ψ , ani też od W^{01}, W_1^{10} .
Zatem:

$$\delta\psi = \psi[(r+r') W^{01} + (s+s') W_1^{10}] + \dots$$

Podobnie rzecz się ma z iloczynem dowolnej liczby pochodnych funkcji ω , mianowicie pierwszy wykładnik iloczynu jest równy sumie wykładników pierwszych, drugi zaś sumie wykładników drugich poszczególnych czynników.

Sumę utworzoną z pochodnych funkcji ω , lub z iloczynów tych pochodnych, nazywać będziemy wyrażeniem co do swych wykładników dokładnie określonym, jeżeli wykładniki pierwsze i drugie poszczególnych wyrazów tej sumy są identyczne. Tak naprz. wyrażenie: $\omega_{01}^{10} - 3\omega_{10}^{10} + \omega\omega_{02}^{10}$ jest co do swych wykładników dokładnie określone, gdyż wykładniki poszczególnych jego wyrazów są $r=0, s=2$.

3°. Zwróćmy uwagę na dalsze wyrazy przyrostu (15). Ogólnie możemy przyrostowi temu nadać kształt:

$$\delta\omega_{k,l}^{i,j} = \sum A_{\nu}^{\lambda,\mu} \cdot W_{\nu}^{\lambda,\mu}, \quad (15')$$

gdzie współczynniki $A_{\nu}^{\lambda,\mu}$ są funkcjami całkowitemi pochodnych ω , stałemi lub zerami.¹⁾ Tak up. współczynniki przy W, W^{10}, W_1, W^{20} są zerami, gdyż żaden przyrost nie zależy od tych pochodnych funkcji charakterystycznej W , zatem:

$$A = A^{10} = A_1 = A^{20} = 0.$$

Z poprzedniej uwagi wynika, że

$$A^{01} = r\omega_{k,l}^{i,j}, \quad A_1^{10} = s\omega_{k,l}^{i,j},$$

gdzie liczby r, s są określone wzorami (16).

Co do reszty współczynników $A_{\nu}^{\lambda,\mu}$ możemy wykazać, że rząd pochodnych funkcji ω , od których one zależą, nie jest wyższy od $i+j+k+l$. Istotnie, własność tę posiada $\delta\omega$, gdyż występuje w nim tylko pochodna W^{30} , której współczynnik jest stały i równy 1. Jeżeli zaś przyjmujemy, że własność tę posiada $\delta\varphi$, gdzie $\varphi = \omega_{k,l}^{i,j}$, to z wzorów (13) wynika wprost, że posiadają ją również przyrosty $\delta\varphi^{10}, \delta\varphi^{01}, \delta_{10}, \delta\varphi_{01}$.

Co więcej, jeżeli współczynnik $A_{\nu}^{\lambda,\mu}$ jest sumą kilku pochodnych funkcji ω , to suma ta jest co do swych wykładników dokładnie określona, przyczem wykładniki jej są następujące:

$$\begin{aligned} \delta A_{\nu}^{\lambda,\mu} &= A_{\nu}^{\lambda,\mu} (\rho W^{01} + \sigma W_1^{10}) + \dots \\ \rho &= r-1+\mu+\nu, \quad \sigma = s-\lambda+\nu, \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie liczby r, s są wykładnikami odpowiedniego przyrostu (15').

Istotnie, wzory (17) są prawdziwe dla współczynników $A_{\nu}^{\lambda,\mu}$, występujących w $\delta\omega$, gdyż występuje w nim obok A^{01}, A_1^{10} tylko współczynnik $A^{30}=1$, którego oba wykładniki są zgodnie z wzorami (17) równe zeru.¹⁾ Przyjmijmy, że wzory (17) są prawdziwe dla współczynników przyrostu $\delta\omega_{k,l}^{i,j}$, przyczem, jak poprzednio, nazwijmy $\omega_{k,l}^{i,j}$ dla krótkości φ . Możemy wykazać, że są one prawdziwe również dla współczynników, występujących w przyrostach $\delta\varphi^{10}, \delta\varphi^{01}, \delta\varphi_{10}, \delta\varphi_{01}$. Istotnie, niech będzie

$$\delta\varphi = \sum A_{\nu}^{\lambda,\mu} \cdot W_{\nu}^{\lambda,\mu},$$

gdzie wykładniki przyrostu $\delta A_{\nu}^{\lambda,\mu}$ mają kształt (17). Na podstawie pierwszego z wzorów (13) otrzymamy:

$$\delta\varphi^{10} = \sum (A_{\nu}^{\lambda,\mu})^{10} \cdot W_{\nu}^{\lambda,\mu} + \sum A_{\nu}^{\lambda,\mu} \cdot W_{\nu}^{\lambda+1,\mu} + \varphi^{10} W_1^{10} - \varphi_{01} W^{30}.$$

Zauważmy przedewszystkiem, że jeżeli φ ma wykładniki r, s , to wykładniki pochodnej φ^{10} są $r, s+1$, wykładniki zaś pochodnej φ_{01} są $r-1, s-2$, jak to z wzorów (16) wynika. Prawdziwość wzorów (17) wystarczy w powyższym przyroście sprawdzić dla współczynników przy $W_{\nu}^{\lambda,\mu}, W_{\nu}^{\lambda+1,\mu}, W_1^{10}, W^{30}$. Otóż z założenia wynika, że współczynnik przy pierwszej z nich ma wykładniki $r-1+\mu+\nu, (s+1)-\lambda+\nu$, przy drugiej $r-1+\mu+\nu, (s+1)-(\lambda+1)+\nu$, przy trzeciej $r, s+1$ przy ostatniej zaś $r-1, s-2$, zgodnie z wzorami (17), w których s należy zastąpić przez $s+1$.

¹⁾ Liczby λ, μ, ν w współczynniku $A_{\nu}^{\lambda,\mu}$ nie oznaczają żadnych działań, a są tylko wskaźnikami.

¹⁾ Wykładniki współczynnika stałego należy uważać za równe zeru, gdyż jego przyrost jest zerem.

Podobnie na podstawie trzech ostatnich wzorów (13) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\delta\varphi^{01} &= \sum (A_v^{\lambda\mu})^{01} \cdot W_v^{\lambda\mu} \\ &+ \sum A_v^{\lambda\mu} \cdot W_v^{\lambda-\mu+1} - \varphi^{01} W^{01} - \varphi_{10} W^{11} + \varphi^{10} W_1^{01} - \varphi_{01} W^{21}, \\ \delta\varphi_{10} &= \sum (A_v^{\lambda\mu})_{10} \cdot W_v^{\lambda\mu} \\ &+ \sum A_v^{\lambda\mu} \cdot (W_v^{\lambda\mu})_{10} - \varphi_{10} (W^{01} + W_1^{01}) + \varphi^{10} W_2 - \varphi_{01} (2W^{11} + W_1^{20}), \\ \delta\varphi_{01} &= \sum (A_v^{\lambda\mu})_{01} \cdot W_v^{\lambda\mu} \\ &+ \sum A_v^{\lambda\mu} \cdot (W_v^{\lambda\mu})_{01} - \varphi_{01} (W^{01} + 2W_1^{10}).\end{aligned}$$

Ponieważ wykładniki współczynnika $A_v^{\lambda\mu}$ mają według założenia kształt (17), gdzie r, s są wykładnikami φ , zatem pochodne $(A_v^{\lambda\mu})^{01}, (A_v^{\lambda\mu})_{10}, (A_v^{\lambda\mu})_{01}$ mają kolejno wykładniki $\rho-1, \sigma; \rho-1, \sigma-1; \rho-1, \sigma-2$. Z drugiej strony wykładniki pochodnych $\varphi^{01}, \varphi_{10}, \varphi_{01}$ są kolejno $r-1, s; r-1, s-1; r-1, s-2$; wzory (17) stosują się więc przy powyższym założeniu i do przyrostów $\delta\varphi^{01}, \delta\varphi_{10}, \delta\varphi_{01}$, zatem są one prawdziwe w przypadku ogólnym.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że powyższe dwie własności współczynników $A_v^{\lambda\mu}$ przyrostu (15') stosują się do dowolnej funkcji pochodnych funkcji ω , która jest wyrażeniem co do swych wykładników dokładnie określonym. Niech będzie φ tego rodzaju wyrażeniem o wykładnikach r, s i niech będzie

$$\delta\varphi = \sum B_v^{\lambda\mu} \cdot W_v^{\lambda\mu}; \quad (18)$$

wówczas

$$B^{01} = r\varphi, \quad B_1^{10} = s\varphi. \quad (19)$$

Jeżeli najwyższy rząd pochodnych funkcji ω , od których φ zależy, jest n , to współczynniki $B_v^{\lambda\mu}$ są co najwyżej rzędu n -tego. Współczynniki te są nadto funkcjami, co do swych wykładników dokładnie określonymi, przyczem:

$$\delta B_v^{\lambda\mu} = B_v^{\lambda\mu} \cdot [(r-1+\mu+\nu) W^{01} + (s-\lambda+\nu) W_1^{10}] + \dots; \quad (20)$$

wynika to wprost z powyższych własności współczynników przyrostu (15') i stąd że pierwsze wykładniki poszczególnych wyrazów funkcji φ podobnie jak i drugie są identyczne.

6. Funkcję φ pochodnych funkcji ω , mającą tę własność, że jej przyrost redukuje się tylko do wyrazów następujących:

$$\delta\varphi = \varphi (r W^{01} + s W_1^{10}),$$

nazywać będziemy niezmiennikiem względnym. W tym przypadku wszystkie współczynniki $B_v^{\lambda\mu}$, z wyjątkiem współczynników (19), redukują się do zera. W przeciwnym razie, jeżeli najwyższy rząd pochodnych $W_v^{\lambda\mu}$, od których $\delta\varphi$ zależy, jest k , będziemy nazywali φ funkcją k -tej klasy. Nadto, na oznaczenie wszystkich wyrazów przyrostu $\delta\varphi$, które zależą tylko od pochodnych $W_v^{\lambda\mu}$ rzędu $i = \lambda + \mu + \nu > 2$, używać będziemy krótkiego oznaczenia $\delta_i\varphi$. Znak $\delta_2\varphi$ będzie służył do oznaczenia wyrazów, zawierających pochodne $W_2, W^{11}, W_1^{01}, W^{02}$, znak zaś $\delta_1\varphi$ na oznaczenie wyrazów, zawierających pochodne W^{01}, W_1^{10} .

Według tego oznaczenia możemy przyrostowi funkcji φ k -tej klasy nadać kształt:

$$\delta\varphi = \delta_1\varphi + \delta_2\varphi + \dots + \delta_k\varphi,$$

gdzie

$$\delta_1\varphi = \varphi (r W^{01} + s W_1^{10}),$$

jeżeli wykładniki funkcji φ są r, s .¹⁾ Część $\delta_1\varphi$ przyrostu $\delta\varphi$ będziemy oznaczali w przyszłości także przez $\varphi(r, s)$, zatem:

$$\varphi(r W^{01} + s W_1^{10}) = \varphi(r, s). \quad (21)$$

7. W końcu zwróćmy uwagę na pewną własność przekształcenia nieskończonościowego styczościowego.

Jeżeli Sf i Tf są dwoma przekształceniami nieskończonościowymi o funkcjach charakterystycznych W i V , to złożenie tych przekształceń (Sf, Tf) jest, jak wiadomo, również przekształceniem styczościowym, którego funkcja charakterystyczna—oznaczymy ją przez U —ma kształt następujący:

$$U = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x} + \left(W - z \frac{\partial W}{\partial z} \right) \frac{\partial V}{\partial y} - \left(V - z \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Nadto n -krotnie rozszerzone przekształcenie (Sf, Tf) jest identyczne ze złożeniem n -krotnie rozszerzonych przekształceń Sf, Tf , co można przedstawić symbolicznie:

$$(S^{(n)}f, T^{(n)}f) = (Sf, Tf)^{(n)}.$$

¹⁾ Zauważmy, że jeżeli φ jest k -tej klasy, przyczem $k \geq 2$, to pochodne $\varphi^{10}, \varphi^{01}, \varphi_{10}$ są $(k+1)$ -szej klasy, jak to z wzorów (13) wynika; natomiast φ_{01} nie jest klasy wyższej niż φ , gdyż stosując do $\delta\varphi$ ostatni z wzorów (13) nie podwyższamy przez to rzędu pochodnych funkcji W , od których zależy $\delta\varphi$ (zob. uw. 1, str. 8).

Własności te zastosujemy do wykrycia pewnych ważnych na przyszłość związków. Nadajmy mianowicie przekształceniu (14) rozszerzonemu na pochodne ω_{kl}^{ij} aż do rzędu n -tego, kształt następujący:

$$S^{(n)}f = \Sigma W_i^{rs} \cdot X_i^{rs} f. \quad (22)$$

Innymi słowy, połączmy ze sobą wszystkie wyrazy, zawierające tę samą pochodną W_i^{rs} , a współczynnik tej pochodnej nazwijmy $X_i^{rs}f$. Symbole $X_i^{rs}f$ oznaczają tu pewne przekształcenie nieskończonostkowe ze względu na x, y, z, u, ω i pochodne ω_{kl}^{ij} aż do rzędu n -tego. Szukane niezmienniki są, jak wiadomo, całkami układu równań liniowych cząstkowych

$$X_i^{rs}f = 0. \quad (23)$$

Zauważmy przekształcenie specjalne, którego funkcja charakterystyczna na W ma kształt

$$W = \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha! \beta! \gamma!},$$

gdzie α, β, γ są liczbami całkowitymi i dodatnimi. Łatwo stwierdzić, że pochodna $W_\gamma^{\alpha\beta} = 1$ i że żadna inna pochodna W_i^{rs} nie jest wielkością stałą, różną od zera. Zauważmy nadto inne przekształcenie specjalne, którego funkcja charakterystyczna

$$V = \frac{x^\lambda y^\mu z^\nu}{\lambda! \mu! \nu!},$$

gdzie wykładniki λ, μ, ν są całkowite i dodatnie. Podobnie jak poprzednio $V_\nu^{\lambda\mu} = 1$. Przekształcenie to, rozszerzone na pochodne ω_{kl}^{ij} aż do rzędu n -tego, ma kształt:

$$T^{(n)}f = \Sigma V_i^{rs} \cdot X_i^{rs} f,$$

przyczem symbole $X_i^{rs}f$ i granice sumowania są te same, co we wzorze (22).

Otóż złożenie (Sf, Tf) jest przekształceniem stycznościowym, którego funkcja charakterystyczna — nazwijmy ją U — ma na podstawie poprzednich uwag kształt:

$$U = A \frac{x^{\alpha+\lambda-1} y^{\beta+\mu} z^{\gamma+\nu-1}}{(\alpha+\lambda-1)! (\beta+\mu)! (\gamma+\nu-1)!} + B \frac{x^{\alpha+\lambda} y^{\beta+\mu-1} z^{\gamma+\nu}}{(\alpha+\lambda)! (\beta+\mu-1)! (\gamma+\nu)!},$$

gdzie liczby A, B mają wartości następujące:

$$A = (\alpha\nu - \gamma\lambda) \frac{(\alpha+\lambda-1)! (\beta+\mu)! (\gamma+\nu-1)!}{\alpha! \beta! \gamma! \lambda! \mu! \nu!},$$

$$B = (\beta\nu - \gamma\mu + \mu - \beta) \frac{(\alpha+\lambda)! (\beta+\mu-1)! (\gamma+\nu)!}{\alpha! \beta! \gamma! \lambda! \mu! \nu!} \quad (24)$$

przyczem pierwsza z nich jest zerem gdy $\alpha i \lambda$, lub $\gamma i \nu$ są równocześnie zerami, druga zaś gdy $\beta i \mu$ są równocześnie zerami.

Rozszerzając przekształcenie (Sf, Tf) na pochodne funkcji ω aż do rzędu n -tego, otrzymamy:

$$(Sf, Tf)^{(n)} = \Sigma U_i^{rs} \cdot X_i^{rs} f.$$

gdzie symbole $X_i^{rs}f$ i granice sumowania są znowu takie same jak we wzorze (22). Otóż na podstawie poprzednich uwag zachodzi tożsamość:

$$(\Sigma W_i^{rs} \cdot X_i^{rs} f, \Sigma V_i^{rs} \cdot E_i^{rs} f) = \Sigma U_i^{rs} \cdot X_i^{rs} f.$$

Podstawmy w tej równości za W, V, U powyższe wyrażenia i porównajmy po obu jej stronach wyrazy niezależne od x, y, z . Jeżeli liczby α, β, γ i λ, μ, ν nie przewyższają odpowiednich granic sumowania względem r, s, t we wzorze (22), otrzymamy:

$$(X_\gamma^{\alpha\beta} f, X_\nu^{\lambda\mu} f) = A \cdot X_{\gamma+\nu-1}^{\alpha+\lambda-1, \beta+\mu} f + B X_{\gamma+\nu}^{\alpha+\lambda, \beta+\mu-1} f \quad (25)$$

przyczem prawa strona tej tożsamości redukuje się do zera lub do jednego tylko wyrazu, jeżeli przekształcenia w niej występujące nie znajdują się wśród lewych stron równań (23).

Tożsamość (25) wskazuje, że układ równań (23) jest układem zupełnym, a równocześnie jak wyrażają się złożenia lewych stron tych równań.

II. Zamiana zmiennych i pochodne klasy drugiej.

1. Przyrost $\partial \omega_{kl}^{ij}$ ma w przypadku ogólnym kształt zanadto zawiły. I dlatego zastąpimy niektóre ze zmiennych ω_{kl}^{ij} pewnymi wyrażeniami, których przyrost jest nieco prostszy. Innymi słowy, przeprowadzimy w układzie równań cząstkowych (23) zamianę zmiennych tak, aby nowy układ był prostszy.

W tym celu zauważmy pochodne $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ i obliczmy dokładnie ich przyrosty. Stosując do $\partial \omega$ trzykrotnie ostatni z wzorów (13), otrzymamy:¹⁾

$$\begin{aligned} \partial \omega &= \omega(1, 3) + W^{30}, \\ \partial \omega_{01} &= \omega_{01}(0, 1) + 3\omega W_2 + 3W^{11} + 3W_1^{20}, \\ \partial \omega_{02} &= \omega_{02}(-1, -1) + 4\omega_{01}W_2 + 6W_1^{01} + 6W_2^{10}, \\ \partial \omega_{03} &= \omega_{03}(-2, -3) + 3\omega_{02}W_2 + 6W_3; \end{aligned} \quad (26)$$

¹⁾ Liczby w nawiasach są wykładnikami danej pochodnej ω . Zob. (21).

stosując zaś jeszcze raz ostatni z wzorów (13) do $\delta\omega_{03}$, otrzymamy:

$$\delta\omega_{04} = \omega_{04}(-3, -5), \quad (27)$$

co wskazuje, że pochodna ω_{04} jest niezmiennikiem względnym.¹⁾

Zauważmy przede wszystkim, że pochodne (26) są wszystkie 3-ej klasy i że część przyrostu δ_3 każdej z nich zawiera tylko jedną pochodną funkcji W trzeciego rzędu, pomnożoną przez pewien stały czynnik. Wszystkich pochodnych funkcji W trzeciego rzędu jest 10, a są one następujące:

$$\begin{aligned} & W^{30} \quad W^{21} \quad W^{12} \quad W^{03}, \\ & W_1^{20} \quad W_1^{11} \quad W_1^{02}, \\ & W_2^{10} \quad W_2^{01}, \\ & W_3. \end{aligned} \quad (28)$$

Otóż w przyrostach (26) znajdują się pochodne rzędu 3-go, zawarte w pierwszej kolumnie. Postaramy się o znalezienie takich sześciu wyrażeń klasy trzeciej, których δ_3 redukuje się do jednej z dalszych pochodnych funkcji W rzędu trzeciego.

W tym celu rozdzieliśmy pochodne ω_{kl}^{ij} w sposób następujący:

$$\omega_k^{ij}, \quad \omega_{k1}^{ij}, \quad \omega_{k2}^{ij}, \quad \omega_{k3}^{ij}, \quad (29)$$

$$\omega_{k,l+4}^{ij} \quad (30)$$

i zauważmy, że w przyrostach wszystkich pochodnych (29) występuje zawsze jedna tylko pochodna funkcji W najwyższego rzędu, pomnożona przez pewien czynnik stały, jak to z wzorów (13) i kształtu $\delta\omega$ wynika. Niektóre z tych pochodnych funkcji W najwyższego rzędu są identyczne. I tak np.

$$\delta_4\omega_{10} = W_1^{30}, \quad \delta_4\omega_{01}^4 = 3W_1^{30},$$

z czego wynika, że różnica $\omega_{01}^{10} - 3\omega_{10}$ jest trzeciej klasy, t. j. że jej δ_4 jest zerem. Różnica ta jest nadto wyrażeniem co do swych wykładników dokładnie określonym, o wykładnikach $r=0, s=2$. Obliczmy dokładnie jej δ_3 .

¹⁾ Wynik ten będzie łatwo zrozumiały, jeżeli zauważymy, że równanie $y''' = \omega(xyzu)$ w którym ω jest wielomianem całkowitym 3 stopnia ze względu na u , zachowuje tę własność po wykonaniu na niem dowolnego przekształcenia stycznościowego.

Ponieważ ¹⁾

$$\begin{aligned} \delta\omega_{01}^{10} &= \omega_{01}^{10}(0,2) + 3\omega_{10}W_2 - \omega_{02}W^{30} + \omega_{01}W_1^{20} + 3\omega W_2^{10} + 3W^{21} + 3W_1^{30}, \\ \delta\omega_{10} &= \omega_{10}(0,2) + \omega^{10}W_2 - 2\omega_{01}W^{11} + 4\omega W_1^{01} - \omega_{01}W_1^{20} + 3\omega W_2^{10} + 3W^{21} + W_1^{30}, \end{aligned}$$

zatem:

$$\delta_3(\omega_{01}^{10} - 3\omega_{10}) = -\omega_{02}W^{30} + 4\omega_{01}W_1^{20} - 6\omega W_2^{10} - 6W^{21}.$$

W przyroście tym spotykamy obok pochodnych funkcji W trzeciego rzędu, występujących w przyrostach (26), jeszcze pochodną W^{21} . Zauważmy wyrażenie następujące: $\omega\omega_{02} - \frac{2}{3}\omega_{01}\omega_{01}$. Wykładniki tego wyrażenia są $r=0, s=2$, a z wzorów (26) wynika, że jego δ_3 jest równe:

$$\omega_{03}W^{30} - 4\omega_{01}W_1^{20} + 6\omega W_1^{10}.$$

Wyrażenie zatem

$$\alpha = \omega_{01}^{10} - 3\omega_{10} + \omega\omega_{02} - \frac{2}{3}\omega_{01}\omega_{01} \quad (31)$$

jest co do swych wykładników dokładnie określone, a jego przyrost posiada tylko jedną pochodną funkcji W trzeciego rzędu $\delta_3\alpha = -6W^{21}$.

Ze względu na późniejsze znaczenie funkcji α obliczmy jej całkowity przyrost. W tym celu wystarczy obliczyć tylko $\delta_2\alpha$, t. j. spółczynniki pochodnych $W_2, W^{11}, W_1^{01}, W^{02}$. Spółczynniki pierwszej i ostatniej są zerami, drugiej i trzeciej $2\omega_{01}, -6\omega$ tak, że

$$\delta\alpha = \alpha(0, 2) + 2\omega_{01}W^{11} - 6\omega W_1^{01} - 6W^{21},$$

$$\delta\alpha_{01} = \alpha_{01}(-1, 0) + 2\alpha W_2 + 2\omega_{02}W^{11} - 4\omega_{01}W_1^{01} - 6W^{02} - 12W_1^{11}, \quad (32)$$

$$\delta\alpha_{02} = \alpha_{02}(-2, -2) + 2\alpha_{01}W_2 + 2\omega_{03}W^{11} - 2\omega_{02}W_1^{01} - 12W_2^{01}.$$

¹⁾ Przyrosty te otrzymamy na podstawie wzorów (16), (13), stosując do $\delta\omega_{01}$ pierwszy z wzorów (13), a do $\delta\omega$ trzeci.

Ze względów praktycznych wprowadzamy w pisanie wyrazów pewnego przyrostu $\delta\varphi$ porządek następujący: W przyroście δ_2 następują po sobie wyrazy, zawierające kolejno pochodne drugiego rzędu $W_2, W^{11}, W_1^{01}, W^{02}$, czyli pochodne pierwszej, drugiej i trzeciej kolumny zestawienia

$$\begin{array}{ccc} W^{30} & W^{21} & W^{02} \\ W_1^{20} & W_1^{11} & \\ W_2 & & \end{array}$$

z wyjątkiem dwóch pierwszych pochodnych W^{20}, W_1^{10} , z których pierwsza nie występuje w żadnym przyroście, a drugą zaliczyliśmy do δ_1 .

Podobnie w przyroście δ_3 następują po sobie wyrazy, zawierające kolejno pochodne pierwszej, drugiej i t. d. kolumny zestawienia (28). Z funkcjami klasy wyższej niż trzecia nie będziemy się w ogólności spotykali.

Dwa ostatnie przyrosty można, jak wiadomo, otrzymać, stosując do $\delta\alpha$ ostatni z wzorów (13).

Funkcje α , α_{01} , α_{02} są, jak widzimy, wszystkie klasy trzeciej, a ich δ_3 redukuje się do jednej z pochodnych funkcji W , rzędu trzeciego, występujących w drugiej kolumnie zestawienia (28).

