Betrachtet man sechs beliebige, durch einen und denselben Punkt gehende Ebenen, in beliebiger Reihenfolge genommen, als Seitenebenen eines einfachen Sechsflachs, dann ist das Produkt aus den sin der Flächenwinkel an seinen sechs Kanten, den sin der drei Winkel, welche die drei Paar Gegenkanten einschliessen, und dem Sinus des Dreiflachs[1], welches die Verbindungsebenen der drei Paar Gegenkanten bilden, unabhängig von der Reihenfolge jener sechs Ebenen.

Diese beiden Sätze können leicht auf bekannte Weise in Sätze der sphärischen Geometrie verwandelt werden, indem man die fraglichen sechs Geraden oder Ebenen mit einer Kugel vom Halbmesser eins schneidet, die deren gemeinsamen Punkt als Mittelpunkt hat. Es ist dabei nur zu bemerken, dass aus dem Sinus eines Dreikants die Grösse wird, die sich als der Sinus eines sphärischen Dreiecks bezeichnen lässt, nämlich das Produkt aus dem sin irgendeiner Seite des sphärischen Dreiecks und dem sin der zugehörigen sphärischen Höhe, ferner aus dem Sinus eines Dreiflachs der Sinus eines sphärischen Dreiseits, welches die duale oder polare Grösse zu dem Sinus eines sphärischen Dreiecks ist.

[1]) Vgl. P. R. I, S. 362 N° 13.

A. HOBORSKI.

# Z podstaw Geometryi rzutowej.

Ueber die Grundlagen der projektiven Geometrie.

§ 1. Na innem miejscu[1]) odróżniłem między Geometryą rzutową specyalną a ogólną, o ile chodzi o Geometryę rzutową, uzyskaną na drodze syntetycznej. Specyalną dali nam v. Staudt (Geometrie der Lage 1847) i M. Pasch (Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, drug. wyd z r. 1912). Kiedy pierwszy z nich przyjął aksyomat o równoległych w postaci następującej: „przez każdy punkt płaszczyzny, nie leżący na prostej ($l$) tej płaszczyzny, można poprowadzić jedną i tylko jedną prostą, współpłaszczyznową z prostą ($l$) i prostej ($l$) nie przecinającą", i przez to rozważania swoje znacznie uprościł, M. Pasch zbudował Geometryę rzutową wolną od wszelkiego aksyomatu o równoległych (pogląd, że Geometrya rzutowa daje się rozwinąć bez aksyomatów o równoległych—zdaje się—wypowiedział pierwszy F. Klein (Über die sog. Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Annalen, tom 6-ty, 1873); obydwaj, tak v. Staudt, jak i Pasch są zmuszeni do odróżnienia punktów, prostych i płaszczyzn t. zw. właściwych od niewłaściwych (Pasch), czy nieskończenie odległych (v. Staudt). Ogólna Geometrya rzutowa (Pieri: I principii della geometria di posizione, composti in sistema logico deduttivo druk. w Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, tom **48**, r. 1899; K. Th. Vahlen: Abstrakte Geometrie, 1905) przyjmuje zaś swe podstawowe zdania i pojęcia w ten sposób, że mówi o punktach, prostych i płaszczyznach, nie dzieląc ich na dwie klasy, nadto czyni to w ten sposób, że

[1]) A. Hoborski, Bemerkungen über die Grundlagen der Geometrie. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau, Styczeń r. 1917.

taki podział elementów geometrycznych na właściwe i niewłaściwe nie tylko nie jest potrzebny, ale jest wręcz niemożliwy. Specyalna Geometrya rzutowa jest jedną z możliwych interpretacyj ogólnej Geometryi rzutowej; to właśnie cechuje wzajemny stosunek obu Geometryj do siebie, a ze stanowiska wymagań Logiki można specyalną Geometryę rzutową uważać za pewnego rodzaju dowód, że aksyomaty ogólnej Geometryi rzutowej nie są ze sobą sprzeczne.

Ta właśnie okoliczność nadaje wielką wagę specyalnej Geometryi rzutowej tak, że nie pomijamy jej milczeniem, mimo istnienia teoryi ogólnej. Owszem, ta właśnie okoliczność natury logicznej powoduje, że specyalna Geometrya rzutowa będzie wyprzedzała teoryę ogólną w każdem przedstawieniu rzeczy, które pragnie wymaganiom Logiki uczynić zadość.

§ **2.** Wyobraźmy sobie, że budujemy specyalną Geometryę rzutową sposobem syntetycznym, przyjmując za jej aksyomaty np. pierwszą i drugą grupę aksyomatów geometrycznych Hilberta (Grundlagen der Geometrie) i pewien aksyomat ciągłości np. w formie, nadanej mu przez Enriquesa (Wykłady Geometryi rzutowej, Warszawa 1916), oczywiście, że dla ostatniego aksyomatu trzeba rozwinąć już kilka rozdziałów Geometryi rzutowej; zarzutu z tego robić nie można, bo aksyomatów nie trzeba jednym tchem wypowiadać.

Ponieważ ogólna Geometrya rzutowa wyraża grupę aksyomatów uporządkowania (punktów na prostej) przy pomocy (zwykle pierwotnego) pojęcia rozdzielenia, które może byłoby odpowiedniej nazwać pojęciem przeplatania, tedy w specyalnej Geometryi rzutowej, o której w obecnym paragrafie mowa, jeżeli się określi pojęcie przeplatania (punktów na prostej) o niem należy okazać twierdzenia, które w ogólnej Geometryi rzutowej obierać się zwykło za aksyomaty uporządkowania.

W niniejszym artykule, przyjąwszy aksyomaty, zestawione poniżej w § 3, podaję (w systematyczną ujętą całość) definicyę Pascha przeplatania dla czterech punktów na prostej, czterech prostych wzgl. płaszczyzn w pęku, ograniczając się do przypadku, gdy te utwory geometryczne są właściwe; następnie podaje artykuł kilka twierdzeń. W pewnych szczegółach rzecz poniższa nie będzie się różniła od rozważań danych przez M. Pascha (aksyomaty są jednakowoż odmienne); jedno zaś twierdzenie główne artykułu (tw. 18) jest bezwzględnie rzeczą nową i samą przez się interesującą.

Metoda rozumowania, której użyto w tym artykule, także zasługuje na wzmiankę. Zdaje się, że stale w Matematyce—a zwłaszcza w badaniach, dotyczących podstaw Geometryi—dowody twierdzeń są tem ściślejsze, im są bliższe tej formy, którą prof. Śleszyński nazywa postacią dowodu zupełnego; podawanie w całości dowodów zupełnych czyniłoby wykład rozwlekłym, ale można dowody podawać tak, by czytelnik z łatwością mógł od-



naleść dowody zupełne. I tej właśnie wskazówki metodycznej pilnie przestrzegałem. [1]

§ **3.** Wysłowimy aksyomaty, z których jedenaście pierwszych tworzy grupę zasad połączenia, pozostałe — grupę zasad uporządkowania. [2]

Punkty, proste i płaszczyzny uważamy za przedmioty, podlegające następującym związkom:

A. I. Istnieją conajmniej dwa, różne od siebie, punkty.

A. II. Dwa różne od siebie punkty określają jedną i tylko jedną prosrą.

A. III. Jeżeli punkty $A$, $B$ określają prostą $a$, którą także określają punkty $C$, $D$ i jeżeli punkty $A$, $C$ są od siebie różne, to punkty $A$, $C$ określają także prostą $a$, czyli dwa dowolne a różne punkty prostej określają tę prostą. [3]

O punkcie $A$ powiemy bowiem, że leży na prostej $a$, lub że jest punktem prostej $a$, albo też, że prosta $a$ przechodzi przez punkt $A$, w tem znaczeniu, że istnieje punkt $B$ różny od punktu $A$ i taki, że punkty $A$, $B$ określają prostą $a$.

Trzy lub więcej punktów, leżących na jednej prostej, nazywamy współliniowemi.

A. IV. Na każdej prostej leżą conajmniej dwa różne punkty.

A. V. Jeżeli $a$ oznacza prostą, to istnieje co najmniej jeden punkt, który nie leży na prostej $a$.

A. VI. Trzy punkty niewspółliniowe określają jedną i tylko jedną płaszczyznę.

A. VII. Na każdej płaszczyźnie leżą przynajmniej trzy punkty niewspółliniowe.

Mówimy bowiem, że punkt $A$ leży na płaszczyźnie $\alpha$ w tem znaczeniu, że istnieją punkty $B$ i $C$ takie, że punkty $A$, $B$, $C$ są niewspółliniowe i że określają właśnie płaszczyznę $\alpha$.

---

[1]) Przy kilku twierdzeniach podałem numery aksyomatów, których wynikiem logicznym są owe twierdzenia.

[2]) Poniżej podajemy aksyomaty Hilberta (grupy I i II) z małemi zmianami.

[3]) Ten aksyomat Hilberta wysłowił G. B. Halsted (Géometrie rationnelle, tłóm. z angielskiego Barbarin, 1911; str. 2) w sposób następujący: A. III′. Jeżeli punkty $A$, $B$ określają prostą $a$, którą określają także punkty $A$, $C$ i jeżeli punkty $B$, $C$ są od siebie różne, to punkty $B$ i $C$ określają także prostą $a$. Widocznie, że z aks. II i III wynikają aks. II i III′, ale nie odwrotnie, jak to mi udowodnił słuchacz filozofii p. Ważewski w bardzo prosty sposób. Przez „prostą $a$ określoną przez różne punkty $A$, $B$" dość rozumieć prostą symetralną odcinka $AB$, jeżeli przez „punkty" rozumiemy punkty określonej płaszczyzny. Wtedy aks. II i III′ są prawdziwe (aks. III′ dlatego, bo jego założenie jest fałszywe), kiedy aks. III nie jest prawdziwy.

