RÉSUMÉ.

Die zwei ersten geometrischen Axiomgruppen des Hilbertschen Systems (mit unwesentlichen Veränderungen) als Grundsätze einer projektiven Geometrie annehmend, entwickelt der Verfasser den Begriff des Trennens für eigentliche Elemente nach dem Muster des Herrn M. Pasch. Unter Anderem beweist er folgenden Satz: Bezeichnen a, b, c, d vier (eigentliche), verschiedene Geraden eines eigentlichen Strahlenbüschels vom Scheitel M, so lässt sich durch jeden Punkt A der Geraden a, der von M verschieden ist, wenigstens eine Gerade ziehen, die, ohne durch den Punkt M zu gehen, auch die Geraden b, c, d in eigentlichen Punkten schneidet. Dieser Satz wird als logische Folgerung aus den angeführten Grundsätzen abgeleitet.

In methodischer Hinsicht ist noch zu bemerken, dass bei jedem Beweise die Sätze angegeben wurden, aus welchen er abgeleitet wird.

H. MÜNTZ.

Problemat osi głownych form kwadratowych i równań całkowych symetrycznych.

Das Hauptaxenproblem der quadratischen Formen und der symmetrischen Integralgleichungen.

Niechaj

$$x' = P[x]$$

będzie znakiem działania funkcyjnego, które przeprowadza „punkt“ x w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów lub w oznaczonej przestrzeni funkcyjnej w inny takiż „punkt“. Stawiamy pytanie, dotyczące elementów niezmiennych lub „osi głównych“ takiego przekształcenia. Wtedy w wielu przypadkach pożytecznem jest rozważanie iteracyi danego działania według schematu

$$x^{(N+1)} = P[x^{(N)}];$$

iteracya ta przy pewnych okolicznościach może nam dać zupełne rozwiązanie zagadnienia. Najprostszy przykład tego rodzaju w przypadku zmiennych przerywanych przedstawia przekształcenie danej funkcyi rzeczywistej kwadratowej na jej osi główne, w przestrzeni zaś funkcyjnej rozkład danego jądra symetrycznego według jego funkcyj właściwych.

Wiadomo, że iteracye podstawienia liniowego, przyporządkowanego do formy kwadratowej w przypadku form określonych, prowadzą w ogólności do najmniejszej osi głównej [1]. E. Schmidt w pracy podstawowej [2] wykazał

[1] Porówn. np. przedstawienie tej rzeczy u Kowalewskiego „Determinantentheorie“, Lipsk 1909. S. 197.

[2] „Rozprawa“ (Getynga 1905) lub Math. Ann. 63.

stosowalność odpowiednich dowodzeń do wyznaczenia najmniejszej wartości właściwej i należącej do niej funkcyi właściwej dla jądra $K^{(2)}$ określonego iterowanego w równaniach całkowych rzeczywistych symetrycznych. Po znalezieniu tego pierwszego rezultatu, można utworzyć formę resztową lub jądro resztowe, do którego można w dalszym ciągu stosować też samą zasadę, przyczem wszakże do każdej dalszej osi głównej lub dalszej funkcyi właściwej konieczny jest proces nieskończony. Przez wprowadzenie do danego zagadnienia należących do niego wyższych jąder stowarzyszonych udało się J. Schurowi[1], przez analogię do algebraicznego problematu form[2] dla określnego jądra iterowanego $K^{(2)}$, uniknąć kolejnych procesów nieskończonych i obliczyć niezależnie od siebie najmniejsze iloczyny skończonej liczby wartości właściwych.

Otóż, w rzeczy samej, głębsze zbadanie samego nieskończonego procesu iteracyjnego pozwoli wprost wyznaczyć wszystkie osi główne formy kwadratowej pierwotnej co do kierunku i wielkości i analogicznie też wszystkie wartości właściwe i funkcye właściwe dowolnego jądra symetrycznego.

W „Comptes rendus" Akademii paryskiej[3] podałem bez dowodu drogę, prowadzącą do tego celu dla form i jąder określnych. Poniżej podane rozwiązanie (I § 6, II § 5) i dowody (I §§ 4 - 5, II §§ 2—4) zarazem dla dowolnego przypadku najogólniejszego mogą stanowić przygotowanie do przeniesienia tych rozważań na pytania dalsze, zwłaszcza zaś dla form i równań całkowych niesymetrycznych.

CZĘŚĆ PIERWSZA. FORMY KWADRATOWE.

§ 1. Wzory zasadnicze.

Niechaj będzie dana w przestrzeni o n wymiarach forma rzeczywista kwadratowa

$$\sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k \equiv C, \qquad c_{ki} = c_{ik}. \tag{1}$$

Według twierdzeń klasycznych, które przyjmujemy tu za udowodnione, istnieje wtedy przekształcenie rzeczywiste ortogonalne

[1]) Math. Ann. **67**.
[2]) Porówn. np. G. Rados, Math. Ann. **48**.
[3]) Roczn. 1912, 1913.

$$x_i = \sum_p \alpha_{ip} \xi_p. \tag{2a}$$

$$\sum_\nu \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} = \sum_\nu \alpha_{\nu i} \alpha_{\nu k} = \delta_{ik} \begin{cases} = 0 & \text{dla } i \neq k \\ = 1 & \text{dla } i = k, \end{cases} \tag{2b}$$

$$\xi_p = \sum_k \alpha_{kp} x_k. \tag{2c}$$

takie, że otrzymujemy tożsamościowo:

$$\sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k,p,q} c_{ik} \alpha_{ik} \alpha_{kq} \xi_p \xi_q = \sum_\nu \rho_\nu \xi_\nu^2, \tag{3}$$

i odwrotnie:

$$\sum_\nu \rho_\nu \xi_\nu^2 = \sum_{i,k,\nu} \rho_\nu \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} x_i x_k = \sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k. \tag{4}$$

Wielkości ρ_ν są przytem koniecznie pierwiastkami rzeczywistemi odpowiedniego równania wiekowego, które w postaci wyznacznikowej można napisać:

$$| c_{ik} - \delta_{ik} \rho | = 0; \qquad \rho = \rho_1, \ldots, \rho_n, \tag{5}$$

wielkości zaś α_{ik} dane są przez równanie

$$\sum_k c_{ik} \alpha_{k\nu} = \rho_\nu \alpha_{i\nu}. \tag{6}$$

Połóżmy ogólnie:

$$\sum_{p_1, \ldots p_{N-1}} c_{ip_1} c_{p_1 p_2} \ldots c_{p_{N-1} k} = c_{ik}^{(N)} \tag{7}$$

tak że $c_{ik}^{(N)}$ są elementami N-tej potęgi macierzy $\| c_{ik} \|$ formy danej. Poprzedzające równania dają nam tedy przy pomocy iteracyi:

$$\sum_k c_{ik}^{(N)} \alpha_{k\nu} = \rho_\nu^N \alpha_{i\nu}; \tag{8a}$$

$$| c_{ik}^{(\lambda)} - \delta_{ik} \rho^N | = 0; \qquad \rho = \rho_1, \ldots \rho_n; \tag{8b}$$

$$\sum_{i,k} c_{ik}^{(N)} x_i x_k = \sum_{i,k,p,q} c_{ik}^{(N)} \alpha_{ip} \alpha_{kq} \xi_p \xi_q = \sum_\nu \rho_\nu^N \xi_\nu^2; \tag{8c}$$

$$\sum_\nu \rho_\nu^N \xi_\nu^2 = \sum_{\nu,i,k} \rho_i^N \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} x_i x_k = \sum_{i,k} c_{ik}^{(N)} x_i x_k. \tag{8d}$$

Z ostatniego z tych równań wywodzi się w szczególności związek podstawowy

$$c_{ik}^{(N)} = \sum_{\nu} \rho_i^N \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu}. \tag{9}$$

Obok elementów $c_{ik}^{(N)}$ macierzy potęgowej $\| c_{ik}^{(N)} \|$ i przekształcenia $\| \alpha_{ik}^{(N)} \|$ rozpatrzymy jeszcze minory dowolnego rzędu

$$c^{(N)}_{\substack{i_1, \ldots, i_\mu \\ k_1, \ldots, k_\mu}}, \qquad \alpha_{\substack{q_1 \ldots, q_\mu \\ \nu_1 \ldots, q_\mu}}.$$

Otrzymujemy:

$$c^{(N)}_{\substack{i_1, \ldots, i_\mu \\ k_1, \ldots, k_\mu}} = \begin{vmatrix} c^{(N)}_{i_1 k_1} \ldots \ldots c^{(N)}_{i_1 k_\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c^{(N)}_{i_\mu k_1} \ldots c_{i_\mu k_\mu} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{\nu} \rho_\nu^N \alpha_{i_1 \nu} \alpha_{k_1 \nu} \ldots\ldots & \sum\limits_{\nu} \rho_\nu^N \alpha_{i_1 \nu} \alpha_{k_\mu \nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum\limits_{\nu} \rho_\nu^N \alpha_{i_\mu \nu} \alpha_{k_1 \nu} \ldots\ldots & \sum\limits_{\nu} \rho_\nu^N \alpha_{i_\mu \nu} \alpha_{k_\mu \nu} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\nu_1 \ldots \nu_\mu} \rho_{\nu_1}^N \rho_{\nu_2}^N \ldots\ldots \rho_{\nu_\mu}^N \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 \nu_1} \alpha_{k_1 \nu_1} \ldots\ldots & \alpha_{i_1 \nu_\mu} \alpha_{k_\mu \nu_\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{i_\mu \nu_1} \alpha_{k_1 \nu_1} \ldots\ldots & \alpha_{i_\mu \nu_\mu} \alpha_{k_\mu \nu_\mu} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$= \sum_{\nu_i < \nu_i \ldots < \nu_\mu} \rho_{\nu_0}^N \rho_{\nu_1}^N \ldots\ldots \rho_{\nu_\mu}^N \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 \nu_1} \ldots\ldots \alpha_{i_1 \nu_\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{i_\mu \nu_\mu} \ldots \alpha_{i_\mu \nu_\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{k_1 \nu_1} \ldots \alpha_{k_1 \nu_\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{k_\mu \nu_1} \ldots \alpha_{k_\mu \nu_i} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\nu_i < \nu_i \ldots < \nu_\mu} \rho_{\nu_1}^N \ldots\ldots \rho_{\nu_\mu}^N \alpha_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ \nu_1 \ldots \nu_\mu}} \alpha_{\substack{k_1 \ldots k_\mu \\ \nu_1 \ldots \nu_\mu}}$$

§ 2. Uwagi geometryczne.

Wszystkie wzory, podane w § 1, dają się interpretować geometrycznie, co pozwala unaocznić zwłaszcza następujące rezultaty.

Wektory $\alpha_\nu \equiv (\alpha_{1\nu}, \ldots \alpha_{n\nu})$ [1] odtwarzają kierunki osi głównych formy C, albo też jednego z ich możliwych układów w przypadku zachodzenia równych pierwiastków ρ_ν. Każde $\rho_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}$ przedstawia wartość odwrotną kwadratu (rzeczywistego) λ_ν odpowiedniej (rzeczywistej lub czysto-urojonej) osi głównej szczególnej przedstawicielki $C = 1$ danej formy C.

Podstawienie

$$x_i^{(1)} = \sum_k c_{ik} x_k^{(0)} \tag{11}$$

można w następujący sposób przeprowadzić rzutowo. Dla danego punktu $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ zbudujmy [2] odpowiednią *przestrzeń biegunową* $R_{n-1}^{(0)}$ względem jednej przedstawicielki danej formy $\sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k = C_0 = \text{const}$.

Równaniem przestrzeni biegunowej jest

$$\sum_i c_{ik} x_i x_k^{(0)} = C_0, \tag{12}$$

i przestrzeń ta względem odpowiedniej przedstawicielki formy jednostkowej

$$\sum_i x_i^2 = C_0 \tag{13}$$

posiada znów biegun $(x_1', \ldots, x_n')$, określony przez równania (11). Jeżeli w szczególności weźmiemy pod uwagę punkty nieskończenie odległe, t. j. kierunki $(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})$, to za pomocą polaryzacyi otrzymamy podprzestrzenie sprzężone $\sum c_{ik} x_i x_k^{(0)} = 0$, za pomocą zaś ortogonalizacyi, t. j. ponownej polaryzacyi względem formy jednostkowej, otrzymamy kierunek $(x_1', \ldots x_n')$ prostopadły do tamtej przestrzeni.

Całkowity problemat znalezienia osi głównych oznacza wyznaczenie dla danej formy C i formy jednostkowej E wspólnego układu biegunowego osi lub wielościanu biegunowego, którego jeden wierzchołek znajduje się w punkcie zerowym, gdy wszystkie inne leżą w nieskończenie odległej przestrzeni zasadniczej $R_{n-1}^{(0)}$ i są dane przez kierunki osi głównych. Z tego rozważania widzimy, że zagadnienie o wspólnem przekształceniu dwóch form kwadrato-

[1]) Wektor α jest odcinkiem w długości i kierunku od punktu zerowego do punktu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

[2]) W płaszczyźnie np. konstrukcyę tę można wykonać wprost za pomocą tylko liniału, skoro krzywa centralna $C = C_0$ jest dana przez trzy punkty niezależne; środek i nieskończenie odległą prostą uważamy przytem jako dane.

wych $\sum c_{ik} x_i x_k = C$, $\sum d_{ik} x_i x_k = D$ na sumę kwadratów schodzi się co do swej istoty z zadaniem właśnie rozpatrywanem, gdyż odpowiednie polaryzacye, ze względu na swój charakter czysto graficzny, nie są przywiązane do specyalnej metrycznej formy jednostkowej $\sum x_i^2 = E$ i do prostokątnych układów spółrzędnych. Mutatis mutandis stosują się tem samem i dalsze wywody i do podstawienia

$$\sum d_{ik} x_k' = \sum c_{ik} x_k, \tag{14}$$

a cel iteracyi i wszystkie następne rozważania graficzne pozostają w swej mocy, skoro tylko forma $\sum d_{ik} x_i x_k$ jest określna, przez co znów wszystkie pierwiastki mieszanego równania wiekowego

$$| c_{ik} - d_{ik} \rho | = 0$$

są rzeczywistemi, jako też kierunki wspólnych osi biegunowych (Weierstrass, Kronecker).

Jeżeli wyjdziemy z jednej z osi spółrzędnych $0, \ldots x_k \ldots 0$, jako z kierunku początkowego, to po jednorazowej polaryzacyi podwójnej dla $x_k = 1$ otrzymamy wektor $c_k \equiv (c_{ik}, \ldots, c_{nk})$, po N-krotnej iteracyi wektor $c_k^{(N)} \equiv (c_{ik}^{(N)}, \ldots, c_{nk}^{(N)})$. Macierz $\| C \|^N = \| c_{ik}^{(N)} \|$ przedstawia w swych kolumnach iteracye osi spółrzędnych. Jakiekolwiek μ kolumn w macierzy $\| c_{ik}^{(N)} \|$ przedstawiają N-te iteracye wszystkich odpowiednich osi spółrzędnych; ich minory $c_{i_1, \ldots i_\mu \atop k_1, \ldots k_\mu}$ (gdzie skaźniki k są stałe, skaźniki zaś i zmieniają się we wszystkich kombinacyach bez powtórzeń) oznaczają wyższe charakterystyczne spółrzędne (spółrzędne płaszczyznowe i t. d.) odpowiednich przestrzeni $R_\mu^{(N)}$ (płaszczyzn i t. d.), które możemy nazwać N-temi iteracyami pierwotnych przestrzeni osi spółrzędnych $R_\mu^{(0)}$. Ponieważ układ danych osi i płaszczyzn spółrzędnych w swej ogólności jest bez znaczenia dla formy danej, przeto dalsze rezultaty można przenieść na każdy inny zupełny układ ortogonalny osi. Lecz jeżeli rozważać będziemy, jak to poniżej uczynimy (§ 3), najprzód jedną z osi, następnie przechodzącą przez tę oś płaszczyznę spółrzędnych, potem zaś przestrzeń spółrzędnych $R_3^{(0)}$, zawierającą tę płaszczyznę, i t. d., to i warunek ortogonalności kierunków wyjściowych będzie nieistotny i wyniki znalezione stosować się będą wogóle do każdego zupełnego układu wektorów wyjściowych $\beta_k \equiv (\beta_{ik}, \ldots, \beta_{nk})$, $k = 1, \ldots, n$, o ile ten układ jest niezależny, t. j. wyznacznik tego układu $B = | \beta_{ik} |$ nie znika. Rachunkowo znaczy to,

że wszystkie rozważania można odnieść do macierzy $\| C^N B \|$ zamiast do $\| C^N \|$; elementem ogólnym N-tej iteracyi będzie przytem:

$$c_{ik}^{(N)}(\beta) = \sum_m c_{im}^{(N)} \beta_{mk} = \sum_{\nu, m} \rho_\nu^N \alpha_{i\nu} \alpha_{m\nu} \beta_{mk}, \tag{16}$$

minorem zaś ogólnym

$$c^{(N)}_{i_1, \ldots, i_\mu \atop k_1, \ldots, k_\mu}(\beta) = \sum_{\substack{\nu_1 < \ldots < \nu_\mu \\ m_1 < \ldots < m_\mu}} \rho_{\nu_1}^N \cdots \rho_{\nu_\mu}^N \alpha_{i_1, \ldots, i_\mu \atop \nu_1, \ldots, \nu_\mu} \alpha_{m_1, \ldots, m_\mu \atop \nu_1, \ldots, \nu_\mu} \beta_{m_1, \ldots, m_\mu \atop k_1, \ldots, k_\mu}.$$

§ 3. Iteracye parzyste promienia.

Badając następstwo iteracyi dla nieograniczenie rosnących wykładników N, znajdziemy szereg interesujących wyników zbieżnościowych; dla prostoty podamy je najprzód dla iteracyj $2M$-tych parzystych, które mogą być też uważane jako iteracye pojedyńcze M-te formy iterowanej $C^{(2)} = \sum_{ik}^{(2)} x_i x_k$.

Załóżmy, że

$$\rho_1^2 \geqq \rho_2^2 \geqq \ldots \geqq \rho_n^2,$$

i niechaj będzie

$$\rho_1 = \ldots = \rho_{n_1}^2 > \rho_{n_1+1}^2 = \ldots = \rho_{n_2}^2 > \ldots > \rho_{n_{\alpha-1}}^2 = \ldots = \rho_n^2.$$

Przyjmijmy dalej, że dana forma jest regularna, że więc $\rho_n^2 > 0$. Mamy wtedy przy stałem k:

$$c_{ik}^{(2M)} : \ldots : c_{nk}^{(2M)} = \sum_\nu \rho_\nu^{2M} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} \ldots : \sum_\nu \rho_\nu^{2M} \alpha_{n\nu} \alpha_{k\nu}; \tag{18c}$$

$$c_{ik}^{(2M+2)} : c_{ik}^{(2M+2)} = \sum_\nu \rho_\nu^{2M} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} : \sum_\nu \rho_\nu^{2M+2} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu}; \quad (i = 1, \ldots n). \tag{18b}$$

Niechaj na początek przynajmniej jedna z dostaw kierunkowych $\alpha_{ki}, \ldots, \alpha_{kn_1}$ będzie różna od zera, tak że kierunek wyjściowy osi x_k nie jest prostopadły do wszystkich osi głównych, należących do $\rho_1 = \ldots = \rho_n$. Wtedy nie może być równocześnie

$$\sum_{\nu=1 \ldots n_1} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} = \ldots = \sum_{\nu=1 \ldots n_1} \alpha_{n\nu} \alpha_{k\nu} = 0; \tag{19}$$

gdyby tak było, to przy każdem stałem $\nu_0 \leqq n_1$ otrzymalibyśmy, wbrew założeniu:

$$\sum_{\nu=1\dots n_1}^{i=1\dots n} \alpha_{i\nu}\,\alpha_{k\nu}\,\alpha_{i\nu_0} = \alpha_{k\nu_0} = 0. \tag{20}$$

W danych równaniach mamy przeto istotnie $\rho_1{}^2 = \dots = \rho_{n_1}{}^2$. Po podzieleniu przez $\rho_{n_1}^{2M}$, pozostałe wyrazy, z powodu stawających się dowolnie małemi potęg $\left(\frac{\rho_{n_1+p}}{\rho_{n_1}}\right)^{2M}$, znikają w granicy i otrzymujemy:

$$\lim_{M=\infty} c_{1k}^{(2M)} : \dots : c_{nk}^{(2M)} = \sum_{\nu=1,\dots n_1} \alpha_{1\nu}\alpha_{k\nu} : \dots : \sum_{\nu=1,\dots n_1} \alpha_{n\nu}\alpha_{k\nu}. \tag{21}$$

Iteracye $(2M)$-te kierunków wyjściowych zbiegają się tedy do określonego przez stronę prawą promienia α_0, którego znaczenie geometryczne należy zbadać. Promień ten należy do przestrzeni R_{n_1} równych osi głównych najmniejszych $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ponieważ wyraża się przez nie liniowo, jest przeto sam najmniejszą osią główną formy iterowanej, gdyż w przestrzeni tej dopuszczalny jest wybór każdego układu ortogonalnego. Dokładniej mówiąc: α_0 jest rzutem osi wyjściowej x_k na przestrzeń R_{n^1} najmniejszych osi głównych, gdyż przy stałem k rozwiązanie równań rzutu

$$\xi_i = \sum_{\nu=1,\dots n_1} \alpha_\nu \alpha_{i\nu}; \qquad \sum_i \alpha_{i\nu_0}\xi_i = \alpha_{k\nu_0} \qquad (\nu_0 = 1, \dots n_0) \tag{22a}$$

dane jest wyraźnie przez

$$\xi_i = \sum_{\nu=1,\dots n_1} \alpha_{i\nu}\alpha_{k\nu}. \tag{22b}$$

Jeżeli rozważać będziemy długości iterowanych wektorów

$$l_k^{(N)} = +\sqrt{\sum_i c_{ik}^{(N)^2}}; \qquad c_{ik}^{(N)} = \sum_\nu \rho_\nu^N \alpha_{i\nu}\alpha_{k\nu} \tag{23}$$

znajdziemy, że czynnik przy $c_{n_1}^{2N} = c_1^{2N}$ w rozwinięciu wielkości $l_k^{(N)^2}$ jest równy

$$\sum_i \Big(\sum_{\nu=1\dots n_1} \alpha_{i\nu}\alpha_{k\nu}\Big)^2,$$

a więc nie znika; otrzymujemy tedy:

$$\lim_{M=\infty} l_k^{(2M)} : l_k^{(2M+2)} = \frac{1}{c_1{}^2} = \lambda_1{}^2, \tag{24}$$

t. j. iterowane kolejno względem $C^{(2)}$ długości wektorów, dają stosunki, których granicą jest kwadrat najmniejszej osi głównej formy $C^{(2)}$. [1]

Niechaj ogólniej α_{kq_0} będzie pierwszą nie znikającą dostawą kierunkową osi początkowej x_k względem układu osi głównych α_q, i niechaj $\rho_{q_0} = \rho_{n_{k_0}}$ będzie odpowiednią wartością pierwiastka, który nie koniecznie musi być równy $\pm\rho_1$. Podobnie, jak wyżej, wykazujemy, że iteracye parzyste znowu zmierzają do osi głównej formy iterowanej, mianowicie do rzutu kierunku początkowego na przestrzeń osi głównych $R_{n_{k_0}-n_{k_0-1}}$, należącą do wartości $\pm\rho_{q_0}$. A więc zbieżność zachodzi ku najmniejszej osi głównej, nieortogonalnej do kierunku początkowego, mianowicie ku rzutowi tego kierunku początkowego na przestrzeń wszystkich najmniejszych osi głównych, równych tamtej.

W podobny sposób zmierzają teraz stosunki kolejnych względem $C^{(2)}$ iterowanych długości wektorów $l_k^{(2M)} : l_k^{(2M+2)}$ do kwadratu odpowiedniej osi głównej

$$\lambda_{q_0}^2 = \frac{1}{\rho_{q_0}^2}. \tag{25}$$

Można przytem zapytać, jakie są stosunki wielkości $c_{ik}^{(N)}$. Jeżeli we wzorze (18b) dla stałych i, k, pierwsza wartość $\rho_{n_{i_0}}$ pierwiastka, dla którego odpowiada czynnik w c_{ik} jest od zera różny, jest:

$$\sum_{\nu=n_{i_0-1}+1,\dots, n_{i_0}} \alpha_{i\nu}\alpha_{k\nu} \neq 0, \text{ [2]} \tag{26}$$

to jest, oczywiście,

$$\lim_{M=\infty} c_{ik}^{(2M)} : c_{ik}^{(2M+2)} = \frac{1}{\rho_{n_{i_0}}^2} = \lambda_{n_{i_0}}^2; \tag{27}$$

przeto przynajmniej raz jeden dla pewnego $i = p_0$ otrzymujemy

$$\lim_{M=\infty} c_{p_0k}^{(2M)} : c_{p_0k}^{(2M+2)} = \frac{1}{\rho_{q_0}^2} = \lambda_{q_0}^2; \tag{28}$$

będzie więc dla wszystkich $i = 1, \dots n$ w każdym przypadku:

---

[1]) Wzór (24) nie jest jednorodny, ponieważ nie jest jednorodnem równanie wyjściowe (1); otrzymujemy ten sam wynik, wychodząc z formy

$$\sum \frac{c_{ik}}{c} \cdot \frac{x_i}{c} \cdot \frac{x_k}{c} = 1, \qquad c = \text{const.}$$

[2]) Z równania (9) i $\rho_n{}^2 > 0$ wynika, że dla dostatecznie wielkich N jest w ogólności $c_{ik}^{(N)} \neq 0$.

$$\lim_{M=\infty} \inf c_{ik}^{(2M)} : c_{ik}^{(2M+2)} = \lambda_{q_0}^2. \tag{29}$$

Znaczenie geometryczne równania (28) jest takie, że rzuty kierunków początkowych x_i, x_k na przestrzeń $R_{n_{i_0}-n_{i_0-1}}$ osi głównych, należących do $\pm \rho_{n_{i_0}}$, nie są do siebie ortogonalne; ale w szczególności zachodzi ortogonalność, jeżeli jeden z tych rzutów sam redukuje się do zera, odpowiedni więc kierunek początkowy jest prostopadły do przestrzeni rzutu. Przez należyty wybór kierunków początkowych możnaby przeto otrzymać wszystkie osi główne, lecz wybór ten właśnie zmusza do n-krotnego powtarzania procesu zbieżności.-

Ważne znaczenie ma, jak wiadomo, wartość sumy

$$\sum_i c_{ii}^{(N)} = s^{(N)} = \sum_\nu \rho_\nu^N; \tag{31}$$

wynika to odrazu z równania (8). Otrzymujemy tu oczywiście:

$$\begin{gathered} \frac{s^{(2M)}}{s^{(2M+2)}} < \frac{s^{(2M-2)}}{s^{(2M)}}, \\ \lim_{M=\infty} \frac{s^{(2M)}}{s^{(2M+2)}} = \frac{1}{\rho_1{}^2} = \lambda_1{}^2 \end{gathered} \tag{32}$$

(porówn. Kowalewski l. c.).