Celem znalezienia dalszych zauważmy, że

$$\delta_4 \alpha_{10} = -6W_1^{21}, \quad \delta_4 \omega_{01}^1 = 3W_1^{21}.$$

Wyrażenie $\alpha_{10} + 2\omega_{01}^1$ jest więc wyrażeniem klasy trzeciej, a przytem jest ono co do swych wykładników dokładnie określone, gdyż wykładniki pochodnych α_{10} i ω_{01}^1 są $r = -1$, $s = 1$. Obliczmy δ_3 tego wyrażenia. Ponieważ:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_{10} &= \alpha_{10} (-1, 1) + \alpha^{10} W_2 - 2(\alpha_{01} - \omega_{11}) W_1^{11} + 2(\alpha - 3\omega_{10}) W_1^{01} + 2\omega_{01} W_2^{02} \\ &\quad - \alpha_{01} W_1^{20} + 2\alpha W_2^{10} + 2\omega_{01} W_1^{11} - 6\omega W_2^{01} - 12W^{12} - 6W_1^{21}, \\ \delta \omega_{01}^1 &= \omega_{01}^1 (-1, 1) + 3\omega^{01} W_2 - \omega_{11} W_1^{11} + \omega_{01}^1 W_1^{01} - \omega_{02} W_2^{21} + \omega_{01} W_1^{11} \\ &\quad + 3\omega W_2^{01} + 3W^{12} + 3W_1^{21}, \end{aligned}$$

zatem:

$$\delta_3 (\alpha_{10} + 2\omega_{01}^1) = -\alpha_{01} W_1^{20} + 2\alpha W_2^{10} - 2\omega_{02} W_2^{21} + 4\omega_{01} W_1^{11} - 6W^{12}.$$

W przyroście tym występuje nowa pochodna funkcji charakterystycznej W trzeciego rzędu, W^{12} . Zauważmy wyrażenie następujące: $-\frac{1}{2}\omega_{02}\alpha + \frac{1}{2}\omega_{01}\alpha_{01}$. Wykładniki tego wyrażenia są $r = -1$, $s = 1$, a jego δ_3 , jak to z przyrostów (26), (32) wynika, jest $\alpha_{01} W_1^{20} - 2\alpha W_2^{10} + 2\omega_{02} W_2^{21} - 4\omega_{01} W_1^{11}$. Wyrażenie zatem

$$\beta = \alpha_{10} + 2\omega_{01}^1 - \frac{1}{2}\omega_{02}\alpha + \frac{1}{2}\omega_{01}\alpha_{01} \quad (33)$$

jest co do swych wykładników dokładnie określone, a jego δ_3 redukuje się do $-6W^{12}$.

Obliczywszy $\delta_2\beta$ na podstawie (26), (32), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \delta\beta &= \beta (-1, 1) + \alpha W_2 - \alpha_{01} W_1^{11} + 2\alpha W_1^{01} - 6W^{12}, \\ \delta\beta_{01} &= \beta_{01} (-2, -1) + (\alpha_{01} + \beta) W_2 - \alpha_{02} W_1^{11} + \alpha_{01} W_1^{01} - 6W_1^{21}, \end{aligned} \quad (34)$$

gdzie przez α oznaczyliśmy wyrażenie następujące:

$$\alpha = \alpha^{10} + 6\omega^{01} - \frac{2}{3}\omega_{01}\alpha + \omega_{01}\alpha. \quad (35)$$

Wyrażenie to ma w tej teorii pierwszorządne znaczenie, jak to później zobaczymy.

W przyrostach (34) spotykamy dwie nowe pochodne rzędu trzeciego funkcji charakterystycznej W . Aby otrzymać ostatnią, mianowicie W^{03} , zauważmy, że

$$\delta_4 \beta_{10} = -6W_1^{12}, \quad \delta_4 \alpha_{01}^1 = -12W_1^{12}$$

i że wykładniki pochodnych β_{10} , α_{01}^1 są identyczne, a pierwszy z nich jest $r = -2$, drugi $s = 0$. Wyrażenie $\beta_{10} - \frac{1}{2}\alpha_{01}^1$ jest zatem 3-ej klasy i jest co do swych wykładników dokładnie określone. Przyrost δ_3 ma kształt następujący: ¹⁾

$$\begin{aligned} \delta_3 (\beta_{10} - \frac{1}{2}\alpha_{01}^1) &= -\beta_{01} W_1^{20} + \beta W_2^{10} + \alpha W_3 + \frac{1}{2}\alpha_{02} W_2^{21} - \alpha_{01} W_1^{11} \\ &\quad + \alpha W_2^{01} - \omega_{02} W^{12} + 2\omega_{01} W_1^{02} - 3W^{03}. \end{aligned}$$

Zauważmy wyrażenie:

$$\frac{1}{6}\omega_{03}\alpha + \frac{1}{6}\omega_{02}\beta - \frac{1}{2}\omega_{01}\beta_{01} - \frac{1}{2}\alpha\alpha_{02} + \frac{1}{2}\alpha_{01}\alpha_{01}.$$

Jest ono co do swych wykładników dokładnie określone, przyczem $r = -2$, $s = 0$. ²⁾ Łatwo stwierdzić na podstawie przyrostów (26), (32), (34), że jego δ_3 różni się od prawej strony ostatniej równości tylko ostatnim jej wyrazem tak, że nazywając

$$\gamma = \beta_{10} - \frac{1}{2}\alpha_{01}^1 - \frac{1}{6}\omega_{03}\alpha - \frac{1}{6}\omega_{02}\beta + \frac{1}{2}\omega_{01}\beta_{01} + \frac{1}{2}\alpha\alpha_{02} - \frac{1}{2}\alpha_{01}\alpha_{01}, \quad (36)$$

otrzymamy:

$$\delta_3 \gamma = -3W^{03}.$$

Funkcja γ jest więc funkcją klasy trzeciej i posiada wykładniki $r = -2$, $s = 0$, co do których jest ona dokładnie określona. Obliczywszy jej δ_2 , otrzymamy całkowity jej przyrost:

$$\delta\gamma = \gamma (-2, 0) + 2\alpha'_{10} W_2 - \frac{2}{3}\beta_{01} W_1^{11} + \frac{1}{2}(3\beta - \alpha_{01}) W_1^{01} - 3W^{03}. \quad (37)$$

Spółczynnik przy W_2 nazwalimy tu dla krótkości α_{10}' . Ma on wartość następującą: ³⁾

¹⁾ Ponieważ na podstawie (13), (32), (34)

$$\begin{aligned} \delta\beta_{10} &= \beta_{10} (-2, 0) + (\alpha_{10} + \beta_{10}) W_2 - (2\beta_{01} + \alpha_{11}) W_1^{11} + 2\alpha_{10} W_1^{01} - \alpha_{01} W^{02} - \\ &\quad - \beta_{01} W_1^{20} + \beta W_2^{10} + \alpha W_3 - \alpha_{01} W_1^{11} + 2\alpha W_1^{01} - 6W^{03} - 6W_1^{12}, \\ \delta\alpha_{01}^1 &= \alpha_{01}^1 (-2, 0) + 2\alpha^{01} W_2 - (\alpha_{11} - 2\omega_{02}^1) W_1^{11} + (\alpha_{10}^1 - 4\omega_{01}^1) W_1^{01} - \alpha_{01} W^{02} \\ &\quad - \alpha_{02} W_2^{21} + 2\alpha W_2^{01} + 2\omega_{02} W^{12} - 4\omega_{01} W_1^{02} - 6W^{03} - 12W_1^{12}. \end{aligned}$$

²⁾ Wykładniki α są $r = 0$, $s = 3$, co wynika z wzoru (20), jeżeli go zastosujemy do pierwszego przyrostu (34).

³⁾ Przy obliczaniu współczynnika przy W_2 należy uwzględnić tożsamość

$$\alpha'_{10} = \beta_{10} - \alpha^{01} + \omega_{01}\beta_{01} - \frac{1}{2}\omega_{01}\beta - \frac{1}{6}\omega_{02}\alpha,$$

o której później będzie mowa. Oznaczenie wyrażenia (38) uzasadnione będzie później. Z wzoru (20) wynika, że jest ono co do swych wykładników dokładnie określone, przyczem $r = -1$, $s = 2$.

$$a_{10}' = a_{10} + \frac{1}{3} \omega_{01} a_{01} - \frac{1}{3} \omega_{02} a. \quad (38)$$

2. Zdefiniowane w powyższy sposób funkcje α , β , γ pozwolą nam uprościć rozwiązanie naszego zagadnienia. Zauważmy, że są one funkcjami całkowitemi pochodnych ω i że zawierają między innymi wyrazy następujące:

$$\alpha = \omega_{01}^{10} + \dots, \quad \beta = \omega_{11}^{10} + \dots, \quad \gamma = \omega_{21}^{10} + \dots, \quad (39)$$

które będziemy nazywali wyrazami pierwszymi tych funkcji. Co do wyrazów dalszych zauważmy, że pochodne ω , od których one zależą, są niewyższych rzędów od wyrazu pierwszego. Funkcje α , β , γ są więc kolejno 2, 3, 4-go rzędu. Zauważmy nadto, że jeżeli w wyrazach dalszych występuje pochodna ω_{kl}^{ij} tego samego rzędu, co wyraz pierwszy, to liczba l , czyli rząd pochodnej cząstkowej według u jest dla niej większy, niż w wyrazie pierwszym. Wynika to wprost z kształtu tych funkcji.

Rozszerzając przekształcenie nieskończonostkowe na pochodne ω_{kl}^{ij} , możemy zastąpić pochodne ω_{01}^{10} , ω_{11}^{10} , ω_{21}^{10} kolejno przez α , β , γ . Korzyść tej zamiany później zobaczymy. Jest ona zresztą i dlatego dogodna, że przyrosty funkcji α , β , γ mają kształt znacznie prostszy niż przyrosty ich wyrazów pierwszych.

Aby nie przerywać toku późniejszych rozumowań, pomówimy tu jeszcze o dwu tego rodzaju funkcjach zastępczych. Jedną z nich jest funkcja a , określona wzorem (35). Jest ona co do swych wykładników dokładnie określona, przyczem $r=0$, $s=3$. Przyrost jej jest bardzo prosty:¹⁾

$$\delta a = a(0, 3). \quad (40)$$

Funkcja a jest więc, podobnie jak ω_{04} , niezmiennikiem względnym. Ponieważ a zawiera wyraz ω_{01}^{10} , zatem:

$$a = \omega_{01}^{20} + \dots, \quad (41)$$

przyczem wyrazy dalsze są różne od wyrazu pierwszego, a rząd ich nie jest wyższy od rzędu wyrazu pierwszego. Funkcja a jest więc rzędu 3-go.

Drugą funkcję zastępczą określimy w sposób następujący. Z wzorów (37), (34) wynika, że

¹⁾ Przyrosty δa^{10} i $\delta \omega_{01}^{10}$ mają na podstawie (13), (26), (32) kształt następujący:
 $\delta a^{10} = a^{10}(0, 3) + 2\omega_{01}^{10} W^{11} - 6\omega_{11}^{10} W^{11} - \alpha_{01} W^{20} + 2\alpha W^{21} + 2\omega_{01} W^{21} - 6\omega W^{11} - 6W^{21}$
 $\delta \omega_{01}^{10} = \omega_{01}^{10}(0, 3) - \omega_{01} W^{11} + \omega_{11}^{10} W^{11} + \omega W^{02} - \omega_{01} W^{21} + 3\omega W^{11} + W^{21}$.
 Przyrosty dalszych wyrazów funkcji a są podane wyżej.

$$\delta_4 \gamma_{10} = -3 W_1^{03}, \quad \delta_4 \beta_{01}^{01} = -6 W_1^{03}.$$

Zatem różnica $\gamma_{10} - \frac{1}{2} \beta_{01}^{01}$ jest klasy trzeciej. Jest ona nadto co do swych wykładników dokładnie określona, o wykładnikach $r=-3$, $s=-1$. Przyrost jej δ_3 ma kształt następujący:¹⁾

$$\begin{aligned} \delta_3 \left(\gamma_{10} - \frac{1}{2} \beta_{01}^{01} \right) &= -\gamma_{01} W_1^{20} + 2a'_{10} W_3 + \frac{1}{2} \beta_{02} W^{21} - \beta_{01} W_1^{11} \\ &+ (\beta - a_{01}) W_2^{01} + \frac{1}{2} \alpha_{02} W^{12} - \frac{1}{2} \alpha_{01} W_1^{02}. \end{aligned}$$

Otóż wyrażenie

$$-\frac{1}{3} \omega_{01} \gamma_{01} + \frac{1}{3} \omega_{03} a'_{10} - \frac{1}{12} \alpha \beta_{02} + \frac{1}{12} \alpha_{01} \beta_{01} - \frac{1}{12} \alpha_{02} (\beta - a_{01})$$

jest również co do swych wykładników dokładnie określone, a jego wykładniki są identyczne z poprzednimi. Przyrost δ_3 tego wyrażenia²⁾ jest identyczny z przyrostem δ_3 powyższej różnicy, zatem suma

$$l = \gamma_{10} - \frac{1}{2} \beta_{01}^{01} + \frac{1}{3} \omega_{01} \gamma_{01} - \frac{1}{3} \omega_{03} a'_{10} + \frac{1}{12} \alpha \beta_{02} - \frac{1}{12} \alpha_{01} \beta_{01} + \frac{1}{12} \alpha_{02} (\beta - a_{01}) \quad (42)$$

jest wyrażeniem klasy drugiej, t. j. $\delta_3 l = 0$. Przyrost całkowity δl ma więc kształt następujący:

$$\delta l = l(-3, -1) + \delta_2 l \quad (43)$$

ponieważ wykładniki wyrażenia l są $r=-3$, $s=-1$. Obliczenie przyrostu $\delta_2 l$ nie jest tu konieczne, znajdziemy go później sposobem prostszym.

Zauważmy, że l jest funkcją całkowitą pochodnych ω i że zawiera pochodną γ_{10} , która jest rzędu 5-go, przyczem dalsze wyrazy nie są rzędów wyższych. Ponieważ funkcja γ zawiera wyraz ω_{21}^{10} , zatem l zawiera wyraz ω_{31}^{10} , który nazywać będziemy wyrazem pierwszym tej funkcji. Wyrazy dalsze posiadają tę własność, że jeżeli wśród nich znajduje się pochodna ω_{kl}^{ij} tego samego rzędu co wyraz pierwszy, to rząd pochodnej cząstkowej według u jest w niej wyższy, niż w wyrazie pierwszym.

¹⁾ Z przyrostów $\delta_3 \gamma$, $\delta_3 \beta_{01}$ i wzorów (15) wynika, że

$$\begin{aligned} \delta_3 \gamma_{10} &= -\gamma_{01} W_1^{20} + 2a'_{10} W_3 - \frac{3}{2} \beta_{01} W_1^{11} + \frac{1}{2} (3\beta - a_{01}) W_2^{01} \\ \delta_3 \beta_{01}^{01} &= -\beta_{02} W_1^{21} - \beta_{01} W_1^{11} + (a_{01} + \beta) W_2^{01} - \alpha_{02} W^{12} + \alpha_{01} W_1^{02}. \end{aligned}$$

²⁾ Wyrażenie a'_{10} określone równością (38) jest klasy drugiej, jak to wkrótce ogólnie wykazemy. Podobnie też

$$\delta_3 a_{01} = \delta_3 \beta_{02} = \delta_3 \gamma_{01} = 0,$$

jak to z przyrostów (34), (36), (40) i ostatniego z wzorów (13) wynika.

Zauważmy jeszcze, że pochodne β_{02} , γ_{01} są podobnie jak l , klasy drugiej.¹⁾ Stosując bowiem do $\delta\beta_{01}$, $\delta\gamma$ ostatni z wzorów (13), otrzymamy:

$$\begin{aligned}\delta\beta_{02} &= \beta_{02}(-3, -3) + \alpha_{02}W_2 - \alpha_{03}W^{11} \\ \delta\gamma_{01} &= \gamma_{01}(-3, -2) + 2a'_{11}W_2 - \frac{2}{3}\beta_{02}W^{11} - \frac{1}{2}\alpha_{02}W^{01}_1,\end{aligned}\quad (44)$$

gdzie przez a'_{11} oznaczyliśmy pochodną $(\alpha'_{10})_{01}$ wyrażenia (38). Wprowadźmy na oznaczenie tych pochodnych nazwy następujące:

$$m = \gamma_{01}, \quad n = \beta_{02}. \quad (45)$$

Funkcje l , m , n są wszystkie rzędu 5-go i zawierają między innymi wyrazy następujące:

$$l = \omega_{31}^{10} + \dots, \quad m = \omega_{22}^{10} + \dots, \quad n = \omega_{13}^{10} + \dots \quad (46)$$

Wyrazy dalsze zależą również od pochodnych ω_{ki}^{ij} rzędu 5-go, jednak rząd pochodnych cząstkowych według u jest w nich wyższy niż w wyrazie pierwszym.

3. Przejdźmy teraz do układu równań (23), którego całki są, jak wiadomo, szukane niezmiennikami. Zmienne ω_{ki}^{ij} tego układu można przy pomocy powyżej zdefiniowanych funkcji zastąpić w sposób, uwidoczniiony w następującej tabeli:

x	x'
ω_k^{ij}	ω_k^{ij}
ω_{k1}^{ij}	$\omega_{k1}^{0j} \alpha^{0j} \beta^{0j} \gamma^{0j}; \quad \alpha_k^{ij} l_k^{0j}$
ω_{k2}^{ij}	$\omega_{k2}^{0j} \alpha_{01}^{0j} \beta_{01}^{0j}; \quad \alpha_{k1}^{ij} m_k^{0j}$
ω_{k3}^{ij}	$\omega_{k3}^{0j} \alpha_{02}^{0j}; \quad \alpha_{k2}^{ij} n_k^{0j}$
$\omega_{k, l+4}^{ij}$	$\omega_{k, l+4}^{ij}$
	(v) (u)

(47)

¹⁾ Podobnie pochodna α_{03} jest klasy drugiej. Z wzorów (13), (32) wynika, że

$$\delta\alpha_{02} = \alpha_{02}(-3, -4) + 2\omega_{04}W^{11}.$$

Zamiast więc rozszerzać przekształcenie nieskończonostkowe na pochodne ω_{ki}^{ij} , $i+j+k+l \leq n$, które tu dla krótkości nazywać będziemy zmiennymi x , rozszerzymy ją na zmienne, oznaczone w powyższym zestawieniu przez x' , aż do n -tego rzędu. Zmienne x rozdzieliliśmy tu na 5 grup; każdą zmienną x , należącą do jednej z tych grup, zastąpimy przez pewną zmienną x' , znajdującą się w tym samym wierszu, co zmienna x .

Wykażemy, że zamiana taka jest bez szkody dla ogólności naszego zagadnienia możliwa. Zmienne x' rzędu $\leq n$ są, jak wiemy, funkcjami zmiennych x rzędu $\leq n$, wystarczy zatem wykazać, że odwrotnie zmienne x rzędu $\leq n$ są funkcjami zmiennych x' rzędu $\leq n$.¹⁾

Zauważmy przedewszystkiem, że zmienne ω_k^{ij} , $\omega_{k, l+4}^{ij}$ pozostawiamy bez zmiany. Zamiast jednak rozszerzać przekształcenie nieskończonostkowe ma pochodne ω_{ki}^{ij} , $i+j+k+l \leq n$, rozszerzymy ją na

$$\omega_{k1}^{0j}, \alpha^{0j}, \beta^{0j}, \gamma^{0j}, \alpha_k^{ij}, l_k^{0j},$$

przyczem wskaźniki i, j, k mają być tak dobrane, aby rząd tych zmiennych był $\leq n$.²⁾ Zmienne te są funkcjami zmiennych ω_{ki}^{ij} , mianowicie wyraz pierwszy każdej z nich jest identyczny z pewną zmienną ω_{ki}^{ij} .

Istotnie, zmienne ω_{ki}^{ij} można rozdzielić w następujący sposób:

$$\omega_{k1}^{0j}, \omega_{01}^{1j}, \omega_{11}^{1j}, \omega_{21}^{1j}, \omega_{k1}^{2+i, j}, \omega_{k+3, 1}^{1j}.$$

Nadając liczbom i, j, k odpowiednie wartości tak, aby suma wszystkich wskaźników była $\leq n$, wyczerpiemy w ten sposób wszystkie zmienne ω_{ki}^{ij} rzędu $\leq n$. Otóż zastępując te ostatnie przez zmienne x' , zostawiamy ω_{ki}^{ij}

¹⁾ Liczby i, j, k, l nie mają w powyższym zestawieniu (47) tego samego znaczenia dla zmiennych x i x' . Zmiennym x rzędu $\leq n$ odpowiadają zmienne x' również rzędu $\leq n$. Oznaczając zatem przez φ dowolną zmienną ω , α , β , γ , α , l , m , n , a przez $\varphi_{\rho}^{\lambda\mu}$ jej pochodne, występujące wśród zmiennych x' , należy nadać liczbom λ, μ, ν, ρ takie wartości, aby $\lambda + \mu + \nu + \rho \leq n - k$, gdzie k jest rzędem zmiennej φ . Zmienne α, β, γ są, jak wiadomo, kolejno 2, 3, 4, rzędu zmienna α jest rzędu 3-go, zmienne zaś l, m, n są wszystkie rzędu 5-go.

²⁾ Zatem dla ω_{k1}^{0j} ma być $j+k+l \leq n$; dla α^{0j} , $j \leq n-2$; dla β^{0j} , $j \leq n-3$; dla γ^{0j} , $j \leq n-4$; dla α_k^{ij} , $i+j+k \leq n-3$; dla l_k^{0j} , $j+k \leq n-5$.

bez zmiany, ω_{01}^{ij} zastępujemy przez zmienną α^{0j} , której wyraz pierwszy jest ω_{01}^{ii} , ω_{11}^{1j} zastępujemy przez zmienną β^{0j} , której wyrazem pierwszym jest ω_{11}^{1j} i t. d.

W podobny sposób zastępujemy zmienne ω_{k2}^{ij} , ω_{k3}^{ij} rzędów $\leq n$ przez zmienne x' tych samych rzędów, znajdujące się w powyższym zestawieniu w tym samym co one wierszu. Wyraz pierwszy każdej zmiennej x' jest identyczny ze zmienną x , którą ona zastępuje.

W ten sposób każdej zmiennej x odpowiada jedna i tylko jedna zmienna x' , która albo jest z nią identyczna, albo ma z nią identyczny wyraz pierwszy.

Zmienne x' mają kształt następujący:

$$x' = x + R(x), \quad (48)$$

gdzie $R(x)$ albo jest zerem, albo oznacza funkcję całkowitą i wymierną zmiennych x , nie wyższego rzędu niż wyraz pierwszy. Możemy wykazać, że zmienne x można odwrotnie wyrazić przy pomocy zmiennych x' , czyli rozwiązać układ równań (48) ze względu na x . Rozwiązanie takie jest dlatego możliwe, ponieważ pomiędzy zmiennymi x' nie zachodzi żaden związek, niezależny od zmiennych x .

Istotnie, wyrazy pierwsze prawych stron równań (48) są wszystkie między sobą różne, przyczem wyrazy dalsze mogą zależeć od zmiennych x co najwyżej tego samego rzędu co wyraz pierwszy. Otóż, jeżeli wyrazem pierwszym jest ω_{k1}^{ij} i jeżeli R zależy od zmiennej $\omega_{\nu\rho}^{\lambda\mu}$, tego samego rzędu co wyraz pierwszy, to zawsze $l < \rho$. Własność tę posiadają zmienne α , β , γ , a , l ,¹⁾ wszystkie zaś inne zmienne x' , dla których R jest różne od zera, są ich pochodnymi, zatem i one posiadają tę własność. Ze względu na to można zmienne x' ułożyć w ciąg według rosnącego rzędu tak, aby wyraz pierwszy następnej nie wchodził w skład poprzedniej zmiennej x' , a stąd wynika, że pomiędzy zmiennymi x' nie może istnieć żaden związek niezależny od zmiennych x . Równania (48) można więc rozwiązać ze względu na zmienne x . Z kształtu tych równań łatwo zresztą wywnioskować, że zmienne x są również funkcjami całkowitemi zmiennych x' .

4. Zmienne x' podzieliśmy w powyższym zestawieniu na zmienne u i v . Cel tego podziału wkrótce poznamy. Rozdzielmy również zmienne x na dwie grupy x_1 i x_2 w następujący sposób:

	x	
ω_k^{ij}	ω_k^{ij}	
ω_{k1}^{1j}	ω_k^{0j} ω_{01}^{1j} ω_{11}^{1j} ω_{21}^{1j} ; $\omega_{k+2,1}^{i+2,j}$ $\omega_{k+3,1}^{1j}$	
ω_{k2}^{ij}	ω_k^{0j} ω_{02}^{1j} ω_{12}^{1j} ; $\omega_{k+2,2}^{i+2,j}$ $\omega_{k+2,2}^{1j}$	
ω_{k3}^{ij}	ω_k^{0j} ω_{03}^{1j} ; $\omega_{k+2,3}^{i+2,j}$ $\omega_{k+1,3}^{1j}$	
$\omega_{k,l+4}^{ij}$	; $\omega_{k,l+4}^{ij}$	
	(x_2)	(x_1)

Zmienne x_1 są wyrazami pierwszymi zmiennych u , zmienne zaś x_2 są wyrazami pierwszymi zmiennych v . W tem znaczeniu możemy powiedzieć, że każdej zmiennej x_1 odpowiada jedna zmienna u , każdej zaś zmiennej x_2 jedna zmienna v , i odwrotnie.