A. VIII. Trzy punkty niewspółliniowe, które leżą na płaszczyźnie $\alpha$, określają tę płaszczyznę, t. zn. jeżeli punkty $A$, $B$, $C$ określają płaszczyznę $\alpha$, jeżeli ją określają punkty $A'$, $B'$, $C'$, jeżeli ją jeszcze określają punkty $A''$, $B''$, $C''$ i jeżeli wreszcie punkty $A$, $A'$, $A''$ nie są współliniowe, to punkty $A$, $A'$, $A''$ określają także płaszczyznę $\alpha$.

A. IX. Jeżeli dwa różne punkty prostej $a$ leżą na płaszczyźnie $\alpha$, to każdy punkt prostej $a$ leży na płaszczyźnie $\alpha$.

A. X. Jeżeli punkt $A$ leży na dwóch płaszczyznach $\alpha$, $\beta$ czyli gdy jest im wspólny, to istnieje przynajmniej jeden punkt $B$, różny od punktu $A$, który tym płaszczyznom jest także wspólny.

A. XI. Jeżeli $\alpha$ oznacza płaszczyznę, to istnieje przynajmniej jeden punkt, który nie leży na płaszczyźnie $\alpha$.

Stosunek między trzema punktami $A$, $B$, $C$ współliniowemi, wyrażony zdaniem: „punkt $B$ leży między punktami $A$ i $C$", będziemy uważali za pojęcie pierwotne, które spełniać ma następujące warunki:

A. XII. Jeżeli punkt $B$ leży między punktami $A$ i $C$, to te punkty są od siebie różne i współliniowe.

A. XIII. Jeżeli punkty $A$, $B$, $C$ są współliniowe i jeżeli punkt $B$ leży między punktami $A$ i $C$, to punkt $B$ leży także między punktami $C$ i $A$.

A. XIV. Jeżeli punkty $A$ i $B$ są od siebie różnemi punktami prostej $a$, to na prostej $a$ leży conajmniej jeden punkt $X$ między punktami $A$ i $B$ i conajmniej jeden punkt $Y$ taki, że punkt $B$ leży między punktami $A$ i $Y$.

A. XV. Jeżeli $A$, $B$, $C$ oznaczają trzy różne i współliniowe punkty, to zachodzi jedna i tylko jedna z następujących ewentualności:

($\alpha$) punkt $A$ leży między punktami $B$ i $C$;
($\beta$) punkt $B$ leży między punktami $A$ i $C$;
($\gamma$) punkt $C$ leży między punktami $A$ i $B$.

Ta zasada jest krótkiem wyrażeniem trzech zasad następujących:

A. XV. 1. Jeżeli nie zachodzi ani ewentualność ($\alpha$) ani ewentualność ($\beta$), to zachodzi ewentualność ($\gamma$).

A. XV. 2. Jeżeli zachodzi ewentualność ($\gamma$), to nie zachodzi ani ewentualność ($\alpha$) ani ewentualność ($\beta$).

A. XV. 3. Jeżeli zachodzi ewentualność ($\alpha$), to nie zachodzi ewentualność ($\beta$).

A. XVI.[1] Niech $A$, $B$, $C$ oznaczają punkty niewspółliniowe i niech wszystkie punkty prostej $a$ leżą na płaszczyźnie, określonej przez punkty $A$, $B$, $C$; jeżeli prosta $a$ nie przechodzi przez żaden z punktów $A$, $B$, $C$ i jeżeli ma z prostą, określoną przez punkty $A$, $B$ punkt wspólny położony między punktami $A$ i $B$, to ta prosta $a$ ma albo z prostą, określoną przez punkty $A$, $C$ punkt wspólny, położony między punktami $A$ i $C$ albo też z prostą, określoną przez punkty $B$, $C$ punkt wspólny, położony między punktami $B$ i $C$.[1]

[1] Ten aksyomat nazywa się zwykle aksyomatem Pascha (Pasch, loc. cit. IV Grundsatz, str. 21; wyd. z r. 1912). Zarazem wyraźnie zaznaczam, że nie twierdzę, iż podane aksyomaty są od siebie niezależne.



§ **4**. Stosunek, określony przyimkiem „między", nie jest pojęciem Geometryi rzutowej; jeżeli bowiem punkt $B$ leży między punktami $A$ i $C$, to przez rzutowanie punktów $A$, $B$, $C$ ze środka $M$, nie leżącego na prostej $a$, na której leżą punkty $A$, $B$, $C$ można otrzymać punkty $A'$, $B'$, $C'$ ze sobą współliniowe, różne i takie, że punkt $B'$ nie leży między punktami $A'$ i $C'$; nadto proste $a$, $b$, $c$ pęku prostych mają tę własność, że każdą z prostych $a$, $b$, $c$ można uważać za położoną między dwiema pozostałemi; innemi słowy brak tu analogii między szeregiem punktowym a pękiem prostych. Wreszcie stosunek, określony słowem „między", nie odnosi się do punktów niewłaściwych, o ile takie punkty na prostej istnieją. To są powody, dla których ogólna Geometrya rzutowa posługuje się innem pojęciem porządkującem, a mianowicie pojęciem rozdzielenia czyli przeplatania. Kiedy to pojęcie jest dla ogólnej Geometryi rzutowej zwykle pojęciem pierwotnem, jest ono pojęciem pochodnem (definiowanem) w specyalnej Geometryi rzutowej. Określeniem tego pojęcia i kilku jego własnościami zajmują się następujące paragrafy niniejszego artykułu.

§ **5**. Dla krótkości pisma używać będziemy symbolu $A/BC$ na oznaczenie, że punkt $A$ leży między punktami $B$ i $C$; zaprzeczenie tego faktu będziemy oznaczali znakiem $A \sim / BC$.

**Tw. 1**. Jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ oznaczają $n$ ($n \geqslant 3$) różnych punktów współliniowych, to proste, określone przez punkty $A_i$, $A_k$, gdzie $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$, są ze sobą identyczne.

Skoro punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 3$) są współliniowe, tedy można znaleść takie punkty $A_1', A_2', \ldots, A_n'$, że punkt $A_i'$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) jest różny od punktu $A_i$ i proste, określone przez punkty $A_j$, $A_j'$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) są ze sobą identyczne; tedy punkty $A_i, A_i'$ i punkty $A_k$, $A_k'$ ($i, k = 1, 2, \ldots n$) określają tę samą prostą $a$; ponieważ według założenia punkty $A_i$, $A_k$ są od siebie różne, jeżeli jest $i \neq k$, więc na mocy A. III. punkty $A_i$, $A_k$ ($i, k = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq k$) określają też prostą $a$ (Ten dowód posiłkuje się zasadami A. II i III).

[1] Że wszystkie trzy ewentualności wyrażone w poprzedniku i następniku tej zasady zachodzić nie mogą, znajdzie czytelnik u B. G. Halsteda (Géométrie rationnelle, 1911, str. 7) udowodnione (zob. poniżej tw. 9).

**Tw. 2.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty i jeżeli jest $C/AB$ i $B/AD$, to jest także $B/CD$.[1]

Twierdzenie to udowodnił R. L. Moore; dowód umieszczony w cytowanej już książce Halsteda (str. 269) posiłkuje się zasadami A. II, III, V, VI, IX, XII, XIII, XIV, XV, XVI.

**Def. 1.** Że punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$, znaczy, że punkty $A$, $B$, $C$, $D$ są od siebie różne i współliniowe i że z punktów $C$, $D$ jeden leży między punktami $A$ i $B$, drugi nie (zob. Pasch, loc. cit. str. 3).

**Tw. 3.** Jeżeli punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$, to punkty $D$, $C$ też przeplatają punkty $A$, $B$.

Dowód bezpośrednio wynika z Def. 1.

**Tw. 4.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty i jeżeli jest $C/AB$ i $D\sim/AB$, to stąd wynika, że jest $A/CD$ albo $B/CD$.

Na mocy założenia i A. XV zdanie $D\sim/AB$ jest równoważne zdaniu: albo jest $A/BD$ albo jest $B/AD$. Przeto tw. 4 ma jedno z dwóch założeń:

(α) $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty; $C/AB$; $A/BD$.
(β) $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty; $C/AB$; $B/AD$.

Otóż tw. 2 $[A, B, C, D \rightarrow B, A, C, D]$[2] pozwala napisać związek:

z $C/AB$, $A/BD$ wynika $A/CD$.

W przypadku (β) tw. 2 wprost daje związek:

z $C/AB$, $B/AD$ wynika $B/CD$.

Twierdzenie więc jest w zupełności udowodnione. (W dowodzie użyto A. XV i tw. 2)[3].

**Tw. 5.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty i jeżeli jest $C/AB$, $D\sim/AB$ i $A/CD$, to stąd wynika, że jest $B\sim/CD$.

Udowodnimy to twierdzenie w ten sposób, że wykażemy, iż zdania: punkty $A$, $B$, $C$, $D$, są od siebie różne i współliniowe, jest $C/AB$, jest $D\sim/AB$, jest $A/CD$, jest $B/CD$ — są ze sobą sprzeczne.

Ponieważ na mocy A. XV zdanie: punkty $A$, $B$, $D$ są różne i współliniowe i jest $D\sim/AB$ — jest równoważne ze zdaniem: jest albo $A/BD$ albo $B/AD$. Wykażemy tedy, że każdy z dwu następujących układów zdań:

Układ I: (α) punkty $A$, $B$, $C$, $D$ są różne i współliniowe;

[1]) Pasch loc. cit. Lehrsatz 13 str. 10 1912).
[2]) Tw. 2 $[A, B, C, D \rightarrow B, A, C, D]$ znaczy, że za litery $A$, $B$, $C$, $D$ zachodzące w wysłowieniu tw. 2-go należy podstawić odpowiednio litery $B$, $A$, $C$, $D$.
[3]) Pasch, loc. cit. str. 13 (1912).