Jeżeli rozważać będziemy $c_{ik}^{(N)}(\beta)$ zamiast $c_{ik}^{(N)}$, to trzeba będzie wziąć również rzuty kierunków początkowych β_k; warunek (26) należy odpowiednio zmienić na następujący:

$$\sum_{\nu=n_{i_0-1}+1,\dots n_{i_0}} \alpha_{i\nu}\, \alpha_{m\nu} \beta_{mk} \neq 0. \tag{30}$$

Jeżeli zortogonalizujemy i znormujemy macierz $\|\beta_{ik}\|$ według wierszy, t. j. do każdego następnego wiersza dodamy agregaty liniowe poprzednich wierszy, tak aby on był ortogonalny do tamtych wszystkich, a nadto otrzymał długość 1 [1] (porówn. 33a), to dostaniemy nową macierz $\|\beta_{ik}^*\|$, której elementy β_{ik}^* znaleść można za pomocą najprostszych działań z elementów β_{ik}; będzie wtedy:

[1]) Znakomitą celowość tego prostego procesu wykazały znane prace Hilberta i Schmidta.

$$\sum_k \beta_{m\nu}^* \beta_{ik}^* = \beta_m \beta_i \delta_{mi} \quad \begin{cases} \delta_{mi} = 0 & \text{dla} \quad m \neq i \\ \delta_{mi} = 1 & \text{„} \quad m = i \end{cases}$$

$$\beta_m = +\sqrt{\sum_k \beta^2{}_{mk}} = 1, \quad \beta_i = 1 \tag{33a}$$

$$s^{(N)}(\beta^*) = \sum_{ik} c_{ik}(\beta^*)\, \beta_{ik}^* = \sum_{\nu, m, i, k} \rho_\nu^N\, \alpha_{i\nu}\, \alpha_{m\nu}\, \beta_{mk}^*\, \beta_{ik}^* = \sum \rho_\nu^N \tag{33b}$$

$$\lim_{M=\infty} \frac{s^{(2M)}(\beta^*)}{s^{(2M+2)}(\beta^*)} = \frac{1}{\rho_1{}^2} = \lambda_1{}^2. \tag{33c}$$

§ 4. Iteracye parzyste płaszczyzn i przestrzeni.

Każda liniowa przestrzeń częściowa $R_{\mu-1}$ przechodzi przy pomocy iteracyj na takież przestrzenie $R_{\mu-1}^{(N)}$; znajdujemy je za pomocą iteracyj μ punktów niezależnych w $R_{\mu-1}$. Jeżeli przez połączenie z punktem zerowym z przestrzeni badanej dostaniemy przestrzeń wektorową R_μ, to po N tej iteracyi μ niezależnych wektorów przejdzie ona na przestrzeń iteracyjną $R_\mu^{(N)}$. Jeżeli, w szczególności, iterujemy przestrzeń spółrzędnych $(x_{k_1}, \dots, x_{k_\mu})$, to położenie jej N-tej iteracyi będzie dane przez charakterystyczne wyższe spółrzędne $c_{\substack{i_1 \dots i_\mu \\ k_1 \dots k_\mu}}$ — porów. 10) — przy zmiennych skaźnikach wierszowych $i_1, \dots, i_\mu$.

Stosują się tu te same rozważania, jak w § 3, dotyczące teraz rozważanych wyższych przestrzeni i iloczynów pierwiastków $\rho_{\nu_1} \rho_{\nu_2} \dots \rho_{\nu_\mu}$ $(\nu_1 < \nu_2 \dots < \nu_\mu)$. O przestrzeniach spółrzędnych $R_\mu^{(2M)} \equiv (x_{k_1}^{(2M)}, \dots, x_{k_\mu}^{(2M)})$, iterowanych względem $C^{(2)}$, otrzymujemy następujące twierdzenia, których dowód, według powyższego, nie przedstawia formalnych trudności.

A. Przypadek normalny. [1]

1. Ogólnie zmierza każda kolumna macierzy $\|C\|^{2M}$ do kierunku najmniejszej osi iterowanej formy zasadniczej $C^{(2)}$, każda para kolumn do płaszczyzny dwóch osi najmniejszych, każdy układ μ stałych kolumn do przestrzeni R_μ μ osi najmniejszych.

2. Przez ortogonalizacyę macierzy potęgowych $\|C\|^{2M}$ otrzymujemy tedy zbieżność ku zupełnemu układowi n osi głównych formy $C^{(2)}$,

[1]) Czy przy danej z góry formie C mamy przypadek normalny, nie jest wiadome; stąd wypływa znaczenie ogólniejszych twierdzeń 5—8.

albo też jedyny taki układ w przypadku jego jednoznaczności (dla $\rho_1^2 > \rho_2^2 > \ldots > \rho_n^2$), przyczem kierunek każdej osi głównej mniejszej znajdujemy przed kierunkiem każdej większej.

3. Stosunki kolejnych parzystych iterowanych długości wektorowych $R_\mu^{(2M)}$ pojedyńczych kolumn dążą w ogólności do wielkości kwadratu λ_1^2 najmniejszej osi głównej formy $C^{(2)}$, stosunki odpowiednich wielkości powierzchniowych

$$l_{k_1 k_2}^{(2M)} = +\sqrt{\sum_{i_1 < i_2} c_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}^{(2M)^2}} \tag{34a}$$

do wielkości kwadratu $\lambda_1^2 \lambda_2^2$ najmniejszej powierzchni głównej; stosunki odpowiednich objętości

$$l_{k_1 \ldots k_\mu}^{(2M)} = +\sqrt{\sum_{i_1 < \ldots < i_\mu} c_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}^{(2M)^2}} \tag{34b}$$

zmierzają również do kwadratu $\lambda_1^2 \ldots \lambda_\mu^2$ odpowiedniej najmniejszej objętości głównej.

4. Przez podzielenie stosunków objętościowych

$$\frac{l_{k_1 \ldots k_\mu}^{(2M)}}{l_{k_1 \ldots k_{\mu-1}}^{(2M)}} : \frac{l_{k_1 \ldots k_\mu}^{(2M+2)}}{l_{k_1 \ldots k_{\mu-1}}^{(2M+2)}} = \lambda_\mu^{(2M)^2} \tag{35}$$

otrzymujemy przeto zbieżność do wielkości kwadratu n-tej osi głównej λ_μ^2, tak że znajdujemy też wielkości osi głównych według rosnących (ew. nie malejących) ich wartości.

B. Przypadki, odbiegające od normalnego.

Szczególne położenia ortogonalne osi i przestrzeni spółrzędnych względem układu osi głównych i ich przestrzeni wpływają w taki sposób na twierdzenia poprzedzające, że następstwo znalezionych kierunków i wielkości może stać się innem. Rodzaj występujących modyfikacyj można widzieć z badań w § 3, które odpowiednio przenieść należy na parzyste iterowane płaszczyzny i przestrzenie.

C. Rezultaty ogólne.

5. Niechaj będzie

$$s_\mu^{(N)} = \sum_{i_1 \ldots i_\mu} c_{i_1 \ldots i_\mu}^{(N)}; \qquad \sum\nolimits_\mu^{(N)} = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_\mu \\ k_1 < \ldots < k_\mu}} c_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}^{(N)^2}.$$

Jest wtedy:

$$\lim_{M=\infty} s_\mu^{(2M)} : s_\mu^{(2M+2)} = \lim_{M=\infty} \sum\nolimits_\mu^{(M)} : \sum\nolimits_\mu^{(M+1)} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_\mu^2, \tag{37}$$

$$\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \ldots \leqslant \lambda_\mu^2.$$

To był znany w poprzedniej literaturze rezultat główny teoryi. [1]

6. Podobnież przy stałem k i dowolnem i jest zawsze:

$$\lim_{M=\infty} c_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}^{(2M)} : c_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}^{(2M+2)} = \lambda_{\nu_1'}^2 \lambda_{\nu_2'}^2 \ldots \lambda_{\nu_\mu'}^2, \quad \text{(wszystkie } \nu' \text{ różne)}^{2)} \tag{38a}$$

$$\lim_{M=\infty} l_{k_1 \ldots k_\mu}^{(2M)} : l_{k_1 \ldots k_\mu}^{(2M+2)} = \lambda_{\nu_1}^2 \lambda_{\nu_2}^2 \ldots \lambda_{\nu_\mu}^2, \quad \text{(wszystkie } \nu \text{ różne)} \tag{38b}$$

przyczem porządek skaźników ν' zależy od skaźników i i k, porządek skaźników ν tylko od samego k. Jest $\nu_1' \geqslant \nu_1, \ldots \nu_\mu' \geqslant \nu_\mu$; przynajmniej dla jednego wyboru tych skaźników jest $\nu_1' = \nu_1, \ldots \nu_\mu' = \nu_\mu$. Znajdujemy dokładnie porządek $\nu_1' = \nu_1 = 1, \ldots \nu_\mu' = \nu_\mu = \mu$, jeżeli weźmiemy wszędzie lim inf zamiast lim i przebiegniemy wszystkie kombinacye skaźników.

7. Przez ortogonalizacyę parzystych macierzy potęgowych $\| c_{ik}^{(2M)} \|$ według kolumn [3] otrzymujemy dla nieograniczenie wielu wykładników M w tych kolumnach, t. j. w stosunkach ich elementów zbieżność do kierunku układu zupełnego osi głównych dla formy iterowanej $C^{(2)}$.

Przez ortogonalizacyę i normowanie (porówn. 33a) tych kolumn otrzymujemy z macierzy $\| c_{ik}^{(2M)} \|$ w sposób zbieżny macierz graniczną $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$, której kolumny dają dostawy kierunkowe tego układu zupełnego osi głównych formy $l^{(2)}$.

Przez jednorazową podwójną iteracyę macierzy granicznej $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$ otrzymujemy nową macierz

$$\| \mathfrak{A}_{ik} \| = \| c_{im}^{(2)} \| \cdot \| \mathfrak{a}_{mk} \|; \tag{39}$$

$$\mathfrak{A}_{ik} = \sum_m c_{im}^{(2)} \mathfrak{a}_{mk} = \lambda_{\nu_k}^2 \mathfrak{a}_{ik},$$

której kolumny $\mathfrak{A}_k$ powstają przy pomocy mnożenia kolumn $\mathfrak{a}_k$ przez odwrot-

---

1) Porówn. I. Schur l. c.

2) Że w przypadku normalnym powstaje tu $\lambda_1^2 \ldots \lambda_\mu^2$ podaje Perron, (Math. Ann. **64**), nie badając wszakże przypadków wyjątkowych.

3) lub wierszy, co jednak byłoby niedogodnem przy uogólnieniu dla $\| c_{ik}(\mathfrak{F}) \|$.

ność kwadratów odpowiednich długości osi głównych[1]; otrzymujemy w ten sposób wszystkie te kwadraty.

8. Niechaj będzie $B = \| \beta_{ik} \|$ — macierz niezależnego układu ($|B| \neq 0$) wektorów β_k i $\| c_{ik}^{(2M)}(\beta) \|$ — $2M$-ta iteracya tego układu względem formy C [porównaj (16)].

Przez ortogonalizacyę i normowanie danych wyraźnie macierzy $\| c_{ik}^{(2M)}(\beta) \|$ otrzymujemy w sposób zbieżny, dla rosnących nieograniczenie wykładników M, macierz graniczną $\| \mathfrak{b}_{ik} \|$, której kolumny dają nam również dostawy kierunkowe zupełnego układu osi głównych formy iterowanej $C^{(2)}$.

Przez jednorazową iteracyę podwójną tej macierzy granicznej powstaje nowa macierz

$$\| \mathfrak{B}_{ik} \| = \| c_{im}^{(2)} \| \ \| \mathfrak{b}_{mk} \| \qquad (40)$$
$$\mathfrak{B}_{ik} = \sum_m c_{im}^{(2)} \mathfrak{b}_{mk},$$

której kolumny $\mathfrak{B}_k$ powstają przy pomocy mnożenia odpowiednich kolumn $\mathfrak{b}_k$ przez odwrotność kwadratów λ_k^2 odpowiednich długości osi głównych. Otrzymujemy w ten sposób wszystkie kwadraty.

Ten tak prosty ogólny jak i zupełny rezultat, jak i poprzedzające twierdzenia **6** i **7**; nie były, zdaje się, znane w dotychczasowej literaturze.

§ 5. Osi główne form dowolnych.

Rezultaty, znalezione wyżej (§§ 3—4), dotyczą następstwa wszystkich iteracyj formy określnej $C^{(2)}$ i dają się tak samo wyliczać również dla wszystkich iteracyj dowolnej formy określnej. Poniżej podamy rozwinięcie tych wyników, które, przy każdej danej rzeczywistej formie kwadratowej C, daje jednoznacznie za pomocą jedynego procesu nieskończonego granicznego kierunki i długości wszystkich osi głównych.

Niechaj będzie najprzód dana forma C, pomyślana jako regularna ($\rho_\nu^2 > 0$). Jeżeli pomiędzy pierwiastkami ρ_ν niema pierwiastków równych znaku przeciwnego, to można przy pomocy wzorów (9) i (10) przenieść poprzedzające twierdzenia na wszystkie iteracye $\| C \|^N$, jeżeli zamiast ρ_ν^2, λ_ν^2, $2M$, $2M+2$ napiszemy teraz ρ_ν, λ_ν, N, $N+1$. Lecz twierdzenia główne 7 i 8 doznają, jak to widzimy, następujących modyfikacyj.

[1]) Porządek skaźników ν jest ten sam, jak twierdzenia 6.

[2]) W (38b) należy przyjmować bezwzględnie wartość $|\lambda_\nu|$.

Macierze potęgowe parzyste, po zortogonalizowaniu i znormowaniu, zmierzają znowu do macierzy granicznej $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$ przekształcenia ortogonalnego dla zupełnego składu osi głównych formy iterowanej $C^{(2)}$ i formy początkowej C; nieparzyste zaś macierze potęgowe, ponieważ normowanie odbywa się zawsze przy pomocy wielkości dodatnich, dają, w sposób takiż sam, macierz ortogonalną graniczną

$$\| \mathfrak{a}_{ik}' \| = \| \mathfrak{a}_{ik} \cdot \operatorname{sign} \lambda_k \|, \qquad (41)$$

gdzie $\operatorname{sign} \lambda_k$ jest $+1$ dla λ_k dodatnich, -1 dla λ_k ujemnych; osi główne czysto urojone danej formy otrzymują przytem kierunek przeciwny. Jest dalej tożsamościowo:

$$\| c_{im} \| \cdot \| \mathfrak{a}_{mk} \| = \| \rho_{\nu_k} \mathfrak{a}_{ik} \|, \qquad (42)$$

przez co zachowują się wszystkie kwadraty osi $\lambda_{\nu_k} = \frac{1}{\rho_{\nu_k}}$. Przez normowanie macierzy po prawej stronie kolumn wartościami bezwzględnemi $|\rho_{\nu_k}|$ otrzymujemy stąd macierz graniczną nieparzystą $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$, dla której przeto nie jest potrzebny nowy proces graniczny. Do form określnych stosują się wówczas wszystkie dane tu wywody, lecz jest wtedy zawsze $|\rho_\nu| = \rho_\nu$, $\operatorname{sign} \rho_\nu = +1$, $\| \mathfrak{a}'_{ik} \| = \| \mathfrak{a}_{ik} \|$.

Bardziej zawikłanemi stają się stosunki, jeżeli pomiędzy szukanemi pierwiastkami ρ_ν znajduje się dowolnie wiele grup częściowych o wartościach równych znaku przeciwnego. Z wzorów głównych (9)—(10) widać wtedy, że stosunki

$$\lim_{N=\infty} c^{(N)}_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} : c^{(N+1)}_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}$$

wogóle istnieć nie muszą. Przy stałych i i k otrzymujemy dla parzystych N zbieżność ku pewnej wielkości $L_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}$, przy nieparzystych ku innej wielkości $L'_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}$.

Jest wprawdzie w przypadkach „normalnych“ zawsze:

$$L'_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} = L_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} = \lambda_{\nu_1'} \lambda_{\nu_2'}, \ldots \lambda_{\nu'_\mu} \qquad (43a)$$

(porówn. (38a)), w przypadku ogólnym wszakże jest tylko pewne

$$L'_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} L_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} = \lambda^2_{\nu_1'} \lambda^2_{\nu_2''} \ldots \lambda^2_{\nu'_\mu}. \qquad (43b)$$

Można natomiast utrzymać zmodyfikowany wzór (38b)

$$\lim_{N=\infty} l^{(N)}_{k_1 \ldots k_\mu} : l^{(N+1)}_{k_1 \ldots k_\mu} = | \lambda_{\nu_1} . \lambda_{\nu_2} \ldots \lambda_{\nu_\mu} |. \qquad (44)$$

I zbieżność iterowanych kierunków promieni $\beta^{(N)}$ nie daje się utrzymać w ogólności; a fortiori stosuje się to do płaszczyzn iterowanych i przestrzeni wyższych. Wprawdzie są zbieżne osobno kierunki parzyste iterowane i osobno kierunki nieparzyste, lecz oba kierunki graniczne nie schodzą się. I tu wszakże istnieje możliwość jednoznacznego rozwiązania zadania o osiach głównych.

Macierze potęgowe $\| c_{ik}^{(2M)} \|$, przez ortogonalizacyę i normowanie, dają macierz graniczną $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$ dla układu zupełnego osi formy iterowanej $C^{(2)}$. Macierze potęgowe nieparzyste $\| c_{ik}^{(2M+1)} \|$ z powodu tożsamości

$$\| c_{ik}^{(2M+1)} \| = \| c_{im}^{(2M)} \| \cdot \| c_{mk} \| \tag{45}$$

mogą być uważane za iteracye układu początkowego wektorów niezależnych

$$\beta_k \equiv c_k \equiv (c_{ik}, \dots c_{nk}) \tag{46}$$

ze względu na formę iterowaną $C^{(2)}$; dają przeto (twierdzenie 8) przez ortogonalizacyę i normowanie macierz graniczną $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$, która daje również układ zupełny osi głównych formy i t e r o w a n e j. Zanim pokażemy, w jaki sposób z dwóch macierzy granicznych $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$, $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$, które mogą dawać zupełnie różne kierunki i nie przedstawiają wtedy ż a d n e j z osi dla formy pierwotnej, otrzymać można układ zupełny takich osi głównych, ustalmy najprzód to, że można otrzymać $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$ z $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$ w p r o s t, t. j. bez drugiego procesu granicznego dla iteracyj nieparzystych. Niechaj $\| \mathfrak{a}_{ik}^{(2M)} \|$ oznacza macierz $\| c_{ik}^{(2M)} \|$, zortogonalizowaną i znormowaną. Z tożsamości

$$\| c_{ik}^{(2M+1)} \| = \| c_{im} \| \cdot \| c_{mk}^{(2M)} \| \tag{47}$$

wynika, według definicyi tych działań, że ortogonalizowanie i normowanie macierzy $\| c_{ik}^{(2M)} \|$ dają ten sam wynik, co ortogonalizowanie i normowanie macierzy

$$\| \mathfrak{A}_{ik}^{(2M+1)} \| = \| c_{im} \| \cdot \| \mathfrak{a}_{mk}^{(2M)} \| . \tag{48}$$

Przy przejściu do granicy wynika stąd, że $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$ powstaje przez ortogonalizacyę i normowanie macierzy

$$\| \mathfrak{A}'_{ik} \| = \| c_{im} \| \cdot \| \mathfrak{a}_{ik} \| . \tag{49}$$

Lecz macierz $\| \mathfrak{A}'_{ik} \|$ jest już sama ortogonalna, gdyż mamy tożsamościowo

$$\sum_i \mathfrak{A}'_{ip} \mathfrak{A}'_{iq} = \sum_{i,l,m} c_{il} \mathfrak{a}_{lp} c_{im} \mathfrak{a}_{mq} = \sum_{l,m} c_{lm}^{(2)} \mathfrak{a}_{lp} \mathfrak{a}_{mq} , \tag{50}$$

$$\sum_m c_{lm}^{(2)} \mathfrak{a}_{mq} = \rho_{\nu_q}^2 \mathfrak{a}_{lq} \qquad \text{(według tw. 7)} \tag{51}$$

przeto

$$\sum_i \mathfrak{A}'_{ip} \mathfrak{A}'_{iq} = \sum_i \rho^2_{\nu_q} \mathfrak{a}_{lp} \mathfrak{a}_{lq} = \rho^2_{\nu_q} \delta_{pq} . \tag{52}$$

Nietylko więc udowodniona została ortogonalność, lecz widzimy nadto, że do normowania macierzy $\| \mathfrak{A}'_{ik} \|$ należy wogóle kolumnę k-tą podzielić przez $| \rho_{\nu_k} |$, przez co powstaje macierz graniczna parzysta $\| \mathfrak{a}_{\nu k} \|$. Napiszmy teraz dla prostoty ρ_k', λ_k' zamiast ρ_{ν_k}, λ_{ν_k}, to będzie ogólnie:

$$\sum_m c_{lm} \mathfrak{a}_{mk} = | \rho_k' | \mathfrak{a}'_{ik} ; \tag{53a}$$

$$\sum_m c_{il}^{(2)} \mathfrak{a}_{lk} = \rho_k'^2 \mathfrak{a}_{ik} = | \rho_k' | \sum_m c_{im} \mathfrak{a}'_{mk} ; \tag{53b}$$

$$\sum_m c_{im} \mathfrak{a}'_{mk} = | \rho_k' | \mathfrak{a}_{ik} . \tag{53c}$$

Godzi się zauważyć, że wzory (48) — (53) stosują się do macierzy $\| \overline{\mathfrak{a}}_{ik} \|$ każdego układu zupełnego osi głównych formy $C^{(2)}$ i dla macierzy stąd wyprowadzonych $\| \mathfrak{A}'_{ik} \|$, $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$, jak to wynika z podanego dowodu.

Dla stałego k należy odróżnić trzy przypadki: a) albo (dla form określnych zawsze) jest przy wszystkich $i = 1, \dots n$ stale $\mathfrak{a}'_{ik} = \mathfrak{a}_{ik}$, wtedy kolumna $\mathfrak{a}_k$ daje kierunek osi głównej z kwadratem długości $\lambda_k' = \frac{1}{\rho_k'} = \frac{1}{| \rho_k' |}$; b) albo jest $\mathfrak{a}'_{ik} = - \mathfrak{a}_{ik}$; wtedy daje $\mathfrak{a}_k$ znów kierunek osi głównej z kwadratem długości $\lambda_k' = \frac{1}{\rho_k} = \frac{-1}{| \rho_k' |}$, c) albo wreszcie kierunki $\mathfrak{a}_{ik}$ i $\mathfrak{a}'_{ik}$ są całkowicie różne, co jest możliwe tylko wtedy, gdy zarówno $| \rho_k' |$, jak i $- | \rho_k' |$ jest pierwiastkiem charakterystycznego równania wiekowego (5). Otrzymujemy wtedy z wzorów (53a) i (53c):

$$\begin{aligned} \sum_m c_{im} \frac{\mathfrak{a}_{mk} + \mathfrak{a}'_{mk}}{2} &= | \rho_k' | \frac{\mathfrak{a}_{ik} + \mathfrak{a}'_{ik}}{2} , \\ \sum_m c_{im} \frac{\mathfrak{a}_{mk} - \mathfrak{a}'_{mk}}{2} &= - | \rho_k' | \frac{\mathfrak{a}_{ik} - \mathfrak{a}'_{ik}}{2} . \end{aligned} \tag{54}$$

W e k t o r tedy $\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k'}{2}$ d a j e k i e r u n e k o s i g ł ó w n e j f o r m y p i e r w o t n e j C z k w a d r a t e m d ł u g o ś c i o d w r o t n o ś c i p i e r w i a s t k a

$\lambda_k' = \frac{1}{|\rho_k'|}$; dalej wektor $\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_k'}{2}$ daje kierunek innej osi głównej formy pierwotnej C z kwadratem długości $\lambda_k' = \frac{-1}{|\rho_k'|}$.