Zauważmy, że zmienne u , v mają kształt następujący:

$$\begin{aligned} u &= x_1 + R(x_1, x_2), \\ v &= x_2 + R'(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (49)$$

Łatwo stwierdzić, że, gdy położymy wszystkie zmienne x_2 równe zeru, wówczas wszystkie zmienne v redukują się do zera. Wystarczy mianowicie stwierdzić to dla zmiennych α , β , γ i dla pochodnych α_{01} , α_{02} , β_{01} . Wszystkie inne zmienne v są bowiem albo ich pochodnymi według y , albo są wprost identyczne z pewną zmienną x_2 . Otóż, jeżeli pewne wyrażenie jest zerem, gdy położymy zmienne $x_2 = 0$, to i jego pochodna według y jest także zerem, gdy $x_2 = 0$, gdyż pochodna według y każdej zmiennej x_2 jest również zmienną x_2 , jak to z ostatniego zestawienia wynika. Dodajmy, że żadna zmienna u nie redukuje się do zera, gdy położymy zmienne $x_2 = 0$. Uwaga ta posłuży nam później do wykrycia pewnych związków.

5. Zwróćmy teraz uwagę na przyrosty zmiennych u i v . Zmienne v są klasy nie niższej od trzeciej i posiadają tę szczególną własność, że w przyroście każdej z nich występuje jedna tylko pochodna funkcji charakterystycznej W najwyższego rzędu. I tak np. gdy w zestawieniu (47) położymy $i = j = k = 0$, to zmienne v , otrzymane w ten sposób, są wszystkie klasy trzeciej, a ich δ_3 redukuje się do jednej z pochodnych (28), pomnożonej przez pewien stały czynnik. Podobnie, gdy położymy $i + j + k = \nu - 3$, to otrzy-

¹⁾ Jestto wprost widoczne z wzorów (31), (33), (35), (36), (42).

maneżienne v są wszystkie v -tej klasy, a ich δ , redukuje się do jednej z pochodnych W v -tego rzędu, pomnożonej przez stały czynnik. Co więcej, wszystkie te pochodne funkcji W v -tego rzędu są między sobą różne, a liczba ich jest dokładnie równa liczbie wszystkich pochodnych funkcji W v -tego rzędu.

Zajmiemy się nieco bliżej zmiennymi u , przyczem dla uproszczenia pisowni wprowadźmy nowe oznaczenie:

$$b = u_{04}.$$

Wszystkie zmienne u są pochodnymi pięciu zmiennych następujących:

$$a, b, l, m, n. \quad (50)$$

Wśród nich są zmienne a, b niezmiennikami względnymi, trzy zaś pozostałe są klasy drugiej.

Zestawmy ze sobą przyrosty wszystkich zmiennych (50), znalezione poprzednio we wzorach (27), (40), (44), zmieniając równocześnie poprzednią pisownię:

$$\begin{aligned} \delta a &= a(0, 3), \\ \delta b &= b(-3, 5), \\ \delta l &= l(-3, -1) + \delta_2 l, \\ \delta m &= m(-3, -2) + 2a_{11} W_2 - \frac{3}{2} n W^{11} - \frac{1}{2} a_{02} W_1^{01}, \\ \delta n &= n(-3, -3) + a_{02} W_2 - a_{03} W^{11} \end{aligned} \quad (50')$$

i zwróćmy uwagę na współczynniki przy pochodnych funkcji W , występujące w tych przyrostach. Niektóre z nich, co jest wprost widoczne, są klasy drugiej. Wykażemy, że wszystkie są co najwyżej klasy drugiej.

W tym celu wykażemy pewną nieco ogólniejszą własność. Zauważmy mianowicie funkcję dowolną φ pochodnych ω , która jest dokładnie co do swych wykładników r, s określona, i przyjmijmy, że przyrost jej ma kształt:

$$\delta \varphi = \Sigma B_v^{\lambda, \mu} \cdot W_v^{\lambda, \mu}.$$

W poprzednim rozdziale wykazaliśmy, że $B^{01} = r\varphi$, $B_1^{10} = s\varphi$ i że wszystkie inne współczynniki $B_v^{\lambda, \mu}$ są funkcjami, co do swych wykładników dokładnie określonymi.

Możemy wykazać, że jeżeli φ jest k -tej klasy,¹⁾ to współczynniki $B_v^{\lambda, \mu}$ są klasy niższej lub co najwyżej k -tej.

Istotnie, zauważmy układ równań (23) i połączmy w nich $f = \varphi$. Łatwo stwierdzić, że

$$X_i^{r,s} \varphi = B_i^{r,s}, \quad (52)$$

przyczem prawa strona jest tożsamościowo zerem, skoro tylko $r+s+t > k$. Otóż, jeżeli w równaniach (25) połączmy $f = \varphi$ i jeżeli przyjmiemy w nich $\alpha + \beta + \gamma > k$, $\lambda + \mu + \nu \geq 2$, to prawa strona tych równań będzie tożsamościowo zerem, zatem:

$$X_i^{r,s} (X_j^{\lambda, \mu} \varphi) - X_j^{\lambda, \mu} (X_i^{r,s} \varphi) = 0.$$

Ponieważ jednak $\alpha + \beta + \gamma > k$, zatem: $X_i^{r,s} \varphi = 0$, czyli:

$$X_j^{\lambda, \mu} (X_i^{r,s} \varphi) = 0.$$

Wynika stąd, że wyrażenia $X_j^{\lambda, \mu} \varphi$ są co najwyżej k -tej klasy. Otóż wyrażenia te są właśnie współczynnikami $B_v^{\lambda, \mu}$, dla których $\lambda + \mu + \nu \geq 2$. Współczynniki te są więc co najwyżej k -tej klasy. Pozostaje jeszcze tylko współczynnik B^{01} przy W^{01} , który jest równy $r \cdot \varphi$, a więc jest k -tej klasy.

Współczynniki $B_v^{\lambda, \mu}$ przyrostu (51) posiadają nadto własność następującą:

$$\text{Zauważmy różnicę} \quad p = 2s - 5r, \quad (53)$$

gdzie liczby r, s są wykładnikami funkcji φ . Z wzorów (16) wynika, że liczba p jest zawsze dodatnia, gdyż

$$p = 1 + 2i + 5j + 3k + l;$$

będziemy ją nazywali potęgą funkcji φ . Wykażemy, że potęga współczynników $B_v^{\lambda, \mu}$, różnych od B^{01} , B_1^{10} jest niższa od potęgi funkcji φ .

Istotnie, z wzoru (20) wynika, że potęga p' współczynnika $B_v^{\lambda, \mu}$ ma kształt następujący:

$$p' = p - (2\lambda + 5\mu + 3\nu - 5),$$

gdzie p jest potęgą funkcji φ . Otóż wyrażenie w nawiasie jest większe od ze-

¹⁾ W tym przypadku są zerami wszystkie współczynniki $B_v^{\lambda, \mu}$, dla których $\lambda + \mu + \nu > k$. Zaznaczmy jeszcze, że liczby λ, μ, ν nie oznaczają tu żadnych działań.

ra, skoro λ, μ, ν mają wartości, odpowiadające dowolnym współczynnikiem, różnym od B^{01}, B_1^{10} . Potęgą tych ostatnich jest p , gdyż są one kolejno równe $r\varphi, s\varphi$.

Z powyższych dwóch ogólnych własności wynika, że wszystkie współczynniki przy pochodnych W , występujące w przyrostach δ_2 zmiennych (50), są co najwyżej klasy drugiej i że potęgą ich jest niższa od potęgi odpowiadającej zmiennej (50).

6. Zwróćmy teraz uwagę na zmienne u ,¹⁾ różne od zmiennych (50). Zmienne te są naogół klasy wyższej od drugiej, jak to z wzorów (13) wynika.²⁾ Wykażemy jednak, że do każdej z nich można dodać tego rodzaju funkcję całkowitą zmiennych u, v , że powstała w ten sposób suma będzie klasy drugiej.

W tym celu zauważmy dowolną funkcję φ pochodnych ω , co do swych wykładników dokładnie określoną, która jest klasy drugiej, a której przyrost ma kształt:

$$\delta\varphi = \varphi(r, s) + \Delta W_2 + BW^{11} + CW^{01} + DW^{02}. \quad (55)$$

Spółczynniki A, B, C, D są, jak wiadomo, co do swych wykładników dokładnie określone, a z wzoru (20) wynika, że wykładniki ich są następujące:

$$A(r+1, s+2), \quad B(r, s-1), \quad C(r+1, s+1), \quad D(r+1, s). \quad (56)$$

gdzie r, s są wykładnikami funkcji φ . W poprzednim ustępie wykazaliśmy, że współczynniki te są co najwyżej klasy drugiej, a więc mogą być również niezmiennikami względnymi lub zerami. Jeżeli wszystkie są równocześnie zerami, wówczas φ jest niezmiennikiem względnym.

Zauważmy pochodne $\varphi_{01}, \varphi^{10}, \varphi_{10}, \varphi^{01}$. Pochodna φ_{01} jest, podobnie jak φ , klasy drugiej, pozostałe zaś są klasy trzeciej, jak to z wzorów (13), wynika.³⁾ Obliczmy δ_3 tych pochodnych. Stosując do (55) wzory (13) otrzymamy:

$$\delta_3 \varphi_{01} = 0,$$

$$\delta_3 \varphi^{10} = -\varphi_{01} W^{30} + s\varphi W_1^{20} + \Delta W_2^{10} + BW^{21} + CW^{11} + DW^{12},$$

$$\delta_3 \varphi_{10} = -\varphi_{01} W_1^{20} + s\varphi W_2^{10} + \Delta W_3 + BW^{11} + CW^{01} + DW^{02},$$

$$\delta_3 \varphi^{01} = -\varphi_{01} W^{21} + s\varphi W_1^{11} + \Delta W_2^{01} + BW^{12} + CW^{02} + DW^{03}.$$

¹⁾ Zob. zestawienie (47).

²⁾ Wyjątek stanowią pochodne cząstkowe zmiennych (50) według u , a więc zmienne a_{01}, a_{02}, b_{01} , które są również klasy drugiej (zob. uw. str. (15)).

³⁾ Zob. uw. str. (15).

Z kształtu tych przyrostów i z przyrostów zmiennych v trzeciej klasy¹⁾ łatwo wywnioskować, że do każdej z pochodnych $\varphi^{10}, \varphi_{10}, \varphi^{01}$ można dodać tego rodzaju wyrażenie całkowite, zależne od $\varphi, \varphi_{01}, A, B, C, D$ i od zmiennych v trzeciej klasy, aby powstała w ten sposób suma była klasy drugiej. Sumy te nazwijmy odpowiednio $\varphi^{10'}, \varphi_{10}', \varphi^{01'}$, dodając u góry kreski pochodnym $\varphi^{10}, \varphi_{10}, \varphi^{01}$. Mają one kształt następujący:

$$\begin{aligned} \varphi_{01}' &= \varphi_{01}, \\ \varphi^{10'} &= \varphi^{10} + \omega \varphi_{01} - \frac{s}{3} \omega_{01} \varphi - \frac{1}{6} \omega_{02} A + \frac{1}{6} \alpha B + \frac{1}{12} \alpha_{01} C + \frac{1}{6} \beta D, \\ \varphi_{10}' &= \varphi_{10} + \frac{1}{3} \omega_{01} \varphi_{01} - \frac{s}{6} \omega_{02} \varphi - \frac{1}{6} \omega_{03} A + \frac{1}{12} \alpha_{01} B + \frac{1}{12} \alpha_{02} C + \frac{1}{6} \beta_{01} D, \\ \varphi^{01'} &= \varphi^{01} - \frac{1}{6} \alpha \varphi_{01} + \frac{s}{12} \alpha_{01} \varphi + \frac{1}{12} \alpha_{02} A + \frac{1}{6} \beta B + \frac{1}{6} \beta_{01} C + \frac{1}{3} \gamma D, \end{aligned} \quad (57)$$

gdzie dla symetrii oznaczyliśmy przez φ_{01}' pochodną φ_{01} , która jest wprost klasy drugiej. Przyrosty δ_3 wyrażeń $\varphi^{10'}, \varphi_{10}', \varphi^{01'}$ są zerami.

W przyszłości nazywać będziemy wyrażenia $\varphi^{10'}, \varphi_{10}', \varphi^{01'}$ pochodnymi klasy drugiej funkcji φ , kolejno według x, z, y . Mają one oczywiście znaczenie tylko wówczas, jeżeli funkcja φ jest klasy drugiej, a można je obliczyć na podstawie wzorów (57), jeżeli przyrost $\delta\varphi$ jest znany. Pochodna drugiej klasy według u jest wprost identyczna z pochodną zwyczajną według u .

Pochodne drugiej klasy posiadają własności następujące:

1^o Są one wyrażeniami, co do swych wykładników dokładnie określonymi, a wykładniki ich są identyczne z wykładnikami pochodnych zwyczajnych $\varphi_{01}, \varphi^{10}, \varphi_{10}, \varphi^{01}$, mianowicie:

$$\varphi_{01}(r-1, s-2), \quad \varphi^{10}(r, s+1), \quad \varphi_{10}(r-1, s-1), \quad \varphi^{01}(r-1, s),$$

Wynika to wprost z wzorów (56) i przyrostów zmiennych v trzeciej klasy.¹⁾

2^o Jeżeli φ jest czwartego lub wyższego rzędu ze względu na pochodne ω , od których zależy, to rząd wyrazów pierwszych wyrażeń (57) nie jest niższy od rzędu wyrazów dalszych. Co więcej, w wyrazach dalszych tylko czynnik φ_{01} jest tego samego rzędu co wyraz pierwszy, gdyż zmienne v , od których zależą wyrazy dalsze, są co najwyżej czwartego rzędu,²⁾ a współczynniki A, B, C, D są co najwyżej tego samego rzędu co φ .³⁾ Z ostatnich

¹⁾ Zob. wzory (26), (32), (34), (37).

²⁾ Zmienne α, β, γ są kolejno 2, 3, 4 rzędu, zatem zmienne $\alpha_{02}, \beta_{01}, \gamma$ są rzędu czwartego.

³⁾ Zob. str. 14.

wzorów wynika, że potęga czynnika φ_{01} jest niższa od potęgi wyrazów pierwszych φ^{10} , φ_{10} , φ^{01} .

3^o Jeżeli φ jest niezmiennikiem względnym, to trzy ostatnie pochodne drugiej klasy (57) redukują się do trzech pierwszych wyrazów tak, że gdy φ jest trzeciego rzędu, to w wyrazach dalszych tylko czynnik φ_{01} jest czwartego rzędu, inne zaś są rządów niższych niż wyraz pierwszy.

Zauważmy, że otrzymane poprzednio wyrażenie (38) jest właśnie pochodną drugiej klasy według z niezmiennika a i dlatego oznaczyliśmy je symbolem a'_{10} .

7. Pochodne drugiej klasy wyrażeń (57), czyli inaczej pochodne drugiej klasy funkcji φ rzędów wyższych możemy otrzymać również na podstawie wzorów (57), należy jednak obliczyć przedtem przyrosty wyrażeń (57). Obliczmy dokładnie te przyrosty.

Przyrost $\delta\varphi_{01}$ otrzymamy, stosując wprost do $\delta\varphi$ ostatni z wzorów (13). Zauważmy, że celem obliczenia dalszych przyrostów $\delta\varphi^{10'}$, $\delta\varphi'_{10}$, $\delta\varphi^{01'}$ wystarczy obliczyć ich δ_2 , gdyż δ_3 jest zerem, a δ_1 jest wprost znane, gdyż znane są wykładniki wyrażeń (57). Otóż przyrost $\delta_2\varphi^{10'}$ jest sumą przyrostów następujących:

$$\delta_2\varphi^{10} = A^{10}W_2 + (B^{10} + r\varphi)W^{11} + C^{10}W_1^{11} + D^{10}W^{02},$$

$$\delta_2\omega\varphi_{01} = \omega\delta_2\varphi_{01} + \varphi_{01}\delta_2\omega,$$

$$-\frac{s}{3}\delta_2\omega_{01}\varphi = -\frac{s}{3}\omega_{01}\delta_2\varphi - \frac{s}{3}\varphi\delta_2\omega_{01},$$

$$-\frac{1}{6}\delta_2\omega_{02}A = -\frac{1}{6}\omega_{02}\delta_2A - \frac{1}{6}A\delta_2\omega_{02},$$

$$\frac{1}{6}\delta_2\alpha B = \frac{1}{6}\alpha\delta_2B + \frac{1}{6}B\delta_2\alpha$$

$$\frac{1}{12}\delta_2\alpha_{01}C = \frac{1}{12}\alpha_{01}\delta_2C + \frac{1}{12}C\delta_2\alpha_{01},$$

$$\frac{1}{6}\delta_2\beta D = \frac{1}{6}\beta\delta_2D + \frac{1}{6}D\delta_2\beta.$$

Chcąc więc obliczyć $\delta_2\varphi^{10'}$, należy obliczyć przedtem przyrosty δA , δB , δC , δD . Możemy jednak uniknąć tego w następujący sposób:

Ponieważ wyrażenie $\varphi^{10'}$ jest klasy drugiej, zatem na podstawie paragrafu 5-go spółczynniki przy pochodnych W w przyroście $\delta_2\varphi^{10'}$ są również klasy drugiej. Obliczmy je pod założeniem, że zmienne v trzeciej klasy ¹⁾ kładziemy w nich równe zeru. Ponieważ

¹⁾ T. j. zmienne ω , ω_{01} , ω_{02} , ω_{03} ; α , α_{01} , α_{02} ; β , β_{01} ; γ .

$$\delta_2\omega = 0, \quad \delta_2\omega_{01} = 3\omega W_2 + 3W^{11}, \quad \delta_2\omega_{02} = 4\omega_{01}W_2 + 6W_1^{11},$$

$$\delta_2\alpha = 2\omega_{01}W^{11} - 6\omega W_1^{11}, \quad \delta_2\alpha_{01} = 2\alpha W_2 + 2\omega_{02}W^{11} - 4\omega_{01}W_1^{11} - 6W^{02},$$

$$\delta_2\beta = \alpha W_2 - \alpha_{01}W^{11} + 2\alpha W_1^{11},$$

zatem przy powyższym założeniu redukują się spółczynniki przy W_2 , W^{11} , W_1^{11} , W^{02} w przyroście $\delta_2\varphi^{10'}$ kolejno do

$$A^{10} + \frac{1}{6}aD, \quad B^{10} + (r-s)\varphi, \quad C^{10} - A, \quad D^{10} - \frac{1}{2}C.$$

Spółczynniki szukane mają być klasy drugiej, a więc mogą zależeć od pewnych funkcji, które są wprost klasy drugiej, jak np. A , φ i t. p., albo też od ich pochodnych drugiej klasy. Otóż ze wzorów (57) wynika, że te ostatnie redukują się do pochodnych zwyczajnych, jeżeli w nich położymy zmienne v trzeciej klasy równe zeru. Z drugiej strony zobaczymy później, że żadna funkcja klasy drugiej nie redukuje się do zera, gdy położymy w niej zmienne $v = 0$. Wynika stąd, że z powyższych wyrażeń otrzymamy szukane spółczynniki przy W_2 , W^{11} , W_1^{11} , W^{02} , zastępując pochodne zwyczajne A^{10} , B^{10} , C^{10} , D^{10} przez odpowiadające im pochodne drugiej klasy, wobec czego

$$\delta_2\varphi^{10'} = (A^{10'} + \frac{1}{6}aD)W_2 + (B^{10'} + (r-s)\varphi)W^{11} + (C^{10'} - A)W_1^{11} + (D^{10'} - \frac{1}{2}C)W^{02}.$$

Podobnie otrzymamy przyrosty $\delta_2\varphi_{10}'$, $\delta_2\varphi^{01'}$. Spółczynniki przy pochodnych W_2 , W^{11} , W_1^{11} , W^{02} w przyroście pierwszym redukują się, gdy położymy w nim zmienne v trzeciej klasy równe zeru, kolejno do:

$$A_{10} + \varphi^{10} + \frac{1}{6}a_{01}D, \quad B_{10} - \varphi_{01}, \quad C_{10} + r\varphi, \quad D_{10} + \frac{1}{2}B,$$

w przyroście drugim zaś do:

$$A^{01} + \frac{1}{6}aB + \frac{1}{6}a_{01}C + \frac{2}{3}a_{10}D, \quad B^{01} - \varphi_{10}, \quad C^{01} + \varphi^{10} - \frac{1}{6}a_{01}D,$$

$$D^{01} + \left(r - \frac{s}{2}\right)\varphi.$$

Zastępując w tych wyrażeniach pochodne zwyczajne przez pochodne drugiej klasy, otrzymamy szukane spółczynniki, zatem: ¹⁾

¹⁾ Przyrosty trzech ostatnich pochodnych drugiej klasy (57) można otrzymać także drogą bezpośrednią w następujący sposób:

Przyjmijmy, że przyrosty δ_2 spółczynników A , B , C , D są następujące:

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi_{01} &= \varphi_{01}(r-1, s-2) + (A_{01} + s\varphi) W_2 + B_{01} W^{11} + (C_{01} + B) W_1^{01} + D_{01} W^{02}, \\
 \delta \varphi^{10'} &= \varphi^{10'}(r, s+1) + (A^{10'} + \frac{1}{6} \alpha D) W_2 + (B^{10'} + (r-s)\varphi) W^{11} \\
 &\quad + (C^{10'} - A) W_1^{01} + (D^{10'} - \frac{1}{2} C) W^{02}, \\
 \delta \varphi'_{10} &= \varphi'_{10}(r-1, s-1) + (A'_{10} + \varphi^{10'} + \frac{1}{6} \alpha_{01} D) W_2 + (B'_{10} - \varphi_{01}) W^{11} \\
 &\quad + (C'_{10} + r\varphi) W_1^{01} + (D'_{10} + \frac{1}{2} B) W^{02} \\
 \delta \varphi^{01'} &= \varphi^{01'}(r-1, s) + (A^{01'} + \frac{1}{6} \alpha B + \frac{1}{6} \alpha_{01} C + \frac{2}{3} \alpha'_{10} D) W_2 + (B^{01'} - \varphi'_{10}) W^{11} \\
 &\quad + (C^{01'} + \varphi^{10'} - \frac{1}{6} \alpha_{01} D) W_1^{01} + \left(D^{01'} + \frac{2r-s}{2} \varphi \right) W^{02}.
 \end{aligned}
 \tag{57'}$$

Na podstawie wzorów (57), (57') możemy utworzyć pochodną drugiej klasy dowolnego rzędu jakiegokolwiek funkcji φ , która jest klasy drugiej i której przyrost jest znany.

Na pochodną drugiej klasy rzędu i, j, k, l kolejno według x, y, z, u użyjemy oznaczenia $\varphi_{kl}^{ij'}$, przyczem – ponieważ porządek pochodnych cząstkowych nie jest tu rzeczą obojętną – niech symbol ten oznacza, że z pochodnej φ_{01} wzięto najpierw k -krotnie pochodną drugiej klasy według z , następnie j -krotnie pochodną drugiej klasy według y i wreszcie i -krotnie pochodną drugiej klasy według x . Łatwo stwierdzić, że pochodna

$$\begin{aligned}
 \delta_2 A &= A_{11} W_2 + A_{12} W^{11} + A_{13} W_1^{01} + A_{14} W^{02}, \\
 \delta_2 B &= A_{21} W_2 + A_{22} W^{11} + A_{23} W_1^{01} + A_{24} W^{02}, \\
 \delta_2 C &= A_{31} W_2 + A_{32} W^{11} + A_{33} W_1^{01} + A_{34} W^{02}, \\
 \delta_2 D &= A_{41} W_2 + A_{42} W^{11} + A_{43} W_1^{01} + A_{44} W^{02}.
 \end{aligned}$$

Nieznane współczynniki przy pochodnych W oznaczyliśmy tu przez A_{pq} , przyczem liczby p, q nie oznaczają żadnych działań, a są jedynie wskaźnikami. Można wykazać, że

$$A_{pq} = A_{qp},$$

z wyjątkiem współczynników A_{12}, A_{21} i A_{32}, A_{23} , które spełniają równości

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= A_{21} + C, \\
 A_{32} &= A_{23} - 2D;
 \end{aligned}$$

wynika to wprost z wzorów (25), jeżeli w nich położymy $f = \varphi$, $\sigma + \beta + \gamma = 2$, $\lambda + \mu + \nu = 2$, i jeżeli uwzględnimy własność przekształcenia nieskończonościowego $X_i^r s f$, wypowiedzianą we wzorze (52).

Uwzględniając powyższe własności współczynników A_{pq} i obliczając przyrosty kolejno wszystkich wyrazów pochodnych (57), otrzymamy wzory (57').

$\varphi_{kl}^{ij'}$ zawiera między innymi wyraz φ_{kl}^{ij} , który nazywać będziemy jej wyrazem pierwszym.