(β) jest $C/AB$;
(γ) $A/BD$;
(δ) $A/CD$;
(ε) $B/CD$;

Układ II: (α) punkty $A$, $B$, $C$, $D$ są różne i współliniowe;
(β) jest $C/AB$;
(γ') $B/AD$;
(δ) $A/CD$;
(ε) $B/CD$;

jest układem zdań ze sobą sprzecznych.

Zdania (α), (γ) i (ε) dają na mocy tw. 2 $[A, B, C, D \rightarrow D, B, A, C]$ związek

$$B/AC$$

który jest sprzeczny ze związkiem (β) na mocy A. XV.

Podobnie zdania (α), (γ') i (δ) dają na mocy tw. 2 $[A, B, C, D \rightarrow D, A, B, C]$ związek $A/BC$, co też jest sprzeczne ze zdaniem β na mocy A. XV.

Tem samem udowodniono, że układy I i II są układami zdań ze sobą sprzecznych. (Posługiwaliśmy się zasadą A. XV i tw. 2).

**Tw. 6.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty i jeżeli: jest $C/AB$, $D\sim/AB$, $B/CD$, to stąd wynika, że jest $A\sim/CD$.

Twierdzenie to wynika wprost z tw. 5 na mocy znanego prawa Logiki.

**Tw. 7.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty i jeżeli jest $C/AB$, $D\sim/AB$, to stąd wynika, że zachodzi jedna i tylko jedna z następujących ewentualności:

albo jest $A/CD$ i zarazem $B\sim/CD$,
albo jest $B/CD$ i zarazem $A/CD$.

Twierdzenie to wynika wprost z tw. 4, 5 i 6.

**Tw. 8.** Jeżeli punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$, to i naodwrót punkty $A$, $B$ przeplatają punkty $C$, $D$.[1]

Na mocy Def. 1 jest właśnie tw. 7 równoważne tw. 8.

§ **6.** Pojęcie przeplatania określone definicyą Def. 1 jedynie dla punktów prostej, określimy dla prostych pęku prostych i dla płaszczyzn pęku płaszczyzn; wymagać to będzie całego szeregu rozumowań, między innemi i twierdzenia (18), które w obecnym paragrafie udowodnimy.

[1]) Pasch, loc. cit. str. 16, Lehrsatz 23 (wyd. z r. 1912).

**Tw. 9.** $A$, $B$, $C$ oznaczają trzy punkty współliniowe, $a$, $b$, $c$ proste, skreślone odpowiednio przez punkty: $B$, $C$, wzgl. $C$, $A$, wzgl. $A$, $B$, to nie istnieje prosta $l$, któraby równocześnie miała z prostemi $a$, $b$, $c$ punkty wspólne $D$, $E$, $F$ o własnościach $D/BC$, $E/CA$ i $F/AB$. [1]

Dowód tego twierdzenia może czytelnik znaleść w cytowanej książce Halsteda (na str. 7); polega on na zasadach: II, XV i XVI i na tw. 1.

**Tw. 10.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $E$ oznaczają cztery różne i współliniowe punkty, to związki

$$C/AB, \quad C/AE, \quad C/BE$$

są ze sobą sprzeczne i równocześnie zachodzić nie mogą. [2]

Załóżmy, że te związki równocześnie zachodzą. Oznaczmy przez $l$ prostą, na której leżą punkty $A$, $B$, $C$, $E$. Na mocy zasady A. V. obieram punkt $M$, nie leżący na prostej $l$; on jest różny od punktów $B$, $E$; oznaczmy przez $b$ i $e$ proste określone przez punkty $B$, $M$, wzgl. $E$, $M$ (A. II). Na prostej $b$ obierzmy punkt $N$ tak, aby było $M/BN$ (A. XIV). Punkty $M$, $B$, $E$ określają płaszczyznę (A. VI), którą oznaczmy przez $\alpha$; na niej leżą punkty $C$, $N$ (A. IX); ponieważ punkty te są od siebie różne (A. II, III), przeto określają prostą, którą oznaczmy literą $c$; ona leży także na płaszczyźnie $\alpha$, nie przechodzi przez żaden z punktów $B$, $E$, $M$ (A. II, III). Do punktów $B$, $E$, $M$ i prostej $c$ stosujmy zasadę A. XVI. Ponieważ jest $M/BN$, więc jest $N\sim/BM$ (A. XV), nadto jest $C/BE$; tedy istnieje punkt $F$ na prostych $e$ i $c$ i taki, że jest $F/ME$. Punkty $A$ i $M$, jako różne, określają prostą, którą oznaczymy przez $a$. Do punktów $A$, $B$, $M$ i prostej $c$ stosujmy znów zasadę A. XVI. Ponieważ prosta $c$ przez punkty $A$, $B$, $M$ nie przechodzi (A. II, III), nadto punkt $A$ leży na płaszczyźnie $\alpha$ (A. IX) i ponieważ jest $N\sim/BM$, $C/AB$, więc istnieje punkt $G$ wspólny prostym $a$ i $c$ tak, że jest $G/AM$. Uważajmy punkty $A$, $E$, $M$ i prostą $c$, otóż prosta $c$ przecina proste $l$, $a$, $e$ płaszczyzny $\alpha$ w punktach $C$, $F$, $G$ tak, że jest $C/AE$, $F/EM$ i $G/AM$, co według tw. 9 zachodzić nie może. (Dowód opiera się na zasadach II, III, V, VI, IX, XV, XVI i na tw. 9).

**Tw. 11.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty i jeżeli jest $B/AC$ i $C/AD$, to jest także $B/AD$. [3]

Dowód tego twierdzenia, udowodnionego też przez Moore'a, znajdzie czytelnik w cytowanej książce Halsteda (str. 270); polega na zasadach II, III, XIV, XV, XVI i na tw 2.

[1] Pasch, loc. cit. str. 25, tw. 11 (wyd. z r. 1912).
[2] Pasch, loc. cit. str. 10, tw. 12 (wyd. z r. 1912).
[3] Pasch, loc. cit. str. 10, tw. 10 (wyd. z r. 1912).



**Tw. 12.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $E$ oznaczają różne, współliniowe punkty i jeżeli jest $C/AE$ i $B/AE$, to jest także $E\sim/BC$.

**Dowód.** Oznaczmy przez $a$ prostą, na której leżą punkty $A$, $B$, $C$, $E$ i przez $F$ punkt, który nie leży na prostej $a$ (A. V). Oznaczmy przez $\alpha$, $b$, $c$ proste, określone odpowiednio przez punkty $AF$, $BF$, $CF$ (A. II), one są od siebie różne (tw. 1); na prostej $a$ obierzmy punkt $M$ tak, aby było $M/AF$ (A. XIV). Płaszczyznę, określoną przez punkty $A$, $B$, $F$ (A. VI), oznaczmy przez $\alpha$, na niej leży punkt $E$ i każdy punkt prostej $e$, określonej przez punkty $E$, $M$ (A. IX). Prosta $e$ nie przechodzi przez żaden z punktów $A$, $B$, $F$ (A. XII, II).

Do punktów $A$, $B$, $F$ i prostej $e$ stosujemy zasadę XVI; ponieważ jest $M/AF$ i $E\sim/AB$ (A. XV), więc istnieje punkt $H$, wspólny prostym $b$ i $e$ tak, że $H/BF$. Do punktów $A$, $C$, $F$ (A. IX, XII, II) i prostej $e$ stosujemy znów zasadę XVI; tedy związki $M/AF$ i $E\sim/AC$ (XV) wykazują istnienie punktu $K$, wspólnego prostym $c$ i $e$ tak, że jest $K/CF$. Do punktów $B$, $C$, $F$ (VIII) i prostej $e$ stosujemy znów zasadę XVI. Ze związków $H/BF$ i $K/CF$ otrzymujemy, że jest $E\sim/BC$ c. b. d. u.

(Dowód opiera się na zasadach II, V, VI, VIII, IX, XII, XIV, XV, XVI i tw. 1).

**Tw. 13.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $E$ oznaczają różne i współliniowe punkty i jeżeli jest $C/AB$ i $B/CE$, to jest też $C/AE$. [1]

Załóżmy, że tak nie jest, ale, że jest $C\sim/AE$, co wobec zasady XV, pociąga za sobą możliwość $A/CE$ albo możliwość $E/AC$.

Mamy więc do odróżnienia dwa odrębne układy założeń:

$$(\alpha) \qquad C/AB, \quad B/CE, \quad A/CE;$$

$$(\beta) \qquad C/AB, \quad B/CE, \quad E/AC.$$

W przypadku ($\alpha$) na mocy tw. 12 [$A, B, C, E \rightarrow E, B, A, C$] ze związków $A/CE$ i $B/CE$ otrzymujemy $C\sim/AB$, co jest sprzeczne z przypadkiem ($\alpha$) — tedy przypadek ($\alpha$) nie może zachodzić. W przypadku ($\beta$) ze związków $B/CE$ i $E/AC$ otrzymujemy na mocy tw. 11 [$A\ B\ C\ D \rightarrow C, B, E, A$] związek $B/AC$, który, na mocy zasady XV, jest sprzeczny ze związkiem $C/AB$; i przypadek ($\beta$) nie może zachodzić. Tedy założenie $C\sim/AE$ jest fałszywe, prawdą jest, że jest $C/AE$. (Dowód opiera się na zasadzie XV i tw. 11 i 12).