Ten rezultat ogólny stosuje się do wszystkich form, gdyż w pewnym sensie stosuje się i do dwóch poprzednio rozpatrzonych przypadków. W przypadku a) mianowicie jest $\mathfrak{a}_k^{**} = \frac{\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k'}{2}$ osią główną formy C dla prawdziwego pierwiastka $\rho_k' = |\rho_k'|$, gdy wektor $\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}^{k\prime}}{2} \equiv 0$ nie daje się spożytkować; w przypadku b) zaś daje $\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_k'}{2}$ lub wektor przeciwny $-\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k' - \mathfrak{a}_k}{2}$ oś główną formy C dla prawdziwego pierwiastka $\rho_k' = -|\rho_k'|$, gdy znów tu wektor $\mathfrak{a}_k^{**} = \frac{\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k'}{2} \equiv 0$ jest bez pożytku. Tylko w przypadku c) obie odpowiedzi są zgodne. Jeżeli umówimy się, że za każdym razem wybieramy tylko jedno, naturalnie niebezpożyteczne, rozwiązanie (w przypadku c) wybór jest obojętny), to we wszystkich, pomyśleć się dających przypadkach, otrzymamy jedną oś główną pierwotnej formy rzeczywistej (regularnej) C, tak co do kierunku jak i długości.

Wektory $\mathfrak{a}_k$ i $\mathfrak{a}_k'$ mają, według definicyi, długość 1, przeto kierunki osi głównych

$$\mathfrak{a}_k^{**} = \frac{\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k'}{2}, \quad \mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_k'}{2} \tag{55}$$

przedstawiają wprost dwusieczne kierunków $\mathfrak{a}_k$ i $\mathfrak{a}_k'$, które w przypadkach a), b) redukują się do jednego istniejącego. Parzyste i nieparzyste iteracye dowolnego promienia względem danej formy C mogą tedy być zbieżne w dwóch różnych kierunkach (przypadek c); wtedy wszakże dwusieczne tych dwóch kierunków są z pewnością osiami głównemi formy dla kwadratów długości równych i znaków przeciwnych: osią bezpośrednią [1] dla wartości dodatniej, do niej zaś prostopadłą — dla ujemnej.

Można przewidzieć, że tożsamo stosować się będzie do parzystych i nieparzystych iteracyj płaszczyzn i przestrzeni wyższych, i szukać stąd ostatecznego rozwiązania.

Stwierdzimy to przewidywanie, dając to rozwiązanie ostateczne. Niechaj postępowanie, prowadzące do znalezienia szukanego układu średniego z macierzy granicznych $\|\mathfrak{a}_{ik}\|$, $\|\mathfrak{a}'_{ik}\|$, nazywa się wyrównaniem tych dwóch układów. Stawiamy najprzód następujące twierdzenie:

[1]) Kierunki punktów iterowanych są dane na ich promieniach.

Jeżeli

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n \quad \text{i} \quad \mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots \mathfrak{a}_n'$$

są dwa układy niezależnych wektorów, to można zawsze dla wektorów średnich

$$\frac{\mathfrak{a}_1 \pm \mathfrak{a}_1'}{2}, \quad \frac{\mathfrak{a}_2 \pm \mathfrak{a}_2'}{2}, \ldots, \quad \frac{\mathfrak{a}_n \pm \mathfrak{a}_n'}{2}$$

taki uczynić wybór znaków, aby obrane wektory

$$\widehat{\mathfrak{a}}_1, \quad \widehat{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{a}}_n$$

znowu tworzyły układ niezależny.

Dla dowodu rozpatrzmy najpród dwa układy

$$\frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1'}{2}, \quad \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \quad \text{i} \quad \frac{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1'}{2}, \quad \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n.$$

Wektory średnie $\frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1'}{2}$, $\frac{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1'}{2}$ nie mogą oba leżeć w przestrzeni częściowej wektorów $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$, bo inaczej wektor, powstający przez dodanie tych wektorów średnich, byłby, wbrem założeniom niezależności, leżał również w przestrzeni częściowej $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$. Z tego samego powodu, po uskutecznionym należytym wyborze wektora $\widehat{\mathfrak{a}}_1$, przy którym układ $\widehat{\mathfrak{a}}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ pozostaje niezależnym, może najwyżej jeden z dwóch układów

$$\widehat{\mathfrak{a}}_1, \quad \frac{\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2'}{2}, \ldots \mathfrak{a}_n \quad \text{i} \quad \widehat{\mathfrak{a}}_1, \quad \frac{\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_2'}{2}, \ldots \mathfrak{a}_n$$

wypaść zależnym. W ten sam sposób można pójść dalej, póki nie wyrównamy wszystkich rozpatrywanych par wektorów i nie powstanie układ niezależny wektorów średnich $\widehat{\mathfrak{a}}_1, \widehat{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{a}}_n$. Według powyższego, każdy z tych wektorów daje kierunek osi głównej formy pierwotnej C. Osi główne, należące do dwóch różnych pierwiastków, są oczywiście do siebie ortogonalne; należące do równych pierwiastków ρ_ν tworzą pełną, należącą do ρ_ν, przestrzeń, przyczem ortogonalizacya dowolnego układu zupełnego, leżącego w tej przestrzeni, prowadzi do takiegoż układu zupełnego. Ortogonalizacya znalezionych wektorów średnich $\widehat{\mathfrak{a}}_1, \widehat{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{a}}_n$ prowadzi tedy do układu zupełnego ortogonalnego osi głównych pierwotnej formy C, ortogonalizacya i normowanie macierzy $\|\mathfrak{a}_{ik}\|$ do macierzy $\|\widehat{\mathfrak{a}}_{ik}\|$, która rozwiązuje w zupełności zagadnienie o przekształceniu ortogonalnem dla pierwotnej formy C. Pierwiastki ρ_k' otrzymujemy wszystkie za pomocą iteracyi względem C:

$$\|c_{im}\| \cdot \|\widehat{\mathfrak{a}}_{mk}\| = \|\rho_k' \widehat{\mathfrak{a}}_{ik}\|. \tag{56}$$

§ 6. Rezultat główny.

Otrzymane wyniki możemy streścić w sposób następujący:

Niechaj będzie dana dowolna forma rzeczywista i regularna kwadratowa $\sum c_{ik} x_i x_k = C$ w przestrzeni o n wymiarach. Iteracye parzyste jej macierzy, po ortogonalizacyi i normowaniu, zmierzają do macierzy granicznej $\| \alpha_{ik} \|$, nieparzyste zaś do macierzy granicznej $\| \alpha'_{ik} \|$.

Mamy (53):

$$\sum c_{im} \alpha_{mk} = | \rho_k' | \alpha_{ik},$$

$$\sum c_{ik} \alpha_{mk} = | \rho_k' | \alpha_{ik},$$

gdzie $| \rho_k' |$ przebiega przez wartości bezwzględne wszystkich pierwiastków charakterystycznego równania wiekowego (5)

$$| c_{ik} - \delta_{ik} \rho | = 0.$$

Przez iteracyę według C i normowanie kolumn k przy pomocy $| \rho_k' |$ każda z macierzy granicznych może być otrzymana z drugiej za pomocą procesu skończonego. Utwórzmy dalej ciąg n par wektorów:

$$\frac{\alpha_1 \pm \alpha_1'}{2}, \ldots \quad \frac{\alpha_n \pm \alpha_n'}{2}$$

i wybierzmy, co zawsze (nie koniecznie jednoznacznie) jest możliwe, z każdej pary taki wektor, aby był niezależny od wszystkich poprzedzających go, t. j. aby nie mógł być przedstawiony jako ich agregat liniowy. Macierz tak wybranych wektorów $\widehat{\alpha}_k$, po ich ortogonalizacyi i normowaniu, daje nam w wierszach macierz $\| \widehat{\alpha}_{ik} \|$ przekształcenia ortogonalnego danej formy C na jej osi główne, w kolumnach zaś daje kierunki tych osi głównych. Iteracya (56)

$$\| c_{im} \| \cdot \| \widehat{\alpha}_{mk} \| = \| \rho_k' \widehat{\alpha}_{ik} \|$$

daje wszystkie należące tu wartości pierwiastków ρ_k' równania wiekowego (6), a zatem i odwrotność długości kwadratów otrzymanych osi głównych. Ale i dla wyłączonych osobliwych form $\rho_n^2 = 0$ rezultat główny stosuje się również po wprowadzeniu niewielkich zmian. Mianowicie już przy ortogonalizacyi pierwszej macierzy potęgowej $\| c_{ik} \|$ znika, jak wiadomo, tożsamościowo tyle (n_0) kolumn, ile jest pierwiastków znikających ρ_ν; równomienne kolumny znikają też tożsamościowo we wszystkich macierzach potęgowych $\| c_{ik}^{(N)} \|$. Musimy tedy przy normowaniu pomijać odpowiednie kolumny i określamy obecnie „normowanie“ układu zerowego

$$0, \; 0, \ldots, \; 0$$

w ten sposób, że pozostawimy go niezmiennym. I w granicy zastępujemy n_0 kolumn osobliwych przez zero. Dla pozostałych niezależnych kolumn ortogonalnych pozostają atoli w mocy—mutatis mutandis—wszystkie powyższe rozważania, w szczególności zaś nieznikające wektory macierzy granicznych $\| \alpha_{ik} \|$, $\| \alpha'_{ik} \|$ należą teraz do przestrzeni cząstkowej R_{n-n_0} skończonych osi głównych. Wybór wektorów $\widehat{\alpha}_k$ następuje przy wyrównaniu tylko tam, gdzie wektory początkowe α_k, α_k' nie znikają tożsamościowo, i należy wybór ten przeprowadzić tak, jak w przypadku regularnym.

Twierdzenie główne stosuje się tedy i do form osobliwych, jeżeli przy wyrównaniu wykluczymy we wszystkich macierzach znikające tożsamościowo kolumny w liczbie n_0, równej liczbie pierwiastków zerowych $\rho_\nu = 0$. Odpowiednie osi nieskończone dobiera się dowolnie ortogonalnie do skończonych osi głównych.

We wszystkich tedy pomyśleć się dających przypadkach układ zupełny osi głównych danej formy kwadratowej $\Sigma c_{ik} x_i x_k = C$ otrzymać można tak co do kierunku jak i długości, za pomocą jedynego procesu nieskończonego, t. j. tworzenia macierzy granicznej $\| \alpha_{ik} \|$ przez ortogonalizacyę i normowanie macierzy potęgowych parzystych $\| c_{ik}^{(2M)} \|$.

§ 7. Uogólnienie.

Wyżej (§ 2) była już mowa o możliwości zastosowania osiągniętych wyników do skombinowanego problematu dwóch form C, D, jeżeli jedna z nich jest określna. Przy innej sposobności zamierzamy przeprowadzić badania, odpowiednie związku z ogólnym problematem niesymetrycznym.

Tu wspomnimy tylko o możliwości zupełnego zastosowania znalezionych wyników do form Hermite'owskich, jako też pełnociągłych — według definicyi Hilberta — rzeczywistych form kwadratowych i Hermite'owskich o przeliczalnie nieskończenie wielu zmiennych, przyczem dowody pozostają te same; wreszcie do liniowych równań całkowych z jądrem rzeczywistem symetrycznem lub Hermite'owskiem. Dla przypadku rzeczywistego równań całkowych przeprowadzimy tu poniżej badanie.

CZĘŚĆ DRUGA. RÓWNANIA CAŁKOWE SYMETRYCZNE.

§ 1. Wzory zasadnicze. [1]

Danej formie rzeczywistej kwadratowej odpowiada w teoryi równań całkowych symetrycznych wyrażenie całkowe symetryczne

$$\int_a^b \int_a^b K(s,\ t)\, x(s)\, x(t)\ ds\, dt = C \text{[1]}, \tag{1}$$

gdzie

$$K(s,\ t) = K(t,\ s), \qquad a \leqslant s,\quad t \leqslant b \tag{2}$$

jest jądrem symetrycznem, o którem zakładamy, że jest ciągłe i że nie znika tożsamościowo.

Problemat „osi głównych" polega tu na szukaniu wszystkich funkcyj właściwych, czyniących zadość związkowi

$$\int_a^b K(s,\ t)\, \varphi(t)\, dt = \rho\, \varphi(s), \text{[2]} \tag{3}$$

gdzie ρ jest stałą, której wartość odwrotną

$$\lambda = \frac{1}{\rho} \tag{4}$$

nazywamy wartością właściwą danego jądra $K(s,\ t)$. Macierzy $\| c_{ik} \|$ w teoryi form odpowiada tu samo jądro $K(s,\ t)$, wyższym macierzom potęgowym $\| c_{ik}^{(N)} \|$ odpowiadają wyższe jądra iterowane

$$K^{(N)}(s,\ t) \equiv K^N(t,\ s) \equiv K^{(N)}, \tag{5}$$

określone ogólnie przez równania

$$K^{N+1}(s,\ t) = \int K^N(s,\ r)\, K(r,\ t)\, dr, \tag{6}$$

---

[1]) Odsyłamy przedewszystkiem do podstawowych prac Fredholma, Hilberta i Schmidta.

[2]) W dalszym ciągu naszego wykładu skończonemi granicami całkowania będą a i b, które dla prostoty wszędzie opuszczamy.

lub wprost

$$K^{N+1}(s,\ t) = \int\int \ldots \int K(s,\ r_1)\, K(r_1,\ r_2) \ldots K(r_N,\ t)\, dr_1,\ dr_2 \ldots dr_n. \tag{7}$$

Jeżeli

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s), \ldots \quad \varphi_k(s), \ldots \tag{8}$$

jest zamkniętym układem zortogonalizowanych i znormowanych funkcyj właściwych jądra $K(s,\ t)$, tak że:

$$\int K(s,\ t)\, \varphi_k(t)\, dt = \rho_k \varphi_k(s), \qquad \rho_k = \frac{1}{\lambda_k}; \tag{9a}$$

$$\int \varphi_\mu(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = \delta_{\mu\nu} \begin{cases} = 1 & \text{dla } \mu = \nu \\ = 0 & \text{,, } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{9b}$$

i nie istnieje pozatem funkcya właściwa jądra, która nie dałaby się wyrazić liniowo za pomocą skończonej liczby funkcyj danych; jeżeli dalej

$$\lambda_1,\quad \lambda_2, \ldots \quad \lambda_n \tag{10}$$

są odpowiadające tym funkcyom, koniecznie rzeczywiste, przez jądro $K(s,\ t)$ jednoznacznie wyznaczone, wartości właściwe, dla których przyjąć wolno

$$\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \ldots \leqslant \lambda_n^2 \leqslant \ldots, \tag{11}$$

to ten ciąg wartości właściwych może posiadać punkt skupienia tylko w nieskończoności; w szczególności będzie szereg

$$\sum_k^\infty \rho_k^2 = \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k^2} = c^2 \tag{12}$$

zbieżny; dalej λ_k^N, $\varphi_k(s)$ są równocześnie wartościami właściwemi i niezależnemi funkcyami właściwemi jądra $K^N(s,\ t)$.

Do jąder iterowanych stosują się ważne twierdzenia Schmidta o rozwinięciu; twierdzenia te uczynimy podstawą naszych rozważań, odpowiadają one w zupełności poprzednim wzorom zasadniczym (I, 9) teoryi form:

$$K^N(s,\ t) = \sum_\nu^\infty \frac{\varphi_N(s)\ \varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^N}; \qquad N \geqslant 2. \tag{13}$$

§ 2. Jądra iteracyjne parzyste.

Stwierdzimy najprzód następujący analogon do jednego z poprzednich twierdzeń o formach (I, § 4, twierdzenie 7).

Niechaj będzie

$$t_1, \quad t_2, \ldots \quad t_n, \ldots \tag{14}$$

przeliczalny układ zmiennych t, pokrywający wszędziegęsto dany przedział $a \ldots b$ [1]; jeżeli wtedy zortogonalizujemy i znormujemy ciąg

$$K^{2M}(s,\, t_1), \quad K^{2M}(s,\, t_2) \ldots \quad K^{2M}(s,\, t_\mu) \ldots, \tag{15}$$

jako układ funkcyi zmiennej s, przyczem nie uwzględnimy funkcyj tożsamościowo znikających, otrzymamy przez to dla M rosnącego nieograniczenie ciąg zbieżny jednostajnie ku ciągowi granicznemu

$$\alpha_1(s), \quad \alpha_2(s), \ldots \quad \alpha_\mu(s), \ldots. \tag{16}$$

który przedstawia układ zamknięty funkcyj właściwych jądra iterowanego $K^{(2)}(s,\, t)$.

Dla dowodu rozpatrzmy najprzód [2]

$$K^{2M}(s,\, t_1) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t_1)}{\lambda_\nu^{2M}}. \tag{17}$$

Dla osobliwych wartości t mogłaby ta funkcya znikać tożsamościowo, mianowicie wtedy, gdy dla wszystkich ν jest tożsamościowo $\varphi_\nu(t_1) = 0$. Dla takich wartości wyjątkowych zachodzi znikanie tożsamościowe jądra K^{2M} już dla $M = 1$; te wartości wyjątkowe przy żądanych działaniach pozostawimy wprost bez uwzględnienia. Bez zmniejszenia ogólności można przyjąć $K^2(s, t) \neq 0$ [3], i niechaj ν_1 będzie najmniejszym skaźnikiem, dla którego

$$\varphi_{\nu_1}(t_1) \neq 0. \tag{18}$$

Do tego skaźnika należy wartość właściwa $\lambda_{\nu_1}^2$ jądra $K^{(2)}$ i tylko skończona liczba dalszych wartości właściwych $\lambda^2_{\nu_1+1}, \ldots \lambda^2_{\nu_1+n}$, może być równa $\lambda^2_{\nu_1}$, gdy inne późniejsze wartości są większe (porów. 12). Dla żądanego normowania jest obojętne, kiedy rozważaną funkcyę $K^{2M}(s,\, t_1)$ mnożymy przez $\lambda_{\nu_1}^{2M}$; funkcya, jaką wtedy normować mamy, będzie

$$L^{2M}(s,\, t_1) = \sum_\nu^{\nu_1 \ldots,\, \nu_1+n_1} \varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t_1) + \sum_\nu^{\nu_1+n_1+1 \ldots \infty} \left(\frac{\lambda_{\nu_1}}{\lambda_\nu}\right)^{2M} \varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t). \tag{19}$$

[1]) Np. przeliczalnie uporządkowany układ wartości wymiernych między a i b lub wszystkich ułamków dwójkowych.

[2]) Wszystkie następujące sumowania — o ile wyraźnie inaczej nie podajemy — rozciągają się od 1 do ∞; w przypadku skończonej liczby wartości właściwych $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ wszystkie dalsze odwrotne wartości właściwe ρ_{n+m} należy przyjąć za równe zeru.

[3]) lub $K(s,\, t) \neq 0$.

Część pierwsza po stronie prawej nie może znikać tożsamościowo, gdyż, z powodu ortogonalności funkcyj właściwych $\varphi_{\nu_1}, \ldots, \varphi_{\nu_1+n_1}$ związek liniowy pomiędzy niemi jest możliwy tylko przy znikających spółczynnikach, gdy tu przyjęliśmy $\varphi_{\nu_1}(t_1) \neq 0$. Część druga dla rosnących nieograniczenie wartości M maleje wciąż, gdyż dla $\nu > \nu_1 + m_1$ ma być ogólnie $\lambda_\nu^2 > \lambda_{\nu_1}^2$. Funkcya, którą mamy normować, różni się zatem dla nieograniczenie rosnącego M dowolnie mało od

$$L_1^*(s) = \sum_1^{\nu_1 \ldots\, \nu+n_1} \varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t_1), \tag{20}$$

przyczem wszystkie funkcye $\varphi_\nu(s)$ w tym agregacie liniowym należą do jednakowej wartości właściwej λ_1^2 jądra $K^{(2)}$. Z tego właśnie powodu agregat rozważany $L_1^*(s)$ jest sam funkcyą właściwą jądra $K^{(2)}$ i normowanie jej prowadzi znowu do takiejże funkcyi $\alpha_1(s)$, która należy do wartości właściwej $\bar{\lambda}_{11}^2$. [1])

Niechaj $\bar{\varphi}_\nu(s)$ oznaczają układ zupełny funkcyj właściwych dla $K^{(2)}$. Bez zmniejszenia ogólności możemy przy rozważaniu iteracyj parzystych przyjąć:

$$\begin{gathered} \lambda^2_{\nu_1-1} < \lambda^2_{\nu_1}; \qquad \bar{\alpha}_1(s) = \bar{\varphi}_{\nu_1}(s); \\ \bar{\varphi}_{\nu_1}(t_1) \neq 0, \quad \bar{\varphi}_{\nu_1+1}(t_1) = \ldots = \bar{\varphi}_{\nu_1+m_1}(t_1) = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

co można osiągnąć zawsze przez ewentualne przestawienie skaźników i przekształcenie ortogonalne funkcyj właściwych $\varphi_{\nu_1}(s), \ldots, \varphi_{\nu_1+m_1}(s)$ jądra $K^{(2)}$, należących do $\lambda_{\nu_1}^2$.

Przejdźmy teraz do jądra $K^{2M}(s,\, t_2)$, przyczem znów przyjmijmy $K^{2M}(s,\, t_2) \not\equiv 0$, i rozpatrzmy agregaty

$$\begin{gathered} L_2^{2M}(s) = c_2\, K^{2M}(s,\, t_2) + c_1\, K^{2M}(s,\, t_1), \\ c_2 = \text{const} \neq 0, \quad c_1 = \text{const}. \end{gathered} \tag{22}$$

o które właśnie nam idzie przy żądanej ortogonalizacyi i normowaniu.

Mogłoby być, że pomiędzy „wektorami" znajduje się $L_2^{2M}(s)$ tożsamościowo równy zeru, wtedy występuje i zero przy ortogonalizacyi, wartości t_2 nie mamy już potrzeby uwzględniać i przechodzimy do wartości t_3 i t. d. Jeżeli jednak zawsze jest $K^{2M}(s,\, t_\mu)$ w ten sposób zależne od $K^{2M}(s,\, t_1)$, oznacza to wtedy, że jest tożsamościowo:

[1]) Podobnie do wzoru (I, 27) jest ogólnie

$$\lim_{M=\infty} K^{2M}(s_0,\, t_1) : K^{2M+2}(s_0,\, t_1) = \lambda^2_{\nu_1'};$$

dla prostoty pomijamy tę analogię i inne łatwo uzasadnić się dające (por. I, 36—38 i nast.).

$$K^{2M}(s,\ t) = \frac{\mathfrak{a}_1(s)\,\mathfrak{a}_1(t)}{\lambda_{\nu_1}^{\ 2}}, \tag{23}$$

poczem już z samego $K^2(s,\ t_1)$ można znaleść jedyną funkcyę właściwą. W innych przypadkach można w ciągu $t_2, \ldots, t_\mu$ osiągnąć zawsze taką wartość t_{μ_2}, dla której $K^2(s,\ t_{\mu_2})$ jest liniowo niezależne od $K^2(s,\ t_1)$ i możemy przyjąć, że to zachodzi już przy wartości t_2.

Niechaj więc w równaniu

$$K^{2M}(s,\ t_2) = \sum_{\nu} \frac{\bar\varphi_\nu(s)\,\bar\varphi_\nu(t_2)}{\lambda_\nu^{2M}} \tag{24}$$

będzie ν_2 najmniejszą wartością skaźnika, dla której jest $\bar\varphi_{\nu_2}(t_2) \neq 0$. Jeżeli jest przytem $\lambda_{\nu_2}^{\ 2} \neq \lambda_{\nu_1}^{\ 2}$, to dla rosnącego M otrzymamy w jądrach normowanych $K^{2M}(s,\ t_2)$ funkcye, które coraz więcej stają się ortogonalnemi do odpowiednich normowanych jąder $K^{2M}(s,\ t_1)$ [1]; żądana ortogonalizacya i normowanie dają przeto w granicy funkcyę właściwą $\mathfrak{a}_2(s)$ jądra K^2 dla wartości właściwej $\lambda_{\nu_2}^{\ 2}$. Jeżeli wszakże $\lambda_{\nu_2}^{\ 2} = \lambda_{\nu_1}^{\ 2}$ $(\nu_2 \geqslant \nu_1)$, wtedy będzie:

$$\lambda_{\nu_1}^{2M} K^{2M}(s,\ t_1) = \bar\varphi_{\nu_1}(s)\,\bar\varphi_{\nu_1}(t_1) + \sum_{\nu}^{\nu_1+m_1+1,\ldots\infty} \left(\frac{\lambda_{\nu_1}}{\lambda_\nu}\right)^{2M} \bar\varphi_\nu(s)\,\bar\varphi_\nu(t_1); \tag{25a}$$

$$\lambda_{\nu_1}^{2M} K^{2M}(s,\ t_2) = \sum_{\nu}^{\nu_1\ldots\nu_1+m_1} \bar\varphi_\nu(s_1)\,\bar\varphi_\nu(t_2) + \sum_{\nu}^{\nu_1+m_1+1,\ldots\infty} \left(\frac{\lambda_{\nu_1}}{\lambda_\nu}\right)^{2M} \bar\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t_2). \tag{25b}$$

Jest tedy albo

$$\bar\varphi_{\nu_1}(t_2) = 0; \qquad \sum_{\nu}^{\nu_1+1,\ldots\nu_1+m_1} \bar\varphi_\nu^{\ 2}(t_2) \neq 0, \tag{26}$$

a wtedy już normowanie jądra $K^{2M}(s,\ t_2)$ daje funkcyę graniczną $\bar\varphi_{\nu_2}(s)$ ortogonalną do $\bar\varphi_{\nu_1}(s)$ i należącą do tejże wartości granicznej $\lambda_{\nu_2}^{\ 2} = \lambda_{\nu_1}^{\ 2}$; albo też mamy:

$$\bar\varphi_{\nu_1}(t_2) \neq 0, \qquad \sum_{1}^{\nu_1+1,\ldots\nu_1+m_1} \bar\varphi_\nu^{\ 2}(t_2) \neq 0, \tag{27}$$

a wtedy tożsamo, co przedtem, stosuje się do agregatu

$$L_2^{2M}(s) = \lambda_{\nu_1}^{2M} \begin{vmatrix} K^{2M}(s,\ t_1), & K^{2M}(s,\ t_2) \\ \bar\varphi_{\nu_1}(t_1), & \bar\varphi_{\nu_1}(t_2) \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Albo wreszcie mamy:

$$\bar\varphi_{\nu_1}(t_2) \neq 0; \qquad \sum_{\nu}^{\nu_1+1,\ldots\nu_1+m_1} \bar\varphi_\nu^{\ 2}(t_2) = 0 \tag{29}$$

---

[1]) Oznacza to, że całka iloczynu tych normowanych funkcyj staje się dowolnie małą.

wtedy agregat (28) daje nam funkcyę, której normowanie w granicy dokonywa się według podobnych praw, jak poprzednio normowanie jądra $K^{2M}(s,\ t_1)$. Dostajemy wtedy funkcyę właściwą $\mathfrak{a}_2(s)$ jądra $K^2(s,\ t)$, ortogonalną do $\bar\varphi_{\nu_1}(s)$ i należącą do tej wartości właściwej $\lambda_{k_2}^{\ 2}$, dla której najprzód wypada

$$\begin{vmatrix} \bar\varphi_{\nu_1}(t_1), & \bar\varphi_{\nu_1}(t_2) \\ \bar\varphi_{k_2}(t_1), & \bar\varphi_{k_2}(t_2) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{30}$$

Skaźnik k_2 istnieć musi, bo inaczej, wbrew założeniu, byłoby w równaniu (28) $L_2^{(2M)}(s) \equiv 0$.