8. Wróćmy teraz do zmiennych (50) i utwórzmy następujące pochodne drugiej klasy:

$$a_{kl}^{ij'}, \quad b_{kl}^{ij'}, \quad l_k^{oj'}, \quad m_k^{oj'}, \quad n_k^{oj'}. \tag{58}$$

gdzie wskaźnik l ma w symbolu pierwszym tylko trzy wartości 0, 1, 2. Wyrazy pierwsze tych pochodnych są właśnie zmiennymi u w zestawieniu (47) tak, że każdej zmiennej u odpowiada jedna pochodna (58), mająca równy jej wyraz pierwszy, i odwrotnie: każdej pochodnej (58) odpowiada jedna zmienna u . Nazwijmy pochodne (58) krótko zmiennymi u' . Zmienne te posiadają następujące własności:

1° Są one co do swych wykładników dokładnie określone, a nadto wszystkie są klasy drugiej.

2° Każda z nich jest funkcją całkowitą i wymierną zmiennych u, v , kształtu:

$$u' = u + R(u, v), \tag{59}$$

gdzie R jest dla niektórych zmiennych u' zerem.¹⁾

Z powyżej podanych własności pochodnych drugiej klasy (57) i stąd, że wśród zmiennych a, b, l, m, n tylko niezmiennik względny α jest trzeciego rzędu, inne zaś są rzędów wyższych, wynika,²⁾ że zmienne v , od których zależy R , są rzędu niższego niż wyraz pierwszy u , zmienne zaś u , od których zależy R , mogą być co najwyżej tego samego rzędu co wyraz pierwszy. Jeżeli jednak zmienna u , od której zależy R , jest tego samego rzędu co wyraz pierwszy, to jej potęga jest niższa od potęgi wyrazu pierwszego.²⁾

Ze względu na to można zmienne u' ułożyć w ciąg według rosnącego rzędu tak, aby wyraz pierwszy następnej nie wchodził w skład żadnej poprzedniej zmiennej u' , a stąd wynika, że pomiędzy zmiennymi u' nie zachodzi żaden związek, niezależny od zmiennych u . Układ równań (59) można więc rozwiązać ze względu na zmienne u . Z kształtu tych równań łatwo zresztą wywnioskować, że zmienne u są funkcjami całkowitymi zmiennych u' .

9. W układzie równań cząstkowych (23) przeprowadźmy teraz nową zamianę zmiennych. Zastąpmy mianowicie zmienne u przez zmienne u' . Zamiana taka jest dopuszczalna, gdyż każda zmienna u' jest funkcją zmiennych u , i odwrotnie.

¹⁾ Np. dla a_{02}, b_{02}' .

²⁾ Zob. str. (31).

W ten sposób przeprowadziliśmy dwukrotną zamianę zmiennych niezależnych układu (23), mianowicie zamianę zmiennych x na zmienne u, v i zmiennych u na u' . Przekształcenia te sprowadzają się oczywiście do jednej, to jest do zamiany zmiennych x na zmienne u', v . Po przeprowadzeniu tego przekształcenia przyjmie układ (23) kształt bardzo prosty, jak to zobaczymy w następnym ustępie.

Ze względu na późniejsze znaczenie zmiennych u' uporządkujmy je według ich rzędu. Dla uproszczenia pisowni opuścimy przy każdej z nich znak ' tak, że napiszemy tylko odpowiadający jej wyraz pierwszy, czyli odpowiednią zmienną u , która jest tego samego rzędu co u' . Zmienne u są, jak wiadomo, pochodnymi zmiennych (50), z których pierwsza jest 3-go rzędu, druga 4-go, a trzy dalsze 5-go. Najniższy rząd posiada zatem zmienna a . Zmienne rzędu 4-go i ogólnie rzędu $n \geq 5$ są następujące:

$$\begin{array}{c|cccccc} 3 & a & & & & & \\ 4 & a_{01}, & a^{10}, & a_{10}, & a^{01}, & b & \\ n & a_{kl}^{ij}, & b_{kl}^{ij}, & l_k^j, & m_k^{oj}, & n_k^{oj} & \\ & i+j+k+l=n-3 & i+j+k+l=n-4 & i+k=n-5 & & & \end{array}$$

gdzie wskaźnik l ma w symbolu a_{kl}^{ij} tylko trzy wartości $l = 0, 1, 2$,

10. Dodajmy jeszcze kilka uwag o pochodnych drugiej klasy. Na podstawie wzorów (57') znajdziemy z łatwością przyrosty:

$$\begin{aligned} \delta a_{01} &= a_{01}(-1, 1) + 3a W_2, \\ \delta a_{02} &= a_{02}(-2, -1) + 4a W_2, \\ \delta a'_{10} &= a'_{10}(-1, 2) + a^{10} W_2 - a_{01} W^{11}, \end{aligned}$$

a z pomocą tych przyrostów i przyrostu δa otrzymamy na podstawie wzorów (57):

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} + \frac{1}{3} \omega_{01} a_{02} - \frac{1}{6} \omega_{02} a_{01} - \frac{1}{2} \omega_{03} a, \\ a'_{12} &= a_{12} + \frac{1}{3} \omega_{01} a_{03} + \frac{1}{6} \omega_{02} a_{02} - \frac{2}{3} \omega_{02} a_{01}, \\ a'_{20} &= (a'_{10})_{10} + \frac{1}{3} \omega_{01} a'_{11} - \frac{1}{3} \omega_{02} a'_{10} - \frac{1}{6} \omega_{03} a^{10} - \frac{1}{12} a_{01} a_{01}, \\ a_{01}^{01'} &= a_{01}^{01} - \frac{1}{6} a a_{02} + \frac{1}{12} a_{01} a_{01} + \frac{1}{4} a_{02} a. \end{aligned} \quad (61)$$

Z powyższymi pochodnymi drugiej klasy spotkamy się później. Zauważmy, że w wyrażeniu na a'_{20} oznaczyliśmy pochodną $(a'_{10})_{01}$ przez a'_{11} . Pierwsza

z nich jest pochodną drugiej klasy niezmiennika a najpierw według x , potem według u , druga zaś jest również pochodną drugiej klasy według tych samych zmiennych, jednak porządek pochodnych cząstkowych jest odwrotny. Łatwo stwierdzić, że pochodne te są identyczne. Różniczkując bowiem

$$a'_{10} = a_{10} + \frac{1}{3} \omega_{01} a_{01} - \frac{1}{2} \omega_{02} a$$

według u , otrzymamy dokładnie wyrażenie a'_{11} .

W ogólności jednak wartość pochodnych drugiej klasy rzędu drugiego i wyższych zależy od porządku pochodnych cząstkowych. Wykażemy mianowicie, że

$$\begin{aligned} (\varphi^{10})_{01} &= \varphi_{01}^{10'} + \varphi'_{10}, \\ (\varphi'_{10})_{01} &= \varphi'_{11} - \frac{1}{6} b A + \frac{1}{12} b^{10'} C + \frac{1}{6} n D, \\ (\varphi^{01'})_{01} &= \varphi_{01}^{01'} + \frac{1}{12} b^{10'} A + \frac{1}{6} n C + \frac{1}{3} m D, \end{aligned}$$

gdzie φ jest funkcją drugiej klasy, której przyrost ma kształt (55). Prawdliwość tych związków można wykazać drogą bezpośrednią na podstawie wzorów (57), (57'). W sposób znacznie prostszy jednak można to wykazać, opierając się na pewnej własności zmiennych u' .

Wykażemy mianowicie w następnym ustępie, że każda funkcja pochodnych ω , która jest klasy drugiej, jest funkcją tylko zmiennych u' .

Funkcję tego rodzaju, nazwijmy ją F , możemy wyrazić w zmiennych u' w następujący sposób: Rozróżnimy przytem dwa przypadki: 1° kiedy funkcja F jest wyrażona w zmiennych u, v i ma kształt $F(u, v)$, 2° kiedy jest wyrażona w zmiennych x_1, x_2 i ma kształt $F(x_1, x_2)$.

W przypadku pierwszym zauważmy, że każda zmienna u' ma kształt (59). Położymy w niej wszystkie zmienne $v = 0$. Zmienne u' redukują się przy tem założeniu do

$$u'_0 = u + R_0(u),$$

lub do wyrazu pierwszego tylko, jeżeli R_0 jest zerem, jak to ma miejsce np. dla zmiennych (61).²⁾ Ponieważ $F(u, v)$ jest funkcją tylko zmiennych u' , zatem, jeżeli położymy w niej zmienne $v = 0$, będzie ona funkcją tylko wy-

¹⁾ Zob. str. 27.

²⁾ Pochodna $(a'_{10})_{10}$ redukuje się pod założeniem $v = 0$ do a_{20}

rażeń u'_0 . Otóż zastępując je przez odpowiadające im zmienne u' , otrzymamy funkcję F , wyrażoną w zmiennych u' .

W przypadku drugim, kiedy funkcja F ma kształt $F(x_1, x_2)$, zauważmy, że każdej zmiennej u , a więc i każdej zmiennej u' , odpowiada pewna ściśle określona zmienna x_1 , która jest jej wyrazem pierwszym¹⁾. Połóżmy wszystkie zmienne $x_2 = 0$. Zmienne v są wówczas wszystkie zerami tak, że zmienne u' redukują się do:

$$u''_0 = x_1 + S_0(x_1).$$

Otóż, jeżeli w funkcji $F(x_1, x_2)$ położymy wszystkie zmienne $x_2 = 0$, wówczas będzie ona funkcją powyższych wyrażań u''_0 ; wystarczy zatem zastąpić każde z nich przez odpowiadającą mu zmienną u' , aby $F(x_1, x_2)$ wyrazić w zmiennych u' .

Metoda powyższa może być niejednokrotnie dogodna, zwłaszcza, jeżeli u'_0 lub u''_0 mają kształt prosty. Zauważmy np. pochodną α_{03} . Jest ona klasy drugiej, zatem jest funkcją zmiennych (58). Różniczkując trzykrotnie względem u funkcję, α^2 dostaniemy:

$$\alpha_{03} = \omega_{04}^{10} + \frac{1}{3} \omega_{01} \omega_{04} + \omega \omega_{05}.$$

Jeżeli w wyrażeniu, znajdującym się po prawej stronie, położymy zmienne $x_2 = 0$, redukuje się ono do ω_{04}^{10} . Otóż wśród zmiennych (58) pochodna $b^{10'}$ redukuje się również do ω_{04}^{10} w założeniu $x_2 = 0$, zatem:

$$\alpha_{03} = b^{10'}, \quad (63)$$

co zresztą łatwo stwierdzić drogą bezpośrednią.

Zastosujmy powyższą metodę do wykazania wzorów (62). W tym celu zauważmy funkcję φ , której przyrost ma kształt (55), i jej pochodne drugiej klasy φ'_{10} , φ'_{01} . Pochodna φ'_{10} jest określona wzorem (57), z którego wynika, że redukuje się ona do φ_{10} , jeżeli położymy w nim zmienne $v = 0$. Podobnie, tworząc na podstawie wzorów (57') i (57) pochodną φ'_{01} , otrzymamy

$$\varphi_{01}^{10'} = \varphi_{01}^{10} + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera w założeniu $v = 0$. Otóż pochodna według u zmiennej $\varphi^{10'}$ jest funkcją klasy drugiej i ma kształt:

$$\begin{aligned} (\varphi^{10'})_{01} &= (\varphi^{10})_{01} + \dots \\ &= \varphi_{01}^{10} + \varphi_{10} + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Zob. wzór (49).

²⁾ Zob. str. (19) wzór (31).

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera w założeniu $v = 0$. Ponieważ w tem założeniu suma $\varphi_{01}^{10'} + \varphi_{10}'$ redukuje się do $\varphi_{01}^{10} + \varphi_{10}$, zatem:

$$(\varphi^{10'})_{01} = \varphi_{01}^{10'} + \varphi_{10}'.$$

Wzór ten jest identyczny z odpowiadającym mu wzorem na pochodne zwyczajne.

Podobnie pochodna φ'_{11} redukuje się w założeniu $v = 0$ do φ_{11} ; biorąc zaś pochodną według u zmiennej φ'_{10} , otrzymamy:

$$(\varphi'_{10})_{01} = \varphi_{11} - \frac{1}{6} \omega_{04} A + \frac{1}{12} \alpha_{03} C + \frac{1}{6} \varphi_{02} D + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera w założeniu $v = 0$. Uwzględniając więc równości $\omega_{04} = b$, $\alpha_{03} = b^{10'}$, $\varphi_{02} = n$, otrzymamy na tej samej zasadzie co przedtem drugi ze związków (62). W podobny sposób otrzymamy ostatni, jeżeli uwzględnimy, że

$$(\varphi^{01'})_{01} = \varphi_{01}^{01'} + \frac{1}{12} \alpha_{03} A + \frac{1}{6} \varphi_{02} C + \frac{1}{6} \gamma_{01} D + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera w założeniu $v = 0$, i że $\varphi_{01}^{01'}$ redukuje się w tem samym założeniu do φ_{01}^{01} .¹⁾

Powyższą metodą wykażemy również związki następujące:²⁾

$$\begin{aligned} (\varphi^{10'})_{10} &= \varphi_{10}^{10'} + \varphi^{01'} - \frac{1}{12} a_{01} B - \frac{1}{12} a_{02} C - \frac{1}{6} a'_{11} D, \\ (\varphi^{01'})_{10} &= \varphi_{10}^{01'} + \frac{1}{12} n A + \frac{1}{6} (m + \frac{1}{6} a b) C + \frac{1}{6} l D, \\ (\varphi^{10'})_{01'} &= \varphi^{11'} + \frac{1}{6} a \varphi_{01} - \frac{1}{12} a_{01} \varphi - \frac{1}{12} a_{02} A - \frac{1}{6} a'_{10} B - \frac{1}{6} a'_{11} C \\ &\quad - \frac{1}{6} (a'_{20} - \frac{1}{2} a_{01}') D. \end{aligned} \quad (64)$$

Zauważmy mianowicie, że na podstawie (57) jest

$$(\varphi^{10'})_{10} = (\varphi^{10'})_{10} + \dots$$

$$(\varphi^{01'})_{10} = (\varphi^{01'})_{10} + \dots,$$

¹⁾ Jak wiadomo, $\varphi_{02} = n$, $\gamma_{01} = m$.

²⁾ Zauważmy, że tylko pierwszy z wzorów (62) jest identyczny z odpowiadającym mu wzorem na pochodne zwyczajne, dwa drugie zaś tylko wówczas, gdy φ jest niezmiennikiem względny. Tak np. $(a'_{11})_{01} = a'_{11}$, ponieważ współczynniki A, B, C, D, E są w przyroście γa zerami; jednak np.

$$(a'_{11}) = a'_{12} - \frac{1}{2} a b.$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera w założeniu $v=0$. Otóż biorąc pochodną zwyczajną według z drugiego i czwartego wyrażenia (57), otrzymamy:

$$(\varphi^{10})_{10} = \varphi_{10}^{10} + \varphi^{01} + \frac{1}{6} \alpha_{10} B + \frac{1}{12} \alpha_{11} C + \frac{1}{6} \beta_{10} D + \dots$$

$$(\varphi^{01})_{10} = \varphi_{10}^{01} - \frac{1}{6} \alpha_{10} \varphi_{01} + \frac{1}{12} \alpha_{11} \varphi + \frac{1}{12} \alpha_{12} A + \frac{1}{6} \beta_{10} B + \frac{1}{6} \beta_{11} C + \frac{1}{6} \gamma_{10} D + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się — co jest wprost widoczne — do zera w założeniu $v=0$. Równocześnie jednak redukują się do zera w tem samym założeniu zmienne:

$$\alpha_{10}, \quad \beta_{10}, \quad \alpha_{11},$$

co wynika z wzorów na β , γ i na pochodną:

$$\beta_{01} = \alpha_{11} + 2\omega_{02}^{01} - \frac{1}{3} \omega_{03} \alpha + \frac{1}{3} \omega_{01} \alpha_{02};$$

zmienne zaś

$$\alpha_{12}, \quad \beta_{11}, \quad \gamma_{10}$$

redukują się kolejno do:

$$n, \quad m + \frac{1}{6} ab, \quad l.$$

co łatwo stwierdzić, tworząc pochodne $\beta_{02} = n$, $\gamma_{01} = m$ i uwzględniając wartość na l .²⁾ Ze względu na to możemy napisać:

$$(\varphi^{10'})_{10} = \varphi_{10}^{10} + \varphi^{01} + \dots$$

$$(\varphi^{01'})_{10} = \varphi_{10}^{01} + \frac{1}{12} n A + \frac{1}{6} (m + \frac{1}{6} ab) C + \frac{1}{6} l D + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera w założeniu $v=0$.

Z drugiej strony zauważmy, że pochodna $\varphi^{01'}$ redukuje się do φ^{01} przy założeniu $v=0$ i że

$$\varphi_{10}^{10'} = \varphi_{10}^{10} + \frac{1}{3} \omega_{01}^{10} \varphi_{01} - \frac{1}{6} \omega_{02}^{10} \varphi - \frac{1}{6} \omega_{03}^{10} A + \frac{1}{12} \alpha_{01}^{10} B + \frac{1}{12} \alpha_{02}^{10} C + \frac{1}{6} \beta_{01}^{10} D + \dots$$

$$\varphi_{10}^{01'} = \varphi_{10}^{01} + \dots$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera w tem samym założeniu. Otóż z wzoru na α wynika, że

$$\alpha_{01} = \omega_{02}^{10} - 2\omega_{11} - \frac{1}{3} \omega_{01} \omega_{02} + \omega \omega_{03},$$

$$\alpha_{02} = \omega_{03}^{10} - \omega_{12} - \frac{1}{3} \omega_{02} \omega_{02} + \frac{2}{3} \omega_{01} \omega_{03} + \omega \omega_{04}$$

¹⁾ Zob. str. (20), wzór (33) i str. (21), wzór (36).

²⁾ Zob. str. (23), wzór (42).

zatem zmienne ω_{01}^{10} , ω_{02}^{10} , ω_{03}^{10} redukują się do zera, gdy zmienne v są $=0$. Ze wzoru zaś na α^{10} , otrzymamy:

$$\alpha_{01} = \alpha_{01}^{10} + \alpha_{10} + 6\omega_{01}^{01} - \frac{2}{3} \omega_{02} \alpha + \frac{1}{3} \omega_{01} \alpha_{01} + \omega \alpha_{02}$$

$$\alpha_{02} = \alpha_{02}^{10} + 2\alpha_{11} + 6\omega_{02}^{01} - \frac{2}{3} \omega_{03} \alpha - \frac{1}{3} \omega_{02} \alpha_{01} + \frac{1}{3} \omega_{01} \alpha_{02} + \omega \alpha_{03}$$

zatem α_{01}^{10} i α_{02}^{10} redukują się kolejno do α_{01} , α_{02} , gdy zmienne v są $=0$. Pozostaje jeszcze zmienna β_{01}^{10} , która redukuje się do α_{11} przy założeniu $v=0$, jak to wynika ze związku³⁾:

$$\alpha_{10}' = \beta_{10}' - \alpha^{01} + \omega \beta_{01} - \frac{1}{3} \omega_{01} \beta - \frac{1}{6} \omega_{02} \alpha,$$

gdy obie strony upochodnimy według u . Ze względu na to możemy napisać:

$$\varphi_{10}^{10'} = \varphi_{10}^{10} + \frac{1}{12} \alpha_{01} B + \frac{1}{12} \alpha_{02} C + \frac{1}{6} \alpha_{11}' D + \dots$$

$$\varphi_{10}^{01'} = \varphi_{10}^{01} + \dots$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera przy założeniu $v=0$. Uwzględniając to w powyższych wzorach na $(\varphi^{10'})_{10}$, $(\varphi^{01'})_{10}$, otrzymamy na tej samej zasadzie co przedtem dwa pierwsze wzory (64), a w podobny sposób otrzymamy ostatni.³⁾

Z wzorów tych skorzystamy w kilku przypadkach szczególnych w rozdziale czwartym o parametrach różniczkowych.⁴⁾

Pochodne drugiej klasy posiadają niektóre własności pochodnych zwyczajnych. Tak np. jeżeli φ jest sumą dwóch funkcji $\varphi = \mu + \nu$, z których każda jest klasy drugiej, wówczas:

$$\varphi^{10'} = \mu^{10'} + \nu^{10'}$$

Istotnie, funkcje μ , ν muszą mieć te same wykładniki co φ ; niech więc $\partial \varphi$ ma kształt (55) i niech

¹⁾ Zob. str. 198.

²⁾ Zob. uw. 3 str. 199. Związek ten wyprowadzimy później niezależnie od obecnych rozważań (str. 231).

³⁾ Zmienna γ^{10} redukuje się przy założeniu $v=0$ do $\alpha_{20}' - \frac{1}{2} \alpha_{10}^{11}$, a do tego samego wyrażenia redukuje się $\alpha_{20}' - \frac{1}{2} \alpha_{10}^{01'}$.

⁴⁾ Pochodne drugiej klasy według y , z , u zmiennej $\varphi_{kl}^{ij'}$ zawierają kolejno wyrazy

$$\varphi_{k,l}^{i,j+1'}, \quad \varphi_{k+1,l}^{ij'}, \quad \varphi_{k,l+1}^{ij'}.$$

Wynika to wprost z wzorów (62), (64). Wyrazy dalsze są — co łatwo stwierdzić — rzędów niższych, jeżeli φ jest jedną ze zmiennych a , b , l , m , n .

$$\delta \mu = \mu(r, s) + A' W_2 + B' W'' + C' W_1^{01} + D' W^{02},$$

$$\delta \nu = \nu(r, s) + A'' W_2 + B'' W'' + C'' W^{01} + D'' W^{02}.$$

Ponieważ $\delta \varphi = \delta \mu + \delta \nu$, zatem:

$$A = A' + A'', \quad B = B' + B'', \quad C = C' + C'', \quad D = D' + D'',$$

a uwzględniając to w drugim z wzorów (57), otrzymamy wzór powyższy.

Podobnie pochodna iloczynu $\varphi = u \cdot v$ lub ilorazu $\psi = \frac{u}{v}$ ma kształt pochodnej zwyczajnej, mianowicie:

$$\varphi^{10'} = u v^{10'} + v u^{10'},$$

$$\psi^{10'} = \frac{v u^{10'} - u v^{10'}}{v \cdot v}$$

były tylko funkcje u, v były, podobnie jak φ, ψ , klasy drugiej. Wynika to — podobnie jak poprzednio — stąd, że

$$\delta \varphi = u \delta v + v \delta u, \quad \delta \psi = \frac{v \delta u - u \delta v}{v \cdot v}.$$

Tak samo rzecz się ma z pochodnymi drugiej klasy według trzech dalszych zmiennych y, z, u .

Jeżeli φ jest wielkością stałą, wówczas wszystkie pochodne drugiej klasy są zerami, podobnie jak pochodne zwyczajne.

III. Niezmienniki względne.

Zajmiemy się obecnie całkowaniem układu równań liniowych (23). Po wprowadzeniu nowych zmiennych u', v zamiast zmiennych x , otrzymamy układ kształtu:

$$Y_i^{rs} f = 0. \quad (65)$$

Układ ten jest układem zupełnym. Istotnie, powstał on przez zamianę zmiennych z układu (23), a ten ostatni jest układem zupełnym. Co więcej, stosują się do niego wzory (25), mianowicie:

$$(Y_v^{\alpha\beta} f, Y_v^{\lambda\mu} f) = A Y_{\tau+\nu-1}^{\alpha+\lambda-1, \beta+\mu} f + B Y_{\tau+\nu}^{\alpha+\lambda, \beta+\mu-1}, \quad (66)$$

gdzie liczby A, B mają wartości (24) i redukują się do zera: pierwsza, gdy $\alpha + \lambda$ lub $\tau + \nu$ jest zerem, druga, gdy $\beta + \mu$ jest zerem; prawa zaś strona



tej tożsamości redukuje się do jednego tylko wyrazu lub do zera, jeżeli przekształcenia $Y_i^{rs} f$ w niej występujące nie znajdują się wśród lewych stron równań (65).

Istotnie, układ (65) możemy również otrzymać w następujący sposób. Rozszerzmy przekształcenie nieskończonostkowe Sf na zmienne u', v , aż do n -tego rzędu. W miejsce n -krotnie rozszerzonego przekształcenia (22) otrzymamy przekształcenie:

$$S^{(n)} f = \Sigma W_i^{rs} \cdot Y_i^{rs} f, \quad (67)$$

gdzie współczynniki $Y_i^{rs} f$ są lewymi stronami równań (65). Otóż biorąc dwa przekształcenia specjalne $Sf, \Sigma f$ o funkcjach charakterystycznych $W = \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha! \beta! \gamma!}, V = \frac{x^\lambda y^\mu z^\nu}{\lambda! \mu! \nu!}$ i stosując tożsamość (21), otrzymamy, podobnie jak poprzednio, związki (66).

Zauważmy, że współczynniki przy pochodnych $\frac{\partial f}{\partial u'}, \frac{\partial f}{\partial v}$ w równaniach (65) są funkcjami całkowitymi i wymiernymi zmiennych u', v , gdyż współczynniki przy pochodnych funkcji W , występujące w przyrostach $\delta u', \delta v$, są również funkcjami całkowitymi i wymiernymi tych zmiennych.