**Tw. 14.** Jeżeli $A$, $B$, $M$ oznaczają punkty niewspółliniowe, $a$ oznacza prostą, określoną przez punkty $A$, $M$, $b$ prostą, określoną przez punkty $B$, $M$, $m$ prostą, określoną przez punkty $A$, $B$, $\pi$ płaszczyznę, określoną przez pun-

[1] Pasch loc. cit. str. 11 (Lehrsatz 16) (1912).

kty $A$, $B$, $M$, $c$ prostą, różną od prostych $a$, $b$, przechodzącą przez punkt $M$ i leżącą na płaszczyźnie, i jeżeli prosta $c$ ma nadto tę własność, że istnieje conajmniej jeden punkt $X$ na prostej $m$, położony między punktami $A$ i $B$ i conajmniej jeden punkt $Y$ prostej $c$, różny od punktów $M$ i $X$ i taki, że na prostej $z$, określonej przez punkty $X$, $Y$, nie ma między punktami $X$ i $Y$ ani punktu prostej $a$ ani punktu prostej $b$, to stąd wynika, że proste $c$ i $m$ mają punkt wspólny $U$, który leży między punktami $A$ i $B$.

**Dowód**. Albo punkt $Y$ leży na prostej $m$, albo punkt $Y$ nie leży na prostej $m$.

Zajmijmy się najpierw pierwszym przypadkiem. Wtedy $Y$ jest punktem wspólnym prostych $c$ i $m$. Ponieważ punkty $X$, $Y$, $A$, $B$ leżą na prostej $m$, tedy na mocy tw. 1 $[A_1, A_2, A_3, A_4 \rightarrow X, Y, A, B]$ prosta $z$ jest identyczna z prostą $m$, która ma z prostemi $a$, $b$ punkty wspólne $A$, wzgl. $B$; na mocy założenia jest więc:

$$A \backsim/XY, \qquad B\backsim/XY, \qquad X/AB,$$

stąd na mocy A. XV otrzymujemy do rozważenia cztery przypadki:

1. $X/AY$, $X/BY$, $X/AB$, co jest niemożliwe na mocy tw. 10.
2. $Y/AX$, $X/BY$, $X/AB$,
3. $X/AY$, $Y/BX$, $X/BA$,
4. $Y/AX$, $Y/BX$, $X/AB$.

W przypadku 2-im ze związków $Y/AX$, $X/AB$ otrzymujemy na mocy tw. 11 $[A, B, C, D \rightarrow A, Y, X, B]$ związek $Y/AB$ o który chodziło.

W przypadku 3-cim ze związków $Y/BX$, $X/AY$ otrzymujemy na mocy tw. 13 $[A, B, C, E \rightarrow B, X, Y, A]$ znów $Y/AB$ (A. XIII), o co chodziło.

W przypadku 4-ym ze związków $Y/BX$, $X/AB$ otrzymujemy na mocy tw. 2 $[A, B, C, D \rightarrow B, X, Y, A]$ związek $X/YA$, który jest sprzeczny z związkiem $Y/AX$ (A. XV). Innemi słowy twierdzenie w pierwszym głównym przypadku jest udowodnione.

Załóżmy teraz, że punkt $Y$ nie leży na prostej $m$; wtedy proste $z$ i $m$ nie są identyczne. Prosta $z$ nie przechodzi przez punkty $A$, $B$ (A. II). Albo prosta $z$ przechodzi przez punkt $M$. albo tak nie jest.

Gdy prosta $z$ przechodzi przez punkt $M$, wtedy (A. II) proste $c$ i $z$ są identyczne, wtedy punkt $X$ leży także na prostej $c$; w tym przypadku twierdzenie jest w zupełności udowodnione.

Niech prosta $z$ nie przechodzi przez $M$. Prosta $z$ leży na płaszczyźnie $\pi$ (A. IX). Do punktów $A$, $B$, $M$ i prostej $z$ stosujemy zasadę XVI. Ponieważ jest $X/AB$, więc istnieje albo punkt $Z'$, wspólny prostym $a$ i $z$ i taki, że $Z'/AM$, albo istnieje punkt $Z''$, wspólny prostym $b$ i $z$ i taki, że $Z''/BM$.



Wystarczy zająć się pierwszym przypadkiem. Punkty $X$, $Y$, $Z'$ są od siebie różne (A. II) i współliniowe, przeto (XV) albo jest $X/YZ'$ albo $Y/XZ'$ albo $Z'/XY$. Ostatni związek jest niemożliwy, bo sprzeciwia się założeniu, że na prostej $z$ między punktami $X$ i $Y$ niema żadnego punktu prostej $a$.

Załóżmy więc najpierw, że jest $X/YZ'$. Prosta $m$ nie przechodzi przez punkty $M$, $Y$, $Z'$ (A. II), które nie są współliniowe (XII). Do punktów $M$, $Y$, $Z'$ i prostej $m$ stosujemy zasadę XVI; ponieważ jest $A\sim/MZ'$ (XV), $X/Z'Y$, tedy istnieje punkt $U$, wspólny prostym $m$ i $c$ o własności: $U/MY$, Twierdzę, że jest też $U/AB$.

Załóżmy, że tak nie jest, że jest $U\sim/AB$, wtedy (XV) jest albo $B/AU$ albo $A/BU$, bo punkt $U$ nie schodzi się ani z punktem $A$ ani $B$ (II). Gdy jest $B/AU$, to stąd i ze związku $X/AB$ otrzymujemy związek $B/XU$ na mocy tw. 2 $[A, B, C, D \rightarrow A, B, X, U]$. Punkty $X$, $U$, $Y$ nie są współliniowe (II, III), prosta $b$ nie przechodzi przez punkty $X$, $U$, $Y$ (II, XIII). Do punktów $X$, $U$, $Y$ i prostej $b$ stosujmy zasadę XVI. Ponieważ jest $B/XU$ i $M\sim/UY$ (XV), więc istnieje punkt $W$ wspólny prostym $b$ i $z$ tak, że $W/XY$, co jednakowoż być nie może, bo sprzeciwia się założeniu twierdzenia. Jest więc $B\sim/AU$. Przestawiając litery $A$, $B$ na $B$, $A$, otrzymamy też, że jest $A\sim/BU$. Jest więc (XV) $U/AB$, o co chodziło.

Załóżmy teraz, że jest $Y/XZ'$. Punkty $A$, $Z'$, $X$ są niewspółliniowe (II, XIII). Prosta $c$ nie przechodzi przez punkty $A$, $X$, $Z'$ (II). Do punktów $A$, $X$, $Z'$ i prostej $c$ stosujemy A. XVI. Ponieważ jest $M\sim/AZ'$ (XV), $Y/XZ'$, przeto istnieje punkt $U$, wspólny prostym $c$ i $m$ tak, że $U/AX$.

Ponieważ punkty $U$, $X$, $A$, $B$ są od siebie różne (XIII, XV) i współliniowe, przeto ze związków $U/AX$, $X/AB$ wynika na mocy tw. 11 $[A, B, C, D \rightarrow A, U, X, B]$ związek $U/AB$, o który chodzi.

Podobnie zupełnie załatwia się przypadek, kiedy istnieje punkt $Z''$, wspólny prostym $b$ i $z$ tak, że jest $Z''/BM$.

(Dowód opiera się na zasadach: II, III, IX, XII, XIII, XV, XVI i na tw. 1, 2, 10, 11, 13).

**Tw. 15**. O punktach $A$, $B$, $M$, $X$, prostych $a$, $b$, $m$ i płaszczyźnie $\pi$ zakładamy to samo, co w tw. 14; o prostej $c$ również zakładamy, że leży na płaszczyźnie $\pi$ i przechodzi przez punkt $M$; niech punkt $Y$ będzie różny od punktów $M$, $X$ i niech leży na prostej $c$.

Jeżeli $z$ oznacza prostą, określoną przez punkty $X$, $Y$, to na prostej $z$ ma leżeć jeden punkt $U$ prostej $a$ i jeden punkt $V$ prostej $b$ o własnościach $U/XY$, $V/XY$. Wtedy prosta $c$ ma punkt $W$ wspólny z prostą $m$ taki, że jest $W/AB$.

**Dowód**. Albo prosta $c$ przechodzi przez punkt $X$, albo tak nie jest. W pierwszym przypadku twierdzenie jest udowodnione.

W drugim przypadku obierzmy (A. XIV) na prostej $c$ punktu $Y'$ tak, że $M/YY'$. Punkty $X$, $Y$, $Y'$ są od siebie różne (A. XII) i niewspółliniowe (A. II, III) i leżą na płaszczyźnie $\pi$ (IX); przez $z'$ oznaczmy prostą, określoną przez punkty $X$, $Y'$ (II), która także leży na płaszczyźnie $\pi$ (IX). Proste $a$ i $b$ nie przechodzą przez punkty $X$, $Y$, $Y'$ (III, XII). Do punktów $X$, $Y$, $Y'$ i prostej $a$ stosujmy tw. 9; ze związków $M/YY'$, $U/XY$ wynika, że nie istnieje punkt, wspólny prostym $a$ i $z'$ i położony między punktami $X$ i $Y'$.

Podobnie, stosując tw. 9 do punktów $XYY'$ i prostej $b$, otrzymujemy ze związków $M/YY'$, $V/XY$, że nie istnieje punkt, wspólny prostym $b$ i $z'$ i położony między punktami $X$ i $Y'$. Przeto na mocy tw. 14 ($Y \to Y'$) istnieje punkt $W$, wspólny prostym $m$ i $c$ taki, że jest $W/BA$. (Dowód opiera się na zasadach II, III, IX, XII, XIV i tw. 9, 14).

**Def 2.** „Punkt $W$ jest punktem przecięcia się prostych $a$, $b$" znaczy to samo, co: „proste $a$, $b$ są od siebie różne i punkt $W$ jest im wspólny".