W zupełnie analogiczny sposób postępujemy z dalszemi funkcyami $K^{2M}(s,\ t_3), \ldots$ Albo dla dostatecznie wielkiego skaźnika n nie otrzymujemy wogóle więcej nowych funkcyj $K^{2M}(s,\ t_{n+p})$, dla dowolnego t_μ więc będzie:

$$K^2(s,\ t_\mu) = c_1(t_\mu)\,K^2(s,\ t_1) + \ldots + c_n(t_\mu)\,K^2(s,\ t_n); \tag{31}$$

$K^2(s,\ t)$ jest wtedy jądrem „osobliwem“ rzędu n-tego, które posiada tylko n otrzymanych funkcyj właściwych niezależnych. Albo ciąg tych znalezionych funkcyj właściwych $\mathfrak{a}_1(s), \ldots \mathfrak{a}_n(s), \ldots$, bez znikających, dąży do nieskończoności; wtedy należy jeszcze wykazać, że w ten sposób powstaje układ **zamknięty** funkcyj właściwych jądra $K^2(s,\ t)$, do którego to układu nie można już dołączać funkcyj dalszych, od tamtych liniowo niezależnych.

Niechaj do najmniejszej wartości właściwej $\lambda_1^{\ 2} = \ldots = \lambda_{n_1}^{\ 2}$ $(< \lambda^2_{n_1+1})$ należą normowane funkcye właściwe $\bar\varphi_1(s), \ldots, \bar\varphi_{n_1}(s)$. Istnieje w każdym razie najmniejszy skaźnik μ_1, dla którego

$$\sum_{\nu}^{1\ldots n_1} \bar\varphi_\nu(t_{\mu_1})^2 \neq 0, \tag{32}$$

gdyż inaczej funkcye ciągłe $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ z powodu **wszędziegęstego** pokrycia danego przedziału $a \ldots b$ wartościami $t_1, \ldots, t_\mu$ znikaćby musiały tożsamościowo, co dla nich nie zachodzi; w przypadku „normalnym“ będzie nawet $\mu_1 = 1$. Normowanie jądra $K^{2M}(s,\ t_{\mu_1})$ doprowadzi tedy według rozważań przeprowadzonych dla $K^{2M}(s,\ t_1)$ do funkcyi właściwej $\bar{\mathfrak{a}}_{\mu_1}(s)$ jądra $K^{(2)}$, należącej do wartości właściwej $\lambda_1^{\ 2}$, która to funkcya musi być zatem ortogonalna do znalezionych poprzednio, odpowiadających innym wartościom właściwym, funkcyj $\mathfrak{a}_1(s), \ldots, \mathfrak{a}_{\mu_1-1}(s)$. Z tego ostatniego powodu żądana ortogonalizacya i normowanie jądra $K^{2M}(s,\ t_{\mu_1})$ względem $K^{2M}(s,\ t_1), \ldots, K^{2M}(s,\ t_{\mu-1})$ również doprowadzi do tej samej funkcyi $\mathfrak{a}_{\mu_1}(s) = \bar{\mathfrak{a}}_{\mu_1}(s)$, i tym sposobem znajdziemy pierwszą funkcyę właściwą $\bar\varphi_1(s)$ należą do $\lambda_1^{\ 2}$.

Podobnież, o ile nie zachodzi jądro osobliwe z jedną jedyną funkcyą właściwą $\mathfrak{a}_1(s)$, istnieje drugi najmniejszy skaźnik μ_2 taki, że dla $n_1>1$ będzie

$$\sum_{k_1<k_2}^{1\dots n_1} \begin{vmatrix} \overline{\varphi}_{k_1}(t_{\mu_1}) & \overline{\varphi}_{k_1}(t_{\mu_2}) \\ \overline{\varphi}_{k_2}(t_{\mu_1}) & \overline{\varphi}_{k_2}(t_{\mu_2}) \end{vmatrix}^2 \neq 0; \tag{33}$$

dla $n_1=1$, $\lambda_1^2<\lambda_2^2=\dots=\lambda^2_{n_2}\,(<\lambda^2_{n_2+1})$ zaś będzie albo

$$\text{dla}\quad \mu_2<\mu_1,\quad \sum_{k_2}^{2\dots n_2} \overline{\varphi}_{k_2}(t_\mu)^2 \neq 0, \tag{34}$$

albo

$$\text{dla}\quad \mu_2>\mu_1,\quad \sum_{k_2}^{2\dots n_2} \begin{vmatrix} \overline{\varphi}_1(t_{\mu_1}), & \overline{\varphi}_1(t_{\mu_2}) \\ \overline{\varphi}_{k_2}(t_{\mu_1}), & \overline{\varphi}_{k_1}(t_{\mu_2}) \end{vmatrix}^2 \neq 0, \tag{35}$$

gdyż inaczej zachodziłby pomiędzy funkcyami ortogonalnemi $\overline{\varphi}_1(t)$, $\overline{\varphi}_{k_1}(t)$, $\overline{\varphi}_{k_2}(t)$ związek liniowy, lub też te funkcye znikałyby, co jest niemożliwe. Dla skaźnika μ_2, przez kombinacyę jądra $K^{2M}(s,\,t_{\mu_1})$ z jądrem $K^{2M}(s,\,t_{\mu_2})$, otrzymujemy przy pomocy ortogonalizacyi i normowania funkcyę właściwą $\mathfrak{A}_{\mu_2}(s)$ należącą do λ_2^2, ortogonalną do poprzednich funkcyj właściwych $\mathfrak{a}_1(s),\dots,$ $\mathfrak{a}_{\mu_2-1}(s)$, a więc zlewającą się z funkcyą $\mathfrak{a}_{\mu_2}(s)$.

Podobnym sposobem można wykazać, że żadna inna należąca do równych lub nierównych wartości właściwych $\lambda_3^2,\dots,\lambda_\nu^2,\dots$ niezależna funkcya właściwa $\mathfrak{a}_k(s)$ nie może być w rozważanym procesie przeskoczona.

§ 3. Układ jądra $K(s,\,t)$.

W dalszem rozwinięciu rozważanej analogii z zagadnieniem o formach (I, § 5) twierdzimy, że:

Za pomocą ortogonalizacyi i normowania ciągu jąder nieparzystych iterowanych

$$K^{2M+1}(s,\,t_1),\quad K^{2M+1}(s,\,t_2),\dots,\quad K^{2M+1}(s,\,t_\mu),\dots \tag{36}$$

względem zmiennej s otrzymujemy zbieżność jednostajną ku ciągowi granicznemu

$$\mathfrak{a}_1'(s),\quad \mathfrak{a}_2'(s),\dots,\quad \mathfrak{a}_k'(s), \tag{37}$$

który również daje układ zamknięty funkcyj właściwych jądra $K^{(2)}$ z takimże ciągiem wartości właściwych $\lambda^2_{\nu_k}$ jak dla iteracyi parzystych (§ 2).

Zachodzą tożsamości:

$$\int K(s,\,t)\,\mathfrak{a}_k(t)\,dt = \frac{1}{|\lambda_{\nu_k}|}\,\mathfrak{a}_k'(s), \tag{38a}$$

$$\int K(s,\,t)\,\mathfrak{a}_k'(t)\,dt = \frac{1}{|\lambda_{\nu_k}|}\,\mathfrak{a}_k(s). \tag{38b}$$

W ciągu funkcyj

$$\frac{\mathfrak{a}_1(s)\pm\mathfrak{a}_1'(s)}{2},\quad \frac{\mathfrak{a}_2(s)\pm\mathfrak{a}_2'(s)}{2},\dots,\quad \frac{\mathfrak{a}_m'(s)\pm\mathfrak{a}_m'(s)}{2},\dots$$

o ile odwrócimy uwagę od tożsamościowo znikających par $\mathfrak{a}_{m_0}(s)=\mathfrak{a}'_{m_0}(s)\equiv 0$, można zawsze dokonać takiego wyboru znaku, aby powstający przez to ciąg funkcyj średnich

$$\hat{\mathfrak{a}}_1(s),\quad \hat{\mathfrak{a}}_2(s),\dots,\quad \hat{\mathfrak{a}}_n(s) \tag{39}$$

był liniowo niezależny. Ciąg ten, przez ortogonalizacyę i normowanie, daje nam układ zamknięty funkcyj właściwych

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s),\dots,\quad \varphi_m(s) \tag{40}$$

dla jądra pierwotnego $K(s,\,t)$.

Dowód należy przeprowadzić zupełnie analogicznie do dowodu odpowiedniego w teoryi form (I, § 5) i dlatego możemy go na tem miejscu pominąć.

§ 4. Iteracya zupełnych układów form.

Analogie do najogólniejszych twierdzeń o formach (I, § 6) otrzymujemy, rozważając dowolne układy funkcyjne $\beta_k^{(0)}(s)$ i ich iteracye przez wzgląd na dane jądro $K(s,\,t)$.

Dany układ funkcyjny

$$\beta_1(s),\quad \beta_2(s),\dots,\quad \beta_k(s),\dots \tag{41}$$

może być zawsze ortogonalizowany i normowany, przyczem nie ma potrzeby uwzględniać występujących identycznie zer, które są znakiem zależności liniowej.

Iteracye uważanego układu względem $K(s,\,t)$ powstają przez przekształcenia

$$\beta_k^{(1)}(s)=\int K(s,\,t)\,\beta_k(t)\,dt, \tag{42a}$$

$$\beta_k^{(N+1)}(s)=\int K(s,\,t)\,\beta_k^{(N)}(t)\,dt=\int K^N(s,\,t)\,\beta_k(t)\,dt. \tag{42b}$$

Jeżeli żądamy, — co tu właśnie zachodzi — ortogonalizacyi i normowania otrzymanych w ten sposób ciągów funkcyjnych

$$\beta_1^{(N)}(s), \quad \beta_2^{(N)}, \ldots, \quad \beta_k^{(N)}(s), \ldots, \tag{43}$$

to można z góry, bez zmiany rezultatu, zastąpić układ pierwszy (41) przez układ powstały z niego zortogonalizowany i znormowany

$$\beta_1^*(s), \quad \beta_2^*(s), \ldots, \quad \beta_k^*(s), \ldots. \tag{44}$$

Układ tej natury — ale koniecznie nieskończony — nazywa się z u p e ł n y m (H i l b e r t), jeżeli dla każdej funkcyi ciągłej $g(s)$ zachodzi związek

$$\int g(s)^2\,ds = \sum_{\nu}^{1\ldots\infty}\left\{\int g(t)\,\beta_\nu^*(t)\,dt\right\}^2; \tag{45}$$

wtedy i układ pierwotny (41) nazwiemy zupełnym. Np. układ potęg naturalnych

$$s^0 = 1, \quad s, \quad s^2, \ldots, \quad s^k, \ldots, \tag{46}$$

będący podstawą szeregów T a y l o r a, jest zawsze zupełny; rozwinięcia L e g e n d r e'a, F o u r i e r a, B e s s e l'a, S t u r m a-L i o u v i l l e'a i inne podobne stanowią przykłady dalsze.

Ze związku zupełności (45) wynika wprost, że funkcya ciągła wtedy tylko może być ortogonalna do wszystkich funkcyj $\beta_\nu^*(s)$, t. j. może być dla wszystkich ν:

$$\int g(t)\,\beta_\nu^*(t)\,dt = 0, \tag{47}$$

jeżeli jest tożsamościowo $g(t) \equiv 0$.

Z tego samego powodu musi być $g(t) \equiv 0$, jeżeli dla wszystkich funkcyj p i e r w o t n y c h $\beta_\nu(t)$ ciągu (41) jest

$$\int g(t)\,\beta_\nu(t)\,dt = 0, \tag{48}$$

ponieważ całki (47) dają się złożyć liniowo z całek (48).

Analogon, którego szukaliśmy do twierdzenia 8 w części I § 4, brzmi teraz w ten sposób:

Ortogonalizacya i normowanie zupełnego ciągu funkcyj $\beta_\nu^N(s)$, powstających przez iteracyę zupełnego ciągu funkcyj $\beta_\nu^{(0)}(s)$ przez wzgląd na dane jądro $K(s,t)$, daje dla $N=2M$ w sposób jednostajnie zbieżny z a m k n i ę t y układ funkcyj właściwych iterowanego jądra $K^2(s,t)$.

Dla dowodu rozpatrzmy najprzód pojedyńczą funkcyę $\beta_{\mu_1}(s)$ i powstałe z niej $\beta^{(1)}_{\mu_1}(s)$, $\beta^{(N)}_{\mu_1}(s)$. Może wprawdzie $\beta^{(1)}_{\mu_1}(s)$ znikać tożsamościowo, ale napewno nie zachodzi to dla w s z y s t k i c h funkcyj uważanego układu zupełnego, gdyż inaczej w równaniu podstawowem (45) powstałaby sprzeczność, gdy w niem podstawimy $g(s) = K(s, t_0)$; byłoby wtedy dla każdego t_0 tożsamościowo $K(s, t_0) = 0$.

Jeżeli dla jakiego skaźnika jest $\beta^{(1)}_\mu(s) \not\equiv 0$, to można wykazać, że wtedy jest ogólnie $\beta^N_\mu(s) \not\equiv 0$. Jeżeli mianowicie $N_0 > 1$ jest p i e r w s z y m skaźnikiem, dla którego znika funkcya $\beta^{N_0}_\mu(s)$, to znika ona także dla N_0+1, jedna z liczb N_0, N_0+1 jest parzysta $= 2M \geqq 2$, mamy zatem:

$$0 = \int K^{2M_0}(s,t)\,\beta_\mu\,dt; \tag{49a}$$

$$0 = \iint K^{2M_0}(s,t)\,\beta_\mu(t)\,dt\,.\,\beta_\mu(s)\,ds$$

$$= \iiint K^{M_0}(s,r)\,K^{M_0}(r,t)\,\beta_\mu(s)\,\beta_\mu(t)\,ds\,dt\,dr \tag{49b}$$

$$= \int\left\{\int K^{M_0}(r;t)\,\beta_\mu(t)\,dt\right\}^2 dr;$$

$$\int K^{M_0}(r,t)\,\beta_\mu(t)\,dt = 0. \tag{49c}$$

Dla $N_0 = 2$, $M_0 = 1$ ostatnie równanie jest sprzeczne z przyjęciem $\beta^{(1)}_\mu(s) \not\equiv 0$, dla $N_0 > 2$, $M_0 < N_0$ z innem przyjęciem o liczbie N_0, jako n a j m n i e j s z y m skaźniku o żądanej własności; ze związku więc $\beta^{(1)}_\mu(s) \not\equiv 0$ wynika istotnie wogóle $\beta^{(N)}_\mu(s) \not\equiv 0$. Dokładniej, według twierdzeń H i l b e r t a-S c h m i d t a, jest:

$$\beta^{(1)}_\mu(s) = \sum_{\nu}^{1\ldots\infty}\frac{c_{\mu\nu}\,\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}, \tag{50a}$$

$$c_{\mu\nu} = \lambda_\nu\int \beta^{(1)}_\mu(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \lambda_\nu\iint K(t,r)\,\beta_\mu(r)\,\varphi_\nu(t)\,dr\,dt, \tag{50b}$$

gdzie pierwszy szereg po stronie prawej jest zbieżny jednostajnie; a stąd wogóle, na mocy związków (42b), (9a) będzie:

$$\beta^{(N)}_\mu(s) = \sum_{\nu}^{1\ldots\infty}\frac{c_{\mu\nu}\,\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^N}, \tag{51a}$$

$$c_{\mu\nu} = \int \beta_\mu(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt. \tag{51b}$$

Ostatni wzór stosuje się zresztą i do $\beta_\mu^{(1)}(s) \mp 0$, wtedy dla każdego ν jest wprost $c_{\mu\nu} = 0$ (Schmidt).

Z wzorami zasadniczemi (51a) w razie skaźników parzystych postępujemy zupełnie analogicznie jak z wzorami dla $K^{(2M)}$ (§ 2); przez ortogonalizacyę i normowanie ciągów $\beta_1^{(2M)}(s)$, $\beta_2^{(2M)}(s), \ldots,$ — odwracając uwagę od ewentualnych zer — otrzymujemy zbieżność jednostajną ku układowi funkcyj własnych dla $K^2(s, t)$:

$$\alpha_1(s), \quad \alpha_2(s), \ldots, \quad \alpha_m(s), \ldots, \tag{52}$$

należących do wartości właściwych

$$\lambda^2_{\nu_1}, \quad \lambda^2_{\nu_2}, \ldots, \quad \lambda^2_{\nu_m}, \ldots \tag{53}$$

i pozostaje wykazać, że można w ten sposób otrzymać wszystkie wartości właściwe i wszystkie niezależne funkcye właściwe.

Niechaj znów do wartości właściwych $\lambda^2_1 = \ldots = \lambda^2_{n_1}$ $(< \lambda^2_{n_1+1})$ należą funkcye właściwe niezależne $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_{n_1}(s)$. Musi istnieć skaźnik μ_1 najmniejszy, dla którego

$$\sum_\nu^{1 \ldots n_1} c_\nu^2 \mp 0, \tag{54}$$

inaczej bowiem byłyby funkcye $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_{n_1}(s)$ za pomocą wzoru (56b) ortogonalne do wszystkich funkcyj $\beta_\mu(s)$ i znikały tożsamościowo, co jest niemożliwe. Dla rozważanego skaźnika μ_1 powstaje znów, podobnie jak w § 2, funkcya właściwa $\alpha_{\mu_1}(s)$, należąca do λ_1^2, poczem można położyć $\overline{\varphi}_1(s) = \alpha_{\mu_1}(s)$. Jeżeli więc λ_2^2 wogóle istnieje, musi wtedy istnieć drugi skaźnik najmniejszy μ_2, dla którego przy $n_1 > 1$ jest

$$\sum_{\nu_1 < \nu_2}^{1 \ldots n_1} \begin{vmatrix} c_{\mu_1\nu_1} & c_{\mu_1\nu_2} \\ c_{\mu_2\nu_1} & c_{\mu_2\nu_2} \end{vmatrix}^2 \mp 0, \tag{55}$$

dla $n_1 = 1$ zaś, $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 = \ldots = \lambda_{n_2}^2$ $(< \lambda^2_{n_2+1})$,

albo:

$$\text{dla} \quad \mu_2 < \mu_1, \quad \sum_{\nu_2}^{2 \ldots n_2} c^2_{\mu_2\nu_2} \mp 0, \tag{56}$$

albo też:

$$\text{dla} \quad \mu_2 > \mu_1, \quad \sum_{\nu_2}^{2 \ldots n} \begin{vmatrix} c_{\mu_1 1} & c_{\mu_1\nu_2} \\ c_{\mu_2 1} & c_{\mu_2\nu_2} \end{vmatrix}^2 \mp 0; \tag{57}$$

inaczej bowiem albo znikałyby funkcye właściwe, należące do λ_2^2, albo też — ponieważ dla wszystkich μ ze znikania wyrażeń (55), (57) wynika ogólna zależność liniowa spółczynników $c_{\mu\nu_2}$ od spółczynników $c_{\mu_1\nu_2}$ — powstałaby na mocy związków (51b) [1] także zależność liniowa każdej funkcyi $\overline{\varphi}_\mu(s)$ od $\overline{\varphi}_1(s)$, co jest niemożliwe. Dla uważanego skaźnika μ_2 otrzymujemy tedy funkcyę właściwą $\alpha_{\mu_2}(s) = \overline{\varphi}_2(s)$ jądra K^2, należącą do λ_2^2 i t. d.

Po tych wywodach niechaj nam będzie wolno streścić wprost bez szczegółowych dowodów wyniki ostateczne naszych badań. [2]

§ 5. Rezultat główny.

Niechaj

$$t_1, \quad t_2, \ldots, \quad t_\mu \ldots$$

będzie oznaczonym, przeliczalnie nieskończonym, ciągiem wartości zmiennej t, pokrywającym wszędziegęsto dany skończony przedział $a \ldots b$ i niechaj będzie ogólnie $K^N(s, t)$ N-tym iterowanem jądrem w danym uważanym przedziale jądra ciągłego, symetrycznego $K(s, t)$. Ortogonalizując i normując układy

$$K^N(s, t_1), \quad K^N(s, t_2), \ldots, \quad K^N(s, t_\mu) \ldots, \tag{58}$$

uważane jako ciąg funkcyi zmiennej s i odwracając uwagę od ewentualnych zer, otrzymamy dla wykładników parzystych N zbieżność jednostajną ku ciągowi granicznemu

$$\alpha_1(s), \quad \alpha_2(s), \ldots, \quad \alpha_\mu(s), \tag{59}$$

dla nieparzystych zaś N zbieżność jednostajną ku ciągowi granicznemu

$$\alpha_1(s), \quad \alpha_2(s), \ldots, \quad \alpha_\mu(s), \ldots \tag{60}$$

Jest:

$$\int K(s, t)\, \alpha_\mu(t)\, dt = \frac{1}{|\lambda_\mu|}\, \alpha_\mu'(s), \tag{61a}$$

$$\int K(s, t)\, \alpha_\mu'(t)\, dt = \frac{1}{|\lambda_\mu|}\, \alpha_\mu(s), \tag{61b}$$

układ $\alpha'(s)$ powstaje przeto z układu $\alpha(s)$, jak i $\alpha(s)$ z $\alpha'(s)$, przez iterowanie względem $K(s, t)$ i normowanie.

Każdy z ciągów $\alpha(s)$, $\alpha'(s)$ daje układ zamknięty funkcyj właściwych dla pierwszego jądra iterowanego $K^2(s, t)$.

[1]) Dla skaźników N parzystych można położyć $\overline{\varphi}_\nu(s)$ zamiast $\varphi_\nu(s)$.

[2]) Porównaj notatkę autora w „Göttinger Nachrichten“, 1917.

W ciągu funkcyj średnich

$$\frac{\alpha_1(s) \pm \alpha_1'(s)}{2}, \quad \frac{\alpha_2(s) \pm \alpha_2'(s)}{2}, \ldots, \quad \frac{\alpha_\mu(s) \pm \alpha_\mu'(s)}{2}, \ldots \tag{62a}$$

można zawsze — odwracając uwagę od par $\alpha_{\mu_0}(s) = \alpha_{\mu_0}'(s) \equiv 0$ — dokonać takiego wyboru znaków, aby ciąg ten wypadł liniowo niezależnym. Jeżeli po takim wyborze układ ten zortogonalizujemy i znormujemy, otrzymamy zamknięty układ funkcyj właściwych danego jądra $K(s, t)$

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \ldots, \quad \varphi_\mu(s), \ldots, \tag{62b}$$

a przy pomocy wzoru

$$\int K(s, t)\, \varphi_\mu(t)\, dt = \frac{1}{\lambda_\mu} \varphi_\mu(s) \tag{63}$$

i wszystkie wartości właściwe tego jądra.

Takież wyniki otrzymamy, jeżeli zamiast ciągów iterowanych $K^N(s, t_\mu)$ występują ciągi iterowane $\beta_k^{(N)}(s)$, przyczem jest ogólnie

$$\beta_k^{(N)}(s) = \int K^N(s, t)\, \beta_k^{(0)}(t)\, dt = \int K(s, t)\, \beta_k^{(N-1)}(t)\, dt, \quad N \geqslant 1, \tag{64}$$

jeżeli za $\beta_k^{(0)}(s)$ weźmiemy jakikolwiek układ zupełny funkcyj uważanego przedziału. Układ funkcyj właściwych jest wtedy i tylko wtedy zupełny, jeżeli pierwszy ciąg $\beta_k^{(1)}(s)$ lub $K(s, t_\mu)$ jest zupełny.

Ważne zagadnienie niezmienników w teoryi symetrycznych równań całkowych zostało tym sposobem całkiem ogólnie i w zupełności rozwiązane.

Es sei

$$x' = P[x]$$

das Zeichen einer funktionalen Operation, die einen „Punkt" x im Raume von beliebig vielen Dimensionen oder in einem bestimmten Funktionenraume in einen anderen solchen „Punkt" überführt, und es sei dann die Frage nach den invarianten Elementen oder „Hauptaxen" einer solchen Transformation vorgelegt. Dann erweist es sich in vielen Fällen als nützlich, die Iterationen der gegebenen Operation nach dem Schema

$$x^{(N+1)} = P[x^{(N)}]$$

zu betrachten, die unter Umständen die vollständige Lösung des Problems zu geben imstande sind. Das einfachste Beispiel dieser Art liefert bei diskreten Variablen die Frage der Transformation einer vorgelegten reellen quadratischen Form auf ihre Hauptaxen, im Funktionenraume — die Zerlegung eines gegebenen symmetrischen Kernes nach seinen Eigenfunktionen.