Rozdzielmy równania (65) na trzy układy następujące: Do pierwszego (A) zaliczmy te wszystkie, dla których suma wskaźników $r + s + t$ nie jest niższa od trzech:

$$Y_i^{rs} f = 0, \quad r + s + t \geq 3. \quad (A)$$

Do układu drugiego (B) zaliczmy równania, dla których $r + s + t = 2$, z wyjątkiem jedynie równania $Y_1^{10} f = 0$. To ostatnie zaliczmy wraz z równaniami, dla których $r + s + t = 1$, do układu ostatniego (C). Ze względu na twierdzenie I możemy pominąć równania:

$$Y^{20} f = Y^{10} f = Y_1 f = Y f = 0,$$

gdź w nich, i tylko w nich, występują pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial u}$, a szukane niezmienniki nie zależą explicite od zmiennych x, y, z, u . Wobec tego równania układów (B), (C) są następujące:

$$Y_2 f = 0, \quad Y^{11} f = 0, \quad Y_1^{11} f = 0, \quad Y^{02} f = 0, \quad (B)$$

$$Y^{01} f = 0, \quad Y_1^{10} f = 0. \quad (C)$$

Otóż ze związków (66) wynika, że równania układu (A) tworzą dla siebie układ zupełny. Co więcej, w równaniach tych występują tylko pochodne $\frac{\partial f}{\partial v}$, a liczba równań układu (A) jest dokładnie równa liczbie zmiennych

v tego układu. Istotnie, lewe strony tych równań są w przekształceniu (67) współczynnikami przy pochodnych W_i^{rs} rzędu trzeciego i wyższych, a tylko przyrosty zmiennych v zależą od tych pochodnych, podczas gdy zmienne u' są co najwyżej klasy drugiej. Liczba zaś zmiennych v jest dokładnie równa liczbie pochodnych W_i^{rs} rzędu trzeciego i wyższych, od których zależy przekształcenie (67). Wobec tego redukują się równania układu (A) do równań:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

a stąd wynika, że szukane niezmienniki nie zależą od zmiennych v i mogą być tylko funkcjami zmiennych u' .

Zauważmy, że każde wyrażenie klasy drugiej jest całką układu (A). Ponieważ zaś zmienne u' tworzą całkowity układ całek niezależnych tego układu, zatem każde wyrażenie klasy drugiej jest funkcją zmiennych u' .

Położmy w równaniach (B), (C) wszystkie pochodne $\frac{\partial f}{\partial v}$ równe zeru.

Wykażemy, że równania (B) tworzą dla siebie układ zupełny. Utwórzmy mianowicie złożenia lewych stron tych równań. Na podstawie związków (66) otrzymamy:

$$\begin{aligned} (Y_2, Y^{11}) &= -2Y_1^{01}f - Y_2^{10}f, & (Y^{11}, Y_2^{01}) &= Y^{02}f + Y_1^{11}f, \\ (Y_2, Y_1^{01}) &= -3Y_3f, & (Y^{11}, Y^{02}) &= Y^{12}f, \\ (Y_2, Y^{02}) &= -Y_3^{01}f, & (Y^{02}, Y_1^{01}) &= Y_1^{02}f. \end{aligned}$$

Otóż przekształcenia Y_i^{rs} , dla których $r+s+t=3$, zależą tylko od pochodnych $\frac{\partial f}{\partial v}$, ponieważ zaś położyliśmy je w równaniach (B) równe zeru, zatem

złożenia powyższe wyrażają się tylko przy pomocy lewych stron równań (B),

Całkowanie układu (B) możemy przeprowadzić sposobem, podanym przez Meyera¹⁾. Zauważmy mianowicie, że współczynniki przy pochodnych

$\frac{\partial f}{\partial u'}$ w równaniach (B) są funkcjami całkowitemi i wymiernymi zmiennych u' , gdyż przyrosty $\delta u'$ zależą tylko od zmiennych u' i są ich funkcjami całkowitemi i wymiernymi. Bezpośrednio znane są dwie całki układu (B), mianowicie a, b , gdyż równania (B) nie zależą od pochodnych $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$; zmienne

a, b należy zatem uważać w tych równaniach za parametry stałe. Sprowadzmy układ (B) do formy Jacobiego. Rozróżnimy przytem trzy przypadki, zależnie od sposobu, w jaki tę formę otrzymamy.

I. Przypadek $a \neq 0$. Zauważmy przyrosty zmiennych:

$$a_{01}, a^{10'}, a_{01}^{10'}, a^{01'}. \quad (68)$$

Ze wzorów (57') wynika, że:

$$\delta a_{01} = a_{01}(-1, 1) + 3aW_2,$$

$$\delta a^{10'} = a^{10'}(0, 4) - 3aW^{11},$$

$$\delta a_{01}^{10'} = a_{01}^{10'}(-1, 2) + 3a^{10'}W_2 - 2a_{01}W^{11} - 3aW_1^{01}$$

$$\delta a^{01'} = a^{01'}(-1, 3) - a_{10}^{10'}W^{11} + a^{10'}W_1^{01} - \frac{3}{2}aW^{02}.$$

W równaniach układu (B) znajdują się zatem między innymi wyrazy następujące:

$$\begin{aligned} Y_2 f &= 3a \frac{\partial f}{\partial a_{01}} + 3a^{10'} \frac{\partial f}{\partial a_{01}^{10'}} + \dots = 0 \\ Y_2 f &= -3a \frac{\partial f}{\partial a^{10'}} - 2a_{01} \frac{\partial f}{\partial a_{01}^{10'}} - a^{10'} \frac{\partial f}{\partial a^{01'}} + \dots = 0 \\ Y_1^{01} f &= -3a \frac{\partial f}{\partial a_{01}^{10'}} + a^{10'} \frac{\partial f}{\partial a^{01'}} + \dots = 0 \\ Y^{02} f &= -\frac{3}{2}a \frac{\partial f}{\partial a^{01'}} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

W założeniu, że $a \neq 0$, możemy równania te rozwiązać ze względu na pochodne, zawarte w pierwszych wyrazach, przez co otrzymamy układ Jacobiego.

Spółczynniki przy pochodnych $\frac{\partial f}{\partial u'}$ są w dalszych wyrazach tego układu ułamkami, których mianowniki zależą tylko od całkowitych potęg zmiennej a , liczniki zaś są wielomianami reszty zmiennych u' . Spółczynniki te są zatem funkcjami holomorficznymi przy dowolnej wartości skończonej zmiennych u' .

Wobec tego możemy obrać na całki tego układu t. zw. rozwiązania główne, z których każde redukuje się do jednej ze zmiennych układu, różnych od zmiennych (68), przy założeniu:

$$a_{01} = a^{10'} = a_{01}^{10'} = a^{01'} = 0. \quad (70)$$

Oznaczmy całki tak dobrane dużymi literami i to w ten sposób, że całkę redukującą się w założeniu (70) do pewnej zmiennej u' oznaczmy tą samą

¹⁾ Zob. E. Goursat, Leçons sur l'intégr. des équ. part. du I ordre.

dużą literą U . Według tego oznaczmy np. całkę redukującą się do $a_k^{ij'}$ przez A_k^{ij} .

Całkowanie możemy wykonać kolejno, znajdując najpierw całki, odpowiadające zmiennym u' najniższego rzędu, a następnie rzędów coraz wyższych. Znajdźmy np. całkę A_{10} , odpowiadającą zmiennej a'_{10} . W tym celu wystarczy w równaniach (69) dołączyć tylko wyrazy, pochodzące od przyrostu $\delta a'_{10}$, gdyż współczynniki otrzymanych w ten sposób pochodnych nie zależą od dalszych zmiennych tego układu. Otóż ze wzorów (57') wynika, że

$$\delta a'_{10} = a'_{10}(-1, 2) + a^{10'} W_2 - a_{01} W^{11}.$$

Wystarczy zatem zcałkować układ Jacobiego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_{01}} + \frac{a^{10'}}{3a} \frac{\partial f}{\partial a'_{10}} &= 0, & \frac{\partial f}{\partial a^{10'}} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a^{10'}} + \frac{a_{01}}{3a} \frac{\partial f}{\partial a'_{10}} &= 0, & \frac{\partial f}{\partial a^{01'}} &= 0. \end{aligned}$$

Szukane rozwiązanie główne ma kształt:

$$A_{10} = a'_{10} - \frac{a_{01} a^{10'}}{3a}. \quad (71)$$

Do dalszych celów potrzebne nam jeszcze będą całki A_{02} , A^{20} , odpowiadające zmiennym a_{02} , $a^{20'}$. W równaniach (69) wystarczy w przypadku pierwszym dołączyć wyrazy, pochodzące od δa_{02} , w drugim zaś wyrazy, pochodzące od $\delta a^{20'}$:

$$\delta a_{02} = a_{02}(-2, -1) + 4a_{01} W_2, \quad \delta a^{20'} = a^{20'}(0, 5) - 7a^{10'} W^{11}.$$

W przypadku pierwszym należy zatem zcałkować równanie:

$$3a \frac{\partial f}{\partial a_{01}} + 4a_{01} \frac{\partial f}{\partial a_{02}} = 0,$$

w drugim zaś równanie:

$$3a \frac{\partial f}{\partial a^{10'}} + 7a^{10'} \frac{\partial f}{\partial a^{20'}} = 0,$$

i to przy założeniu, że całki szukane są niezależne od reszty zmiennych u' . Całki te mają kształt następujący:

$$\begin{aligned} A_{02} &= a_{02} - \frac{2a_{01} a_{01}}{3a}, \\ A^{20} &= a^{20'} - \frac{7a^{10'} a^{10'}}{6a}. \end{aligned} \quad (72)$$

Z powyższych definicji całek U wynika, że każdej zmiennej (60) odpowiada jedna całka układu (B) z wyjątkiem jedynie zmiennych (68), którym nie odpowiada żadna całka i które odtąd zaliczać będziemy do zmiennych v . Całki te posiadają następujące własności:

1°. Każda z nich ma kształt:

$$U = u' + R,$$

gdzie częścią całkowitą jest pewna zmienna u' , którą nazywać będziemy wyrazem pierwszym całki, R zaś jest ułamkiem, którego mianownik zależy tylko od całkowitych potęg zmiennej a , licznik zaś jest funkcją całkowitą zmiennych u' i zmiennych (68) i redukuje się do zera, gdy zmienne (68) położymy równe zeru. Wynika to wprost ze sposobu całkowania.

2°. Każda całka U jest niezmiennikiem względnym, co do swych wykładników dokładnie określonym, a przyrost jej ma kształt:

$$\delta U = U(r, s),$$

gdzie liczby r, s są wykładnikami wyrazu pierwszego.

Istotnie, δU zależy tylko od pochodnych W^{01} , W^{10} przyjmijmy więc, że

$$\delta U = P W^{01} + Q W^{10}.$$

Zauważmy równocześnie, że jeżeli przyrost pewnego wyrażenia ma kształt poprzedni, to wyrażenie to jest całką układu (A) i (B), a więc jest funkcją całek U . Otóż przyrosty współczynników P, Q mają kształt poprzedni. Na podstawie wzorów (66) łatwo mianowicie wykazać, że $Y_t^s P = Y_t^s Q = 0$ dla $r + s + t \geq 2$, z wyjątkiem $r=1, s=0, t=1$. W tym celu wystarczy we wzorach tych położyć raz $\lambda=0, \mu=1, \nu=0$, drugi raz $\lambda=1, \mu=0, \nu=1$ i uwzględnić, że $Y^{01} U = P, Y^{10} U = Q$. Współczynniki P, Q są więc funkcjami całek U . Zauważmy jeszcze, że każdą funkcję całek U można wyrazić przy pomocy tych całek, kładąc w niej zmienne (68) równe zeru i zastępując równocześnie każdą zmienną u' przez odpowiadającą jej całkę U . Otóż przyrost δU ma kształt:

$$\delta U = \delta u' + \delta R.$$

Wykażemy, że współczynniki przy W^{01} , W^{10} redukują się tu odpowiednio do $r u', s u'$, jeżeli w nich położymy zmienne (68) równe zeru. Istotnie R jest sumą iloczynów $v \cdot R'$, gdzie przez v oznaczyliśmy zmienne (68), zatem: $\delta R = v \delta R' + R' \delta v$. Ponieważ zaś zmienne v są co do swych wykładników dokładnie określone, zatem $\delta v = v(r', s') + \dots$, wobec czego w przyroście δR redukują się współczynniki przy W^{01} , W^{10} do zera przy założeniu $v=0$. Z drugiej strony $\delta u' = u'(r, s) + \dots$, zatem współczynniki P, Q

redukują się przy założeniu $v = 0$ kolejno do ru' , su' , a ponieważ u' jest wyrazem pierwszym całki U , zatem:

$$P = rU, \quad Q = sU.$$

3°. Jeżeli wyraz pierwszy całki U jest rzędu $n \geq 5$, to rząd wyrazów dalszych R jest co najwyżej równy n , przyczem jednak zmienne u' , od których zależy R i które są tego samego rzędu co wyraz pierwszy, mają potęgę niższą od potęgi wyrazu pierwszego.

Istotnie, wyrazy zaznaczone w równaniach (69), zależą od zmiennych (68) rzędu 4-go i 5-go, a nadto od zmiennych a , a'_{10} , z których pierwsza jest rzędu 3-go, druga 4-go. Otóż aby otrzymać całkę, odpowiadającą pewnej zmiennej u' , wystarczy w równaniach tych dołączyć wyrazy, pochodzące od przyrostu $\delta_2 u'$, w którym współczynniki $B_k^{1, \mu}$ są rzędu nie wyższego i mają, jak wiadomo, potęgę niższą od u' . Następnie należy dołączyć wyrazy, pochodzące od przyrostów $\delta_2 B_v^{1, \mu}$, aż wreszcie współczynnikami będą zmienne (68) lub niezmienniki a , b . Wynika stąd, że zmienne układu, który należy zcałkować, aby otrzymać całkę U , są co najwyżej tego samego rzędu co zmienna u' , a jeżeli są tego samego rzędu, to potęga ich jest niższa.

Ze względu na tę ostatnią własność całek układu (B) możemy je uporządkować według ich rzędu. Każdej zmiennej u' rzędu $n \geq 5$ odpowiada jedna całka tego samego rzędu.¹⁾ Całka (71), odpowiadająca zmiennej a'_{10} rzędu czwartego, jest również czwartego rzędu. Wobec tego całki te są następujące:

$$\begin{array}{l} 3 \quad a \\ 4 \quad A_{10}, \quad b \\ 5 \quad A_k^{ij}, \quad A_{01}^{01}, \quad A_{11}, \quad A_{02}, \quad B_{kl}^{ij}, \quad L, \quad M, \quad N \\ \quad i+j+k=2 \quad \quad \quad i-j+k+l=1 \\ \cdot \\ \cdot \\ n \quad A_{kl}^{ij}, \quad B_{kl}^{ij}, \quad L_k^{0j}, \quad M_k^{0j}, \quad N_k^{0j} \\ \quad i+j+k+l=n-3 \quad \quad i+j+k+l=n-4 \quad \quad j+k=n-5 \\ \quad (l=0, 1, 2) \end{array} \quad (73)$$

w przypadku $n \geq 6$.

Całki (73) są zarazem niezmiennikami względnymi równania $y = \omega$, a z powyższej teorii wynika, że każdy inny niezmiennik względny jest ich funkcją. W przypadku, kiedy ω ma kształt najogólniejszy, są wszystkie nie-

¹⁾ Zmienne (68) zaliczyliśmy do zmiennych v .

zmienniki (73) między sobą różne. Ze względu bowiem na ostatnią ich własność można je uporządkować w ten sposób, aby wyraz pierwszy następnego nie wchodził w skład niezmienników poprzednich. Wyznamy liczbę tych niezmienników rzędu $n \geq 6$. Składają się na nie niezmienniki: A_k^{ij} , A_{kl}^{ij} , A_{kl}^{ij} , których jest $\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2}$, następnie niezmienniki B_{kl}^{ij} w liczbie $\binom{n-1}{3}$ i wreszcie niezmienniki L_k^{0j} , M_k^{0j} , N_k^{0j} w liczbie $3(n-4)$. Wszystkich zatem niezmienników względnych n -tego rzędu jest:

$$\binom{n-1}{3} + 3 \binom{n-2}{2} + 3(n-4) + 1.$$

Niezmienników względnych piątego rzędu jest 16, czwartego dwa, i wreszcie jeden trzeciego rzędu.

II. Przypadek $b \neq 0$: Całkowanie układu (B) przeprowadzaliśmy dotychczas w założeniu, że niezmiennik a jest różny od zera. Odrzucimy teraz to założenie i przyjmijmy, że niezmiennik b jest różny od zera.

Zauważmy następujące zmienne u' :

$$b_{01}, \quad b^{10}, \quad b'_{10}, \quad b^{01}. \quad (74)$$

Są one pochodnymi drugiej klasy i pierwszego rzędu niezmiennika b . Ze wzorów (57') wynika, że przyrosty ich są następujące:

$$\begin{aligned} \delta b_{01} &= b_{01}(-4, -7) - 5bW_2, \\ \delta b^{10} &= b^{10}(-3, -4) + 2bW^{11}, \\ \delta b'_{10} &= b'_{10}(-4, -6) + b^{10}W_2 - b_{01}W^{11} - 3bW_1^{01}, \\ \delta b^{01} &= b^{01}(-4, -5) - b'_{10}W^{11} + b^{10}W_1^{01} - \frac{1}{2}bW^{02}. \end{aligned}$$

W równaniach układu (B) znajdują się zatem między innymi wyrazy następujące:

$$\begin{aligned} Y_2 f &= -5b \frac{\partial f}{\partial b_{01}} + b^{10} \frac{\partial f}{\partial b'_{10}} + \dots = 0, \\ Y^{11} f &= 2b \frac{\partial f}{\partial b^{10}} - b_{01} \frac{\partial f}{\partial b'_{10}} - b'_{10} \frac{\partial f}{\partial b^{01}} + \dots = 0, \\ Y_1^{01} f &= -3b \frac{\partial f}{\partial b'_{10}} + b^{10} \frac{\partial f}{\partial b^{01}} + \dots = 0, \\ Y^{02} f &= -\frac{1}{2}b \frac{\partial f}{\partial b^{01}} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Rozwiążmy te równania ze względu na pochodne zawarte w pierwszych wyrazach, przez co otrzymamy układ Jacobiego. Spółczynniki przy dalszych pochodnych $\frac{\partial f}{\partial u'}$ tego układu będą uławkami, których mianowniki zależą tylko od całkowitych potęg zmiennej b , a liczniki są wielomianami względem zmiennych układu.

Ze względu na to możemy całki dobrać w ten sposób, aby każda z nich redukowała się do jednej ze zmiennych układu, różnych od zmiennych (74) w założeniu:

$$b_{01} = b^{10'} = b'_{10} = b^{01'} = 0.$$

Podobnie, jak poprzednio, możemy całkowanie wykonać kolejno, znajdując najpierw całki, odpowiadające zmiennym u' najniższego rzędu, a następnie rzędów coraz wyższych.

Oznaczmy całki te, dla odróżnienia od poprzednich, dużymi literami goetyckimi. Tak np. $\mathfrak{A}_{ki}^{ij}$ niech oznacza całkę, redukującą się przy powyższym założeniu do zmiennej b_{ki}^{ij} , ogólnie zaś niech $\mathfrak{U}$ oznacza całkę, redukującą się do zmiennej u' .

Całki $\mathfrak{U}$ posiadają własności analogiczne do tych, jakie znaleźliśmy dla całek U , a więc:

1° Są one kształtu:

$$\mathfrak{U} = u' + \mathfrak{N},$$

gdzie $\mathfrak{N}$ jest ułamkiem, którego mianownik zależy tylko od całkowitych potęg zmiennej b , licznik zaś jest wielomianem i redukuje się do zera, jeżeli zmienne (74) położymy równe zero.

2° Przyrost $\delta \mathfrak{U}$ ma kształt:

$$\delta \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(r, s),$$

gdzie liczby r, s są wykładnikami zmiennej u' . Całki $\mathfrak{U}$ są więc również niezmiennikami względnymi.

3° Jeżeli rząd wyrazu pierwszego u' jest równy 5 lub wyższy od 5, to wyrazy dalsze $\mathfrak{N}$ są rzędu niższego lub co najwyżej tego samego, jednak potęg zmiennych u' , różnych od zmiennych (74), od których zależy $\mathfrak{N}$, jest niższa od potęgi wyrazu pierwszego. W przypadku, kiedy wyraz pierwszy jest czwartego rzędu, wyrazy dalsze są rzędu wyższego, gdyż $\mathfrak{N}$ zależy przynajmniej od jednej ze zmiennych (74), z których wszystkie są rzędu piątego. Zmiennymi układu (B), których rząd jest czwarty, są jedynie zmienne a_{01} , $a^{10'}$, a'_{10} , $a^{01'}$, zatem całki $\mathfrak{U}_{01}$, $\mathfrak{U}^{10}$, $\mathfrak{U}_{10}$, $\mathfrak{U}^{01}$ są rzędu piątego, chociaż ich wyraz pierwszy jest rzędu czwartego.

Z powyższego określenia całek $\mathfrak{U}$ wynika, że każdej zmiennej u' , z wy-

jątkiem jedynie zmiennych (74), odpowiada jedna całka $\mathfrak{U}$, której wyraz pierwszy jest identyczny z tą zmienną. Ze względu na to każdemu niezmiennikowi U odpowiada jeden niezmiennik $\mathfrak{U}$, o tym samym wyrazie pierwszym. Jedynie w miejsce niezmienników rzędu piątego: B_{01} , B^{10} , B_{10} , B^{01} w przypadku pierwszym otrzymujemy w przypadku drugim niezmienniki: $\mathfrak{U}_{01}$, $\mathfrak{U}^{10}$, $\mathfrak{U}_{10}$, $\mathfrak{U}^{01}$, które są również rzędu piątego. Dwa odpowiadające sobie niezmienniki U , $\mathfrak{U}$ są zawsze tego samego rzędu. Wyjątek stanowią jedynie niezmienniki A_{10} , $\mathfrak{U}_{10}$, których wyrazy pierwsze są identyczne, a z których pierwszy jest rzędu czwartego, drugi piątego.

Jeżeli a jest różne od zera, można wśród niezmienników $\mathfrak{U}$ zastąpić $\mathfrak{U}_{10}$ przez A_{10} ; zresztą, gdyby a było równe zero, to zmienna a'_{10} jest również zerem, a niezmiennik $\mathfrak{U}_{10}$ nie istnieje.¹⁾ Liczba niezmienników U i $\mathfrak{U}$ tego samego rzędu jest zatem identyczna. Zauważmy jeszcze, że w przypadku ogólnym, kiedy zmienna a jest podobnie jak i zmienna b różna od zera, niezmienniki względne $\mathfrak{U}$ są funkcjami niezmienników U , i odwrotnie. Niezmienniki te otrzymujemy bowiem, całkując ten sam układ w dwójaki sposób.

Twierdzenie 2. Najogólniejsze równanie różniczkowe zwyczajne rzędu trzeciego: $\frac{d^3 y}{dx^3} = \omega$ posiada ze względu na grupę wszystkich przekształceń stycznościowych jeden niezmiennik względny rzędu trzeciego, dwa rzędu czwartego, szesnaście rzędu piątego, a przypadku $n \geq 6$

$$\binom{n-1}{3} + 3 \binom{n-2}{2} + 3(n-4) + 1$$

niezmienników względnych n -tego rzędu. Każdy z nich jest funkcją algebraiczną i wymierną pochodnych ω_{ki}^{ij} , co do swych wykładników dokładnie określoną.

III. Przypadek $a = 0$, $b = 0$. Jeżeli zmienne a , b są równocześnie zerami, wówczas żadna z dwóch powyższych metod całkowania układu (B) nie jest dopuszczalna. Wykażemy, że w tym przypadku wszystkie zmienne u' są zerami.

Istotnie, łatwo stwierdzić na podstawie wzorów (57), (57'), że, jeżeli ϕ jest niezmiennikiem względnym, wówczas wszystkie pochodne drugiej klasy

¹⁾ Zauważmy, że niezmienników $\mathfrak{U}_{01}$, $\mathfrak{U}^{10}$, $\mathfrak{U}^{01}$ nie można zastąpić innymi rzędu czwartego.

$\psi_{kl}^{ij'}$ są zerami, skoro tylko ψ jest zerem.¹⁾ Jeżeli zatem $a = b = 0$, wówczas także wszystkie zmienne $a_{kl}^{ij'}$, $b_{kl}^{ij'}$ są zerami. Wykażemy teraz, że zmienne l , m , n wyrażają się przy pomocy zmiennych $a_{kl}^{ij'}$, $l \geq 2$ i zmiennych $b_{kl}^{ij'}$.

Zauważmy mianowicie, że pochodna α_{03} jest klasy drugiej i że $\alpha_{03} = b^{10'}$, jak to poprzednio stwierdziliśmy (63).