**Tw. 16.** Jeżeli $a$, $b$, $c$ oznaczają różne proste, leżące na płaszczyźnie $\pi$ i przecinające się w punkcie $M$, to przez każdy punkt $A$ prostej $a$, różny od punktu $M$, przechodzi conajmniej jedna prosta $l$, która nie przechodzi przez punkt $M$ i przecina proste $a$, $b$, $c$.

**Dowód.** Obieramy (A. IV) na prostej $a$ punkt $A$, na prostej $b$ punkt $B$, oba różne od punktu $M$; punkty $A$, $B$ są od siebie różne (II); przez $m$ oznaczmy prostą (II), określoną przez punkty $A$ i $B$. Prosta $m$ nie przechodzi (II, III) przez punkt $M$ i przeto proste $m$ i $c$ są od siebie różne. Albo proste $m$ i $c$ przecinają się, albo tak nie jest.

W pierwszym przypadku twierdzenie jest udowodnione.

W drugim przypadku obierzmy na prostej $c$ punkt $C$, różny od punktu $M$ (A. IV), i punkt $X$ na prostej $m$ tak, że jest $X/AB$ (XIV).

Punkty $X$ i $C$ są od siebie różne i oznaczmy przez $z$ prostą (II), określoną przez punkty $C$ i $X$. Prosta $z$ jest różna od prostych $a$, $b$, $c$. Na mocy tw. 14 i 15 i zasady II istnieje na prostej $z$ jeden punkt prostej $a$, albo jeden punkt prostej $b$, położony między punktami $C$ i $X$; z tych alternatyw tylko jedna zachodzi. Zajmiemy się przypadkiem, gdy na prostej $z$ leży punkt $X'$ prostej $b$ tak, że $X'/CX$ i nie istnieje punkt prostej $a$ taki, żeby leżał między punktami $C$ i $X$.

Ponieważ punkt $C$ jest różny od punktu $A$, tedy określą (II) prostą, którą oznaczymy przez $l$. Prosta $l$ jest różna od prostej $a$ i $c$, tedy prosta $l$ przecina je w punktach $A$ wzgl. $C$. Prosta $l$ jest także odmienna od prostej $b$; okażemy; że ją przecina. Punkty $A$, $C$, $X$ są od siebie różne i niewspółliniowe; prosta $b$ przez nie nie przechodzi (II, XII); te punkty leżą także na płaszczyźnie $\pi$ (IX). Do punktów $A$, $C$, $X$ i prostej $b$ stosujmy zasadę XVI; ponieważ jest $B\sim/AX$ (XV), $X'/XC$, tedy istnieje punkt $H$, wspólny prostym $b$ i $l$ taki, że jest $H/AC$.



W tym przypadku twierdzenie jest udowodnione.

Załóżmy, że na prostej $z$ leży punkt $X''$ prostej $a$ tak, że $X''/CX$ i nie istnieje punkt prostej $b$ taki, żeby leżał między punktami $C$ i $X$. W tym przypadku obierzmy na prostej $c$ punkt $C'$ tak, aby było $M/CC'$ (A. XIV). Punkty $C$, $C'$, $X$ są od siebie różne i niewspółliniowe; prosta $a$ nie przechodzi przez punkty $C$, $C'$, $X$. Do punktów $C$, $C'$, $X$ i do prostej $a$ stosujmy tw. 9; ponieważ jest $M/CC'$, $X''/XC$, tedy nie istnieje na prostej $z'$, określonej przez punkty $C'$, $X$ (A. II) żaden punkt prostej $a$, położony między punktami $C'$ i $X$, a że proste $c$ i $m$ się nie przecinają, więc na mocy tw. 14 i 15 istnieje punkt $X'$ prostej $b$, położony między punktami $C'$ i $X$; tem samem obecnie rozważany przypadek został sprowadzony do poprzedniego. Gdy więc prosta $c$ nie przecina prostej $m$, to istnieje przez $A$ przechodząca prosta $l$, która przecina proste $b$, $c$ w punktach $H$ wzgl. $C$ tak, że jest $H/AC$, (Dowód posługuje się zasadami II, III, IV, IX, XII, XIV, XV, XVI i tw. 9, 14, 15).

**Tw. 17.** Jeżeli przyjmiemy założenia poprzedniego twierdzenia, jak i oznaczenia jego dowodu, i jeżeli proste $c$ i $m$ się nie przecinają, to jest także $H/MB$.

**Dowód.** Punkty $H$, $M$, $B$ są współliniowe i różne od siebie. Przyjmijmy, że jest $H\sim/MB$, tedy na mocy zasady XV otrzymamy, że jest albo $M/BH$ albo $B/MH$.

Niech będzie $M/BH$. Do punktów $A$, $B$, $H$ niewspółliniowych i prostej $c$, która nie przechodzi przez punkty $A$, $B$, $H$ (II) i leży z niemi na płaszczyźnie $\pi$ (IX), stosujemy zasadę XVI. Ze związków $M/BH$ i $C\sim/AH$ (XV i tw. 16) wynika, że istnieje punkt $T$, wspólny prostym $c$ i $m$ taki, że $T/AB$, kiedy proste $c$ i $m$ się nie przecinają. Jest więc $M\sim/BH$.

Niech więc będzie $B/MH$. Do punktów $M$, $C$, $H$ niewspółliniowych i prostej $m$, która przez punkty $M$, $C$, $H$ nie przechodzi (II, III), stosujemy zasadę XVI; ze związków $B/MH$ i $A\sim/CH$ (XV i tw. 16) wynika, że istnieje punkt $T$, wspólny prostym $c$ i $m$ tak, że jest $T/MC$, co znów jest niemożliwe. Jest więc też $B\sim/MH$, tedy (XV) jest $H/MB$ c. b. d. u. (Dowód opiera się na zasadach II, III, IX, XV, XVI i tw. 16).

**Tw. 18.** Na płaszczyźnie $\pi$ dane cztery różne proste $a$, $b$, $c$, $d$ przechodzące przez punkt $M$. Wtedy przez każdy punkt $A$ prostej $a$, różny od punktu $M$, można poprowadzić przynajmniej jedną prostą $l$, nie przechodzącą przez punkt $M$, która przecina proste $a$, $b$, $c$, $d$.

**Dowód.** Na mocy tw. 17 może przyjąć istnienie prostej $m$ przecinającej proste $a$, $b$, $c$ w punktach $A$, $B$, $C$ różnych od punktu $M$, przyczem oznaczenia $b$, $c$, $B$, $C$ możemy zawsze tak przyjąć, że jest $B/AC$. Albowiem oznaczenia te można w każdym razie (XV) przyjąć tak, że jest albo $B/AC$ albo $A/BC$. Gdy jest $A/BC$, to na prostej $b$ przyjmujemy punkt $B'$ tak, by było $M/BB'$ (XIV); ponieważ punkty $A$, $B'$ są od siebie różne (II), tedy określają (II) prostą, którą oznaczmy przez $m'$. Do punktów $M$, $B$, $C$ nie współliniowych i prostej $m'$, która leży na płaszczyźnie $\pi$ (IX) i nie przechodzi przez żaden z punktów $M$, $B$, $C$ (II), stosujemy zasadę XVI, ze związków $B'\sim/MB$ (XV) i $A/BC$ wynika, że istnieje punkt $C'$ wspólny prostym $c$ i $m'$ i taki, że jest $C'/MC$. Do punktów $A$, $B$, $B'$ niewspółliniowych (II) i prostej $c$, która nie przechodzi przez punkty $A$, $B$, $B'$ (II), stosujemy znowu zasadę XVI i ze związków $M/BB'$ i $C\sim/AB$ (XV) otrzymujemy, że jest $C'/AB'$; tem samem wykazaliśmy, że możemy oznaczenia tak wybrać, że jest $B/AC$.

Możemy powiedzieć, że albo prosta $d$ przecina prostą $m$, albo tak nie jest. W pierwszym przypadku twierdzenie jest prawdziwe.

Zajmijmy się drugim przypadkiem. Obierzmy na prostej $d$ punkt $D$ (IV), różny od punktu $M$. Punkty $B$ i $D$ są od siebie różne (II) i określają prostą (II), którą oznaczymy przez $z$. Na mocy tw. 14 i 15 i zasady II leży na prostej $z$ między punktami $BD$ albo jeden punkt $X$ prostej $a$ albo punkt $Y$ prostej $c$, przyczem alternatywy te się wykluczają. Zajmijmy się przypadkiem istnienia punktu $Y$, wspólnego prostym $c$ i $z$ i takiego, że jest $Y/BD$. Punkty $A$ i $D$, jako różne od siebie (II), określają prostą, którą oznaczymy przez $l$. Na mocy tw. 16 i 17 prosta $l$ przecina prostą $c$ w punkcie $C'$ o własności $C'/MC$. Do punktów $A$, $C$, $C'$, różnych od siebie (II, XIII) i niewspółliniowych i prostej $b$, która przez te punkty nie przechodzi (II), stosujemy zasadę XVI. Ze związków $M\sim/CC'$ (XV) i $B/AC$ wynika, że istnieje punkt $B'$ wspólny prostym $b$ i $l$ taki, że jest $B'/AC'$; tem samem twierdzenie w rozważanym przypadku jest udowodnione.

Gdy zaś na prostej $z$ leży punkt $X$ prostej $a$ o własności $X/BD$ i tem samem poprzednio rozważany punkt $Y$ nie istnieje, to obieramy punkt $D'$ na prostej $d$ tak, że jest $M/DD'$ (XIV) i zamiast prostej $z$ rozważamy prostą $z'$, określoną (II) przez dwa od siebie różne punkty $B$ i $D'$ (II).