Dass die Iterationen der der quadratischen Form zugeordneten linearen Substitution bei definiten Formen im allgemeinen zu einer kleinsten Hauptaxe führen, ist bekannt [1], und Herr E. Schmidt hat in einer grundlegenden Abhandlung [2] die Gültigkeit der entsprechenden Beweisführungen für die Bestimmung des kleinsten Eigenwertes und der zugehörigen Eigenfunktion für den definiten iterierten Kern $K^{(2)}$ bei reellen symmetrischen Integralgleichungen gezeigt. Nach Auffindung dieses ersten Resultats lässt sich eine Restform bzw. ein Restkern bilden, auf die das gleiche Prinzip wieder angewandt werden kann, wodurch aber zu jeder weiteren Hauptaxe bzw. Eigenfunktion ein neuer unendlicher Prozess nötig wird. Durch Einführung der zum gegebenen Problem gehörigen assozierten Kerne gelang es Herrn I. Schur [3] in weiterer Analogie zum algebraischen Formenproblem [4] für den definiten iterierten Kern $K^{(2)}$ die konsekutiven unendlichen Prozesse zu vermeiden und die kleinsten Produkte von je endlich vielen Eigenwerten unabhängig voneinander zu berechnen.

Indessen lassen sich tatsächlich schon durch eingehendere Untersuchung des ersten unendlichen Iterationsprozesses allein sämtliche Hauptaxen der ursprünglichen quadratischen Form direkt der Richtung und Grösse nach bestimmen, und analog hierzu auch sämtliche Eigenwerte und Eigenfunktionen eines beliebigen symmetrischen Kernes.

In den „Comptes Rendus" der Pariser Akademie [5] hat der Verfasser den Weg hierzu für definite Formen und Kerne ohne Beweis mitgeteilt. Die Lösung (I § 6, II § 5) und die Beweise (I §§ 4 5, II §§ 2—4) werden im folgenden zugleich für den beliebigen allgemeinsten Fall überhaupt gegeben, und sollen die Übertragung auf weitere Fragen dieser Art, insbesondere bei den nichtsymmetrischen Formen und Integralgleichungen, vorbereiten.

---

[1]) Vgl. z. B. die zusammenfassende Darstellung bei G. Kowalewski: „Determinantentheorie" (Leipzig 1909), § 197.

[2]) Dissertation (Göttingen 1905); Math. Ann. Bd. **63**.

[3]) Math. Ann. Bd. **67**.

[4]) Vgl. G. Rados, Math. Ann. **48**.

[5]) Jgg. 1912, 1913.

ERSTER TEIL. DIE QUADRATISCHEN FORMEN.

§ 1. Die Grundformeln.

Es sei im Raume von n Dimensionen die reelle quadratische Form [1]

$$\sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k \equiv C, \qquad c_{ki} = c_{ik}. \tag{1}$$

gegeben. Nach klassischen Sätzen, die wir hier als bewiesen annehmen, gibt es dann eine reelle orthogonale Transformation

$$x_i = \sum_p \alpha_{ip} \xi_p. \tag{2a}$$

$$\sum_\nu \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} = \sum_\nu \alpha_{\nu i} \alpha_{\nu k} = \delta_{ik} \begin{cases} = 0 & \text{für} \quad i \neq k, \\ = 1 & \text{für} \quad i = k, \end{cases} \tag{2b}$$

$$\xi_p = \sum_k \alpha_{kp} x_k, \tag{2c}$$

derart, dass man identisch erhält:

$$\sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k,p,q} c_{ik} \alpha_{ip} \alpha_{kq} \xi_p \xi_q = \sum_\nu \rho_\nu \xi_\nu^2, \tag{3}$$

und umgekehrt:

$$\sum_\nu \rho_\nu \xi_\nu^2 = \sum_{i,k,\nu} \rho_\nu \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} x_i x_k = \sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k. \tag{4}$$

Die Grössen ρ_ν sind dabei die notwendig reellen Wurzeln der zugehörigen Säkulargleichung, die in Determinanteform

$$| c_{ik} - \delta_{ik} \rho | = 0 \qquad \text{vgl. (2b)} \tag{5}$$

geschrieben werden kann, und die Grössen α_{ik} sind gegeben durch die Gleichungen

$$\sum_k c_{ik} \alpha_{k\nu} = \rho_\nu \alpha_{i\nu}. \tag{6}$$

Man setze nun allgemein

$$\sum_{p_1, \dots p_{N-1}} c_{ip_1} c_{p_1 p_2} \dots c_{p_{N-1} k} = c_{ik}^{(N)}, \tag{7}$$

sodass die $c_{ik}^{(N)}$ die Elemente der N-ten Potenz der Matrix $\| c_{ik} \|$ der gegebenen Form darstellen. Dann ergeben die vorstehenden Gleichungen durch Iteration:

[1]) Alle Summationen in diesem ersten Teil erstrecken sich, wo nichts anderes angegeben wird, auf die Indizes $1 \dots n$.

$$\sum_k c_{ik}^{(N)} \alpha_{k\nu} = \rho_\nu^N \alpha_{i\nu}; \tag{8a}$$

$$| c_{ik}^{(N)} - \delta_{ik} \rho^N | = 0; \qquad \rho = \rho_1, \dots \rho_n; \tag{8b}$$

$$\sum_{i,k} c_{ik}^{(N)} x_i x_k = \sum_{i,k,p,q} c_{ik}^{(N)} \alpha_{ip} \alpha_{kq} \xi_p \xi_q = \sum_\nu \rho_\nu^N \xi_\nu^2; \tag{8c}$$

$$\sum_\nu \rho_\nu^N \xi_\nu^2 = \sum_{\nu,i,k} \rho_i^N \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} x_i x_k = \sum_{ik} c_{ik}^{(N)} x_i x_k. \tag{8d}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgert man insbesondere die für uns fundamentale Beziehung:

$$c_{ik}^{(N)} = \sum_\nu \rho_i^N \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu}. \tag{9}$$

Neben den Elementen $c_{ik}^{(N)}$ der Potenzmatrix $\| c_{ik}^{(N)} \|$ und der Transformation $\| \alpha_{ik} \|$ betrachten wir noch deren Minoren von beliebiger Ordnung

$$c^{(N)}_{\substack{i_1, \dots, i_\mu \\ k_1, \dots, k_\mu}}, \qquad \alpha_{\substack{q_1, \dots, q_\mu \\ \nu_1, \dots, \nu_\mu}}.$$

Man erhält:

$$c^{(N)}_{\substack{i_1, \dots, i_\mu \\ k_1, \dots, k_\mu}} = \begin{vmatrix} c^{(N)}_{i_1 k_1} & \dots & c^{(N)}_{i_1 k_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c^{(N)}_{i_\mu k_1} & \dots & c^{(N)}_{i_\mu k_\mu} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_\nu \rho_\nu^N \alpha_{i_1 \nu} \alpha_{k_1 \nu} & \dots & \sum_\nu \rho_\nu^N \alpha_{i_1 \nu} \alpha_{k_\mu \nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_\nu \rho_\nu^N \alpha_{i_\mu \nu} \alpha_{k_1 \nu} & \dots & \sum_\nu \rho_\nu^N \alpha_{i_\mu \nu} \alpha_{k_\mu \nu} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\nu_1 \dots \nu_\mu} \rho_{\nu_1}^N \rho_{\nu_2}^N \dots \rho_{\nu_\mu}^N \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 \nu_1} \alpha_{k_1 \nu_1} & \dots & \alpha_{i_1 \nu_\mu} \alpha_{k_\mu \nu_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i_\mu \nu_1} \alpha_{k_1 \nu_1} & \dots & \alpha_{i_\mu \nu_\mu} \alpha_{k_\mu \nu_\mu} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$= \sum_{\nu_1 < \nu_2 \dots < \nu_\mu} \rho_{\nu_1}^N \rho_{\nu_2}^N \dots \rho_{\nu_\mu}^N \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 \nu_1} & \dots & \alpha_{i_1 \nu_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i_\mu \nu_\mu} & \dots & \alpha_{i_\mu \nu_\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{k_1 \nu_1} & \dots & \alpha_{k_1 \nu_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k_\mu \nu_1} & \dots & \alpha_{k_\mu \nu_\mu} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\nu_1 < \nu_2 \dots < \nu_\mu} \rho_{\nu_1}^N \dots \rho_{\nu_\mu}^N \alpha_{\substack{i_1 \dots i_\mu \\ \nu_1 \dots \nu_\mu}} \alpha_{\substack{k_1 \dots k_\mu \\ \nu_1 \dots \nu_\mu}}$$

§ 2. Geometrische Bemerkungen.

Alle im § 1 gegebenen Formeln lassen geometrische Deutung zu, die die folgenden Resultate besonders anschaulich gestalten. Die Vektoren $\alpha_\nu \equiv (\alpha_{1\nu}, \ldots, \alpha_{n\nu})$ [1] geben die Richtungen der Hauptaxen der Form C wieder, bzw. eines ihrer möglichen Systeme für den Fall des Vorhandenseins gleicher Wurzelwerte ρ_ν; jedes $\rho_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}$ stellt den reziproken Wert des (reellen) Quadrates λ_ν der zugehörigen (reellen oder rein imaginären) Hauptaxe des besonderen Repräsentanten $C = 1$ der gegebenen Form C..

Die Substitution

$$x^{(1)} = \sum_k c_{ik} x_k^{(0)} \tag{11}$$

kann dann folgendermassen projektiv durchgeführt werden. Zu einem gegebenen Punkt $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ konstruiere man [2] den zugehörigen Polarraum $R_{n-1}^{(0)}$ inbezug auf einen Repräsentanten der gegebenen Form $\sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k = C_0 = \text{const.}$ Die Gleichung dieses Polarraumes ist

$$\sum_i c_{ik} x_i x_k^{(0)} = C_0, \tag{12}$$

und dieser Raum besitzt nun inbezug auf den entsprechenden Repräsentanten der Einheitsform

$$\sum_i x_i^2 = C_0, \tag{13}$$

seinerseits den Pol $(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})$, der gerade durch die Gleichungen (11) definiert ist. Betrachtet man insbesondere unendlichferne Punkte, d. h. Richtungen $(x_1^{(0)} : \ldots : x_n^{(0)})$, so erhält man durch Polarisation die konjugierten Unterräume $\sum c_{ik} x_i x_k^{(0)} = 0$ und dann durch Orthogonalisation, d. h. erneute Polarisation inbezug auf die Einheitsform, die zu jenem Raume senkrechte Richtung $(x_1^{(1)} : \ldots : x_n^{(1)})$.

Das gesamte Problem der Auffindung der Hauptaxen bedeutet die Bestimmung des für die gegebene Form C und die Einheitsform E gemeinsamen Polaraxensystems oder Polarpolyeders, dessen eine Ecke sich hier im Nullpunkt befindet, während alle anderen im unendlichfernen Grundraum $R_{n-1}^{(0)}$ liegen und eben durch die Richtungen der Hauptaxen angegeben werden. Aus dieser Überlegung ersieht man, dass das Problem der gemeinsamen Transformation zweier quadratischen Formen $\sum c_{ik} x_i x_k \equiv C$, $\sum d_{ik} x_i x_k \equiv D$ auf eine Summe von Quadraten sich mit dem betrachteten wesentlich deckt, da die entsprechenden Polarisationen ihres rein graphischen Charakters wegen nicht an die spezielle metrische Einheitsform $\sum x_i^2 \equiv E$ und die rechtwinkligen Systeme von Koordinatenaxen gebunden sind. Mutatis mutandis gelten daher die weiteren Ausführungen implizite auch für die Substitutionen

$$\sum d_{ik} x_k' = \sum c_{ik} x_k, \tag{14}$$

und ihre Iterationen, und alle folgenden Grenzbetrachtungen bleiben dabei richtig, sobald die Form $\sum d_{ik} x_i x_k \equiv D$ definit ist, wodurch wieder alle Wurzeln der gemischten Säkulargleichung

$$| c_{ik} - d_{ik}\rho | = 0$$

reell ausfallen, ebenso wie die Richtungen der gemeinsamen Polaraxen (Weierstrass, Kronecker).

Geht man nun von einer der Koordinatenaxen $0 : \ldots : x_k : \ldots : 0$, als Anfangsrichtung aus, so erhält man nach erstmaliger Doppelpolarisation für $x_k = 1$ den Vektor $c_k \equiv (c_{1k}, \ldots, c_{nk})$, nach N-maliger Iteration — den Vektor $c_k^{(N)} \equiv (c_{1k}^{(N)}, \ldots, c_{nk}^{(N)})$. Die Matrix $\| C \|^N = \| c_{ik}^{(N)} \|$ stellt somit in ihren Kolonnen einfach die Iterationen der Koordinatenaxen dar. Irgenwelche μ Kolonnen in $\| c_{ik}^{(N)} \|$ stellen die N-te Iterationen aller entsprechenden Koordinatenaxen dar; ihre Minoren $c_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}$ (die k fest, die i in allen Kombinationen ohne Wiederholung genommen) bedeuten daher die höheren charakteristischen Koordinaten (Ebenenkoordinaten usf.) der zugehörigen Räume $R_\mu^{(N)}$ (Ebenen usf.) dar, die als die N-ten Iterationen der ursprünglichen Koordinatenaxenräume $R_\mu^{(0)}$ anzusprechen sind. Da das System der gegebenen Koordinatenaxen und — Räume in seiner Allgemeinheit geometrisch für die gegebene Form ohne Bedeutung ist, so können die weiteren Resultate auch auf jedes andere vollständige orthogonale Axensystem übertragen werden. Wenn

[1] Der Vektor α ist die Strecke vom Nullpunkt nach dem Punkt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de Länge und Richtung nach.

[2] In der Ebene s. B. sind diese Konstruktionen direkt durch das Lineal allein ausführbar, sobald die Zeutralkurve $C = C_0$ durch drei unabhängige Punkte gegeben ist, wenn das Zentrum und die unendlichferne Gerade dabei als bekannt vorausgesetzt werden.

aber von diesem System, wie dies hier der Fall sein wird (§ 3), zuerst nur eine der Axen, darauf eine durch diese Axe gehende Koordinatenebene, dann ein diese Ebene enthaltender Koordinatenraum $R_3^{(0)}$, usf. in Betracht kommen, so wird auch die Bedingung der Orthogonalität der Ausgangsrichtungen unwesentlich, und die gefundenen Resultate gelten für jedes vollständige System von Ausgangsvektoren $\beta_k = (\beta_{1k}, \ldots, \beta_{nk})$, $k = 1, \ldots, n$, uberhaupt, sobald dasselbe unabhängig ist, seine Determinante $B = |\beta_{ik}|$ also nicht verschwindet. Rechnerisch bedeutet dies, dass alle Überlegungen sich dann auf die Matrizen $\|C^N B\|$ statt $\|C^N\|$ beziehen würden; das allgemeine Element der N-ten Iteration wird dabei

$$c_{ik}^{(N)}(\beta) = \sum_m c_{im}^{(N)} \beta_{mk} = \sum_{\nu, m} \rho_\nu^N \alpha_{i\nu} \alpha_{m\nu} \beta_{mk}, \tag{16}$$

der allgemeine Minor —

$$c^{(N)}_{\substack{i_1, \ldots, i_\mu \\ k_1, \ldots, k_\mu}}(\beta) = \sum_{\substack{\nu_1 < \ldots < \nu_\mu \\ m_1 < \ldots < m_\mu}} \rho_{\nu_1}^N \ldots \rho_{\nu_\mu}^N \alpha_{\substack{i_1, \ldots, i_\mu \\ \nu_1, \ldots, \nu_\mu}} \alpha_{\substack{m_1, \ldots, m_\mu \\ \nu_1, \ldots, \nu_\mu}} \beta_{\substack{m_1, \ldots, m_\mu \\ k_1, \ldots, k_\mu}}.$$

§ 3. Die geraden Iterationen eines Strahls.

Untersucht man die Folge der Iterationen für unbegrenzt wachsende Exponenten N, so findet man eine Reihe bemerkenswerter Konvergenzresultate, die wir einfachheitshalber zunächst für die geraden $2M$-ten Iterationen ausführen wollen, die auch als die einfachen M-ten Iterationen der iterierten Form $C^{(2)} \equiv \sum c_{ik}^{(2)} x_i x_k$ betrachtet werden können.

Es sei

$$\rho_1^2 \geqslant \rho_2^2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n^2,$$

vorausgesetzt, und man habe genauer

$$\rho_1 = \ldots = \rho_{n_1}^2 > \rho_{n_1+1}^2 = \ldots = \rho_{n_2}^2 > \ldots > \rho_{n_\alpha+1}^2 = \ldots = \rho_n^2.$$

Es sei zunächst ferner die gegebene Form als regulär vorausgesetzt, also $\rho_n^2 > 0$. Man hat bei festem k:

$$c_{1k}^{(2M)} : \ldots : c_{nk}^{(2M)} = \sum_\nu \rho_\nu^{2M} \alpha_{1\nu} \alpha_{k\nu} : \ldots : \sum_\nu \rho_\nu^{2M} \alpha_{n\nu} \alpha_{k\nu}; \tag{18c}$$

$$c_{ik}^{(2M)} : c_{ik}^{(2M+2)} = \sum_\nu \rho_\nu^{2M} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} : \sum_\nu \rho_\nu^{2M+2} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu}; \quad (i = 1, \ldots n). \tag{18b}$$

Es möge zuerst wenigstens einer der Richtungskosinus $\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn_1}$ von Null verschieden sein, sodass die Ausgangsrichtung der Koordinaxe x_k nicht auf allen zu $\rho_1 = \ldots = \rho_{n_1}$ gehörenden Hauptaxen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}$ senkrecht steht. Dann kann nicht zugleich

$$\sum_{\nu=1\ldots n_1} \alpha_{2\nu} \alpha_{k\nu} = \ldots = \sum_{\nu=1\ldots n_1} \alpha_{n\nu} \alpha_{k\nu} = 0; \tag{19}$$

sein, da man daraus bei jedem festen $\nu_0 \leqslant n_1$ gegen die Voraussetzung

$$\sum_{\nu=1\ldots n_1}^{i=1\ldots n} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} \alpha_{i\nu_0} = \alpha_{k\nu_0} = 0. \tag{20}$$

erhalten würde. Es kommt daher $\rho_1^2 = \ldots = \rho_n^2$ in den gegebenen Gleichungen effektiv vor, eine Division durch $\rho_{n_1}^{2M}$ lässt die übrigen Glieder wegen der beliebig klein werdenden Faktoren $\left(\frac{\rho_{n_1+p}}{\rho_{n_1}}\right)^{2M}$ in der Grenze verschwinden, und man erhält

$$\lim_{M=\infty} c_{1k}^{(2M)} : \ldots : c_{nk}^{(2M)} = \sum_{\nu=1,\ldots n_1} \alpha_{1\nu} \alpha_{k\nu} : \ldots : \sum_{\nu=1,\ldots n_1} \alpha_{n\nu} \alpha_{k\nu}. \tag{21}$$

Die $(2M)$-Iterationen der Ausgangsrichtung konvergieren demnach gegen den durch die rechte Seite definierten Strahl α_0, dessen geometrische Bedeutung nun zu ergründen ist. Dieser Strahl gehört dem Raume R_{n_1} der gleichen kleinsten Hauptaxen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}$, da er linear durch sie ausgedrückt ist; folglich ist er selbst eine kleinste Hauptaxe der iterierten Form, da die Wahl jedes orthogonalen Systems in jenem Raume gestattet ist; genauer stellt α_0 die Projektion der Ausgangsaxe x_k auf den Hauptaxenraum R_{n_1} dar, da bei festem k die Lösung der Projektionsgleichungen

$$\xi_i = \sum_{\nu=1,\ldots n_1} \alpha_\nu \alpha_{i\nu}; \qquad \sum_i \alpha_{i\nu_0} \xi_i = \alpha_{k\nu_0} \qquad (\nu_0 = 1, \ldots n_0) \tag{22a}$$

explizite durch

$$\xi_i = \sum_{\nu=1,\ldots n_1} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu}. \tag{22b}$$

gegeben ist.

Betrachtet man daraufhin die Längen der iterierten Vektoren

$$l_k^{(N)} = +\sqrt{\sum_i c_{ik}^{(N)2}}; \qquad c_{ik}^{(N)} = \sum_\nu \rho_\nu^N \alpha_{i\nu} \alpha_{k\nu} \tag{23}$$

so findet man, dass der Faktor von $\rho_{n_1}^{2N}=\rho_1^{2N}$ in der Entwicklung von $l_k^{(N)}$ gleich $\sum\limits_i \Big(\sum\limits_{\nu=1..,\, n_1} \alpha_{i\nu}\,\alpha_{k\nu}\Big)^2$ ist, also nicht verschwindet; man erhält daher

$$\lim_{M=\infty} l_k^{(2M)} : l_k^{(2M+2)} = \frac{1}{c_1^{\,2}} = \lambda_1^{\,2} \tag{24}$$

d. h. die inbezug auf $C^{(2)}$ nacheinander iterierten Vektorenlängen ergeben Verhältnisse, die gegen das Quadrat der kleinsten Hauptaxe von $C^{(2)}$ konvergieren. [1]

Nun möge allgemeiner etwa α_{kq_0} der erste nicht verschwindende Richtungskosinus der Ausgangsaxe x_k inbezug auf das System der Hauptaxen α_q sein, und es sei $\rho_{q_0}=\rho_{n_{k_0}}$ der zugehörige Wurzelwert, der nicht mehr mit $\pm\rho_1$ übereinzustimmen braucht. Genau wie vorhin zeigt man dann, dass die geraden Iterationen wieder gegen eine Hauptaxe der iterierten Form $C^{(2)}$ konvergieren, und zwar gegen die Projektion der Ausgangsrichtung auf den Hauptaxenraum $R_{n_{k_0}-n_{k_0-1}}$, der zum Werte $\pm\rho_{q_0}$ gehört. Die Konvergenz findet also immer gegen eine kleinste der zur Ausgangsrichtung nicht orthogonalen Hauptaxen statt, und zwar gegen die Projektion dieser Ausgangsrichtung auf den Raum aller jenen gleichen kleinsten Hauptaxen.

In gleicher Weise konvergieren jetzt die Verhältnisse der aufeinanderfolgenden, inbezug auf $C^{(2)}$ iterierten Vektorenlängen $l_k^{(2M)} : l_k^{(2M+2)}$ gegen das Quadrat der zugehörigen Hauptaxe

$$\lambda_{q_0}^2 = \frac{1}{\rho_{q_0}^2}. \tag{25}$$

Man kann dabei die Frage nach den Verhältnissen der $c_{ik}^{(N)}$ selbst aufwerfen. Ist in der Formel (18b) für feste i, k $\rho_{n_{i_0}}$ der erste Wurzelwert, für den der zugehörige Faktor in c_{ik} von Null verschieden ist:

$$\sum_{\nu=n_{i_0-1}+1,..,\, n_{i_0}} \alpha_{i\nu}\,\alpha_{k\nu} \neq 0, \text{[2]} \tag{26}$$

[1] Die Formel (24) ist nicht homogen, da es die Ausgangsgleichung (1) nicht ist; man erhält homogene Resultate, wenn man von der Form ausgeht:

$$\sum \frac{c_{ik}}{c}\cdot\frac{x_i}{c}\cdot\frac{x_k}{c}=1, \qquad c=\text{const.}$$

[2] Aus (9) und $\rho_n^{\,2}>0$ ergibt sich, dass für hinreichend hohe N allgemein $c_{ik}^{(N)}\neq 0$ ist.

so ist offenbar

$$\lim_{M=\infty} c_{ik}^{(2M)} : c_{ik}^{(2M+2)} = \frac{1}{\rho_{n_{i_0}}^2} = \lambda_{n_{i_0}}^2; \tag{27}$$

wenigstens einmal also für irgendein $i=p_0$ erhält man demnach auch hier

$$\lim_{M=\infty} c_{p_0k}^{(2M)} : c_{p_0k}^{(2M+2)} = \frac{1}{\rho_{q_0}^2} = \lambda_{q_0}^2; \tag{28}$$

und es ist daher für alle $i=1,\dots n$ jedenfalls

$$\lim_{M=\infty} \inf\; c_{ik}^{(2M)} : c_{ik}^{(2M+2)} = \lambda_{q_0}^2. \tag{29}$$

Die geometrische Bedeutung von (26) ist die, dass die Projektionen der Ausgangsrichtunngen x_i, x_k auf den Raum $R_{n_{i_0}-n_{i_0-1}}$ der zu $\pm\rho_{n_{i_0}}$ gehörenden Hauptaxen nicht orthogonal zueinander sind; insbesondere muss dann aber als Orthogonalität bezeichnet werden, wenn eine dieser Projektionen sich selbst auf Null reduziert, die zugehörige Ausgangsrichtung also senkrecht auf dem Projektionsraum steht. Durch passende Wahl der Ausgangsrichtungen könnte man also alle Hauptaxen gewinnen — aber gerade diese Wahl bietet die Notwendigkeit, den Konvergenzprozess n-mal hintereinander zu erneuern.

Von besonderer Bedeutung ist, wie bekannt, der Summenwert

$$\sum_i c_{ii}^{(N)} = s^{(N)} = \sum_\nu \rho_\nu^N; \tag{30}$$

wie dies sofort aus der Gleichung (8) folgt; hier erhält man offenbar

$$\frac{s^{(2M)}}{s^{(2M+2)}} < \frac{s^{(2M-2)}}{s^{(2M)}},$$
$$\lim_{M=\infty} \frac{s^{(2M)}}{s^{(2M+2)}} = \frac{1}{\rho_1^{\,2}} = \lambda_1^{\,2} \tag{31}$$

(vgl.. Kowalewski, l. c.).