Z drugiego wzoru (57') i przyrostu δb wynika zatem, że:

$$\delta \alpha_{03} = \alpha_{03} (-3, -4) + 2bW^{11}.$$

Obliczmy dokładnie pochodną α_{03} i pochodną drugiej klasy $\alpha_{03}^{10'}$:

$$\alpha_{03} = \alpha_{03}^{10} + 3\alpha_{12} + 6\omega_{03}^0 - \frac{2}{3}\alpha b - \omega_{03}\alpha_{01} + \omega_{02}\alpha_{02} + \frac{5}{3}\omega_{01}\alpha_{03} + \omega\alpha_{04},$$

$$\alpha_{03}^{10'} = b^{20'} = \alpha_{03}^{10} + \omega\alpha_{04} + \frac{4}{3}\omega_{01}\alpha_{03} + \frac{1}{3}\alpha b.$$

Odejmując lewe i prawe strony tych równości, otrzymamy:²⁾

$$\alpha_{03} - b^{20'} = 3\beta_{02};$$

ponieważ zaś β_{02} jest zmienną n , zatem:

$$n = \frac{1}{3}(\alpha_{03} - b^{20'}). \quad (76)$$

Zauważmy przyrosty (32), (34) zmiennych α , β . Z przyrostów tych wynika, że $\delta_4 \beta^{10} = -6W^{22}$, $\delta_4 \alpha^{01} = -6W^{22}$, zatem różnica $\beta^{10} - \alpha^{01}$ jest klasy trzeciej. Jej δ_3 ma kształt następujący:

$$\delta_3 (\beta^{10} - \alpha^{01}) = -\beta_{01}W^{30} + \beta W^{12} + \alpha W^{12} - 2\omega_{01}W^{12} + 6\omega W^{12}.$$

Otóż δ_3 wyrażenia: $-\omega\beta_{01} + \frac{1}{3}\omega_{01}\beta + \frac{1}{6}\omega_{02}\alpha$ jest identyczne z poprzednim. Odejmując je od powyższej różnicy, otrzymamy funkcję klasy drugiej o wy-

¹⁾ Z wzorów (57) wynika bowiem, że pierwsze pochodne drugiej klasy dowolnego niezmiennika ψ są zerami, jeżeli $\psi = 0$, a równocześnie, że pochodne φ_{01} , $\varphi^{10'}$, φ'_{10} , $\varphi^{01'}$ dowolnej funkcji φ drugiej klasy są zerami, jeżeli $\varphi = A = B = C = D = 0$. Przyjmijmy, że φ jest pochodną $\psi_{kl}^{ij'}$ rzędu $i+j+k+l=n$. Spółczynniki A , B , C , D przyrostu $\delta\varphi$ są, jak wiadomo, funkcjami zmiennych n' co najwyżej tego samego rzędu co φ , a z wzorów (57') wynika, że są one zerami wraz z pochodnymi $\psi_{kl}^{ij'}$ rzędu n -tego i niższych. Jeżeli zatem pochodne $\psi_{kl}^{ij'}$ wszystkich rzędów aż do n -tego są zerami, wówczas także pochodne $(n+1)$ -go rzędu są zerami.

²⁾ Upochodniając funkcję β dwukrotnie według u , otrzymamy:

$$\beta_{02} = \alpha_{12} + 2\omega_{03}^0 - \frac{1}{3}\omega_{04}\alpha - \frac{1}{3}\omega_{03}\alpha_{01} + \frac{1}{3}\omega_{02}\alpha_{02} + \frac{1}{3}\omega_{01}\alpha_{03}.$$

kładnikach $r = -1$, $s = 2$, która jest zatem funkcją zmiennych u' . Łatwo stwierdzić powyżej podaną metodą¹⁾, że jest ona identyczna ze zmienną α'_{10} .

Istotnie, wyrażenie $\beta^{10} - \alpha^{01} + \omega\beta_{01} - \frac{1}{3}\omega_{01}\beta - \frac{1}{6}\omega_{02}\alpha$ redukuje się do β^{10} w założeniu $v = 0$, zaś

$$\beta^{10} = \alpha_{10}^{10} + \dots$$

gdzie wyrazy dalsze są zerami w założeniu $v = 0$. Z drugiej strony zmienna α'_{10} redukuje się do α_{10} w tem samym założeniu, zaś

$$\alpha_{10} = \alpha_{10}^{10} + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera dla $v = 0$. Zmienna α'_{10} redukuje się więc w założeniu $v = 0$ do tej samej wartości co powyższe wyrażenie, a stąd wynika, że jest ona z niem identyczna, zatem:

$$\alpha'_{10} = \beta^{10} - \alpha^{01} + \omega\beta_{01} - \frac{1}{3}\omega_{01}\beta - \frac{1}{6}\omega_{02}\alpha.$$

Biorąc dwukrotnie pochodną $\frac{\partial}{\partial u}$, otrzymamy:²⁾

$$\alpha'_{12} - \frac{1}{2}\alpha b = \beta_{02}^{10} + 2\beta_{11} - \alpha_{02}^{10} + \omega\beta_{03} + \frac{5}{3}\omega_{01}\beta_{02} + \frac{1}{6}\omega_{02}(2\beta_{01} - \alpha_{02}) - \frac{1}{3}\omega_{03}(\beta + \alpha_{01}) - \frac{1}{6}\alpha b.$$

Obliczmy pochodną drugiej klasy $n^{10'}$. Na podstawie drugiego wzoru (57) i przyrostu δn (50) otrzymamy:

$$n^{10'} = \beta_{02}^{10} + \omega\beta_{03} + \omega_{01}\beta_{02} - \frac{1}{6}\omega_{02}\alpha_{02} - \frac{1}{6}\alpha\alpha_{03}.$$

Otóż z równości tych wynika, że:³⁾

$$\alpha'_{12} - n^{10'} - \frac{1}{2}\alpha b = 2\gamma_{01} + \frac{1}{6}\alpha b;$$

ponieważ zaś γ_{01} jest zmienną m , zatem:

$$m = \frac{1}{3}(\alpha'_{12} - n^{10'}) - \frac{1}{6}\alpha b. \quad (77)$$

Aby otrzymać jeszcze zmienną l , zauważmy przyrosty (34), (37) zmien-

¹⁾ Zob. str. (214).

²⁾ Zob. uw. str. (217).

³⁾ Upochodniając funkcję γ według u , otrzymamy na podstawie wzoru (36):

$$\gamma_{01} = \beta_{11} - \frac{1}{2}\alpha_{02}^{10} - \frac{1}{6}\omega_{04}\alpha - \frac{1}{6}\omega_{03}\alpha_{01} - \frac{1}{6}\omega_{03}\beta + \frac{1}{6}\omega_{02}\beta_{01} + \frac{1}{3}\omega_{01}n + \frac{1}{12}\alpha\alpha_{03}.$$

nych β , γ , z których wynika, że $\delta_4 \gamma^{10} = -3W^{13}$, $\delta_4 \beta^{01} = -6W^{13}$. Różnica $\gamma^{10} - \frac{1}{2}\beta^{01}$ jest więc klasy trzeciej, a jej δ_3 ma kształt:

$$-\gamma_{01}W^{30} + 2a'_{10}W^{10} - \beta_{01}W^{21} + \frac{1}{2}(2\beta - a_{01})W^{11} - \frac{1}{2}aW^{01} + \frac{1}{2}\gamma_{01}W^{12} - aW^{12}.$$

Otóż z przyrostów zmiennych v trzeciej klasy wynika, że δ_3 wyrażenia $-\omega\gamma_{01} + \frac{1}{2}\omega_{02}a'_{10} + \frac{1}{2}\alpha\beta_{01} - \frac{1}{2}\alpha_{01}(2\beta - a_{01}) + \frac{1}{2}\alpha_{02}a$ jest identyczne z poprzednim. odejmując zatem je od poprzedniej różnicy, otrzymamy funkcję klasy drugiej.¹⁾ Posiada ona wykładniki $r = -2$, $s = 1$ i jest następującą funkcją zmiennych u' :

$$a'_{20} - \frac{1}{2}a^{01}' = \gamma^{10} - \frac{1}{2}\beta^{01} + \omega\gamma_{01} - \frac{1}{2}\omega_{02}a'_{10} - \frac{1}{2}\alpha\beta_{01} + \frac{1}{2}\alpha_{01}(2\beta - a_{01}) - \frac{1}{2}\alpha_{02}a.$$

Obliczmy pochodną drugiej klasy $m^{10'}$. Z wzorów (50'), (57) wynika, że

$$m^{10'} = \gamma^{10}_1 + \omega\gamma_{02} + \frac{2}{3}\omega_{01}\gamma_{01} - \frac{1}{3}\omega_{02}a'_{11} - \frac{1}{4}\alpha\beta_{02} - \frac{1}{4}\alpha_{01}a_{02}.$$

Upodnając obie strony przedostatniej równości względem u i odejmując od nich $m^{10'}$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \text{zatem: } 2) \quad & (a'_{20})_{01} - \frac{1}{2}(a^{01}')_{01} - m^{10'} = l - \frac{1}{2}\alpha_{03}a \\ & l = (a'_{20})_{01} - \frac{1}{2}(a^{01}')_{01} - m^{10'} + \frac{1}{2}\alpha b^{10'}. \end{aligned} \quad (78)$$

Wracając do powyższego zagadnienia zauważmy, że zmienne l , m , n są funkcjami pochodnych drugiej klasy niezmienników a , b , jak to z powyższych trzech wzorów wynika. Jeżeli zatem $a = b = 0$, wówczas zmienne l , m , n , a wraz z nimi także wszystkie pochodne $l_k^{0j'}$, $m_k^{0j'}$, $n_k^{0j'}$ redukują się do zera.

W założeniu $a = b = 0$ są zatem wszystkie zmienne u' zerami. Wynika stąd, że równanie nie posiada wówczas żadnych niezmienników. Z dwóch tego rodzaju równań można zawsze jedno przekształcić na drugie za pomocą pewnego przekształcenia stycznościowego. Ponieważ równaniem takim jest między innymi $y''' = 0$, zatem każde równanie $y''' = \omega$, dla którego zmienne a , b są zerami można przekształcić na równanie $y''' = 0$. Zauważmy, że warunek $a = 0$, $b = 0$ jest tu konieczny, gdyż zmienne a , b są w przypadku ogólnym od siebie niezależne.

¹⁾ Funkcja ta redukuje się w założeniu $v=0$ do γ^{10} , ta ostatnia zaś do $\frac{1}{2}\alpha^{10} - \frac{1}{2}\alpha^{11}$. Co tego samego wyrażenia redukuje się $a'_{20} - \frac{1}{2}a^{01}'$ (zob. uw. str. 219).

²⁾ Na podstawie wzorów (57') możemy obliczyć przyrosty kolejno wszystkich wyrazów zmiennej l , a więc i przyrost ∂l . Ma on kształt następujący:

$$\partial l = l(-3, -1) + (3a'_{20} - a^{01}')W_2 - (2m + \frac{1}{2}ab)W^{11} - a'_{11}W^{11}.$$

Twierdzenie 3. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby równanie: $y''' = \omega(xyzu)$ nie posiadało żadnych niezmienników ze względu na ogólne przekształcenie nieskończonostkowe, jest, by funkcja ω spełniała związki:

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Równanie takie można za pomocą pewnego przekształcenia stycznościowego przekształcić na równanie:

$$y''' = 0.$$

IV. Parametry różniczkowe.

Całkowanie układu (B) jest w przypadku ogólnym zaudatno uciążliwe. Wykażemy jednak, że wystarczy znaleźć tylko niektóre całki tego układu, odpowiadające zmiennym u' najniższych rzędów, a przez różniczkowanie można z nich otrzymać wszystkie inne.

W tym celu zauważmy dowolny niezmiennik względny ψ , o wykładnikach r , s , którego przyrost ma kształt:

$$\partial\psi = \psi(r, s).$$

Obliczmy wszystkie pierwsze pochodne drugiej klasy niezmiennika ψ . Na podstawie wzorów (57) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \psi'_{01} &= \psi_{01}, \\ \psi^{10'} &= \psi^{10} + \omega\psi_{01} - \frac{s}{3}\omega_{01}\psi, \\ \psi'_{10} &= \psi_{10} + \frac{1}{3}\omega_{01}\psi_{01} - \frac{s}{6}\omega_{02}\psi, \\ \psi^{01'} &= \psi^{01} - \frac{1}{6}\alpha\psi_{01} + \frac{s}{12}\alpha_{01}\psi. \end{aligned} \quad (79)$$

Przyrosty tych pochodnych są, jak to z wzorów (57') wynika, następujące:

$$\begin{aligned} \partial\psi_{01} &= \psi_{01}(r-1, s-2) + s\psi W_2, \\ \partial\psi^{10'} &= \psi^{10'}(r, s+1) + (r-s)\psi W^{11}, \\ \partial\psi'_{10} &= \psi'_{10}(r-1, s-1) + \psi^{10}W_2 - \psi_{01}W^{11} + r\psi W^{01}_1, \\ \partial\psi^{01'} &= \psi^{01'}(r-1, s) - \psi'_{10}W^{11} + \psi^{10}W^{01}_1 + \left(r - \frac{s}{2}\right)\psi W^{02}. \end{aligned}$$

1. Przyjmijmy najpierw, że zmienna a jest różna od zera i zauważmy układ (B) w postaci (69). Aby znaleźć niezmienniki względne, które w założeniu (70) redukują się do pochodnych (79), należy dołączyć w układzie (69) wyrazy, pochodzące od przyrostów tych pochodnych i zcałkować układ równań:

$$\begin{aligned} 3a \frac{\partial f}{\partial a_{01}} + 3a^{10'} \frac{\partial f}{\partial a_{01}^{10'}} + s\psi \frac{\partial f}{\partial \psi_{01}} + \psi^{10'} \frac{\partial f}{\partial \psi_{10}} &= 0, \\ -3a \frac{\partial f}{\partial a^{10'}} - 2a_{01} \frac{\partial f}{\partial a_{01}^{10'}} - a'_{10} \frac{\partial f}{\partial a^{01'}} + (r-s)\psi \frac{\partial f}{\partial \psi^{10'}} - \psi_{01} \frac{\partial f}{\partial \psi_{10}} - \psi'_{10} \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0, \\ -3a \frac{\partial f}{\partial a_{01}^{10'}} + a^{10'} \frac{\partial f}{\partial a^{01'}} + r\psi \frac{\partial f}{\partial \psi_{10}} + \psi^{10'} \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0, \\ -3a \frac{\partial f}{\partial a^{01'}} + (2r-s)\psi \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0. \end{aligned}$$

Obok zmiennych układu występują w współczynnikach tych równań jeszcze zmienne a , ψ , a'_{10} , z których dwie pierwsze należy uważać za parametry stałe. Ze względu na ostatnią należy w równaniach tych dołączyć wyrazy pochodzące od przyrostu $\delta a'_{10}$. Zamiast tego jednak możemy zastąpić a'_{10} przez: $A_{10} + \frac{a_{01} a^{10'}}{3a}$ i uważać A_{10} za stały parametr, gdyż jest on niezmiennikiem względnym (71).

Po tej zamianie tworzą powyższe równania układ zupełny. Rozwiązując je ze względu na pochodne, zawarte w pierwszych wyrazach, otrzymamy następujący układ Jacobiego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_{01}} + \frac{s\psi}{3a} \frac{\partial f}{\partial \psi_{01}} + \left(\frac{\psi^{10'}}{3a} + \frac{r\psi a^{10'}}{3aa} \right) \frac{\partial f}{\partial \psi_{10}} + \left(\frac{a^{10'} \psi^{10'}}{3aa} + \frac{(2r-s)\psi a^{10'} a^{10'}}{9aaa} \right) \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a^{10'}} - \frac{(r-s)\psi}{3a} \frac{\partial f}{\partial \psi^{10'}} + \left(\frac{\psi_{01}}{3a} + \frac{2r\psi a_{01}}{9aa} \right) \frac{\partial f}{\partial \psi'_{10}} + \left(\frac{\psi'_{10}}{3a} + \frac{(2r-s)\psi A_{10}}{9aa} + \right. \\ \left. + \frac{2a_{01} \psi^{10'}}{9aa} + \frac{(2r-s)\psi a_{01} a^{10'}}{9aaa} \right) \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a_{01}^{10'}} - \frac{r\psi}{3a} \frac{\partial f}{\partial \psi'_{10}} - \left(\frac{\psi^{10'}}{3a} + \frac{(2r-s)\psi a^{10'}}{9aa} \right) \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a^{01'}} - \frac{(2r-s)\psi}{3a} \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0. \end{aligned}$$

Oznaczmy całki tego układu, które w założeniu (70) redukują się do pochodnych (79), kolejno przez $D_u \psi$, $D_x \psi$, $D_z \psi$, $D_y \psi$. Stosując metodę Meyera, otrzymamy:

$$\begin{aligned} D_u \psi &= \psi_{01} - \frac{s a_{01}}{3a} \psi, \\ D_x \psi &= \psi^{10'} + \frac{(r-s) a^{10'}}{3a} \psi, \\ D_z \psi &= \psi'_{10} - \frac{a^{10'}}{3a} D_u \psi - \frac{a_{01}}{3a} D_x \psi + \left(\frac{r a_{01}^{10'}}{3a} - \frac{(2r+s) a_{01} a^{10'}}{9aa} \right) \psi, \\ D_y \psi &= \psi^{01'} - \frac{a^{10'}}{3a} D_x \psi - \frac{a^{10'} a^{10'}}{18aa} D_u \psi + \frac{a a_{01}^{10'} - a_{01} a^{10'}}{3aaa} D_x \psi \\ &\quad + \left[\frac{(2r-s) a^{01'}}{3a} + \frac{r a^{10'} a_{01}^{10'} - (2r-s) a^{10'} A_{10}}{9aa} - \frac{r a_{01} a^{10'} a^{10'}}{9aaa} \right] \psi. \end{aligned} \quad (80)$$

Zauważmy przedewszystkiem że, jeżeli ψ jest niezmiennikiem względem o wykładnikach r , s , to całki (80) są również niezmiennikami względem o wykładnikach, identycznych z wykładnikami ich wyrazów pierwszych (79), jak to wyżej wykazaliśmy. Wykładniki te są zatem następujące:

$$\begin{array}{cccc} D_u \psi, & D_x \psi, & D_z \psi, & D_y \psi \\ r-1, s-2 & r, s+1 & r-1, s-1 & r-1, s \end{array} \quad (81)$$

Nadto posiadają niezmienniki (80) następujące własności:

1° Jeżeli ψ jest rzędu $n \geq 4$ ze względu na pochodne ω , to niezmienniki (80) są $(n+1)$ -go rzędu, a rząd wyrazu pierwszego nie jest niższy od rzędu wyrazów dalszych.

2° Z zestawienia (81) wynika że, jeżeli ψ ma potęgę $p = 2s - 5r$, to niezmienniki: $D_u \psi$, $D_x \psi$, $D_z \psi$, $D_y \psi$ posiadają kolejno potęgi: $p+1$, $p+2$, $p+3$, $p+5$ i są one identyczne z potęgą wyrazu pierwszego każdego niezmiennika. Potęgą pochodnych ψ drugiej klasy, od których zależą wyrazy to tylko dalsze, jest niższa od potęgi wyrazu pierwszego, a jeżeli ψ jest rzędu $n \geq 5$, pochodne ψ są tego samego rzędu co wyraz pierwszy, inne zaś zmienne są rzędów niższych.

Przyjmijmy, że sposobem wyżej podanym, przez całkowanie układu (B), znaleźliśmy wszystkie niezmienniki (73) rzędu $n = 5$. Wykażemy, że stosując do nich działania D_x , D_y , D_z , D_u , można otrzymać pełny układ niezmienników rzędu 6 i wyższych, t. j. tyle niezależnych od siebie niezmienników rzędu 6 i wyższych, ile jest ich w zestawieniu (73).

Istotnie, oznaczmy przez u jedną ze zmiennych a , b , l , m , n . Zmien-

ne u' są, jak wiadomo, ich pochodnymi, mają zatem kształt $u_{kl}^{ij'}$. Oznaczmy równocześnie przez U_{kl}^{ij} dowolny niezmiennik względny n -tego rzędu, kształtu:

$$U_{kl}^{ij} = u_{kl}^{ij'} + R, \quad (82)$$

posiadający następujące własności: Zmienna $u_{kl}^{ij'}$, którą nazwijmy wyrazem pierwszym tego niezmiennika, jest n -tego rzędu, a wyrazy dalsze R są funkcją całkowitą zmiennych u' , lub funkcją ułamkową, której mianownik zależy tylko od całkowitych potęg zmiennej a . Jeżeli jednak R zależy od pewnej zmiennej u' , tego samego rzędu co wyraz pierwszy, to niech potęga jego będzie niższa. Możemy wykazać, że, stosując do niezmienników (82) rzędu $n \geq 5$ działania D_x, D_y, D_z, D_u , otrzymamy niezmienniki, posiadające te same własności, a których wskaźniki i, j, k, l będą kolejno o 1 większe. Istotnie, stosując np. działanie D_x , otrzymamy:

$$(u_{kl}^{ij'} + R)_{i0} + \dots$$

gdzie wyrazy dalsze zależą od zmiennych u' rzędu niższego niż wyraz pierwszy, lub co najwyżej tego samego lecz potęgi niższej, jak to wynika z wyżej podanych własności niezmienników (80). Otóż pochodna drugiej klasy sumy dwóch funkcji równa się sumie pochodnych tych funkcji. Pochodna pierwszej z nich zawiera wyraz $u_{k+1, l}^{ij'}$, przyczem wyrazy dalsze są rzędów niższych, pochodna zaś drugiej zależy od zmiennych u' co najwyżej tego samego rzędu lecz potęgi niższej, zatem:

$$D_x U_{kl}^{ij} = U_{k+1, l}^{ij}.$$

Podobnie rzecz się ma z niezmiennikami, otrzymanymi przez zastosowanie działań D_y, D_z, D_u . Innymi słowy możemy powiedzieć, że, stosując do niezmienników:

$$U_{kl}^{i-1, j}, \quad U_{kl}^{i, j-1}, \quad U_{k-1, l}^{ij}, \quad U_{k, l-1}^{ij} \quad (83)$$

kolejno działania D_x, D_y, D_z, D_u , otrzymamy niezmiennik (82).

Zauważmy teraz, że wszystkie niezmienniki (73) mają kształt (82), stosując więc do nich działania D_x, D_y, D_z, D_u , otrzymamy niezmienniki tego samego kształtu.¹⁾ Z drugiej strony zauważmy, że do każdego z niezmienników

¹⁾ Niezmienniki (82) niekoniecznie redukują się do wyrazów pierwszych, pod założeniem (70), którą to własność posiadają niezmienniki (73).

ników U_{kl}^{ij} rzędu $n \geq 6$ istnieje przynajmniej jeden niezmiennik (83) rzędu o 1 niższego. Wynika stąd, że, mając dane niezmienniki (73) rzędu 5 i stosując do nich działania D_x, D_y, D_z, D_u , można otrzymać tyle niezmienników U_{kl}^{ij} rzędu 6 i wyższych, że każda zmienna u' rzędu $n \geq 6$ będzie wyrazem pierwszym przynajmniej jednego z nich. W ten sposób otrzymamy tyle niezależnych od siebie niezmienników rzędów $n \geq 6$, ile jest ich w zestawieniu (73), niezmienniki bowiem U_{kl}^{ij} o różnych wyrazach pierwszych są od siebie niezależne.

Funkcje $D_x \psi, D_y \psi, D_z \psi, D_u \psi$ nazywamy parametrami różniczkowymi. Ze względu na powyższą ich własność można otrzymać wszystkie niezmienniki względne za pomocą różniczkowania, obliczywszy przez całkowanie układu (B) tylko niezmienniki względne rzędu 5 w liczbie 16 i rzędów niższych, których jest 3.

Liczbę tę możemy jeszcze znacznie zmniejszyć. W tym celu zauważmy przedewszystkiem, że wszystkie niezmienniki względne $D_x \psi, D_y \psi, D_z \psi, D_u \psi$ są funkcjami niezmienników (73), można je zaś wyrazić za pomocą tych ostatnich, kładąc w nich zmienne (70) równe zeru i zastępując równocześnie każdą zmienną u' przez odpowiadający jej niezmiennik (73). Niezmienniki $D \psi$ redukują się, jak wiadomo, przy założeniu (70) do jednej z pochodnych drugiej klasy niezmiennika ψ . Wystarczy zatem znaleźć tylko te pochodne i, kładąc w nich zmienne (70) równe zeru, zastąpić zmienne u' przez odpowiadające im niezmienniki. Tak np. $D_x a$ redukuje się przy założeniu (70) do zmiennej a_{i0} , której odpowiada niezmiennik A_{i0} , zatem

$$A_{i0} = D_x a. \quad (84)$$

Zauważmy obydwa niezmienniki czwartego rzędu: b, A_{i0} . Stosując do nich działania D_x, D_y, D_z, D_u , otrzymamy ośm niezmienników 5 rzędu, które swymi wyrazami pierwszymi odpowiadają kolejno niezmiennikom: $B^{i0}, B^{0i}, B_{i0}, B_{0i}; A_{i0}^1, A_{i0}^0, A_{z0}, A_{11}$. Z poprzedniej uwagi wynika, że są one z nami kolejno identyczne, mianowicie:¹⁾

$$B^{i0} = D_x b, \quad B^{0i} = D_y b, \quad B_{i0} = D_z b, \quad B_{0i} = D_u b, \quad (85)$$

¹⁾ Pochodną drugiej klasy sumy, iloczynu, ilorazu dwóch funkcji klasy drugiej oblicza się, jak wiadomo, tak, jak pochodną zwyczajną. Tak np. pochodna drugiej klasy według x niezmiennika: $A_{i0} = a'_{i0} - \frac{a_{0i} a^{i0'}}{3a}$ jest równa:

$$a_{i0}^{10'} - \frac{a^{0i}}{3a} a^{20'} - \frac{a^{i0'} a_{0i}^{10'}}{3a} + \frac{a_{0i}^{10'} a^{i0'}}{3aa},$$

zatem $D_x A_{i0} = A_{i0}^1$.

$$A_{10}^{10} = D_x A_{10}, \quad A_{10}^{01} = D_y A_{10}, \quad A_{20} = D_x A_{10}, \quad A_{11} = D_u A_{10}. \quad (86)$$

Ze względu na to pozostaje jeszcze ośm niezmienników 5 rzędu, mianowicie:

$$A_{02}, \quad A^{20}, \quad A_{01}^{01}, \quad A^{11}, \quad A^{02}, \quad N, \quad M, \quad L, \quad (87)$$

z których dwa pierwsze znaleźliśmy poprzednio. Wykażemy, że sześć pozostałych można otrzymać przy pomocy parametrów różniczkowych i niezmienników poprzednich.