Do punktów $B$, $D$, $D'$, różnych i niewspółliniowych (II), i prostej $a$, która nie przechodzi przez punkty $B$, $D$, $D'$ (II), stosujemy tw. 9: skoro bowiem jest $M/DD'$ i $X/BD$, więc nie istnieje punkt $X'$ prostej $a$ na prostej $z'$ o własności $X'/BD'$, tedy na mocy tw. 14 i 15 leży punkt $Y'$ prostej $c$ na prostej $z'$ o własności $Y'/BD'$; tem samem ten przypadek jest sprowadzony do poprzedniego.

Twierdzenie przeto w całości zostało udowodnione. (Dowód polega na zasadach II, IV, IX, XIII, XIV, XV, XVI i tw. 9, 14, 15, 16, 17).

**Uwaga.** Jeżeli uwzględnimy zasady, na których opierają się dowody



twierdzeń 9, 14, 15, 16, 17, 18 jak i innych, które są dla tych pomocniczemi, to powiemy:

t w i e r d z e n i e 18 j e s t l o g i c z n ą k o n s e k w e n c y ą n a s t ę p u j ą c y c h z a s a d: II, III, IV, V, VI, VIII, IX, XII, XIII, XIV, XV i XVI.

§ **7.** Pojęcie przeplatania, dotąd określone tylko dla punktów prostej, określimy dla czterech prostych pęku prostych, t. zn. dla czterech prostych (różnych), współpłaszczyznowych i przechodzących przez jeden punkt. Taka definicya, jaka będzie podana, wymaga pewnego usprawiedliwienia przez twierdzenie 21.

**Tw. 19.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają cztery różne i współliniowe punkty, można je zawsze tak oznaczyć, że punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$.

**Dowód.** Uważajmy trzy punkty z tych, o których mowa w założeniu; można je (XV) tak oznaczyć, iż jest $C/AB$ i albo jest też $D/AB$, albo tak nie jest; w tym drugim przypadku twierdzenie jest udowodnione. Zajmijmy się pierwszym przypadkiem. Z założeń $D/AB$ i $C/AB$ otrzymujemy na podstawie tw. 12 [$A$, $B$, $C$, $E \to A$, $C$, $D$, $B$], że jest $B\sim/CD$, tedy na podstawie zasady XV mamy, że jest albo $C/BD$ albo $D/BC$. Mamy więc do zbadania dwa przypadki:

1. $D/AB$, $C/AB$, $C/BD$,
2. $D/AB$, $C/AB$, $D/BC$.

W pierwszym przypadku z założeń $C/BD$ i $D/AB$ otrzymujemy na podstawie tw. 2 [$A$, $B$, $C$, $D \to B$, $D$, $C$, $A$], że jest $D/CA$, nadto ze związku $C/AB$ wynika (XV), że jest $B\sim/CA$. Mamy więc $D/EA$ i $B\sim/CA$, tedy oznaczenia $A$, $B$, $C$, $D$ trzeba zmienić na $A$, $C$, $B$, $D$.

W drugim przypadku z $C/AB$ otrzymujemy (XV) $A\sim/BC$, co ze związkiem $D/BC$ potwierdza prawdziwość twierdzenia, jeżeli np. zmienimy oznaczenia $A$, $B$, $C$, $D$ na oznaczenia $C$, $A$, $B$, $D$.

(Dowód polega na zasadzie XV i tw. 2, 12).

**Tw. 20.** Jeżeli punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$, to punkty $B$, $D$ nie przeplatają punktów $A$, $C$ ani punkty $B$, $C$ nie przeplatają punktów $A$, $D$. [1)]

**Dowód.** Załóżmy, że punkty $A$, $B$, $C$, $D$ są od siebie różne i współliniowe i że jest albo $C/AB$ i $D\sim/AB$ albo $C\sim/AB$ i $D/AB$. Okażemy, że punkty $B$, $D$ nie przeplatają punktów $A$, $C$. Załóżmy, że także punkty $B$, $D$ przeplatają punkty $A$, $C$, że jest też:

$$\text{albo} \quad B/AC \text{ i } D\sim/AC \quad \text{albo} \quad B\sim/AC \text{ i } D/AC.$$

---

1) Tw. 19 i 20 zob. Pasch, loc. cit., str. 15, Lehrsatz 19 (wyd. z r. 1912).

Wskutek tego musimy odróżnić cztery przypadki:

($\alpha$) $C/AB$, $D\sim/AB$, $B/AC$, $D\sim/AC$;

($\beta$) $C/AB$, $D\sim/AB$, $B\sim/AC$, $D/AC$;

($\gamma$) $C\sim/AB$, $D/AB$, $B/AC$, $D\sim/AC$;

($\delta$) $C\sim/AB$, $D/AB$, $B\sim/AC$, $D/AC$.

Przypadek ($\alpha$) jest niemożliwy wobec związków $C/AB$ i $B/AC$ (XV).

W przypadku ($\beta$) ze związków $D/AC$ i $C/AB$ otrzymujemy na mocy tw. 11 [$A$, $B$, $C$, $D \to A$, $D$, $C$, $B$] związek $D/AB$, sprzeczny (XV) z przypadkiem ($\beta$).

Przypadek $\gamma$ przechodzi w przypadek $\beta$ przez przestawienie liter $B$, $C$ na $C$, $B$, a więc i przypadek ($\gamma$) zachodzić nie może.

W przypadku ($\delta$) ze związków $C\sim/AB$ i $B\sim/AC$ wynika na mocy zasady XV związek $A/BC$, a stąd i ze związku $D/AB$ na mocy tw. 2 [$A$, $B$, $C$, $D \to B$, $A$, $D$, $C$] wynika, że jest $A/CD$, co jest sprzeczne (XV) ze związkiem $D/AC$. Żaden więc z przypadków ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$) zachodzić nie może i wskutek tego udowodniliśmy pierwszą część twierdzenia. Ponieważ z założenia wynika też (tw. 3), że punkty $D$, $C$ przeplatają punkty $A$, $B$, tedy na podstawie pierwszej części obecnie rozważanego twierdzenia [$A$, $B$, $C$, $D \to A$, $B$, $D$, $C$] wynika i druga część twierdzenia. (Dowód polega na zasadzie XV i tw. 2, 3, 11).

**Tw. 21.** Jeżeli $a$, $b$, $c$, $d$ oznaczają cztery różne proste, które leżą na płaszczyźnie $\pi$ i przechodzą przez punkt $M$, jeżeli je przetniemy dwiema różnemi prostemi $l$ i $l'$, które nie przechodzą przez punkt $M$, jeżeli punkty przecięcia prostych $a$, $b$, $c$, $d$ z prostą $l$ oznaczymy odpowiednio przez $A$, $B$, $C$, $D$, punkty zaś przecięcia z prostą $l'$ przez $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ i jeżeli punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$, to punkty $C'$, $D'$ przeplatają punkty $A'$, $B'$. [1])

**Dowód.** Punkty $A$, $B$, $C$, $D$ są od siebie różne (II), punkty $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ także są od siebie różne. Jeżeli punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$, to jest albo $C/AB$ i $D\sim/AB$ albo $D/AB$ i $C\sim/AB$; jeżeliby zachodziła druga alternatywa, to zmiana oznaczeń $C$, $D$ na $D$, $C$ sprowadza ją do alternatywy pierwszej. Z tego powodu wystarczy zająć się przypadkiem, kiedy jest $C/AB$ i zarazem $D\sim/AB$.

Twierdzimy, że jest $C'/A'B'$ i $D'\sim/A'B'$, albo $C'\sim/A'B'$ i $D'/A'B'$.

Punkt $M$ jest różny od punktów $A$ i $A'$ (II) i albo punkty $A$ i $A'$ są od siebie różne, albo tak nie jest. Zajmiemy się dłuższy czas przypadkiem pierwszym.

Skoro punkty $M$, $A$, $A'$ są współliniowe i od siebie różne, tedy (XV) jest albo $M/AA'$ albo $A'/MA$ albo $A/MA'$. Załóżmy tedy najpierw, że jest

$$(1) \qquad M/AA'.$$

[1]) Pasch, loc. cit. str. 62 (wyd. z r. 1912).



Punkt $B$ nie leży na prostej $a$ (II, III), tedy punkty $A$, $A'$, $B$ są niewspółliniowe, prosta $d$ nie przechodzi przez nie (II); do punktów tych i tej prostej stosujemy zasadę XVI; tedy, ponieważ jest

$$D\sim/AB\,.\,M/AA',$$

więc istnieje punkt $F$, wspólny prostym $d$ i $[A'B]$ [1]) (II), tak że $F/A'B$.

O punktach $B$ i $B'$ można założyć, że albo są od siebie różne albo też schodzą się. Założymy najpierw, że

(1,1) punkty $B$ i $B'$ są od siebie różne.

Do punktów $A'$, $B$, $B'$ od siebie różnych (II) i niewspółliniowych (tw. 1) i prostej $d$ stosujemy zasadę XVI i tw. 9; t. zn. ze związku $F/A'B$ wynika, że albo jest $M/BB'$ i $D'\sim/A'B'$ albo $M\sim/BB'$ i $D'\sim/A'B'$.