Untersucht man $c_{ik}^{(N)}(\beta)$ anstelle von $c_{ik}^{(N)}$, so hat man ebenso die Projektionen der Ausgangsrichtungen β_k zu nehmen; die Bedingung (26) ist dann entsprechend zu modifizieren:

$$\sum_{\nu=n_{i_0-1}+1,\dots\, n_{i_0}} \alpha_{i\nu}\,\alpha_{m\nu}\,\beta_{mk} \neq 0. \tag{32}$$

Orthogonalisiert und normiert man die Matrix $\| \beta_{ik} \|$ nach den Zeilen[1], d. h. addiert man zu jeder späteren Zeile lineare Aggregate der früheren derart, dass sie zu allen diesen früheren Zeilen orthogonal wird und dann durch Division die Länge 1 erhält — vgl. (33a), [2] — to erhält man eine neue Matrix $\| \beta^*_{ik} \|$, deren Elemente β^*_{ik} durch einfachste Operationen aus den β_{ik} gewonnen werden, und es ist dann

$$\sum_k \beta^*_{m\nu}\beta^*_{ik} = \beta_m \beta_i \delta_{mi} \quad \left. \begin{array}{lll} \delta_{mi} = 0 & \text{für} & m \neq i \\ \delta_{mi} = 1 & ,, & m = i \end{array} \right.$$

$$\beta_m = + \sqrt{\sum_k \beta^2_{mk}} = 1, \quad \beta_i = 1 \tag{33a}$$

$$s^{(N)}(\beta^*) = \sum_{ik} c^{(N)}_{ik}(\beta^*)\, \beta^*_{ik} = \sum_{\nu, m, i, k} \rho_\nu^N \alpha_{i\nu} \alpha_{m\nu} \beta^*_{mk} \beta^*_{ik} = \sum \rho_\nu^N \tag{33b}$$

$$\lim_{M=\infty} \frac{s^{(2M)}(\beta^*)}{s^{(2M+2)}(\beta^*)} = \frac{1}{\rho_1^2} = \lambda_1^2. \tag{33c}$$

§ 4. Die geraden Iterationen von Ebenen und Räumen.

Jeder lineare Teilraum $R_{\mu-1}$ geht durch die Iterationen in ebensolche Räume $R^{(N)}_{\mu-1}$ über; man findet dieselben durch die Iterationen von μ unabhängigen Punkten in $R_{\mu-1}$. Wird durch Verbindung mit dem Nullpunkt der untersuchte Raum zu einem Vektorraum R_μ erweitert, so geht derselbe nach der N-ten Iteration von μ unabhängigen Vektoren in einen Iterationsraum $R^{(N)}_\mu$ über. Wird insbesondere ein Koordinatenraum $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_\mu})$ iteriert, so wird die Lage seiner N-ten Iteration angegeben durch die charakteristischen höheren Koordinaten $c_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}$ — vgl. (10) — bei veränderlichen Zeilenindizes $i_1, \ldots, i_\mu$.

Nunmehr ergeben sich genau die gleichen Überlegungen, wie im § 3, inbezug auf die betrachteten höheren Räume und die Wurzelprodukte $\rho_{\nu_1}\rho_{\nu_2}\ldots\rho_{\nu_\mu}$ $(\nu_1 < \nu_2 \ldots < \nu_\mu)$. Man erhält über die inbezug auf $C^{(2)}$ iterierten

[1]) Alle sonstrigen Orthogonalisationen erfolgen hier (vgl. u.) nach den Kolonnen.

[2]) Die hohe Zweckmässigkeit dieses einfachen Prozesses ist besonders durch die bekannten Arbeiten der Herren Hilbert und Schmidt zutage getreten.

Koordinatenräume $R^{(2M)}_\mu \equiv (x^{(2M)}_{k_1}, \ldots, x^{(2M)}_{k_\mu})$ die folgenden Sätze, deren Beweis nach dem vorangegangenen nur formalen Schwierigkeiten begegnet.

A. Der normale Fall. [1]

1. Im allgemeinen konvergiert jede Kolonne von $\| C \|^{2M}$ gegen die Richtung einer kleinsten Axe der iterierten Grundform $C^{(2)}$, jedes Kolonnenpaar — gegen eine Ebene zweier kleinsten Axen, jedes System von μ festen Kolonnen gegen einen Raum R_μ der μ kleinsten Axen.

2. Durch Orthogonalisation der Potenzmatrizen $\| C \|^{2M}$ erhält man daher die Konvergenz gegen ein vollständiges System von n Hauptaxen der Form $C^{(2)}$, bzw. das einzige solche System im Falle seiner Eindeutigkeit (für $\rho_1^2 > \rho_2^2 > \ldots > \rho_n^2$), wobei die Richtung einer kleineren Hauptaxe vor der jeder grösseren gefunden wird.

3. Die Verhältnisse der aufeinanderfolgenden geraden iterierten Vektorenlängen $l^{(2M)}_k$ der einzelnen Kolonnen konvergieren im allgemeinen gegen die Grösse des Quadrates λ_1^2 der kleinsten Hauptaxe der Form $C^{(2)}$, die Verhältnisse der entsprechenden Flächengrössen

$$l^{(2M)}_{k_1 k_2} = + \sqrt{\sum_{i_1 < i_2} c^{(2M)^2}_{\substack{i_1 i_2 \\ k_1 k_2}}} \tag{34a}$$

— gegen die Grösse des Quadrates $\lambda_1^2 \lambda_2^2$ der kleinsten Hauptfläche, die Verhältnisse der aufeinanderfolgenden Rauminhalte

$$l^{(2M)}_{k_1 \ldots k_\mu} = + \sqrt{\sum_{i_1 < \ldots < i_\mu} c^{(2M)^2}_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}} \tag{34b}$$

endlich konvergieren ebenso gegen das Quadrat $\lambda_1^2 \ldots \lambda_\mu^2$ des kleinsten entsprechenden Hauptrauminhalts.

4. Durch Division der Inhaltsverhältnisse

$$\frac{l^{(2M)}_{k_1 \ldots k_\mu}}{l^{(2M)}_{k_1 \ldots k_{\mu-1}}} : \frac{l^{(2M+2)}_{k_1 \ldots k_\mu}}{l^{(2M+2)}_{k_1 \ldots k_{\mu-1}}} = \lambda^{(2M)^2}_\mu \tag{35}$$

erhält man daher die Konvergenz gegen die Grösse des Quadrates der μ-ten

[1]) Ob bei einer vorgeschriebenen Form C der normale Fall vorliegt, ist zunächst nicht bekannt: daher die Bedeutung der allgemeineren Sätze 5—8.

Hauptaxe λ_μ^2, sodass auch die Grössen der Hauptaxen nach wachsenden (bzw. nicht fallenden) Werten gefunden werden.

B. Die abweichenden Fälle.

Besondere orthogonale Ausgangslagen der Koordinatenaxen und Räume inbezug auf das System der Hauptaxen und ihrer Räume beeinflussen die vorigen Sätze in der Weise, dass die Reihenfolge der gefundenen Richtungen und Grössen eine andere werden kann. Die Art der eintretenden Modifikationen ist aus den Untersuchungen im § 3 ersichtlich, die dann entsprechend auf die geraden iterierten Ebenen und Räume zu übertragen sind.

C. Die allgemeinen Resultate.

5. Es sei

$$s_\mu^{(N)} = \sum_{i_1 \dots i_\mu} c^{(N)}_{i_1 \dots i_\mu}; \qquad \sum\nolimits_\mu^{(N)} = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_\mu \\ k_1 < \dots < k_\mu}} c^{(N)^2}_{\substack{i_1 \dots i_\mu \\ k_1 \dots k_\mu}}: \tag{36}$$

dann ist:

$$\lim_{M=\infty} s_\mu^{(2M)} : s_\mu^{(2M+2)} = \lim_{M=\infty} \sum\nolimits_\mu^{(M)} : \sum\nolimits_\mu^{(M+1)} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \dots \lambda_\mu^2, \tag{37}$$

$$\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \dots \leqslant \lambda_\mu^2$$

Dies war das bekannte Hauptresultat der Theorie in der früheren Literatur.[1]

6. Es ist ebenso bei festen k und beliebigen i immer:

$$\lim_{M=\infty} c^{(2M)}_{\substack{i_1 \dots i_\mu \\ k_1 \dots k_\mu}} : c^{(2M+2)}_{\substack{i_1 \dots i_\mu \\ k_1 \dots k_\mu}} = \lambda^2_{\nu_1'} \lambda^2_{\nu_2'} \dots \lambda^2_{\nu'_\mu}, \quad \text{(alle } \nu' \text{ verschieden)}^{2)} \tag{38a}$$

$$\lim_{M=\infty} l^{(2M)}_{k_1 \dots k_\mu} : l^{(2M+2)}_{k_1 \dots k_\mu} = \lambda^2_{\nu_1} \lambda^2_{\nu_2} \dots \lambda^2_{\nu_\mu}, \quad \text{(alle } \nu \text{ verschieden)} \tag{38b}$$

wobei die Reihenfolge der ν' von den Indizes i i k abhängt, diejenige der ν nur von den k allein; es ist $\nu_1' \geqslant \nu_1, \dots, \nu_\mu' \geqslant \nu_\mu$; wenigstens für eine Wahl dieser Indizes ist $\nu_1' = \nu_1, \dots, \nu_\mu' = \nu_\mu$; man findet genau die Reihenfolge $\nu_1' = \nu_1 = 1, \dots, \nu_\mu' = \nu_\mu = \mu$, wenn man überall lim inf anstatt des lim nimmt und alle Indexkombinationen durchläuft.

---

1) Vgl. I. Schur, l. c.

2) Dass im „normalen" Falle hier $\lambda_1^2 \dots \lambda_\mu^2$ entsteht, gibt Herr O. Perron (Math. Ann. **64**) an, ohne die allgemeinen Ausnahmefälle zu untersuchen.

7. Durch Orthogonalisation der geraden Potenzmatrizen $\| c_{ik}^{(2M)} \|$ nach ihren Kolonnen[1] erhält man für unbegrenzt wachsende M in diesen Kolonnen — d. h. in den Verhältnissen ihrer Elemente — die Konvergenz gegen die Richtungen eines vollständigen Systems der Hauptaxen für die iterierte Form $C^{(2)}$.

Durch Orthogonalisation und Normierung — vgl. (33a) — jener Kolonnen erhält man aus den $\| c_{ik}^{(2M)} \|$ in konvergenter Weise eine Grenzmatrix $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$, deren Kolonnen die Richtungskosinus dieses vollständigen Systems der Hauptaxen der Form $C^{(2)}$ liefern.

Durch einmalige Doppeliteration der Grenzmatrix $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$ entsteht eine neue Matrix

$$\| \mathfrak{A}_{ik} \| = \| c^{(2)}_{im} \| \cdot \| \mathfrak{a}_{mk} \|; \qquad \mathfrak{A}_{ik} = \sum_m c^{(2)}_{im} \mathfrak{a}_{mk} = \lambda^2_{\nu k} \mathfrak{a}_{ik}, \tag{39}$$

deren Kolonnen $\mathfrak{A}_k$ durch Multiplikation der $\mathfrak{a}_k$ mit den reziproken Quadraten der zugehörigen Hauptaxenlängen $\lambda_{\nu_k}^2$ gebildet sind[2]; man erhält so sämtliche diese Quadrate.

8. Es sei $B = \| \beta_{ik} \|$ die Matrix eines unabhängigen Systems ($|B| \neq 0$) von Vektoren β_k, und $\| c_{ik}^{(2M)} \|$ die $2M$-te Iteration dieses Systems inbezug auf die Form C [vgl. (16)].

Durch Orthogonalisation und Normierung der explizite gegebenen Matrizen $\| c_{ik}^{(2M)}(\beta) \|$ erhält man für unbegrenzt wachsende M in konvergenter Weise eine Grenzmatrix $\| \mathfrak{b}_{ik} \|$, deren Kolonnen ebenfalls die Richtungskosinus eines vollständigen System von Hauptaxen der iterierten Form $C^{(2)}$ angeben.

Durch einmalige Doppeliteration dieser Grenzmatrix entsteht eine neue Matrix

$$\| \mathfrak{B}_{ik} \| = \| c^{(2)}_{im} \| \; \| \mathfrak{b}_{mk} \|, \qquad \mathfrak{B}_{ik} = \sum_m c^{(2)}_{im} \mathfrak{b}_{mk}, \tag{40}$$

deren Kolonnen $\mathfrak{B}_k$ durch Multiplikation der zugehörigen $\mathfrak{b}_k$ mit den rezi-

---

1) Oder Zeilen, was jedoch für die Verallgemeinerung bei $\| c_{ik}(\beta) \|$ ungünstig wäre.

2) Die Reihenfolge der Indizes ν ist die gleiche, wie bei Satz 6.

proken Quadraten der zugehörigen Hauptaxenlängen $\lambda^2_{\nu_k}$ gebildet sind. Man erhält daraus sämtliche diese Quadrate.

Dieses so einfache allgemeine und vollständige Resultat scheint, ebenso wie die vorhergehenden Sätze 6, 7, vor der Angabe durch den Verfasser (l. c.) in der früheren Literatur nicht bekannt gewesen zu sein.

§ 5. Die Hauptaxen beliebiger Formen.

Die oben (§§ 3—4) gefundenen Resultate betreffen die Folge aller Iterationen der definiten Form $C^{(2)}$ und lassen sich ebenso für alle Iterationen einer beliebigen definiten Form überhaupt aussprechen. Im Folgenden soll nun eine Erweiterung dieser Resultate gegeben werden, die bei jeder vorgelegten reellen quadratischen Form C eindeutig Richtungen und Längen aller Hauptaxen durch einen einzigen unendlichen Grenzprozess liefert.

Es sei zunächst die betrachtete Form C immer noch regulär gedacht ($\rho_\nu^2 > 0$). Befinden sich nun unter den Wurzeln ρ_ν keine entgegengesetzt gleichen, so lassen sich an der Hand der Formeln (9)—(10) die früheren Sätze auf alle Iterationen $\| C \|^N$ übertragen, wenn man statt ρ_ν^2, λ_ν^2, $2M$, $2M+2$ jetzt ρ_ν, λ_ν,[1] N, $N+1$ schreibt. Die Hauptsätze 7, 8 erleiden aber, wie man dabei sieht, die folgende Modifikation.

Die geraden Potenzmatrizen, orthogonalisiert und normiert, konvergieren dann wieder gegen die Grenzmatrix $\| \alpha_{ik} \|$ einer orthogonalen Transformation inbezug auf ein vollständiges System von Hauptaxen der iterierten Form $C^{(2)}$ und der ursprünglichen Form C selbst; die ungeraden Potenzmatrizen aber ergeben, da die Normierung immer mit positiven Grössen zu geschehen hat, in gleicher Weise eine orthogonale Grenzmatrix

$$\| \alpha_{ik}' \| = \| \alpha_{ik} \,.\, \operatorname{sign} \lambda_k \| , \tag{41}$$

wo $\operatorname{sign} \lambda_k$ gleich $+1$ für positive, -1 für negative λ_k ist; die rein imaginären Hauptaxen der gegebenen Form erhalten also dabei die entgegengesetzte Richtung. Es ist ferner identisch

$$\| c_{im} \| \,.\, \| \alpha_{mk} \| = \| \rho_{\nu_k} \, \alpha_{ik} \| , \tag{42}$$

wodurch alle Axenquadrate $\lambda_{\nu_k} = \dfrac{1}{\rho_{\nu_k}}$ erhalten werden. Durch Normierung der Kolonnen rechtsstehenden Matrix mit den absoluten Werten $| \rho_{\nu_k} |$ erhält man übrigens daraus die „ungerade" Grenzmatrix $\| \alpha'_{ik} \|$, für die also kein neuer Grenzprozess nötig ist. Bei definiten Formen gelten alle hier gegebenen Ausführungen ebenfalls, nur ist dann eben immer $| \rho_\nu | = \rho_\nu$, $\operatorname{sign} \rho_\nu = +1$, $\| \alpha'_{ik} \| = \| \alpha_{ik} \|$.

[1] In (38b) müssen die absoluten Werte $| \lambda_\nu |$ dafür genommen werden.

Wesentlich kompliziertere Verhältnisse entstehen, wenn sich unter den gesuchten Wurzeln ρ_ν beliebige viele Teilgruppen von entgegengesetzt gleichen Werten befinden können. Aus den Hauptformeln (9)—(10) ersieht man dann, dass nunmehr die Verhältnisse

$$\lim_{N=\infty} c^{(N)}_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} : c^{(N+1)}_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}$$

überhaupt nicht mehr zu existieren brauchen. Bei festen i, k erhält man vielmehr für gerade N die Konvergenz gegen eine Grösse $L_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}$, für ungerade — gegen eine Grösse $L'_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}}$; es ist zwar hier in „normalen" Fällen allerdings

$$L'_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} = L_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} = \lambda_{\nu_1'} \lambda_{\nu_2'} , \; \ldots \; \lambda_{\nu'_\mu} \tag{43a}$$

[vgl. (38a)]; im allgemeinsten Falle aber ist nur

$$L'_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} L_{\substack{i_1 \ldots i_\mu \\ k_1 \ldots k_\mu}} = \lambda^2_{\nu_1'} \lambda^2_{\nu_2'} \ldots \lambda^2_{\nu'_\mu} . \tag{43b}$$

gesichert. Dagegen lässt sich die modifizierte Formel (38b)

$$\lim_{N=\infty} l^{(N)}_{k_1 \ldots k_\mu} : l^{(N+1)}_{k_1 \ldots k_\mu} = | \lambda_{\nu_1} \,.\, \lambda_{\nu_2} \ldots \lambda_{\nu_\mu} | . \tag{44}$$

aufrechterhalten.

Auch die Konvergenz der iterierten Strahlenrichtungen $\beta^{(N)}$ lässt sich nicht mehr allgemein aufrechterhalten, und a fortiori gilt dies für die iterierten Ebenen und höheren Räume. Es konvergieren zwar die geraden iterierten Richtungen für sich allein, und ebenso die ungeraden; aber die beiden Grenzrichtungen fallen im allgemeinen nicht mehr zusammen. Gleichwohl gibt es auch dabei die Möglichkeit, das Hauptaxenproblem eindeutig zu erledigen.

Die geraden Potenzmatrizen $\| c^{(2M)}_{ik} \|$ ergeben jedenfalls wieder durch Orthogonalisation und Normierung eine Grenzmatrix $\| \alpha_{ik} \|$ für ein vollständiges System von Hauptaxen der iterierten Form $C^{(2)}$. Die ungeraden Potenzmatrizen $\| c^{(2M+1)}_{ik} \|$ können wegen der Identitäten

$$\| c^{(2M+1)}_{ik} \| = \| c^{(2M)}_{im} \| \,.\, \| c_{mk} \| \tag{45}$$

als die geraden Iterationen des Ausgangssystems von unabhängigen Vektoren

$$\mathfrak{b}_k \equiv c_k \equiv (c_{1k}, \ldots, c_{nk}) \tag{46}$$

inbezug auf die iterierte Form $C^{(2)}$ angesehen werden; sie liefern daher (Satz 8) durch Orthogonalisation und Normierung eine Grenzmatrix $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$, die ebenfalls zu einem voltständigen System von Hauptaxen der iterierten Form gehört. Bevor wir zeigen, wie aus den beiden Grundmatrizen $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$, $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$, die ganz verschiedene Richtungen liefern können und dann keine Hauptaxen für die ursprüngliche Form darstellen, ein vollständiges System solcher Hauptaxen erhalten wird, wollen wir zuerst feststellen, dass man $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$ aus $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$ direkt, d. h. ohne den zweiten Grenzprozess für die ungeraden Iterationen, gewinnen kann. Es möge $\| \mathfrak{a}_{ik}^{(2M)} \|$ die orthogonalisierte und normierten Matrix aus $\| c_{ik}^{(2M)} \|$ bedeuten. Aus der Identität

$$\| c_{ik}^{(2M+1)} \| = \| c_{im} \| \cdot \| c_{mk}^{(2M)} \| \tag{47}$$

folgt, nach Definition dieser Operationen, dass die Orthogonalisierung und Normierung von $\| c_{ik}^{(2M+1)} \|$ das gleiche Resultat liefert, wie diejenige von

$$\| \mathfrak{A}_{ik}^{(2M+1)} \| = \| c_{im} \| \cdot \| \mathfrak{a}_{mk}^{(2M)} \| \,. \tag{48}$$

Geht man zur Grenze über, so folgt daraus, dass $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$ durch Orthogonalisation und Normierung von

$$\| \mathfrak{A}'_{ik} \| = \| c_{im} \| \cdot \| \mathfrak{a}_{ik} \| \,. \tag{49}$$

entsteht. Nun ist aber die Matrix $\| \mathfrak{A}'_{ik} \|$ bereits von selbst orthogonal, denn man hat identisch

$$\sum_i \mathfrak{A}'_{ip} \mathfrak{A}'_{iq} = \sum_{i,\,l,\,m} c_{il}\, \mathfrak{a}_{lp}\, c_{im}\, \mathfrak{a}_{mq} = \sum_{l,\,m} c_{lm}^{(2)}\, \mathfrak{a}_{lp}\, \mathfrak{a}_{mq}\,, \tag{50}$$

$$\sum_m c_{lm}^{(2)}\, \mathfrak{a}_{mq} = \rho_{\nu_q}^2\, \mathfrak{a}_{lq}. \qquad \text{(laut Satz 7)} \tag{51}$$

folglich

$$\sum_i \mathfrak{A}'_{ip} \mathfrak{A}'_{iq} = \sum_i \rho^2_{\nu_q}\, \mathfrak{a}_{lp}\, \mathfrak{a}_{lq} = \rho^2_{\nu_q}\, \delta_{pq}. \tag{52}$$

Nicht nur ist somit die Orthogonalität erwiesen, sondern man sieht, dass zur Normierung von $\| \mathfrak{A}'_{ik} \|$ allgemein die k-te Kolonne mit $| \rho_{\nu_k} |$ zu dividieren ist, worauf also die ungerade Grenzmatrix $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$ entsteht. Wir schreiben jetzt einfachheitshalber ρ_k', λ_k' statt ρ_{ν_k}, λ_{ν_k}; man hat dann allgemein:

$$\sum_m c_{im}\, \mathfrak{a}_{mk} = | \rho_k' |\, \mathfrak{a}'_{ik}; \tag{53a}$$

$$\sum_m c_{il}^{(2)}\, \mathfrak{a}_{lk} = \rho_k'^2\, \mathfrak{a}_{ik} = | \rho_k' | \sum_m c_{im}\, \mathfrak{a}'_{mk}; \tag{53b}$$

$$\sum_m c_{im}\, \mathfrak{a}'_{mk} = | \rho_k' |\, \mathfrak{a}_{ik}. \tag{53c}$$

Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, dass die Formeln (48) —(53) für die Matrix $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$ jedes vollständigen Systems von Hauptaxen der Form $C^{(2)}$ und die daraus abgeleiteten Matrizen $\| \mathfrak{A}'_{ik} \|$, $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$ gelten, wie sich aus dem gegebenen Beweis selbst ergibt.

Drei Fälle sind jetzt für ein festes k zu unterscheiden: a) Entweder (bei definiten Formen immer) ist bei allen $i=1, \ldots, n$ beständig $\mathfrak{a}'_{ik} = \mathfrak{a}_{ik}$; dann gibt die Kolonne $\mathfrak{a}_k$ die Richtung einer Hauptaxe mit dem Längenquadrat $\lambda_k' = \frac{1}{\rho_k'} = \frac{1}{|\rho_k'|}$; b) Oder es ist ebenso $\mathfrak{a}'_{ik} = -\mathfrak{a}_{ik}$; dann hat man in $\mathfrak{a}_k$ wieder die Richtung einer Hauptaxe mit dem Längenquadrat $\lambda_k' = \frac{1}{\rho_k} = \frac{-1}{|\rho_k'|}$, c) Oder es sind endlich die Richtungen $\mathfrak{a}_{ik}$ und $\mathfrak{a}'_{ik}$ total verschieden, was nur möglich ist, wenn sowohl $|\rho_k'|$, als auch $-|\rho_k'|$ Wurzeln der charakteristischen Säkulargleichung (5) sind. Mann erhält jetzt aus (53a) i (53c):

$$\begin{aligned} \sum_m c_{im} \frac{\mathfrak{a}_{mk} + \mathfrak{a}'_{mk}}{2} &= |\rho_k'| \frac{\mathfrak{a}_{ik} + \mathfrak{a}'_{ik}}{2}, \\ \sum_m c_{im} \frac{\mathfrak{a}_{mk} - \mathfrak{a}'_{mk}}{2} &= -|\rho_k'| \frac{\mathfrak{a}_{ik} - \mathfrak{a}'_{ik}}{2}. \end{aligned} \tag{54}$$

Es gibt also der Vektor $\mathfrak{a}_k^{**} = \frac{\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k'}{2}$ die Richtung einer Hauptaxe der ursprünglichen Form C mit dem Längenquadrat der reziproken Wurzel $\lambda_k' = \frac{1}{|\rho_k'|}$; ferner gibt der Vektor $\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_k'}{2}$ die Richtung einer anderen Hauptaxe der ursprünglichen Form C mit dem Längenquadrat $\lambda_k' = \frac{-1}{|\rho_k'|}$.

Dieses allgemeine Resultat ist aber bei allen Formen richtig, insofern als es im gewissen Sinne auch in den beiden früher betrachteten Fällen gilt. In Falle a) ist nämlich $\mathfrak{a}_k^{**} = \frac{\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k'}{2}$ eine Hauptaxe von C für die richtige Wurzel $\rho_k' = |\rho_k'|$, während der Vektor $\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_k'}{2} \equiv 0$ unbrauchbar wird; im Falle b) dagegen liefert $\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_k'}{2}$ oder der entgegengesetze Vektor $-\mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k' - \mathfrak{a}_k}{2}$ eine Hauptaxe von C für die richtige Wurzel $\rho_k' = -|\rho_k'|$, während hier der Vektor $\mathfrak{a}_k^{**} = \frac{\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k'}{2} \equiv 0$ unbrauchbar ist; nur im Falle c) stimmen beide Antworten. Trifft man die Vereinbarung, dass jedesmal nur eine, und zwar natürlich keine unbrauchbare Lösung gewählt werden möge (im Falle c ist die Wahl gleichgültig), so gewinnt man dadurch also in allen erdenklichen Fällen eine Hauptaxe der ursprünglichen reellen (regulären) Form C der Richtung und der Länge nach.