W tym celu znajdziemy najpierw kilka niezmienników (73) rzędu 6 i 7, z którymi spotkamy się przy obliczaniu niezmienników (87). Zauważmy mianowicie, że pochodne według u zmiennej $a^{20'}$ są funkcjami zmiennych u' . Na podstawie wzorów (62), (64) otrzymamy:

$$\begin{aligned} (a^{20'})_{01} &= a_{01}^{20'} + 2a_{10}^{01'} + a^{01'}, \\ (a^{20'})_{02} &= a_{02}^{20'} + 4a_{11}^{01'} + 2a'_{20} + 2a_{01}^{01'}, \end{aligned} \quad (88)$$

wzory, które przypominają pochodne zwyczajne. Podobnie też pochodne drugiej klasy według z zmiennych $a^{20'}$, $a^{11'}$ można na podstawie wzorów (64) i przyrostów $\partial a^{10'}$, $\partial a^{01'}$ wyrazić w zmiennych u' . Mają one kształt następujący:

$$\begin{aligned} (a^{20'})'_{10} &= a_{10}^{20'} + 2a^{11'} + \frac{1}{2}a a_{01}, \\ (a^{11'})'_{10} &= a_{10}^{11'} + a^{02'} + \frac{1}{2}a a'_{11} + \frac{1}{2}a_{01} a'_{10} - \frac{1}{2}a_{02} a^{10'}. \end{aligned} \quad (89)$$

Zastosujmy do niezmiennika A^{20} , znalezionej w poprzednim ustępie (72), działanie D_u . Niezmiennik $D_u A^{20}$ redukuje się przy założeniu (70) do pochodnej $(a^{20'})_{01}$, którą wyżej znaleźliśmy; zastępując więc zmienne u' przez odpowiadające im niezmienniki, otrzymamy $D_u A^{20} = A_{01}^{20} + 2A_{10}^{01}$, zatem:

$$A_{01}^{20} = D_u A^{20} - 2A_{10}^{01}. \quad (90)$$

Podobnie stosując działanie D_x do niezmiennika A_{02} , a następnie to samo działanie do $D_x A_{02}$ i oznaczając dla krótkości wynik przez $D_{xx} A_{02}$, otrzymamy na tej samej podstawie, co przedtem: $D_{xx} A_{02} = A_{02}^{20} - \frac{1}{3}a A^{20} A_{02}$; zatem:

$$A_{02}^{20} = D_{xx} A_{02} + \frac{1}{3}a A^{20} A_{02}. \quad (91)$$

Na podstawie wzorów (86) znajdziemy z łatwością niezmienniki A_{11} , A_{10}^{10} , a stosując do nich działanie D_x , otrzymamy: $D_x A_{11} = A_{11}^{10} - \frac{1}{3}a A^{20} A_{02}$, $D_x A_{10}^{10} = A_{10}^{20} - \frac{1}{a} A^{20} A_{10}$; zatem:

$$A_{11}^{10} = D_x A_{11} + \frac{1}{3}a A^{20} A_{02}, \quad (92)$$

$$A_{10}^{20} = D_x A_{10}^{10} + \frac{1}{a} A^{20} A_{10}. \quad (93)$$

W końcu znajdziemy jeszcze niezmiennik A_{01}^{10} . Można go otrzymać, stosując albo działanie D_x do A_{01}^{01} , albo działanie D_y do A_{10}^{10} , gdyż niezmienniki otrzymane w obydwu przypadkach zawierają wyraz $a_{10}^{10'}$. Obierając drugą drogę, otrzymamy:

$$A_{01}^{10} = D_y A_{10}^{10} - \frac{1}{6}a A_{11} + \frac{1}{3}a A^{20} A_{01}^{01} + \frac{1}{a} A_{10} A^{11}, \quad (94)$$

ponieważ $D_y A_{10}^{10}$ redukuje się przy założeniu (70) do: $(a_{10}^{10'})^{01'} - \frac{1}{3}a a^{20'} a_{01}^{01'}$ — $\frac{1}{a} a'_{10} a^{11'}$, wyraz zaś pierwszy tego wyrażenia jest równy: $a_{10}^{10'} + \frac{1}{6}a a'_{11} - \frac{1}{12}a_{02} a^{10'}$, jak to ze wzorów (64) wynika. Po prawej stronie ostatniej równości nieznane są jedynie niezmienniki A_{01}^{01} , A^{11} .

Przejdźmy z kolei do obliczenia tych właśnie niezmienników. Niezmiennik $D_{uu} A^{20}$, otrzymany przez dwukrotne zastosowanie działania D_u do A^{20} , redukuje się przy założeniu (70) do: $(a^{20'})_{02} - \frac{7}{3}a a'_{10} a'_{10} - \frac{5}{3}a a_{02} a^{20'}$. Ponieważ wyraz pierwszy ma kształt (88), zatem:

$$A_{01}^{20} = \frac{1}{2} \left[D_{uu} A^{20} - A_{02}^{20} - 4A_{11}^{01} - 2A_{20} + \frac{7}{3}a A_{10} A_{10} + \frac{5}{3}a A^{20} A_{02} \right]. \quad (95)$$

Wszystkie niezmienniki, występujące po prawej stronie tej równości, znaleźliśmy poprzednio. Stosując do A^{20} działanie D_x , otrzymamy przy założeniu (70) pochodną drugiej klasy według z zmiennej $a^{20'}$. Pochodna ta ma kształt (89), zatem:

$$A^{11} = \frac{1}{2} (D_x A^{20} - A_{10}^{20}), \quad (96)$$

gdzie niezmiennik A_{10}^{20} ma kształt (93). Aby otrzymać niezmiennik A^{02} , obliczmy na podstawie ostatniego wzoru A^{11} . Zawiera on między innymi wyrazy: $A^{11} = a^{11'} + \frac{1}{2}a a_{01} - \frac{a^{10'}}{3a} a_{10}^{01'} + \frac{a_{01}^{10'}}{3a} a^{20'} + \dots$, przyczem każdy wyraz dalszy jest iloczynem przynajmniej dwu zmiennych (70) i zmiennych u' . Celem wyznaczenia $D_x A^{11}$ należy obliczyć pochodną drugiej klasy według z niezmiennika A^{11} przy założeniu (70), do czego nie jest konieczna znajomość wyrazów, zawierających iloczyn dwu lub więcej zmiennych (70), i zastą-

pić zmienne u' przez odpowiadające im niezmienniki (73). Pochodna według z zmiennej $a^{11'}$, którą obliczyliśmy poprzednio (89), zawiera wyraz a^{02} , pochodne zaś według z zmiennych $a^{10'}$, $a_{01}^{01'}$ są kolejno równe: $a_{10}^{10'} + a^{01'}$, $a_{11}^{11'} + a_{01}^{01'}$. Wynika stąd, że:

$$A^{02} = D_z A^{11} - A_{10}^{11} - \frac{1}{3} a A_{11} + \frac{1}{3a} A_{10}^{10} A_{01}^{01} - \frac{1}{3a} A^{20} (A_{11}^{10} + A_{01}^{01}). \quad (97)$$

Po prawej stronie występują tylko niezmienniki, znalezione poprzednio.

Pozostają jeszcze trzy niezmienniki 5 rzędu: N , M , L . Pierwszy z nich redukuje się przy założeniu (70) do zmiennej $n = \frac{1}{3} (a_{03} - b^{20'})$, zatem:

$$N = \frac{1}{3} (A_{03} - B^{20}),$$

gdzie A_{03} oznacza niezmiennik, redukujący się do a_{03} . Łatwo stwierdzić, że $D_u A_{02}$ i $D_x B^{10}$ redukują się kolejno do a_{03} i $b^{20'} + \frac{2b}{3a} a^{20'}$, zatem:

$$A_{03} = D_u A_{02}, \quad B^{20} = D_x B^{10} - \frac{2b}{3a} A^{20}.$$

Na podstawie tych wzorów możemy wyrazić niezmiennik N w zmiennych u' . Ma on kształt następujący:

$$N = n - \frac{a_{01}}{3a} a_{02} - \frac{a^{10'}}{3a} b^{10'} - \frac{a^{10'} a^{10'}}{9aa} b + \frac{4a_{01} a_{01} a_{01}}{27aa}. \quad (98)$$

Zauważmy teraz zmienną m w postaci (77). Oznaczając przez N^{10} niezmiennik, redukujący się przy założeniu (70) do $n^{10'}$, otrzymamy:

$$M = \frac{1}{2} (A_{12} - N^{10}) - \frac{1}{3} a b.$$

Otóż niezmiennik A_{12} jest identyczny z niezmiennikiem $D_x A_{02}$, ze wzoru zaś (98) wynika, że $D_x N$ redukuje się przy założeniu (70) do $n^{10'} - \frac{1}{3a} a^{20'} b^{10'}$, zatem:

$$M = \frac{1}{2} (D_x A_{02} - D_x N - \frac{1}{3a} A^{20} B^{10}) - \frac{1}{3} a b. \quad (99)$$

Przejdźmy do niezmiennika L . Przy założeniu (70) redukuje się on do zmiennej l , która ma kształt (78). Pierwsze dwa wyrazy tego wyrażenia są pochodnymi według u zmiennych a'_{20} , $a_{01}^{01'}$. Ze wzorów (62) wynika, że:

$$\begin{aligned} (a'_{20})_{01} &= a'_{21} - \frac{1}{6} b a^{10'}, & (a_{01}^{01'})_{01} &= a_{02}^{01'} + \frac{1}{4} a b^{10'}, \\ \text{zatem:} & & l &= a'_{21} - \frac{1}{2} a_{02}^{01'} - m^{10'} - \frac{1}{12} a b^{10'} - \frac{1}{6} b a^{10'}. \end{aligned}$$

Niezmiennik L ma wobec tego kształt następujący:

$$L = A_{21} - \frac{1}{2} A_{02}^{01} - M^{10} - \frac{1}{12} a B^{10}, \quad (100)$$

gdzie M^{10} oznacza jak zwyczajnie niezmiennik względny, redukujący się przy założeniu (70) do $m^{10'}$. Niezmienniki A_{21} , A_{02}^{01} , M^{10} możemy otrzymać przy pomocy parametrów różniczkowych. Zauważmy mianowicie niezmiennik A_{11} . Wyrażając go w zmiennych u' , otrzymamy:

$$A_{11} = a'_{11} - \frac{a_{01}}{a} A_{10} - \frac{a^{10'}}{3a} A_{02} - \frac{a_{01} a_{01}^{01'}}{3a}.$$

Wynika stąd, że $D_x A_{11}$ redukuje się przy założeniu (70) do

$$a'_{21} - \frac{1}{a} a'_{10} a'_{11} - \frac{1}{3a} a_{02} a_{01}^{01'}.$$

Przy tem samym założeniu redukuje się $D_y A_{02}$ do $a_{02}^{01'}$, zatem:

$$A_{21} = D_x A_{11} + \frac{1}{a} A_{10} A_{11} + \frac{1}{3a} A_{02} A_{01}^{01'},$$

$$A_{02}^{01} = D_y A_{02}.$$

Na podstawie wzoru (99) możemy wyrazić niezmiennik M w zmiennych u' . Ma on kształt:

$$M = m - \frac{a^{10'}}{2a} N - \frac{2a_{01}}{3a} A_{11} - \frac{a_{01}^{01'}}{6a} A_{02} + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze zawierają jako czynnik iloczyn przynajmniej dwu zmiennych (70). Wynika stąd, że $D_x M$ redukuje się przy założeniu (70) do $m^{10'} - \frac{1}{2a} a^{20'} n - \frac{1}{6a} a_{02} a_{01}^{01'}$, zatem:

$$M^{10} = D_x M + \frac{1}{2a} A^{20} N + \frac{1}{6a} A_{02} A_{01}^{01'}.$$

Niezmiennik A_{01}^{01} znaleźliśmy już poprzednio (90), wobec czego na podstawie wzoru (100) możemy obliczyć L .

Przy pomocy działań D_x , D_y , D_z , D_u można, jak widzimy, z czterech tylko niezmienników względnych a , b , A_{02} , A^{20} , obliczyć wszystkie niezmienniki rzędu $n \leq 5$. Poprzednio wykazaliśmy, że, stosując je do tych ostatnich, można otrzymać pełny układ niezmienników dowolnie wielkiego rzędu.

Twierdzenie 4. Znajomość czterech parametrów różniczkowych $D\psi$ i czterech niezmienników względnych

$$a, \quad b, \quad A_{02}, \quad A^{20}$$

wystarcza w przypadku $a \neq 0$ do obliczenia wszystkich niezmienników względnych rzędu $n \leq 5$, a wraz z nimi do obliczenia wszystkich innych dowolnego rzędu.

2. Parametry $D_x \psi$, $D_y \psi$, $D_s \psi$, $D_u \psi$ otrzymaliśmy przy założeniu, że niezmiennik względny a jest różny od zera. Przyjmijmy teraz, że a jest zerem i założmy, że niezmiennik względny b jest różny od zera. Podobnie, jak poprzednio, możemy otrzymać cztery nowe parametry różniczkowe, dołączając tym razem w układzie (75) wyrazy, pochodzące od przyrostów pochodnych (79), i całkując układ:

$$\begin{aligned} -5b \frac{\partial f}{\partial b_{01}} + b^{10'} \frac{\partial f}{\partial b'_{10}} + s\psi \frac{\partial f}{\partial \psi_{01}} + \psi^{10'} \frac{\partial f}{\partial \psi'_{10}} &= 0, \\ 2b \frac{\partial f}{\partial b^{10'}} - b_{01} \frac{\partial f}{\partial b'_{10}} - b'_{10} \frac{\partial f}{\partial b^{01'}} + (r-s)\psi \frac{\partial f}{\partial \psi^{10'}} - \psi_{01} \frac{\partial f}{\partial \psi'_{10}} - \psi'_{10} \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0, \\ -3b \frac{\partial f}{\partial b'_{10}} + b^{10'} \frac{\partial f}{\partial b^{01'}} + r\psi \frac{\partial f}{\partial \psi'_{10}} + \psi^{10'} \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0, \\ -b \frac{\partial f}{\partial b^{01'}} + (2r-s)\psi \frac{\partial f}{\partial \psi^{01'}} &= 0. \end{aligned}$$

Układ ten jest układem zupełnym. Niezmienniki względne, redukujące się przy założeniu:

$$b_{01} = b^{10'} = b'_{10} = b^{01'} = 0 \quad (101)$$

do pochodnych (79), oznaczmy kolejno przez $\Delta_u \psi$, $\Delta_x \psi$, $\Delta_s \psi$, $\Delta_y \psi$. Są one całkami powyższego układu i mają kształt następujący:

$$\begin{aligned} \Delta_u \psi &= \psi_{01} + \frac{s b_{01}}{5b} \psi, \\ \Delta_x \psi &= \psi^{10'} - \frac{(r-s) b^{10'}}{2b} \psi, \\ \Delta_s \psi &= \psi'_{10} + \frac{b^{10'}}{2b} \Delta_u \psi + \frac{b_{01}}{5b} \Delta_x \psi + \left[\frac{r b'_{10}}{3b} + \frac{(5r-3s) b_{01} b^{10'}}{30 b b} \right] \psi, \\ \Delta_y \psi &= \psi^{01'} + \frac{b^{10'}}{2b} \Delta_x \psi - \frac{b^{10'} b^{10'}}{8 b b} \Delta_u \psi + \left[\frac{b'_{10}}{3b} + \frac{b_{01} b^{10'}}{15 b b} \right] \Delta_x \psi \\ &\quad + \left[\frac{(2r-s) b^{01'}}{b} + \frac{(5r-3s) b^{10'} b'_{10}}{6 b b} + \frac{(5r-3s) b_{01} b^{10'} b^{10'}}{30 b b b} \right] \psi. \end{aligned} \quad (102)$$

Parametry różniczkowe $\Delta \psi$ posiadają własności analogiczne do tych, jakie posiadają parametry $D \psi$. Jeżeli niezmiennik względny ψ jest rzędu $n \geq 4$, wówczas niezmienniki $\Delta \psi$ są rzędu o 1 wyższego. Wyraz pierwszy

każdego z nich jest pochodną drugiej klasy niezmiennika ψ , wyrazy dalsze zaś są ułamkami, których mianowniki zależą tylko od całkowitych potęg zmiennej b , a liczniki są funkcjami zmiennych (101), niezmiennika ψ i jego pochodnych drugiej klasy, tego samego rzędu co wyraz pierwszy lecz potęgi niższej.

Zauważmy że, jeżeli zmienna a jest zerem, wówczas wszystkie zmienne $a_{kl}^{ij'}$ są zerami, a zmienne l , m , n , a więc i ich pochodne drugiej klasy redukują się do pochodnych $b_{kl}^{ij'}$, jak to ze wzorów (76), (78) wynika. Ze względu na to istnieją obok b tylko niezmienniki względne rzędu $n \geq 6$, które w poprzednim ustępie oznaczyliśmy przez

$$\mathfrak{B}_{kl}^{ij'}, \quad (103)$$

a które przy założeniu (101) redukują się do zmiennych $b_{kl}^{ij'}$. Wszystkie inne niezmienniki względne są w przypadku $a=0$ funkcjami tych ostatnich. Z własności powyższych parametrów różniczkowych $\Delta \psi$ wynika, podobnie jak poprzednio, że, stosując je do niezmienników (103) rzędu $n=6$, można otrzymać tyle niezależnych od siebie niezmienników dowolnie wielkiego rzędu, ile jest zmiennych $b_{kl}^{ij'}$ tego samego rzędu. W przypadku $a=0$, $b \neq 0$ jest więc znajomość wszystkich niezmienników względnych rzędu 6 wystarczająca do obliczenia innych, przy pomocy parametrów różniczkowych. Niezmienników (103) rzędu 6 jest 10; można jednak wykazać, że wystarczy obliczyć przez całkowanie systemu (B) tylko niektóre z nich, a stosując działania Δ_x , Δ_y , Δ_s , Δ_u , otrzyma się pozostałe.

V. Niezmienniki bezwzględne.

Mając dane niezmienniki względne, możemy z łatwością znaleźć wszystkie niezmienniki w ścisłym tego słowa znaczeniu. Wprowadźmy mianowicie w układach (B), (C) w miejsce zmiennych u' niezmienniki względne U lub U , zależnie od tego, czy a jest różne od zera, czy też $a=0$. W pierwszym przypadku pozostawmy bez zmiany jedynie zmienne (70), w drugim zmienne (101), które oznaczmy krótko przez v . Po tej zamianie zmiennych redukuje się układ (B) do czterech równań:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (B')$$

z czego wynika, że szukane niezmienniki są funkcjami jedynie zmiennych U ,

lub 11. Jeżeli w równaniach układu (C) położymy $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$, przyjmą one kształt:

$$\begin{aligned} Y^{01} f &= \sum r_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial \psi_i} = 0, \\ Y^{10} f &= \sum s_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial \psi_i} = 0, \end{aligned} \quad (C')$$

gdzie ψ_i oznacza dowolny niezmiennik względny U lub 11, o wykładnikach r_i, s_i , którego przyrost ma zatem kształt:

$$\delta \psi_i = \psi_i (r_i, s_i).$$

Otóż z trzech dowolnych niezmienników względnych można otrzymać jeden niezmiennik w ścisłym tego słowa znaczeniu. Zauważmy bowiem niezmienniki ψ_1, ψ_2, ψ_3 i zcałkujemy układ równań:

$$\begin{aligned} r_1 \psi_1 \frac{\partial f}{\partial \psi_1} + r_2 \psi_2 \frac{\partial f}{\partial \psi_2} + r_3 \psi_3 \frac{\partial f}{\partial \psi_3} &= 0, \\ s_1 \psi_1 \frac{\partial f}{\partial \psi_1} + s_2 \psi_2 \frac{\partial f}{\partial \psi_2} + s_3 \psi_3 \frac{\partial f}{\partial \psi_3} &= 0. \end{aligned}$$

Całka tego układu ma, jak wiadomo, kształt:

$$\psi_1^{\lambda_1} \cdot \psi_2^{\lambda_2} \cdot \psi_3^{\lambda_3},$$

gdzie wykładniki potęgowe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ spełniają równości:

$$\begin{aligned} r_1 \lambda_1 + r_2 \lambda_2 + r_3 \lambda_3 &= 0, \\ s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2 + s_3 \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\frac{\lambda_1}{r_2 s_3 - r_3 s_2} = \frac{\lambda_2}{r_3 s_1 - r_1 s_3} = \frac{\lambda_3}{r_1 s_2 - r_2 s_1}.$$

Wyrażenie

$$N = \psi_1^{r_2 s_3 - r_3 s_2} \cdot \psi_2^{r_3 s_1 - r_1 s_3} \cdot \psi_3^{r_1 s_2 - r_2 s_1} \quad (104)$$

jest więc całką układu (C'), a równocześnie niezmiennikiem bezwzględnym.¹⁾

¹⁾ Zauważmy że, gdy wykładniki r_i, s_i niezmienników ψ_i są równocześnie zerami, wówczas z tych dwóch tylko niezmienników względnych można utworzyć jeden niezmiennik bezwzględny:

$$N = \psi_1^{-s_2} \cdot \psi_2^{s_1}.$$

Liczbę niezmienników względnych każdego rzędu obliczyliśmy poprzednio. Ponieważ najniższy rząd posiadają niezmienniki a, b , zatem każdemu innemu niezmiennikowi względnemu odpowiada jeden niezmiennik bezwzględny tego samego rzędu.

W przypadku najogólniejszym istnieje więc 1 niezmiennik bezwzględny 4 rzędu, szesnaście 5 rzędu, a w przypadku $n \geq 6$

$$\binom{n-1}{3} + 3 \binom{n-2}{2} + 3(n-4) + 1$$

niezmienników rzędu n -tego.

Ze względu na znaczenie, jakie w tej teorii posiadają niezmienniki względne, zajmiemy się obecnie pytaniem, jak zmieniają się one pod wpływem skończonego przekształcenia stycznościowego:

$$x' = X(xyz), \quad y' = Y(xyz), \quad z' = Z(xyz). \quad (105)$$

Oznaczając krótko przez ψ' , ψ niezmiennik względny ψ , wyrażony kolejno w zmiennych x', y', z' ; x, y, z , otrzymamy:

$$\psi' = \psi \cdot C,$$

gdzie czynnik C zależy tylko od postaci przekształcenia stycznościowego, a nie zależy od kształtu równania różniczkowego. Aby wyznaczyć C w przypadku ogólnym, znajdziemy najpierw przekształcenia skończone dwóch niezmienników specjalnych. W tym celu nazwijmy pochodne $\frac{dz}{dx} = u, \frac{du}{dx} = \omega$, a równocześnie

$$\frac{dz'}{dx'} = u' = U(xyzu), \quad \frac{du'}{dx'} = \omega'.$$

Ponieważ X jest funkcją zmiennych x, y, z , a funkcja U zależy nadto od zmiennej u , zatem, używając zwyczajnego oznaczenia pochodnych, otrzymamy:

$$\omega' = \omega \frac{U_{01}}{X^{10}} + \frac{U^{10}}{X^{10}}.$$

Upochodnijmy obie strony tej równości względem u . Ponieważ

$$\frac{\partial \omega'}{\partial u} = \frac{\partial \omega'}{\partial u'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial u},$$

a pochodna

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = U_{01},$$

zatem:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial u'} \cdot U_{01} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{U_{01}}{X^{10}} + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze nie zależą od $\frac{\partial \omega}{\partial u}$. Pochodna U_{01} jest różna od zera, przeto:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial u'} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot \frac{1}{X^{10}} + \dots$$

Upodabniając dwukrotnie obie strony tej równości względem u , otrzymamy podobnie jak poprzednio:

$$\frac{\partial^3 \omega'}{\partial u'^3} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial u^3} \cdot \frac{1}{X^{10} (U_{01})^2} + \dots$$

przyczem wyrazy dalsze nie zależą od $\frac{\partial^3 \omega}{\partial u^3}$. Pochodna $\frac{\partial^4 \omega}{\partial u^4}$ jest niezmiennikiem względnym, zatem biorąc jeszcze raz pochodną według u , otrzymamy dokładnie:

$$\frac{\partial^4 \omega'}{\partial u'^4} = \frac{\partial^4 \omega}{\partial u^4} \cdot \frac{1}{X^{10} (U_{01})^3}.$$

Otóż $U = \frac{Z^{10}}{X^{10}}$, zatem:

$$U_{01} = \frac{X^{10} Z_{10} - Z^{10} X_{10}}{(X^{10})^2} = \frac{[ZX]}{(X^{10})^2},$$

gdzie wyrażenie $[ZX]$ jest symbolem Poissona. Nazywając jak poprzednio $b = \frac{\partial^4 \omega}{\partial u^4}$, otrzymamy więc:

$$b' = b \cdot \frac{(X^{10})^3}{[ZX]^3}.$$

W podobny sposób możnaby znaleźć przekształcenie skończone niezmiennika względnego a . Aby jednak uniknąć dłuższych obliczeń, z tem połączonych, zauważmy dowolną funkcję φ' zmiennych x', y', z', u' . Po wprowadzeniu zmiennych x, y, z, u za pomocą przekształcenia stycznościowego, oznaczmy φ' przez φ , niech więc będzie

$$\varphi' = \varphi$$

ze względu na przekształcenie (105). Upochodnijmy obie strony tej równości względem u :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = U_{01} = \frac{[ZX]}{(X^{10})^2},$$

zatem:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial u'} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{(X^{10})^2}{[ZX]}.$$

Pochodna $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ jest więc niezmiennikiem względnym. Łatwo obliczyć jej przekształcenie nieskończonościowe. Na podstawie ostatniego wzoru (13) otrzymamy:

$$\delta \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} (W^{01} + 2W_1^{10});$$

ponieważ zaś przyrost $\delta \varphi$ jest zerem, przeto:

$$\delta \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} (-W^{01} - 2W_1^{10}).$$

Wykładniki niezmiennika $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ są więc $r = -1$, $s = -2$.