Zakładamy dalej, że jest

$$(1,\,1,\,1) \qquad M/BB';$$

jest tedy też $D'\sim/A'B'$. Do punktów $A$, $A'$, $B'$, od siebie różnych (II) i niewspółliniowych (tw. 1), i prostej $c$ stosujemy zasadę XVI; ponieważ jest $M/AA'$, jest tedy albo $C'/A'B'$, albo istnieje punkt $K$ wspólny prostym $c$ i $[AB']$ (II) taki, że jest $K/AB'$. Okażemy, że związek $K/AB'$ jest nieprawdziwy. Przyjmijmy, że jest prawdziwy, wtedy na mocy tw. 9 jest także $C'\sim/A'B'$. Do punktów $A$, $B$, $B'$, od siebie różnych i niewspółliniowych (II, III), i prostej $c$, która przez te punkty nie przechodzi (II, III), stosujmy tw. 9; ze związków $K/AB'$ i $M/BB'$ wynika, że jest $C\sim/AB$, wbrew założeniu. Jest więc prawdą $C'/A'B'$. Tem samem dokończyliśmy dowodu twierdzenia przy założeniach (1), (1, 1), (1, 1, 1). Zróbmy znów założenia (1) i (1, 1) i zamiast założenia (1, 1, 1) zróbmy założenie:

$$(1,\,1,\,2) \qquad M\sim/BB';$$

jest tedy $D'/A'B'$. Do punktów $A$, $A'$, $B'$, od siebie różnych (II) i niewspółliniowych (tw. 1), i prostej $c$, która przez nie nie przechodzi (II, III), stosujemy zasadę XVI; ze związku $M/AA'$ wynika, że jest $C'/A'B'$ albo też, gdy jest $C'\sim/A'B'$, istnieje na prostej $c$ i prostej $[AB']$ (II) punkt $K$ wspólny i taki, że jest $K/AB'$. Okażemy, że związek $C'/A'B'$ zachodzić nie może. Załóżmy bowiem, że jest $C'/A'B'$. Do punktów $A'$, $B$, $B'$, od siebie różnych (II) i niewspółliniowych (tw. 1), i prostej $c$, która przez nie nie przechodzi (II, III), stosujemy zasadę XVI: tedy ze związków $C'/A'B'$ i $M\sim/BB'$ wynika, że istnieje punkt $L$, wspólny prostym $c$ i $[A'B]$ (II) i taki, że jest $L/A'B$. Do punktów

[1]) Symbol $[XY]$ oznacza prostą, określoną przez punkty $X$, $Y$; symbol ma więc znaczenie wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $X$, $Y$ są od siebie różne. Użycie tego symbolu przyjmuje jako przesłankę zasadę II.

$A, A', B$, od siebie różnych (II) i niewspółliniowych (II, III), i prostej $c$ stosujemy tw. 9: tedy ze związków $L/A'B$ i $M/AA'$ wynika, że jest $C\sim/AB$, co jest przeciwne założeniu. Jest więc $C'\sim/A'B'$. Udowodniliśmy tedy twierdzenie przy założeniach (1), (1, 1) i (1, 1, 2) i tem samem dokończyliśmy dowodu przy założeniach (1) i (1, 1).

Robimy teraz znów założenie (1) i zamiast (1, 1) przyjmujemy, że

(1, 2) punkt $B$ schodzi się z punktem $B'$.

Do punktów $A$, $A'$, $B$ i prostej $c$ stosujemy tw. 9: ze związków $C/AB$ i $M/AA'$ wynika $C'\sim/A'B'$. Do punktów $A$, $A'$, $B$ i prostej $d$, która przez te punkty nie przechodzi (II, III), stosujemy znów zasadę XVI: ze związków $D\sim/AB$ i $M/AA'$ wynika, że jest $D'/A'B$ czyli $D'/A'B'$.

Twierdzenie jest więc udowodnione przy założeniach (1) i (1, 2), wobec tedy poprzedniego wyniku — przy założeniu (1).

Przyjmiemy teraz, że jest

(2) $A'/AM$.

Do punktów $A$, $A'$, $B$ i prostej $c$, która przez nie nie przechodzi (II, III), stosujemy zasadę XVI: ze związków $M\sim/AA'$ (XV) i $C/AB$ otrzymujemy, że istnieje punkt $F$, wspólny prostym $c$ i $[A'B]$ (II) i taki, że jest $F/A'B$. (XIII). Załóżmy, że jest

(2, 1) punkt $B'$ jest różny od punktu $B$.

Do punktów $A', B, B'$ i prostej $c$, która przez nie nie przechodzi (II, III), stosujemy tw. 9: ze związku $F/A'B$ wynika, że jest albo $M/BB'$ i $C'\sim/A'B'$, albo $M\sim/BB'$ i $C/A'B'$. Załóżmy tedy, że jest:

(2, 1, 1) $M\sim/BB'$;

jest tedy też $C'/A'B'$. Twierdzimy, że jest $D''\sim/A'B'$. Załóżmy bowiem, że jest $D'/A'B'$. Do punktów $A', B, B'$, różnych i niewspółliniowych (II, III), i do prostej $d$, która przez te punkty nie przechodzi (II, III), stosujmy zasadę XVI: ze związków $M\sim/BB'$ i $D'/A'B'$ wynika, że istnieje punkt $K$, wspólny prostym $d$ i $[A'B]$ (II) taki, że jest $K/A'B$. Do punktów $A, A', B$ i prostej $d$ stosujemy znów zasadę XVI: ze związków $D\sim/AB$ i $M\sim/AA'$ wynika, że albo nie istnieje punkt wspólny prostym $d$ i $[A'B]$ (II), albo istnieje taki punkt ($K$), nie położony między $A', B$, co jest sprzeczne z poprzednim wynikiem. Jest więc $D'\sim/A'B'$. . Twierdzenie jest więc udowodnione wśród założeń (2), (2, 1) i (2, 1, 1).

Załóżmy obok (2) i (2, 1) jeszcze, że jest

(2, 1, 2) $M/BB'$;

wtedy jest też $C'\sim/A'B'$. Do punktów $A, B, B'$ i prostej $d$ stosujmy zasadę XVI: ze związków $M/BB'$ i $D\sim/AB$ otrzymujemy, że istnieje punkt $F$, wspólny prostym $d$ i $[AB']$ taki, że jest $F/AB'$.



Do punktów $A$, $A'$, $B'$ i prostej $d$ stosujemy zasadę XVI: ze związków $M\sim/AA'$ i $F/AB'$ wynika, że jest $D'/A'B'$.

Twierdzenie zostało tedy udowodnione przy założeniach (2), (2, 1) i (2, 1, 2), więc wobec poprzedniego wyniku jest ono prawdziwe przy założeniach (2) i (2, 1).

Oprócz założenia (2) zróbmy jeszcze założenie że

(2, 2) punkt $B'$ schodzi się z punktem $B$.

Do punktów $A$, $A'$, $B$, od siebie różnych i niewspółliniowych (II, III), określających płaszczyznę $\pi$ (VI, VIII), i do prostej $c$, która leży na płaszczyźnie $\pi$ i przez punkty $A, A', B$ nie przechodzi, stosujmy zasadę XVI: ze związków $M\sim/AA'$ i $C/AB$ wynika, że jest $C'/A'B$, czyli $C'/A'B'$. Do punktów $AA'B$ i prostej $d$ stosujmy zasadę XVI: ze związków $M\sim/AA'$ i $D\sim/AB$ wynika, że jest też $D'\sim/A'B$, czyli $D'\sim/A'B'$. Twierdzenie jest więc prawdziwe przy założeniach (2) i (2, 2), tedy wobec poprzednich wyników jest prawdziwe przy założeniu (2).

Załóżmy wreszcie, że zachodzi związek:

(3) $A/MA'$.

Na mocy tw. 3, 19 i 20 zachodzi jedna i tylko jedna z następujących ewentualności:

albo punkty $C'$, $D'$ przeplatają punkty $A'$, $B'$; (α)

albo punkty $D'$, $B'$ przeplatają punkty $A'$, $C'$; (β)

albo punkty $B'$, $C'$ przeplatają punkty $A'$, $D'$. (γ)

Na mocy obecnie rozważanego twierdzenia, udowodnionego przy założeniu (2), wynika, że:

w przypadku (β) punkty $D$, $B$ przeplatają punkty $A$, $C$, co jest wobec tw. 20 sprzeczne z założeniem, że punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$;

w przypadku (γ) punkty $B$, $C$ przeplatają punkty $A$, $D$, co znów wobec tw. 20 jest sprzeczne z tem samem założeniem. Prawdziwym jest więc tylko związek (α), czyli twierdzenie 21 jest prawdziwe i przy założeniu (3).

Wreszcie przyjmijmy, że

(4) punkt $A$ schodzi się z punktem $A'$.

Ponieważ proste ($l$) i ($l'$) są od siebie różne, więc (II) punkt $B$ jest różny od punktu $B'$, $C$ od $C'$, $D$ od $D'$. Wobec tego, że także (tw. 3, 8) punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $B$, $A$, możemy całe dotychczasowe rozumowanie, kiedy punkty $A$ i $A'$ są od siebie różne, powtórzyć, podstawiając litery $A$, $A'$, $B$, $B'$ za litery $B$, $B'$, $A$, $A'$. Tem samem twierdzenie jest w zupełności udowodnione. (Dowód opiera się na zasadach II, III, VI, VIII, XIII, XV, XVI i na tw. 1, 3, 8, 9, 19, 20; jeżeli uwzględnimy zasady, na których polega dowód pomocniczych twierdzeń, to ostatecznie spostrzegamy, że dowód tw. 21 posługuje się zasadami: II, III, V, VI, VIII, IX, XII, XIII, XIV, XV i XVI).

Tw. 21 dowodzi, że następujące określenie jest jednoznaczne i poprawne.

**Def. 3.** Niech $a$, $b$, $c$, $d$ oznaczają cztery różne proste współpłaszczyznowe i przechodzące przez jeden punkt $M$. Zdanie: „proste $c$, $d$ przeplatają proste $a$, $b$" uważać będziemy za równoważne zdaniu: „istnieje co najmniej jedna prosta, która, nie przechodząc przez punkt $M$, przecina proste $a$, $b$, $c$, $d$ odpowiednio w punktach $A$, $B$, $C$, $D$ tak, że punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$.

Pozostawiamy czytelnikowi wyciąganie wniosków dalszych.