Die Vektoren $\mathfrak{a}_k$ und $\mathfrak{a}_k'$ haben nach Definition die Länge 1, infolgegessen stellen die Hauptaxenrichtungen

$$\mathfrak{a}_k^{**} = \frac{\mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k'}{2}, \qquad \mathfrak{a}_k^* = \frac{\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_k'}{2} \tag{55}$$

einfach die beiden Winkelhalbierenden von $\mathfrak{a}_k$ i $\mathfrak{a}_k'$ dar, die sich in den Fällen a), b) nur auf die eine vorhandene reduzieren. Die geraden und die ungeraden Iterationen eines beliebigen Strahls inbezug auf eine gegebene Form C können also zwar nach zwei verschiedenen Richtungen konvergieren (Fall c); dann sind aber die Winkelhalbierenden dieser beiden Richtungen sicherlich Hauptaxen der Form für entgegengesetzt gleiche Längenquadrate: die direkte[1] für den positiven, die zu ihr senkrechte für den negativen Wert.

Man wird jetzt vermuten, dass auch für die geraden und ungeraden Iterationen von Ebenen und höheren Räumen ein gleiches gilt, und daraus die endgültige Lösung suchen.

Wir geben die Bestätigung dieser Vermutung durch die Bestimmung dieser endgültigen Lösung selbst. Das Vefahren zur Gewinnung des gesuchten „Mittelsystems" aus den Grenzmatrizen $\| \mathfrak{a}_{ik} \|$, $\| \mathfrak{a}'_{ik} \|$ möge die Ausgleichung dieser beiden Systeme heissen. Wir behaupten zunächst den folgenden Satz:

Sind

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n \quad \text{i} \quad \mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots \mathfrak{a}_n'$$

[1]) Die Richtungen für die iterierten Punkte sind auf ihren Strahlen gegeben.

zwei Systeme von unabhängigen Vektoren, so ist es immer möglich, für die Mittelvektoren

$$\frac{\mathfrak{a}_1 \pm \mathfrak{a}_1'}{2}, \quad \frac{\mathfrak{a}_2 \pm \mathfrak{a}_2'}{2}, \ldots, \quad \frac{\mathfrak{a}_n \pm \mathfrak{a}_n'}{2}$$

die Wahl des Vorzeichens jedesmal so zu treffen, dass die gewählten Vektoren

$$\widehat{\mathfrak{a}}_1, \quad \widehat{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \quad \widehat{\mathfrak{a}}_n$$

wieder ein unabhängiges System bilden.

Man betrachte zum Beweise zuerst die beiden Systeme

$$\frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1'}{2}, \quad \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \quad \text{i} \quad \frac{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1'}{2}, \quad \mathfrak{a}_2, \ldots, \quad \mathfrak{a}_n.$$

Die Mittelvektoren $\frac{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_1'}{2}$, $\frac{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_1'}{2}$ können nicht beide im Teilraume der Vektoren $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ liegen, da sonst der durch Addition jener Mittelvektoren entstehende Vektor $\mathfrak{a}_1$ gegen die ursprüngliche Annahme der Unabhängigkeit ebenfalls in Teilraume von $\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ liegen würde. Aus demselben Grunde kann nach erfolgter richtiger Wahl von $\widehat{\mathfrak{a}}_1$, bei der das System $\widehat{\mathfrak{a}}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ unabhängig bleibt, nur höchstens eines der beiden Systeme

$$\widehat{\mathfrak{a}}_1, \quad \frac{\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_2'}{2}, \ldots \mathfrak{a}_n \quad \text{i} \quad \widehat{\mathfrak{a}}_1, \quad \frac{\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_2'}{2}, \ldots \mathfrak{a}_n$$

abhängig ausfallen. In gleicher Weise kann man nun weiter fortfahren, bis alle betrachteten Vektorenpaare ausgeglichen sind, und ein unabhängiges System von Mittelvektoren $\widehat{\mathfrak{a}}_1, \widehat{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{a}}_n$ entsteht. Jeder dieser Mittelvektoren gibt nach dem Vorangegangenen die Richtung einer Hauptaxe der ursprünglichen Form C. Die zu zwei verschiedenen Wurzeln gehörenden Hauptaxen sind von selbst notwendig zueinander orthogonal; die zu gleichen ρ_ν gehörenden Hauptaxen bilden einen vollen zu ρ_ν gehörenden Teilraum, wobei die Orthogonalisation eines beliebigen in diesem Teilraum vollständigen Systems wieder zu einem solchen vollständigen System führt. Die Orthogonalisation der gefundenen Mittelvektoren $\widehat{\mathfrak{a}}_1, \widehat{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \widehat{\mathfrak{a}}_n$ führt also zu einem vollständigen orthogonalen System von Hauptaxen der ursprünglichen Form C überhaupt; die Orthogonalisation und Normierung ergibt eine Matrix $\| \widehat{\mathfrak{a}}_{ik} \|$, die das Problem der orthogonalen Transformation für die ursprüngliche Form C vollständig löst. Die Wurzeln ρ_k' erhält man sämtlich durch die Iteration inbezug auf C:

$$\| c_{im} \| \cdot \| \widehat{\mathfrak{a}}_{mk} \| = \| \rho_k' \widehat{\mathfrak{a}}_{ik} \|. \tag{56}$$

§ 6. Das Hauptresultat.

Wir können nunmehr die gewonnenen Ergebnisse folgendermassen zusammenfassen.

Es sei eine beliebige reelle und reguläre quadratische Form $\Sigma c_{ik} x_i x_k = C$ im Raume von n Dimensionen gegeben. Die geraden Iterationen ihrer Matrix konvergieren nach Orthogonalisation und Normierung gegen eine Grenzmatrix $\|\alpha_{ik}\|$, die ungeraden ebenso — gegen eine Grenzmatrix $\|\alpha'_{ik}\|$.

Man hat (53):

$$\sum c_{im}\alpha_{mk} = |\rho_k'|\,\alpha'_{ik},$$

$$\sum c_{ik}\alpha'_{mk} = |\rho_k'|\,\alpha_{ik},$$

worin die $|\rho_k'|$ die absoluten Werte aller Wurzeln der charakteristischen Säkulargleichung (5)

$$|c_{ik} - \delta_{ik}\rho| = 0.$$

durchlaufen. Es kann — durch Iteration nach C und Normierung der Kolonnen k mit $|\rho_k'|$ — jede der beiden Grenzmatrizen aus der anderen mit Hilfe eines endlichen Prozesses gewonnen werden. Man bilde nunmehr die Folge der n Vektorenpaare:

$$\frac{\alpha_1 \pm \alpha_1'}{2}, \ldots, \quad \frac{\alpha_n \pm \alpha_n'}{2},$$

und wähle, was immer (nicht notwendig eindeutig) möglich ist, aus jedem Paare einen solchen Vektor heraus, dass er von allen früheren unabhängig, d. h. nicht durch ihre linearen Aggregate darstellbar sei. Die Matrix der so gewählten Vektorem $\hat{\alpha}_k$, orthogonalisiert und normiert, ergibt in den Zeilen die Matrix $\|\hat{\alpha}_{ik}\|$ einer orthogonalen Transformation der gegebenen Form C auf ihre Hauptaxen, und in den Kolonnen — die Richtungen dieser Hauptaxen selbst. Die Iteration (56):

$$\|c_{im}\| \cdot \|\hat{\alpha}_{mk}\| = \|\rho_k' \hat{\alpha}_{ik}\|$$

ergibt sämtliche zugehörigen Wurzelwerte ρ_k' der vorliegenden Säkulargleichung (5), und damit die reziproken Längenquadrate der gewonnenen Hauptaxen.

Für die bisher ausgeschlossenen singulären Formen $\rho_n^2 = 0$ gilt aber das gegebene Hauptresultat ebenfalls, sobald man geringe Modifikationen

einführt. Bei der Orthogonalisation nämlich schon der ersten Potenzmatrix $\|c_{ik}\|$ verschwinden dabei bekanntlich identisch genau so viele (n_0) Kolonnen, als es verschwindende Wurzelwerte ρ_ν gibt, und die gleichnamigen Kolonnen verschwinden dann auch identisch in allen Potenzmatrizen $\|c_{ik}^{(N)}\|$. Wir müssen daher bei der Normierung die ensprechenden Kolonnen immer fortlassen, und definieren jetzt die „Normierung" eines Nullsystems

$$0,\ 0, \ldots,\ 0$$

in der Weise, dass wir es unverändert lassen. Auch in der Grenze ersetzen wir die n_0 singulären Kolonnen durch 0. Für die übrigbleibenden unabhängigen orthogonalen Kolonnen aber bleiben alle gegebenen Überlegungen mutatis mutandis durchaus bestehen; insbesondere gehören die nichtverschwindenden Vektoren der Grenzmatrizen $\|\alpha_{ik}\|$ und $\|\alpha'_{ik}\|$ jetzt zum gleichen Teilraume R_{n-n_0} der endlichen Hauptaxen. Die Wahl der Vektoren $\hat{\alpha}_k$ erfolgt beim Ausgleich nur dort, wo die Ausgangsvektoren α_k, α_k' nicht identisch verschwinden, und ist dann für diese genau so durchzuführen, wie im regulären Falle.

Der gegebene Hauptsatz gilt demnach auch für singuläre Formen, sobald man die entsprechend der Anzahl n_0 der Nullwurzeln $\rho_\nu = 0$ identisch verschwindenden n_0 Kolonnen in allen Matrizen und bei der Ausgleichung auslässt. Die zugehörigen unendlichen Hauptaxen werden zuletzt beliebig orthogonal zu den endlichen Hauptaxen gewählt.

Man erhält so in allen erdenklichen Fällen das vollständige System der Hauptaxen einer gegebenen quadratischen Form $\Sigma c_{ik} x_i x_k = C$ der Richtung und Grösse nach mit Hilfe eines einzigen unendlichen Prozesses, der Bildung der Grenzmatrix $\|\alpha_{ik}\|$ durch Orthogonalisation und Normierung der geraden Potenzmatrizen $\|c_{ik}^{(2M)}\|$.

§ 7. Verallgemeinerungen.

Wir sprachen bereits früher (§ 2) von der Möglichkeit einer sinngemässen Übertragung der gegebenen Resultate auf das kombinierte Problem zweier Formen C, D, wenn eine von ihnen definit ist. Bei anderer Gelegenheit gedenken wir die Untersuchung für das allgemeine nichtsymmetrische Problem durchzuführen.

Hier sei noch die Möglichkeit erwähnt, die gefundenen Resultate direkt auf Hermite'sche Formen zu übertragen, ebenso auf die im Hilbertschen Sinne vollstetigen reellen quadratischen und Hermite'schen Formen von abzählbar unendlichvielen Variablen, wobei die Beweise ganz die gleichen sind; zuletzt auf die linearen Integralgleichungen mit reellem symmetrischem oder Hermite'schen Kern. Für den letzteren reellen Fall führen wir hier die Untersuchung noch einmal explizite durch.

ZWEITER TEIL. DIE SYMMETRISCHEN INTEGRALGLEICHUNGEN.

§ 1. Die Grundformeln. [1]

Einer gegebenen reellen quadratischen Form entspricht in der Theorie der symmetrischen Integralgleichungen der reelle Integralausdruck

$$\int_a^b\int_a^b K(s,\ t)\ x(s)\ x(t)\ ds\ dt = C^{1)}, \tag{1}$$

worin

$$K(s,\ t) = K(t,\ s), \qquad (a \leqslant s, \quad t \leqslant b) \tag{2}$$

der als stetig vorausgesetzte und nicht identisch verschwindende symmetrische Kern ist.

Das Problem der „Hauptaxen" besteht hier in der Aufsuchung aller Eigenfunktionen $\varphi(s)$ mit der Bestimmung

$$\int_a^b K(s,\ t)\ \varphi(t)\ dt = \rho\,\varphi(s),^{2)} \tag{3}$$

wobei ρ jedesmal eine Konstante ist, deren reziproker Wert

$$\lambda = \frac{1}{\rho} \tag{4}$$

als Eigenwert des gegebenen Kernes $K(s,\ t)$ bezeichnet wird. Der Matrix $\|c_{ik}\|$ in der Formentheorie entspricht hier der Kern $K(s,\ t)$ selbst, den höheren Potenzmatrizen $\| c_{ik}^{(N)} \|$ ebenso die höheren iterierten Kerne

---

[1]) Wir verweisen hier vor allem auf die bekannten fundamentalen Arbeiten von Fredholm, Hilbert und Schmidt.

[2]) Es gelten auch im Folgenden die endlichen Integrationsgrenzen a, b, die wir einfachheitshalber überall fortlassen werden.

$$K^{(N)}(s,\ t) \equiv K^N(t,\ s) \equiv K^{(N)}, \tag{5}$$

allgemein definiert durch die Gleichungen:

$$K^{N+1}(s,\ t) = \int K^N(s,\ r)\ K(r,\ t)\ dr, \tag{6}$$

oder direkter

$$K^{N+1}(s,\ t) = \int\int\ldots\int K(s,\ r_1)\ K(r_1,\ r_2)\ldots\ K(r_N,\ t)\ dr_1\,dr_2\ldots\ dr_n. \tag{7}$$

Ist

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s),\ldots.\quad \varphi_n(s),\ldots \tag{8}$$

ein abgeschlossenes System von orthogonalisierten und normierten Eigenfunktionen von $K(s,\ t)$, sodass

$$\int K(s,\ t)\ \varphi_k(t)\ dt = \rho_k\varphi_k(s), \qquad \rho_k = \frac{1}{\lambda_k}; \tag{9a}$$

$$\int \varphi_\mu(s)\ \varphi_\nu(s)\ ds = \delta_{\mu\nu} \begin{cases} = 1 & \text{für} \quad \mu = \nu, \\ = 0 & \text{„} \quad \mu \neq \nu \end{cases} \tag{9b}$$

ist, und keine sonstige Eigenfunktion existiert, die nicht linear durch eine endliche Anzahl der gegebenen ausgedrückt werden könnte, und sind ferner

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\ldots\quad \lambda_n,\ldots \tag{10}$$

die zugehörigen, notwendig reellen, durch $K(s,\ t)$ eindeutig bestimmten Eigenwerte, bei denen man

$$\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2\ldots.\leqslant \lambda_n^2 \leqslant \ldots, \tag{11}$$

voraussetzen kann, so kann diese Folge der Eigenwerte einen Häufungspunkt nur im Unendlichen haben, und es ist insbesondere

$$\sum_k^{1\ldots\infty} \rho_k^2 = \sum_k^{1\ldots\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = c^2 \tag{12}$$

konvergent; ferner sind λ_k^N, $\varphi_k(s)$ zugleich die Eigenwerte und unabhängigen Eigenfunktionen von $K^N(s,\ t)$.

Es gelten nun für die iterierten Kerne die wichtigen Schmidtschen Entwicklungssätze, die unseren ferneren Betrachtungen zugrundegelegt werden mögen, und die vollkommen den früheren Grundformeln (I, 9) der Formentheorie entsprechen:

$$K^N(s,\ t) = \sum_\nu^{1\ldots\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\ \varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu^N}; \qquad N \geqslant 2. \tag{13}$$

§ 2. Die geraden Iterationskerne.

Wir behaupten nun zunächst das folgende Analogon zu einem früheren Formensatz (I, § 4, Satz 7):

Es sei

$$t_1, \quad t_2, \ldots, \quad t_n, \ldots \tag{14}$$

ein abzählbares Wertesystem der Variablen t, welches das gegebene Intervall $a \ldots b$ überalldicht bedeckt[1]. Wird dann die Folge

$$K^{2M}(s, t_1), \quad K^{2M}(s, t_2) \ldots \quad K^{2M}(s, t_\mu) \ldots, \tag{15}$$

als Funktionensystem der Variablen s betrachtet, orthogonalisiert und normiert — identisch verschwindende Funktionen bleiben dabei unberücksichtigt — so erhält man dadurch für unbegrenzt wachsende M gleichmässige Konvergenz gegen eine Grenzfolge

$$\mathfrak{a}_1(s), \quad \mathfrak{a}_2(s), \ldots, \quad \mathfrak{a}_\mu(s), \ldots, \tag{16}$$

die ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen des iterierten Kernes $K^{(2)}(s, t)$ darstellt.

Zum Beweise betrachten wir zunächst[2]

$$K^{2M}(s, t_1) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t_1)}{\lambda_\nu^{2M}}. \tag{17}$$

Es könnte für besondere t_1 vorkommen, dass diese Funktion identisch verschwindet, wenn nämlich für alle ν identisch $\varphi_\nu(t_1) = 0$ wird. Solche Ausnahmewerte ergeben ein identisches Verschwinden von K^{2M} schon für $M = 1$ und mögen bei den verlangten Operationen fernerhin einfach unberücksichtigt bleiben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann demnach $K^2(s, t_1) \neq 0$[3] gesetzt werden, und es sei dann ν_1 der kleinste Index, für den

$$\varphi_{\nu_1}(t_1) \neq 0. \tag{18}$$

ausfällt. Zu diesem Index gehört ein Eigenwert $\lambda_{\nu_1}{}^2$ von $K^{(2)}$ und es kann

[1]) Z. B. das abzählbar geordnete System aller rationalen Werte zwischen a und b, oder aller dyadischen Brüche usf.

[2]) Alle folgenden Summationen erstrecken sich hier, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, von 1 bis ∞; im Falle endlich vieler Eigenwerte $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ sind alle späteren reziproken Eigenwerte ρ_{n+M} gleich Null zu setzen.

[3]) Oder $K(s, t_1) \neq 0$.

nur eine endliche Anzahl weiterer Eigenwerte $\lambda^2_{\nu_1+1}, \ldots, \lambda^2_{\nu_1+m_1}$ gleich $\lambda^2_{\nu_1}$ sein, während alle späteren Werte grösser ausfallen — vgl. (12). Für die verlangte Normierung ist es gleichgültig, wenn die betrachtete Funktion $K^{2M}(s, t_1)$ mit $\lambda_{\nu_1}{}^{2M}$ multipliziert wird; die alsdann zu normierende Funktion ist

$$L^{2M}(s, t_1) = \sum_\nu^{\nu_1 \ldots, \nu_1+m_1} \varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t_1) + \sum_\nu^{\nu_1+m_1+1 \ldots \infty} \left(\frac{\lambda_{\nu_1}}{\lambda_\nu}\right)^{2M} \varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t_1). \tag{19}$$

Der erste Teil rechts kann hier nicht identisch verschwinden, da infolge der Orthogonalität der Eigenfunktionen $\varphi_{\nu_1}, \ldots, \varphi_{\nu_1+m_1}$ eine lineare Beziehung zwischen ihnen nur bei verschwindenden Koeffizienren möglich ist, während hier $\varphi_{\nu_1}(t_1) \neq 0$ angenommen wurde. Der zweite Teil aber fällt für unbegrenzt wachsende M immer weniger in Betracht, da für $\nu > \nu_1 + m_1$ allgemein $\lambda_\nu^2 > \lambda_{\nu_1}{}^2$ sein sollte. Die zu normierende Funktion unterscheidet sich daher für unbegrenzt wachsende M beliebig wenig von

$$L_1{}^*(s) = \sum_\nu^{\nu_1 \ldots \nu+m_1} \varphi_\nu(s)\, \varphi_\nu(t_1), \tag{20}$$

wobei alle Funktionen $\varphi_\nu(s)$ in diesem linearen Aggregat zum gleichen Eigenwert $\lambda_1{}^2$ von $K^{(2)}$ gehören; aus letzterem Grunde ist aber das betrachtete Aggregat $L_1{}^*(s)$ selbst eine Eigenfunktion von $K^{(2)}$ — solche Funktionen nennen wir $\bar{\varphi}_\nu(s)$ — und ihre Normierung führt wieder auf eine ebensolche $\mathfrak{a}_1(s)$, die zum Eigenwert $\lambda_{\nu_1}{}^2$ gehört.[1])

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir übrigens dabei für die Betrachtung der geraden Iterationen

$$\begin{gathered} \lambda^2_{\nu_1-1} < \lambda^2_{\nu_1}; \qquad \mathfrak{a}_1(s) = \bar{\varphi}_{\nu_1}(s); \\ \bar{\varphi}_{\nu_1}(t_1) \neq 0, \quad \bar{\varphi}_{\nu_1+1}(t_1) = \ldots = \bar{\varphi}_{\nu_1+m_1}(t_1) = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

setzen, was durch eine eventuelle Vertauschung der Indizes und orthogonale Transformation der zu $\lambda_{\nu_1}{}^2$ gehörenden Eigenfunktionen $\bar{\varphi}_{\nu_1}(s), \ldots, \varphi_{\nu_1+m_1}(s)$ von $K^{(2)}$ immer erreicht werden kann.

Nunmehr gehen wir zu $K^{2M}(s, t_2)$ über, wobei wieder $K^{2M}(s, t_2) \not\equiv 0$ angenommen werden kann, und betrachten die Aggregate

[1]) Ebenso folgt ensprechend der Formel (I, 27) allgemein

$$\lim_{M=\infty} K^{2M}(s_0, t_1) : K^{2M+2}(s_0, t_1) = \lambda^2_{\nu_1}{}';$$

einfachheitshalber verfolgen wir hier diese und ähnliche leicht beweisbare Analogien (I, 36 – 38 usf.) nicht weiter.

$$L_2^{2M}(s) = c_2\, K^{2M}(s,\ t_2) + c_1\, K^{2M}(s,\ t_1),$$
$$c_2 = \text{const} \neq 0, \quad c_1 = \text{const}. \tag{22}$$

auf die es wegen der verlangten Orthogonalisation und Normierung allein ankommt.

Es könnte vorkommen, dass unter den „Vektoren" $L_2^{(2M)}(s)$ identisch Null vorkommt; dann erscheint die Null auch bei der Orthogonalisation, der Wert t_2 braucht nicht mehr berücksichtigt zu werden, und wir gehen zu t_3 usf. über. Ist aber immer $K^{2M}(s,\ t_\mu)$ von $K^{2M}(s,\ t_1)$ in dieser Weise abhängig, so bedeutet dies, dass man identisch

$$K^{2M}(s,\ t) = \frac{\mathfrak{a}_1(s)\, \mathfrak{a}_1(t)}{\lambda_{\nu_1}^{\ 2}}, \tag{23}$$

hat, worauf schon aus $K^2(s,\ t_1)$ allein die einzige Eigenfunktion gefunden wäre. Anderenfalls ist in der Folge $t_2, \ldots, t_\mu$ immer ein Wert t_{μ_2} erreichbar, für den $K^2(s,\ t_{\mu_2})$ von $K^2(s,\ t_1)$ linear unabhängig ist, und wir können wieder annehmen, dass dies etwa schon bei t_2 selbst der Fall ist.

Es sei dann in

$$K^{2M}(s,\ t_2) = \sum_{\nu} \frac{\overline{\varphi}_\nu(s)\, \overline{\varphi}_\nu(t_2)}{\lambda_\nu^{2M}} \tag{24}$$

ν_2 der kleinste Index, für den $\varphi_{\nu_2}(t_2) \neq 0$ ist. Hat man dabei $\lambda_{\nu_2}^{\ 2} \neq \lambda_{\nu_1}^{\ 2}$, so erhält man für wachsende M in den normierten $K^{2M}(s,\ t_2)$ selbst Funktionen, die zu den entsprechenden $K^{2M}(s,\ t_1)$ immer mehr orthogonal werden[1]; die verlangte Orthogonalisierung und Normierung liefert also in der Grenze eine Eigenfunktion $\mathfrak{a}_2(s)$ von K^2 für den Eigenwert $\lambda_{\nu_2}^{\ 2}$.