Przyjmijmy, że niezmiennik względny ϕ ma wykładniki r, s i zauważmy niezmiennik (104). Wyrażenie

$$\phi b^{-s+2r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^{-5r+3s}$$

jest niezmiennikiem bezwzględnym, zatem:

$$\varphi' \cdot b'^{-s+2r} \cdot \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial u'} \right)^{-5r+3s} = \phi b^{-s+2r} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^{-5r+3s}.$$

Podstawiając za $b', \frac{\partial \varphi'}{\partial u'}$ powyżej znalezione wartości, otrzymamy:

$$\phi' b'^{-s+2r} \cdot \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial u'} \right)^{-5r+3s} \cdot \frac{(X^{10})^s}{[ZX]^r} = \phi b^{-s+2r} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^{-5r+3s},$$

skąd:

$$\phi' = \phi \frac{[ZX]^r}{\left(\frac{\partial X}{\partial x} + z \frac{\partial X}{\partial y} + u \frac{\partial X}{\partial z} \right)^s}. \quad (106)$$

gdzie symbol $[ZX]$ ma wartość następującą:

$$[ZX] = \frac{\partial Z}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + z \frac{\partial X}{\partial y} \right) - \frac{\partial X}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + z \frac{\partial Z}{\partial y} \right).$$

Postać przekształcenia skończonego niezmiennika względnego ϕ uzasadnia równocześnie naszą nazwę wykładników na oznaczenie liczb r, s .

Twierdzenie 5. Po wykonaniu skończonego przekształcenia stycznościowego

$$x' = X(xyz), \quad y' = Y(xyz), \quad z' = Z(xyz)$$

przekształca się każdy niezmiennik względny ψ o wykładnikach r, s na

$$\psi' = \psi \frac{[ZX]^r}{\left(\frac{\partial X}{\partial x} + z \frac{\partial X}{\partial y} + u \frac{\partial X}{\partial z}\right)^s},$$

gdzie $[ZX]$ jest symbolem Poissona. Z trzech niezmienników względnych można zawsze utworzyć jeden niezmiennik w ścisłym tego słowa znaczeniu.

DI. Równoważność dwóch równań 3-go rzędu ze względu na przekształcenia stycznościowe.

Zauważmy dowolne równanie różniczkowe zwyczajne 3 rzędu w zmiennych x', y' :

$$\frac{d^3 x'}{dx'^3} = \omega'(x'y'z'u'). \quad (107)$$

Zajmiemy się pytaniem, kiedy można je przekształcić na inne równanie dane za pomocą pewnego przekształcenia stycznościowego

$$x' = X(xyz), \quad y' = Y(xyz), \quad z' = Z(xyz).$$

Przyjmijmy, że funkcje X, Y mają kształt najogólniejszy. Po wykonaniu tego przekształcenia na równaniu (107) otrzymamy:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \omega(xyzu).$$

Jest to najogólniejsze równanie, do którego można sprowadzić równanie (107) za pomocą przekształcenia stycznościowego. Oznaczając $u' = \frac{dz'}{dx'}$ przez $U(xyzu)$, otrzymamy:

$$\omega' = \frac{d\omega'}{dx'} = \frac{U^{10} + \omega U_{01}}{X^{10}},$$

gdzie zmienne, od których zależy ω' , zastąpiono przez X, Y, Z, U . Pochodna U_{01} jest różna od zera, zatem

$$\omega = \frac{\omega' X^{10} - U^{10}}{U_{01}}.$$

Funkcja ω zależy od dwóch funkcji dowolnych X, Y i ich pochodnych. Różniczkując obie strony tej równości i eliminując X, Y , otrzymamy pewien układ równań:

$$F_i\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (108)$$

którego całką ogólną jest funkcja ω , a który posiada tę własność, że nie ulega zmianie pod wpływem dowolnego przekształcenia stycznościowego. Funkcja ω' jest również jedną z całek tego układu, kładąc bowiem $X=x, Y=y$ otrzymamy $\omega = \omega'(xyzu)$. W ogólności każde równanie $\frac{d^3 y}{dx^3} = \omega$, którego funkcja ω jest całką układu (108), można przekształcić na równanie (107) za pomocą pewnego przekształcenia stycznościowego.

Kwestię równoważności dwóch równań możemy rozstrzygnąć przy pomocy znalezionych niezmienników w następujący sposób:

Każdy niezmiennik bezwzględny jest funkcją czterech zmiennych niezależnych x, y, z, u , zatem pomiędzy pięcioma niezmiennikami zachodzi przynajmniej jeden związek, niezależny od x, y, z, u . Utwórzmy związki, jakie zachodzą pomiędzy niezmiennikami jednego z danych równań. Niech związki te mają kształt:

$$\Phi_i\left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \dots\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (109)$$

Jeżeli równanie drugie można przekształcić na poprzednie przy pomocy pewnego przekształcenia stycznościowego, to związki, zachodzące pomiędzy niezmiennikami bezwzględnych równania drugiego, muszą tworzyć układ równoważny z układem (109), czyli że funkcja ω równania drugiego musi być całką układu (109). Warunek ten jest również wystarczający.

Układ (109) zawiera nieograniczoną liczbę równań. Przyjmując jednak pewne założenia co do kształtu niezmienników bezwzględnych najniższych rzędów, możemy ograniczyć się do utworzenia tylko niektórych równań układu (109), gdyż następne będą wprost wynikiem poprzednich¹⁾.

Przyjmijmy np. że istnieją cztery niezmienniki bezwzględne 4 i 5 rzędu:

$$I_1, I_2, I_3, I_4,$$

¹⁾ Zob. A. Tresse: Sur les inv. diff. (Acta Math. 18).

takie, że ich wyznacznik funkcyjny $\frac{D(I_1 I_2 I_3 I_4)}{D(x y z u)}$ jest różny od zera. Każdy inny niezmiennik bezwzględny 5 rzędu $N_i^{(5)}$ tworzy z nimi związek kształtu $N_i^{(5)} = F_i^{(5)}(I_1 I_2 I_3 I_4)$. Podobne związki tworzy z czterema powyższymi niezmiennikami każdy niezmiennik bezwzględny 6 rzędu $N_j^{(6)}$ tak, że układ (109) zawiera między innymi następujące równania 5 i 6 rzędu:

$$\begin{aligned} N_i^{(5)} &= F_i^{(5)}(I_1 I_2 I_3 I_4), \\ N_j^{(6)} &= F_j^{(6)}(I_1 I_2 I_3 I_4). \end{aligned} \quad (110)$$

Wykażemy, że równania rzędów wyższych

$$N_k^{(v)} = F_k^{(v)}(I_1 I_2 I_3 I_4), \quad v \geq 7 \quad (111)$$

wynikają z poprzednich przy pomocy różniczkowania. Istotnie, zauważmy, że, stosując do $N_j^{(6)}$ działania D_x, D_y, D_z, D_u , otrzymamy pełny układ niezmienników względnych rzędu 7; mnożąc zaś te ostatnie przez odpowiednie potęgi dwóch dowolnych niezmienników względnych, otrzymamy niezmienniki bezwzględne rzędu 7.

Z drugiej strony zauważmy, że jeżeli N jest niezmiennikiem bezwzględnym i jeżeli $N = F(I_1 \dots I_4)$, to:

$$DN = \frac{\partial F}{\partial I_1} DI_1 + \frac{\partial F}{\partial I_2} DI_2 + \frac{\partial F}{\partial I_3} DI_3 + \frac{\partial F}{\partial I_4} DI_4,$$

gdzie D oznacza jedno z działań D_x, D_y, D_z, D_u . Istotnie każdy parametr $D\psi$ ma kształt:

$$D\psi = A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} + C \frac{\partial \psi}{\partial z} + D \frac{\partial \psi}{\partial u} + (rE + sE)\varphi,$$

gdzie ostatni wyraz jest zerem, gdy ψ jest niezmiennikiem bezwzględnym. Wynika stąd, że:

$$DN = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial F}{\partial I_k} \left(A \frac{\partial I_k}{\partial x} + B \frac{\partial I_k}{\partial y} + C \frac{\partial I_k}{\partial z} + D \frac{\partial I_k}{\partial u} \right),$$

$$DN = \frac{\partial F}{\partial I_1} DI_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial I_4} DI_4.$$

Wyrażenia DN, DI_k są niezmiennikami względnymi, posiadającymi te same wykładniki, zatem mnożąc obie strony przez iloczyn odpowied-

nich potęg dwóch dowolnych odmiennych od zera niezmienników względnych rzędu 3, 4 lub 5, otrzymamy związek pomiędzy niezmiennikami bezwzględnymi. Stronę prawą tej równości można przy pomocy związków (110) wyrazić przez I_1, I_2, I_3, I_4 , ponieważ niezmienniki DI_k są co najwyżej 6 rzędu; strona zaś lewa jest jednym z niezmienników bezwzględnych rzędu 7, jeżeli N jest niezmiennikiem 6 rzędu. Stosując do $N_k^{(7)}$ te same działania, otrzymamy w ten sposób wszystkie związki (111).

Można zresztą wykazać, że w pewnych przypadkach nie wszystkie związki (110) są od siebie niezależne. Tak np. jeżeli niezmienniki bezwzględne I_k zostały utworzone z niezmienników względnych

$$a, b, A_{10}, L, M, N,$$

wówczas wszystkie równania (110) rzędu 6, z wyjątkiem co najwyżej sześciu, są wynikiem pozostałych. Dyskusji tej, ze względu na specjalne założenia, jakie należy przytem poczynić co do kształtu niezmienników I_k , przeprowadzać nie będziemy. Zastosujemy natomiast powyższą metodę do rozwiązania zagadnienia następującego:

Jakie warunki musi spełniać funkcja ω równania 3-go rzędu:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \omega, \quad (113)$$

aby równanie to można było przekształcić za pomocą pewnego przekształcenia stycznościowego na dowolne równanie liniowe:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \lambda \frac{d^2 y}{dx^2} + \mu \frac{dy}{dx} + \nu y + \rho, \quad (114)$$

gdzie współczynniki λ, μ, ν, ρ są funkcjami tylko zmiennej x .

W tym celu znajdziemy przedewszystkiem wszystkie niezmienniki względne najogólniejszego równania liniowego. Zauważmy, że niezmiennik względny b jest zerem. Niezmiennik a ma, jak wiadomo, kształt następujący:

$$a = \alpha^{10} + 6\omega^{01} - \frac{7}{3}\omega_{01}\alpha + \omega\alpha_{01},$$

gdzie:

$$\alpha = \omega_{01}^0 - 3\omega_{10} - \frac{2}{3}\omega_{01}\omega_{01} + \omega\omega_{02}.$$

Otóż zmienna α zależy tylko od zmiennej x i ma wartość

$$\alpha = \frac{\partial \lambda}{\partial x} - 3\mu - \frac{2}{3}\lambda\lambda;$$

zatem:

$$a = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x} - 3 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{4}{3} \lambda \lambda \lambda + 2\lambda \mu + 6\nu.$$

Niezmiennik względny a jest więc funkcją tylko zmiennej x .

Wykażemy, że w ogólności wszystkie niezmienniki względne równania liniowego są funkcjami tylko zmiennej x i redukują się do:

$$a, A^{20}, A^{30}, \dots, A^{n0} \quad (115)$$

lub do ich funkcji, wszystkie zaś inne są zerami.

Istotnie, na podstawie twierdzenia 4-go można wyznaczyć wszystkie niezmienniki względne stosowaniem parametrów różniczkowych (80) do czterech niezmienników następujących:

$$a, b, A_{02}, A^{20}.$$

Dwa ostatnie mają postać następującą:

$$\begin{aligned} A_{02} &= a_{02} - \frac{2a_{01}a_{01}}{3a}, \\ A^{20} &= a^{20'} - \frac{7a^{10'}a^{10'}}{6a}. \end{aligned} \quad (116)$$

Ponieważ niezmiennik a zależy tylko od x , zatem $a_{01} = a_{02} = 0$, a niezmiennik A_{02} jest identycznie zerem. Niezmiennik A^{20} zależy tylko od pochodnych $a^{10'}$, $a^{20'}$; stosując dwukrotnie drugi wzór (57) do niezmiennika a o przyroście $\delta a = a$ (0, 3), otrzymamy:

$$\begin{aligned} a^{10'} &= a^{10} + \omega a_{01} - \omega_{10} a, \\ a^{20'} &= (a^{10'})^{10} + \omega (a^{10'})_{01} - \frac{4}{3} \omega_{01} a^{10'} - \frac{1}{2} \alpha a. \end{aligned}$$

Otóż pochodna $a^{10'}$ redukuje się do $\frac{\partial a}{\partial x}$, zatem jest funkcją tylko zmiennej x ; podobnie też pochodna $a^{20'}$ jest funkcją tylko zmiennej x , ponieważ redukuje się do $\frac{\partial a^{10'}}{\partial x} - \frac{1}{2} \alpha a$. Niezmiennik względny A^{20} jest więc funkcją tylko zmiennej x , podobnie jak a , zaś

$$b = A_{02} = 0.$$

Zauważmy teraz że, jeżeli pewien niezmiennik względny ϕ jest identycznie zerem, to wszystkie niezmienniki względne $D_x \phi$, $D_y \phi$, $D_z \phi$, $D_u \phi$ są

również identycznie zerami; wynika to bezpośrednio z kształtu parametrów (80) i pochodnych (79). Wszystkie zatem niezmienniki względne, otrzymane stosowaniem parametrów (80) do b i do A_{02} , są zerami.

Z drugiej strony, z wzorów (79) wynika, że jeżeli ϕ jest niezmiennikiem względny różnym od zera lecz zależnym tylko od x , to pochodna drugiej klasy ϕ_{01} , ϕ'_{10} , $\phi^{10'}$ są identycznie zerami, a tylko pochodna $\phi^{10'}$ jest w ogólności różna od zera i redukuje się do $\frac{\partial \phi}{\partial x}$. Uwzględniając to we wzorach (80), łatwo stwierdzić, że gdy ϕ zależy tylko od x , to:

$$D_u \phi = D_x \phi = D_y \phi = 0;$$

$D_x \phi$ zaś zależy tylko od zmiennej x ¹⁾.

Ze względu na to otrzymamy wszystkie różne od zera niezmienniki względne równania liniowego (114), stosując tylko parametr D_x do niezmienników a , A^{20} . Ponieważ $D_x a = 0$, wystarczy zatem zastosować parametr D_x do A^{20} .

Wykładniki r , s tego ostatniego niezmiennika są identyczne z wykładnikami wyrazu pierwszego $a^{20'}$ i mają wartości $r = 0$, $s = 5$, zatem:

$$D_x A^{20} = a^{30'} - \frac{14 a^{20'}}{6a} a^{10'} + \frac{7 a^{10'} a^{10'}}{6a} a^{10'} - \frac{5 a^{10'}}{3a} A^{20}.$$

Prawa strona tej równości redukuje się w założeniu (70) do $a^{30'}$, zatem:

$$D_x A^{20} = A^{30}.$$

Stosując do A^{30} parametr D_x , otrzymamy niezmiennik względny, zawierający osobny wyraz $a^{40'}$ i zależny nadto od pochodnych $a^{30'}$, $a^{20'}$, $a^{10'}$. Niezmiennik $D_x A^{30}$ jest więc funkcją niezmiennika A^{40} i ewentualnie niezmienników A^{30} , A^{20} , a . Ogólnie, stosując ν -krotnie parametr D_x do A^{20} , otrzymamy niezmiennik względny, będący funkcją niezmienników A^{n0} , gdzie $n \leq \nu + 2$. Różne od zera niezmienniki równania liniowego mają kształt (115).

Zauważmy, że wykładniki r niezmienników (115) są wszystkie zerami, wobec czego z każdych dwóch niezmienników względnych (115) można utworzyć jeden niezmiennik bezwzględny.²⁾ Tak np. wyrażenia

$$a^{-5} (A^{20})^3, \quad a^{-6} (A^{30})^3 \quad (117)$$

¹⁾ Pochodne a_{01} , a'_{10} , $a^{01'}$, $a^{10'}_{01}$ są identycznie zerami, wobec czego także $A_{10} = a'_{10} - \frac{a_{01} a^{10'}}{3a}$ jest zerem. Pochodna $a^{10'}$ zależy tylko od x .

²⁾ Zob. uw. str. 244.

są niezmiennikami bezwzględni, ponieważ wykładniki niezmienników względnych a , A^{20} , A^{30} są kolejno $(0, 3)$, $(0, 5)$, $(0, 6)$.

Przejdźmy teraz do utworzenia układu równań cząstkowych (109) dla równania liniowego (114). Układ ten zawiera przede wszystkim równania, otrzymane przez przyrównanie do zera każdego z niezmienników (73), różnych od niezmienników (115). Oznaczmy tę grupę szukanego układu równań cząstkowych symbolem (α) , pozostałe zaś równania symbolem (β) .

Otóż do grupy (α) należą przede wszystkim dwa równania 4-go rzędu

$$b = A_{10} = 0. \quad (118)$$

Równań 5-go rzędu zawiera grupa (α) na podstawie twierdzenia 2-go piętnaście. Jeżeli przyrównamy do zera niezmienniki (85) i (86), otrzymamy ośm równań 5-go rzędu, które na podstawie związków (85) i (86) są wynikiem równań (118). Pozostałe siedm równań cząstkowych 5 rzędu grupy (α) otrzymamy, przyrównując do zera wszystkie niezmienniki względne (87), z wyjątkiem niezmiennika A^{20} . Otóż równania te są wynikiem poprzednich i czterech następujących:

$$A_{02} = 0, \quad D_y A^{20} = D_x A^{20} = D_z A^{20} = 0, \quad (119)$$

co łatwo stwierdzić na podstawie związków (95) do (100), uwzględniając przytem związki (90) do (94).

W ustępie IV wykazaliśmy, że stosowaniem parametrów różniczkowych do niezmienników względnych 5 rzędu można otrzymać wszystkie niezmienniki względne rzędów $n \geq 6$. Jeżeli z niezmienników względnych 5 rzędu wyłączymy tylko A^{20} , to stosując do pozostałych parametry różniczkowe (80), otrzymamy wszystkie niezmienniki rzędu $n \geq 6$, z wyjątkiem tych, które oznaczyliśmy symbolem A^{v0} ; ze względu na to wszystkie równania cząstkowe grupy (γ) rzędu $n \geq 6$ są wynikiem sześciu równań (118) i (119).

Równania grupy (β) otrzymamy, szukając związków, zachodzących między niezmiennikami bezwzględni, utworzonymi z niezmienników (115). Dwa z tych niezmienników bezwzględnych najniższych rzędów 5 i 6 mają postać (117). Każdy z nich jest funkcją jednej tylko zmiennej x i to funkcją dowolną, ponieważ zależą one od funkcji dowolnych λ , μ , ν , ρ równania liniowego (114). Ze względu na to zachodzi pomiędzy nimi jeden związek kształtu

$$\frac{A^{30}}{a^2} = \varphi \left(\frac{(A^{20})^2}{a^5} \right), \quad (120)$$

gdzie φ jest funkcją dowolną. Ponieważ niezmienniki względne A^{v0} dla $v > 3$ można otrzymać stosowaniem parametru D_x do A^{30} , zatem dalsze równania grupy (β) są wynikiem równania (120).

Szukany układ równań cząstkowych (109), utworzony dla równania liniowego (114), składa się zatem z siedmiu równań (118), (119) i (120), a równanie różniczkowe (113) można przekształcić na równanie liniowe, jeżeli funkcja ω spełnia układ tych siedmiu równań.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że nie wszystkie równania tego ostatniego układu są od siebie niezależne. Wykażemy mianowicie, że równanie

$$D_x A^{20} = 0$$

jest wynikiem sześciu pozostałych. Istotnie, wynika z nich, że niezmiennik A^{11} jest na podstawie wzoru (96) zerem, zatem $D_x A^{11} = 0$. Otóż: ¹⁾

$$A^{11} = a^{11'} + \frac{1}{12} a a_{01} - \frac{a^{10'}}{3a} a_{10}^{10'} + \frac{a_{01}^{10'}}{3a} a^{20'} + \dots,$$

gdzie każdy wyraz dalszy zawiera jako czynnik iloczyn przynajmniej dwu zmiennych (70). Stosując do A^{11} parametr D_x , otrzymamy:

$$D_x A^{11} = A^{21'} - \frac{a^{20'}}{3a} a_{10}^{10'} + \frac{a_{01}^{20'}}{3a} a^{20'} + \dots,$$

gdzie wyrazy dalsze redukują się do zera w założeniu (70). Wynika stąd, że

$$D_x A^{11} = A^{21} + \frac{1}{3a} A^{20} (A_{01}^{20} - A_{10}^{10});$$

a ponieważ na podstawie wzorów (86) i (90) jest $A_{10}^{20} = A_{01}^{10} = 0$, zatem $A^{21} = 0$.

Z drugiej strony jest $(a^{20'})^{01'} = a^{21'} + \frac{2}{3} a a'_{10} + \frac{1}{12} a a_{01}^{10'} - \frac{5}{12} a_{01} a^{10'}$, zatem:

$$D_y A^{20} = A^{21} + \frac{2}{3} a A_{10},$$

z czego wobec (118) wynika, że $D_y A^{20} = 0$.

Zauważmy jeszcze, że drugie równanie (118) jest na podstawie wzoru (84) identyczne z równaniem $D_x a = 0$, a w równaniu (120) jest $A^{30} = D_x A^{20}$.

Twierdzenie 6. Warunkiem dostatecznym na to, aby można było równanie

$$y''' = \omega(xyzu)$$

przekształcić na równanie liniowe zapomocą pewnego przekształcenia stycznościowego jest, aby funkcja ω spełniała następujący układ sześciu równań cząstkowych:

¹⁾ Zob. str. 239.

$$b = D_x a = A_{02} = D_x A^{20} = D_x A^{20} = 0,$$

$$D_x A^{20} = a^2 \cdot \varphi \left(\frac{(A^{20})^5}{a^5} \right),$$

gdzie φ jest funkcją dowolną.

Niezmiennik względny a jest określony wzorem (35), $b = \omega_{03}$, niezmienniki zaś A_{20} i A^{20} mają wartości, określone wzorem (116).

STANISLAUS JOLLES.

Konstruktion der linearen Kongruenz aus vier und des linearen Komplexes aus fünf gegebenen Strahlen.

Plücker's Untersuchungen¹⁾ über die Grundeigenschaften der linearen Kongruenz brachten wenig Neues. Knapper, umfassender und tiefer hat vor ihm v. Staudt²⁾ die Theorie dieses Strahlengebildes begründet und ausgebaut. Aber selbst bei Synthetikern fanden v. Staudt's Ergebnisse nicht die gebührende Beachtung; man übersah, dass tieferes Eindringen in die Theorie des linearen Komplexes und seines Nullraumes genaue Kenntnis der linearen Kongruenz und ihres geschart involutorischen Raumes erfordert.

Im folgenden wird auf Grund neuer Beweise v. Staudt'scher Sätze die lineare Kongruenz aus vier gegebenen Doppelstrahlen eines geschart involutorischen Raumes konstruiert, und als Schnitt von ∞^1 linearen Komplexen dargestellt. Letzteres führt unmittelbar zur Konstruktion des linearen Komplexes aus fünf Strahlen, die keiner linearen Kongruenz angehören. Überhaupt sollte sich jede Konstruktion des linearen Komplexes aus fünf gegebenen Strahlen auf einer Konstruktion der linearen Kongruenz aus vier gegebenen Strahlen aufbauen. Der umgekehrte von Plücker eingeschlagene Weg führt zu Beweisen und Konstruktionen, die oft schärferer Prüfung nicht standhalten.

1. Ein geschart involutorischer Raum Σ_g enthält unendlich viele Regelflächen II. Grades, deren eine Regelschar aus einander zugeordneten Strahlen und deren andere Regelschar aus Doppelstrahlen von Σ_g besteht³⁾. Diese „einscharig involutorischen“ Regelflächen von Σ_g schneiden eine Ebene γ_i in

¹⁾ Plücker, Neue Geometrie der Raumes, 1868, № 51—79.

²⁾ v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, § 6.

³⁾ v. Staudt, a. a. O., № 105.