Ist aber $\lambda_{\nu_2}^{\ 2} = \lambda_{\nu_1}^{\ 2}$ $(\nu_2 \geqslant \nu_1)$, so hat man

$$\lambda_{\nu_1}^{2M} K^{2M}(s,\ t_1) = \overline{\varphi}_{\nu_1}(s)\, \overline{\varphi}_{\nu_1}(t_1) + \sum_{\nu}^{\nu_1+m_1+1, \ldots \infty} \left(\frac{\lambda_{\nu_1}}{\lambda_\nu}\right)^{2M} \overline{\varphi}_\nu(s)\, \overline{\varphi}_\nu(t_1); \tag{25a}$$

$$\lambda_{\nu_1}^{2M} K^{2M}(s,\ t_2) = \sum_{\nu}^{\nu_1 \ldots \nu_1+m_1} \overline{\varphi}_\nu(s)\, \overline{\varphi}_\nu(t_2) + \sum_{\nu}^{\nu_1+m_1+1, \ldots \infty} \left(\frac{\lambda_{\nu_1}}{\lambda_\nu}\right)^{2M} \overline{\varphi}_\nu(s)\, \overline{\varphi}_\nu(t_2). \tag{25b}$$

Entweder ist nun hier

$$\overline{\varphi}_{\nu_1}(t_2) = 0; \qquad \sum_{\nu}^{\nu_1+1, \ldots \nu_1+m_1} \overline{\varphi}_\nu^{\,2}(t_2) \neq 0; \tag{26}$$

[1] D. h. das Integral über dem Produkt dieser normierten Funktionen wird beliebig klein.

dann liefert die Normierung von $K^{2M}(s,\ t_2)$ allein wieder eine Grenzfunktion $\overline{\varphi}_{\nu_2}(s)$, die zu $\overline{\varphi}_{\nu_1}(s)$ orthogonal ausfällt und zum gleichen Eigenwert $\lambda_{\nu_2}^{\ 2} = \lambda_{\nu_1}^{\ 2}$ gehört. Oder man hat

$$\overline{\varphi}_{\nu_1}(t_2) \neq 0, \qquad \sum_{1}^{\nu_1+1, \ldots \nu_1+m_1} \overline{\varphi}_\nu^{\,2}(t_2) \neq 0; \tag{27}$$

dann gilt das Gleiche wie vorhin für das Aggregat

$$L_2^{2M}(s) = \lambda_{\nu_1}^{2M} \begin{vmatrix} K^{2M}(s,\ t_1), & K^{2M}(s,\ t_2) \\ \overline{\varphi}_{\nu_1}(t_1), & \overline{\varphi}_{\nu_1}(t_2) \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Oder es ist endlich

$$\overline{\varphi}_{\nu_1}(t_2) \neq 0; \qquad \sum_{\nu}^{\nu_1+1, \ldots \nu_1+m_1} \overline{\varphi}_\nu^{\,2}(t_2) = 0; \tag{29}$$

dann gibt das Aggregat (27) eine Funktion, deren Normierung in der Grenze nach ähnlichen Gesetzen erfolgt, wie vorhin diejenige von $K^{2M}(s,\ t_1)$; man erreicht eine zu $\overline{\varphi}_{\nu_1}(s)$ orthogonale Eigenfunktion $\mathfrak{a}_2(s)$ von $K^2(s,\ t)$, die zu demjenigen Eigenwerte $\lambda_{k_2}^{\ 2}$ gehört, für welche zuerst

$$\begin{vmatrix} \overline{\varphi}_{\nu_1}(t_1), & \overline{\varphi}_{\nu_1}(t_2) \\ \overline{\varphi}_{k_2}(t_1), & \overline{\varphi}_{k_2}(t_2) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{30}$$

ausfällt; der Index k_2 muss existieren, da sonst, gegen die Annahme, in (28) $L_2^{(2M)}(s) \equiv 0$ wäre.

In ganz analoger Weise behandle man die weiteren Funktionen $K^{2M}(s,\ t_3), \ldots$ Entweder erhält man für einen hinreichend grossen Index n überhaupt keine neuen unabhängigen Funktionen $K^{2M}(s,\ t_{n+p})$: dann ist also für ein beliebiges t_μ

$$K^2(s,\ t_\mu) = c_1(t_\mu)\, K^2(s,\ t_1) + \ldots + c_n(t_\mu)\, K^2(s,\ t_n); \tag{31}$$

$K^2(s,\ t)$ ist ein „singulärer" Kern n-ter Ordnung, der auch nur die gefundenen n unabhängigen Eigenfunktionen besitzt. Oder die Folge dieser gefundenen Eigenfunktionen $\mathfrak{a}_1(s), \ldots, \mathfrak{a}_n(s), \ldots$ geht, ohne zu verschwinden, ins Unendliche: dann muss nur noch gezeigt werden, dass auf diese Weise ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen für $K^2(s,\ t)$ entsteht, zu dem also keine weitere, von jenen linear unabhängige Eigenfunktion hinzugefügt werden kann.

Zum kleinsten Eigenwert $\lambda_1^{\ 2} = \ldots = \lambda_{n_1}^{\ 2}$ $(< \lambda_{n_1+1}^2)$ mögen die orthogonalen normierten Eigenfunktionen $\overline{\varphi}_1(s), \ldots, \overline{\varphi}_{n_1}(s)$ gehören. Es existiert jedenfalls ein kleinster Index μ_1, für den

$$\sum_{\nu}^{1\ldots n_1} \bar{\varphi}_\nu (t_{\mu_1})^2 \neq 0, \tag{32}$$

ist, da sonst die stetigen Funktionen $\bar{\varphi}_1(s), \ldots, \bar{\varphi}_{n_1}(s)$ wegen der überalldichten Bedeckung des gegebenen Intervalls $a \ldots b$ durch die Werte $t_1, \ldots, t_\mu \ldots$ identisch verschwinden müssten, was für diese Eigenfunktionen nicht zutrifft; im „normalen" Falle wird sogar $\mu_1 = 1$ ausfallen. Die Normierung von $K^{2M}(s, t_{\mu_1})$ wird dann nach den früher für $K^{2M}(s, t_1)$ angestellten Überlegungen, auf eine Eigenfunktion $\mathfrak{a}_{\mu_1}(s)$ von $K^{(2)}$, führen, die zum Eigenwerte $\bar{\lambda}_1^2$ gehört, und somit zu den etwa früher gewonnenen, anderen Eigenwerten entsprechenden Eigenfunktionen $\mathfrak{a}_1(s), \ldots, \mathfrak{a}_{\mu_1-1}(s)$ orthogonall sein muss. Aus letzteren Grunde wird die geforderte Orthogonalisierung und Normierung von $K^{2M}(s, t_{\mu_1})$ inbezug auf $K^{2M}(s, t_1), \ldots, K^{2M}(s, t_{\mu-1})$ ebenfalls auf die gleiche Funktion $\bar{\mathfrak{a}}_{\mu_1}(s) = \mathfrak{a}_{\mu_1}(s)$ führen, womit eine erste zu λ_1^2 gehörende Eigenfunktion $\bar{\varphi}_1(s)$ gefunden sein wird.

Genau ebenso gibt es, falls nicht etwa ein singulärer Kern mit nur einer einziger Eigenfunktion $\mathfrak{a}_1(s)$ vorliegt, einen zweiten Index μ_2 derart, dass für $n_1 > 1$

$$\sum_{k_1 < k_2}^{1\ldots n_1} \begin{vmatrix} \bar{\varphi}_{k_1}(t_{\mu_1}) & \bar{\varphi}_{k_1}(t_{\mu_2}) \\ \bar{\varphi}_{k_2}(t_{\mu_1}) & \bar{\varphi}_{k_2}(t_{\mu_2}) \end{vmatrix}^2 \neq 0; \tag{33}$$

bzw. für $n_1 = 1$, $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 = \ldots = \lambda^2_{n_2} \ (< \lambda^2_{n_2+1})$ entweder

$$\text{für} \qquad \mu_2 < \mu_1, \quad \sum_{k_2}^{2\ldots n_2} \varphi_{k_2}(t_\mu)^2 \neq 0, \tag{34}$$

oder

$$\text{für} \qquad \mu_2 > \mu_1, \quad \sum_{k_2}^{2\ldots n_2} \begin{vmatrix} \bar{\varphi}_1(t_{\mu_1}), & \bar{\varphi}_1(t_{\mu_2}) \\ \bar{\varphi}_{k_2}(t_{\mu_1}), & \bar{\varphi}_{k_2}(t_{\mu_2}) \end{vmatrix}^2 \neq 0, \tag{35}$$

da sonst eine lineare Abhängigkeit zwischen den orthogonalen Funktionen $\bar{\varphi}_1(t)$, $\bar{\varphi}_{k_1}(t)$, $\bar{\varphi}_{k_2}(t)$ existieren würde, was nicht möglich ist. Für den Index μ_2 erhält man durch Kombination von $K^{2M}(s, t_{\mu_1})$ mit $K^{2M}(s, t_{\mu_2})$ allein durch Orthogonalisierung und Normierung eine zu λ_2^2 gehörende Eigenfunktion $\bar{\mathfrak{a}}_{\mu_2}(s)$, die zu sämtlichen früheren Eigenfunktionen $\mathfrak{a}_{\mu_2-1}(s), \ldots, \mathfrak{a}_1(s)$ orthogonal ist und somit wieder mit $\mathfrak{a}_{\mu_2}(s)$ zusammenfallen wird.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass keine zu den weiteren gleichen oder ungleichen Eigenwerten $\lambda_3^2, \ldots, \lambda_\nu^2, \ldots$ gehörige unabhängige Eigenfunktion $\mathfrak{a}_k(s)$ bei dem betrachteten Prozess übersprungen werden kann.

§ 3. Das System des Kernes $K(s, t)$.

In weiterer Ausführung der betrachteten Analogien zum Formenproblem (I, § 5) behaupten wir nun:

Durch Orthogonalisation und Normierung der ungeraden iterierten Kernfolgen

$$K^{2M+1}(s, t_1), \quad K^{2M+1}(s, t_2), \ldots, \quad K^{2M+1}(s, t_\mu), \ldots \tag{36}$$

inbezug auf die Variable s erhält man gleichmässige Konvergenz gegen eine Grenzfolge

$$\mathfrak{a}_1'(s), \quad \mathfrak{a}_2'(s), \ldots, \quad \mathfrak{a}_k'(s) \ldots, \tag{37}$$

die ebenfalls ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen des Kernes $K^{(2)}$ liefert, mit der gleichen Reihenfolge der Eigenwerte $\lambda^2_{\nu_k}$, wie bei den geraden Iterationen (§ 2).

Es gelten die Identitäten.

$$\int K(s, t)\, \mathfrak{a}_k(t)\, dt = \frac{1}{|\lambda_{\nu_k}|} \mathfrak{a}_k'(s), \tag{38a}$$

$$\int K(s, t)\, \mathfrak{a}_k'(t)\, dt = \frac{1}{|\lambda_{\nu_k}|} \mathfrak{a}_k(s). \tag{38b}$$

Es lässt sich in der Funktionenfolge

$$\frac{\mathfrak{a}_1(s) \pm \mathfrak{a}_1'(s)}{2}, \quad \frac{\mathfrak{a}_2(s) \pm \mathfrak{a}_2'(s)}{2}, \ldots, \quad \frac{\mathfrak{a}_m'(s) \pm \mathfrak{a}_m'(s)}{2}, \ldots$$

sobald man von den identisch verschwindenden Paaren $\mathfrak{a}_{m_0}(s) = \mathfrak{a}'_{m_0}(s) \equiv 0$ absieht, die Wahl des Vorzeichens jedesmal so treffen, dass die dadurch entstehende Folge von Mittelfunktionen

$$\hat{\mathfrak{a}}_1(s), \quad \hat{\mathfrak{a}}_2(s), \ldots, \quad \hat{\mathfrak{a}}_n(s), \ldots \tag{39}$$

linear unabhängig ausfällt. Diese Folge gibt dann durch Orthogonalisation und Normierung ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \ldots, \quad \varphi_m(s), \ldots \tag{40}$$

für den ursprünglichen Kern $K(s, t)$ selbst.

Die Beweise sind ganz analog denjenigen des betreffenden Formenproblems (I, § 5) zu führen; wir glauben sie daher an dieser Stelle unterlassen zu dürfen.

§ 4. Iterationen vollständiger Funktionensysteme.

Die Analogien zu den allgemeinsten Formensätzen dieser Theorie (I, § 6) ergeben sich durch Betrachtung von beliebigen Funktionensystemen $\beta_k^{(0)}(s)$ und ihren Iterationen inbezug auf den gegebenen Kern $K(s, t)$. Ein gegebenes Funktionensystem

$$\beta_1(s), \quad \beta_2(s), \ldots, \quad \beta_k(s), \ldots \tag{41}$$

kann immer orthogonalisiert und normiert werden, wobei etwa identisch auftretende Nullen als Zeichen linearer Abhängigkeit nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Die Iterationen des betrachteten Systems inbezug auf $K(s, t)$ entstehen durch die Transformationen

$$\beta_k^{(1)}(s) = \int K(s, t)\, \beta_k(t)\, dt, \tag{42a}$$

$$\beta_k^{(N+1)}(s) = \int K(s, t)\, \beta_k^{(N)}(t)\, dt = \int K^N(s, t)\, \beta_k(t)\, dt. \tag{42b}$$

Verlangt man, wie dies hier erfolgen soll, eine Orthogonalisation und Normierung der so erhaltenen Funktionenfolgen

$$\beta_1^{(N)}(s), \quad \beta_2^{(N)}, \ldots, \quad \beta_k^{(N)}(s), \ldots, \tag{43}$$

so kann man von vornherein ohne Änderung des Resultats das ursprüngliche System (41) durch das aus ihm entstehende orthogonalisierte und normierte

$$\beta_1^*(s), \quad \beta_2^*(s), \ldots, \quad \beta_k^*(s), \ldots. \tag{44}$$

ersetzen.

Ein — alsdann notwendig unendliches — System der letzteren Art heisst v o l l s t ä n d i g (H i l b e r t), wenn für j e d e stetige Funktion $g(s)$ die Beziehung besteht

$$\int g(s)^2\, ds = \sum_{\nu}^{1 \ldots \infty} \left\{ \int g(t)\, \beta_\nu^*(t)\, dt \right\}^2; \tag{45}$$

auch das u r s p r ü n g l i c h e System (41) möge dann vollständig heissen. So ist z. B. das System der natürlichen Potenzen

$$s^0 = 1, \quad s, \quad s^2, \ldots, \quad s^k, \ldots, \tag{46}$$

das den T a y l o r schen Reihen zugrundeliegt, immer vollständig; die F o u r i e r-

s c h e n, B e s s e l s c h e n, S t u r m - L i o u v i l l e s c h e n und ähnlichen Entwicklungen lassen weitere Beispiele in beliebiger Mannigfaltigkeit aufstellen.

Aus der Vollständigkeitsrelation (45) ergibt sich ohne weiteres, dass eine stetige Funktion nur dann zu allen $\beta_\nu^*(s)$ orthogonal sein, d. h. für alle ν:

$$\int g(t)\, \beta_\nu^*(t)\, dt = 0, \tag{47}$$

ausfallen kann, wenn identisch $g(t) \equiv 0$ ist.

Aus dem gleichen Grunde muss $g(t) \equiv 0$ sein, wenn für alle u r s p r ü n g l i c h e n Funktionen $\beta_\nu(t)$ der Folge (41)

$$\int g(t)\, \beta_\nu(t)\, dt = 0 \tag{48}$$

ausfällt, da die Integrale (47) sich aus den (48) linear zusammensetzen lassen.

Das zu untersuchende Analogon zu Satz 8 in I § 4 lautet jetzt folgendermassen:

Die Orthogonalisation und Normierung der durch Iteration einer vollständigen Funktionenfolge $\beta_\nu^{(0)}(s)$ inbezug auf den gegebenen Kern $K(s, t)$ entstehenden Folgen $\beta_\nu^N(s)$ liefert für $N = 2M$ in gleichmässig konvergenter Weise ein a b g e s c h l o s s e n e s System von Eigenfunktionen des iterierten Kernes $K^2(s, t)$.

Wir betrachten zum Beweise zuerst eine einzelne Funktion $\beta_{\mu_1}(s)$ und die aus ihr hervorgegangenen $\beta_{\mu_1}^{(1)}(s)$, $\beta_{\mu_1}^{(N)}(s)$. Nun kann zwar $\beta_{\mu_1}^{(1)}(s)$ bereits identisch verschwinden; aber sicherlich ist dies nicht für a l l e Funktionen des betrachteten vollständigen Systems der Fall, da sonst in der Fundamentalgleichung (45) ein Widerspruch entstehen würde, wenn man darin $g(s) = K(s, t_0)$ setzt: es würde für jedes t_0 identisch $K(s, t_0) = 0$ sein müssen.

Ist nun für irgend einen Index $\beta_\mu^{(1)}(s) \not\equiv 0$, so kann man zeigen, dass dann auch allgemein $\beta_\mu^N(s) \not\equiv 0$ ausfällt. Ist nämlich $N_0 > 1$ der e r s t e Index, für den $\beta_\mu^{N_0}(s)$ verschwindet, so verschwindet es auch für $N_0 + 1$; eine der Zahlen N_0, $N_0 + 1$ ist gerade $= 2M_0 \geqslant 2$, und man hat also

$$0 \equiv \int K^{2M_0}(s, t)\, \beta_\mu(t)\, dt; \tag{49a}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \iint K^{2M_0}(s, t)\, \beta_\mu(t)\, dt \,.\, \beta_\mu(s)\, ds \\ &= \iiint K^{M_0}(s, r)\, K^{M_0}(r, t)\, \beta_\mu(s)\, \beta_\mu(t)\, ds\, dt\, dr \qquad (49b) \\ &= \int \left\{ \int K^{M_0}(r, t)\, \beta_\mu(t)\, dt \right\}^2 dr; \end{aligned}$$

$$\int K^{M_0}(r,\ t)\,\beta_\mu(t)\,dt = 0. \tag{49c}$$

Für $N_0 = 2$, $M_0 = 1$ widerspricht die letztere Gleichung der Annahme $\beta_\mu^{(1)}(s) \not\equiv 0$, für $N_0 > 2$, $M_0 < N_0$ — der anderen von N_0 als dem kleinsten Index von der verlangten Eigenschaft. Es ist demnach aus $\beta_\mu^{(1)}(s) \not\equiv 0$ tatsächlich auch allgemein $\beta_\mu^{(N)}(s) \not\equiv 0$. Genauer ist nach bekannten Entwicklungssätzen von Hilbert-Schmidt:

$$\beta_\mu^{(1)}(s) = \sum_\nu^{1\ldots\infty} \frac{c_{\mu\nu}\,\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}, \tag{50a}$$

$$c_{\mu\nu} = \lambda_\nu \int \beta_\mu^{(1)}(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = \lambda_\nu \iint K(t,\ r)\,\beta_\mu(r)\,\varphi_\nu(t)\,dr\,dt, \tag{50b}$$

worin die erste Reihe rechter Hand gleichmässig konvergiert, und daraus allgemein infolge der Beziehungen (42b), (9a):

$$\beta_\mu^{(N)}(s) = \sum_\nu^{1\ldots\infty} \frac{c_{\mu\nu}\,\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^N}, \tag{51a}$$

$$c_{\mu\nu} = \int \beta_\mu(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt. \tag{51b}$$

Diese letzte Formel gilt übrigens auch für $\beta_\mu^{(1)}(s) \equiv 0$; es ist alsdann für jedes ν einfach $c_{\mu\nu} = 0$ (Schmidt).

Die Behandlung der Fundamentalformeln (51a) bei geraden Indizes ist nun ganz analog derjenigen für $K^{(2M)}$ (§ 2); man bekommt durch Orthogonalisation und Normierung der Folgen $\beta_1^{(2M)}(s)$, $\beta_2^{(2M)}(s), \ldots$, abgesehen von etwaigen Nullen, gleichmässige Konvergenz gegen ein System von Eigenfunktionen für $K^2(s,\ t)$:

$$\alpha_1(s),\quad \alpha_2(s), \ldots,\quad \alpha_m(s), \ldots, \tag{52}$$

die zu Eigenwerten

$$\lambda^2_{\nu_1},\quad \lambda^2_{\nu_2}, \ldots,\quad \lambda^2_{\nu_m}, \ldots \tag{53}$$

gehören, und es bleibt wieder nur zu zeigen, dass dabei alle Eigenwerte und alle unabhängigen Eigenfunktionen wirklich erreicht werden.

Es mögen wieder zu $\lambda^2_1 = \ldots = \lambda^2_{n_1}$ $(< \lambda^2_{n_1+1})$ die unabhängigen Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_{n_1}(s)$ gehören. Es muss ein kleinster Index μ_1 existieren, für den

$$\sum_\nu^{1\ldots n_1} c_\nu^2 \not\equiv 0, \tag{54}$$

ausfällt; anderenfalls würden nämlich $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_{n_1}(s)$ infolge (51b) zu allen Funktionen $\beta_\mu(s)$ orthogonal sein und damit identisch verschwinden, was nicht möglich ist. Für den betrachteten Index μ_1 entsteht aber wieder (genau wie in § 2) eine zu λ_1^2 gehörende Eigenfunktion $\alpha_{\mu_1}(s)$, worauf man $\bar\varphi_1(s) = \alpha_{\mu_1}(s)$ setzen darf. Wenn nun λ_2^2 überhaupt existiert, muss es daraufhin einen zweiten kleinsten Index μ_2 geben, für den bei $n_1 > 1$

$$\sum_{\nu_1<\nu_2}^{1\ldots n_1} \begin{vmatrix} c_{\mu_1\nu_1} & c_{\mu_1\nu_2} \\ c_{\mu_2\nu_1} & c_{\mu_2\nu_2} \end{vmatrix}^2 \neq 0, \tag{55}$$

bzw. bei $n_1 = 1$, $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 = \ldots = \lambda_{n_2}^2$ $(< \lambda^2_{n_2+1})$ entweder

$$\text{für}\quad \mu_2 < \mu_1,\quad \sum_{\nu_2}^{2\ldots n_2} c^2_{\mu_2\nu_2} \neq 0, \tag{56}$$

oder

$$\text{für}\quad \mu_2 > \mu_1,\quad \sum_{\nu_2}^{2\ldots n} \begin{vmatrix} c_{\mu_1 1} & c_{\mu_1\nu_2} \\ c_{\mu_2 1} & c_{\mu_2\nu_2} \end{vmatrix}^2 \neq 0; \tag{57}$$

ausfällt; sonst würden entweder die zu λ_2^2 gehörenden Eigenfunktionen verschwinden, oder es würde jedenfalls, da für alle μ aus dem Verschwinden der Ausdrücke (55), (57) eine allgemeine lineare Abhängigkeit der $c_{\mu\nu_2}$ von den $c_{\mu_1\nu_2}$ folgt, wegen der Beziehungen (51b) [1] die gleiche lineare Abhängigkeit für jedes $\bar\varphi_\mu(s)$ von $\bar\varphi_1(s)$ entstehen, was wieder unmöglich ist. Für den betrachteten Index μ_2 erhält man nun eine zu λ_2^2 gehörende Eigenfunktion $\alpha_{\mu_2}(s) = \bar\varphi_2(s)$ von K^2 usf.

Nach diesen Ausführungen möge es nun gestattet sein, ohne weitere ausführliche Beweise, die Endergebnisse unserer Untersuchungen zusammenzufassen.

§ 5. Das Hauptresultat.

Es sei $t_1, t_2, \ldots, t_\mu \ldots$ eine bestimmte abzählbar unendliche Wertefolge der Variablen t, die das gegebene endliche Intervall $a \ldots b$ überalldicht bedeckt, und es sei allgemein $K^N(s,\ t)$ der N-te iterierte Kern aus

[1] Für die geraden Indizes darf man darin $\bar\varphi_\nu(s)$ anstelle von $\varphi_\nu(s)$ setzen.

einem im betrachteten Intervall gegebenen symmetrischen stetigen Kerne $K(s, t)$. Orthogonalisiert und normiert man die als Funktionenfolgen von s angesehenen Systeme

$$K^N(s, t_1), \quad K^N(s, t_2), \ldots, \quad K^N(s, t_\mu) \ldots, \tag{58}$$

und sieht dabei allgemein von etwa auftretenden Nullen ab, so erhält man für gerade N gleichmässige Konvergenz gegen eine Grenzfolge

$$\alpha_1(s), \quad \alpha_2(s), \ldots, \quad \alpha_\mu(s), \tag{59}$$

für ungerade N — gleichmässige Konvergenz gegen eine Grenzfolge

$$\alpha_1(s), \quad \alpha_2(s), \ldots, \quad \alpha_\mu(s), \ldots \tag{60}$$

Es ist

$$\int K(s, t)\, \alpha_\mu(t)\, dt = \frac{1}{|\lambda_\mu|}\, \alpha_\mu'(s), \tag{61a}$$

$$\int K(s, t)\, \alpha_\mu'(t)\, dt = \frac{1}{|\lambda_\mu|}\, \alpha_\mu(s); \tag{61b}$$

das System $\alpha'(s)$ entsteht daher aus $\alpha(s)$ — und ebenso $\alpha(s)$ aus $\alpha'(s)$ — auch durch Iteration inbezug auf $K(s, t)$ und Normierung.

Jede der Folgen $\alpha(s)$, $\alpha'(s)$ gibt ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen für den ersten iterierten Kern $K^2(s, t)$.

In der Folge der Mittelfunktionen

$$\frac{\alpha_1(s) \pm \alpha_1'(s)}{2}, \quad \frac{\alpha_2(s) \pm \alpha_2'(s)}{2}, \ldots, \quad \frac{\alpha_\mu(s) \pm \alpha_\mu'(s)}{2}, \ldots \tag{62a}$$

lässt sich immer, abgesehen von den Paaren $\alpha_{\mu_0}(s) = \alpha_{\mu_0}'(s) \equiv 0$, die Wahl der Vorzeichen derart treffen, dass diese Folge linear unabhängig ausfällt. Wird nach einer solchen Wahl das betreffende System orthogonalisiert und normiert, so erhält man ein abgeschlossenes System von Eigenfunktionen des gegebenen Kernes $K(s, t)$

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \ldots, \quad \varphi_\mu(s), \ldots, \tag{62b}$$

und durch

$$\int K(s, t)\, \varphi_\mu(t)\, dt = \frac{1}{\lambda_\mu}\, \varphi_\mu(s) \tag{63}$$

auch sämtliche Eigenwerte dieses Kernes.

Die gleichen Resultate erhält man, wenn anstelle der iterierten Folgen $K^N(s, t_\mu)$ die iterierten Folgen $\beta_k^{(N)}(s)$ treten, wobei allgemein

$$\beta_k^{(N)}(s) = \int K^N(s, t)\, \beta_k^{(0)}(t)\, dt = \int K(s, t)\, \beta_k^{(N-1)}(t)\, dt, \quad N \geqslant 1, \tag{64}$$

ist, wenn für $\beta_k^{(0)}(s)$ irgendein vollständiges System von Funktionen des betrachteten Intervalls genommen wird. Das System der Eigenfunktionen ist dabei selbst dann und nur dann volständig, wenn bereits die erste Folge $\beta_k^{(1)}(s)$ — bzw $K(s, t_\mu)$ — vollständig ist.

Das wichtige Problem der Invarianten in der Theorie der symmetrischen Integralgleichungen erscheint damit in ganz allgemeiner und vollständiger Weise gelöst.