§ **7.** Pojęcie przeplatania trzeba jeszcze określić dla płaszczyzn pęku płaszczyzn; wymaga to znów pewnego twierdzenia, którego dowód opiera się na całym szeregu twierdzeń pomocniczych. Niniejszy paragraf zawierać będzie odnośne rozumowania.

**Def. 4.** Zdanie: „płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez prostą $l$" ma być równoważne zdaniu: „każdy punkt prostej $l$ leży na płaszczyźnie $\pi$".

**Def. 5.** „Prosta $l$ przecina płaszczyznę $\pi$ w punkcie $A$" ma znaczyć to samo co: „punkt $A$ jest punktem wspólnym prostej $l$ i płaszczyzny $\pi$, przyczem płaszczyzna $\pi$ nie przechodzi przez prostą $l$".

**Tw. 22.** Jeżeli płaszczyzna $\pi$ nie przechodzi przez prostą $l$, to istnieje co najwyżej jeden punkt przecięcia się prostej $l$ i płaszczyzny $\pi$.

Dowód, jako łatwy pomijam, opiera się on na zasadzie IX.

**Tw. 23.** Jeżeli dwie od siebie różne płaszczyzny $\alpha$ i $\beta$ mają punkt wspólny $A$, to wszystkie punkty wspólne leżą na jednej prostej, przechodzącej przez punkt $A$.

Dowód pomijamy; opiera się na zasadach VI, IX i X.

**Def. 6.** „Płaszczyzny $\alpha$, $\beta$ przecinają się wzdłuż prostej $l$" znaczyć ma to samo, co zdanie: „płaszczyzny $\alpha$, $\beta$ są od siebie różne i punkty wspólne tych płaszczyzn leżą na prostej $l$".

**Def. 7.** Niech punkty $A$, $B$ i prosta $a$ leżą na płaszczyźnie $\alpha$. Zdanie: „punkty $A$, $B$ leżą po tej samej stronie prostej $a$" ma być równoważne zdaniu: „punkty $A$, $B$ są od siebie różne i nie leżą na prostej $a$ i żaden punkt prostej $a$ nie leży na prostej $[A, B]$ między punktami $A$, $B$".

**Def. 8.** Niech punkty $A$, $B$ i prosta $a$ leżą na płaszczyźnie $\alpha$. Zdanie „punkty $A$, $B$ leżą po przeciwnych stronach prostej $a$" ma znaczyć to samo, co zdanie „punkty $A$, $B$ są od siebie różne i nie leżą na prostej $a$ i istnieje punkt $C$ wspólny prostym $a$ i $[AB]$ i taki, że $C/AB$".



**Def. 9.** „Punkty $A$, $B$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$" ma znaczyć to samo, co zdanie: „punkty $A$, $B$ są od siebie różne i nie leżą na płaszczyźnie $\alpha$ i żaden punkt płaszczyzny $\alpha$ nie leży na prostej $[A, B]$ między punktami $A$ i $B$".

**Def. 10.** Zdanie „punkty $A$ i $B$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\alpha$" ma być równoważne zdaniu: „punkty $A$, $B$ są od siebie różne i nie leżą na płaszczyźnie $\alpha$ i istnieje punkt $C$ wspólny prostej $[A, B]$ i płaszczyźnie $\alpha$ i taki, że $C/AB$".

**Tw. 24.** Jeżeli punkty $A$, $B$ nie leżą na płaszczyźnie $\alpha$ i są od siebie odmienne, to albo leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$, albo po jej stronach przeciwnych. [1])

**Dowód.** Z założenia punkty $A$, $B$ określają prostą $[A, B]$ (II), przez którą płaszczyzna $\alpha$ nie przechodzi. Na mocy tw. 22 prosta $[AB]$ i płaszczyzna $\alpha$ nie mają punktu wspólnego (wtedy punkty $A$, $B$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$), albo mają punkt wspólny $C$, który jest odmienny od punktów $A$, $B$. Wtedy (XV) jest albo $A/BC$ albo $B/AC$ albo $C/AB$; w pierwszych dwóch przypadkach jest $C\sim/AB$, czyli punkty $A$, $B$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$; w ostatnim przypadku jest $C/AB$ i wtedy punkty $A$, $B$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\alpha$. (Dowód opiera się na zasadach II, XV i na tw. 22).

**Tw. 25.** Jeżeli punkty $A$, $B$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$ i punkty $B$, $C$ leżą też po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$, to także punkty $A$, $C$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$, o ile tylko nie są identyczne.

**Dowód.** Albo punkty $A$, $B$, $C$ są współliniowe, albo tak nie jest.

W pierwszym przypadku albo prosta $[AB]$ przecina płaszczyznę $\alpha$, albo nie (tw. 22). Jeżeli prosta $[AB]$ (II) płaszczyzny $\alpha$ nie przecina, to twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy teraz, że punkty $A$, $B$, $C$ są współliniowe i że prosta $[AB]$ przecina płaszczyznę $\alpha$ w punkcie $D$, który oczywiście jest odmienny od punktów $A$, $B$, $C$. Z założeń wynika, że jest $D\sim/AB$ i $D\sim/BC$. Okażemy, że jest też $D\sim/AC$. Przyjmijmy bowiem, że jest $D/AC$. Ze związku $D\sim/AB$ wynika (XV), że jest $B/AD$ albo $A/BD$. Rozważmy więc dwa przypadki:

1) $D/AC$, $B/AD$, $D\sim/BC$;
2) $D/AC$, $A/BD$, $D\sim/BC$.

W przypadku 1 ze związków $B/AD$ i $D/AC$ na mocy tw. 2 $[A, B, C, D \longrightarrow A, D, B, C]$ otrzymujemy związek $D/BC$, sprzeczny właśnie z tym przypadkiem.

W przypadku 2 ze związków $D/AC$ i $A/BD$ na mocy tw. 13 $[A, B, C, E \longrightarrow$

[1]) Pasch, loc. cit. str. 30 (wyd. z r. 1912).

$C, A, D, B$] wynika związek $D/CB$, a więc (XIII) $D/BC$, znów sprzeczny z przypadkiem 2. Innemi słowy w tym przypadku twierdzenie jest udowodnione.

Zajmijmy się teraz przypadkiem, kiedy punkty $A$, $B$, $C$ nie są współliniowe; wtedy (VIII) określają płaszczyznę, którą oznaczymy przez $\beta$. Prosta $[AC]$ (II) nie leży na płaszczyźnie $\alpha$, wtedy albo ma z nią jeden punkt $D$ wspólny, albo tak nie jest; w drugim przypadku twierdzenie jest prawdziwe. W pierwszym przypadku zauważymy, że punkt $D$ leży też na płaszczyźnie $\beta$ (IX), wobec tego (tw. 23) punkty wspólne płaszczyzn $\alpha$ i $\beta$ leżą na prostej, którą oznaczymy przez $l$. Prosta $l$ nie przechodzi przez punkty $A$, $B$, $C$; na mocy zasady XVI jest $D\sim/AC$, o co chodziło. (Dowód opiera się na zasadach II, VIII, IX, XIII, XV, XVI i na tw. 2, 13, 22, 23).

**Tw. 26.** Jeżeli punkty $Y$, $X$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\pi$, jeżeli $\sigma$ oznacza jedną z płaszczyzn przechodzących przez prostą $[XY]$ i jeżeli $m$ oznacza prostą przecięcia się płaszczyzn $\pi$ i $\sigma$, to punkty $X$, $Y$ leżą na płaszczyźnie $\sigma$ po przeciwnych stronach prostej $m$.

**Dowód.** Jeżeli punkty $X$, $Y$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\pi$, to są od siebie różne, określają (II) więc prostą $[XY]$, na której leży punkt $Z$ płaszczyzny $\pi$ taki, że jest $Z/XY$. Na mocy zasady $V$ obierzmy punkt $T$, który nie leży na prostej $[XY]$; punkty $XYT$ określają płaszczyznę $\sigma$ (VI); na niej (IX) leży punkt $Z$, tedy (tw. 22) płaszczyzny $\pi$ i $\sigma$ przecinają się wzdłuż prostej $m$, która przechodzi przez punkt $Z$. Prosta $m$ nie przechodzi przez punkty $X$, $Y$. Tem samem twierdzenie jest udowodnione. (Dowód polega na zasadach II, V, VI, IX i na tw. 22).

**Tw. 27.** Jeżeli punkty $A$, $B$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\alpha$, zaś punkty $B$, $C$ po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$, to punkty $A$, $C$ leżą po przeciwnych stronach tej płaszczyzny.

**Dowód.** Własności, określone definicyami Def. 9, 10, wyłączają się wzajemnie; punkty $A$ i $C$ są tedy od siebie różne, przeto na mocy tw. 24 albo leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\alpha$, albo po tej samej stronie. Dość wykazać, że drugi przypadek jest niemożliwy. Rzeczywiście z założenia, iż punkty $B$, $C$ wzgl. $C$, $A$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\alpha$, i z uwagi, że punkty $A$, $B$ nie schodzą się, wynikałoby na mocy tw. 25, że i punkty $A$ i $B$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny 1, wbrew założeniu. (Dowód polega na w. 24 i 25).

**Tw. 28.** Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają różne i współliniowe punkty i jeżeli jest $C/AB$ i $D\sim/AB$, to albo jest $B/AD$ i $C/AD$, albo $A/BD$ i $C/BD$. [1]

[1]) Pasch, loc. cit. str. 11, tw. 17.



**Dowód.** Otóż związek $D\sim/AB$ jest równoważny (XV) związkowi $A/BD$ lub $B/AD$. Musimy więc odróżnić dwa przypadki:

(α) $\quad C/AB, \quad A/BD;$

(β) $\quad C/AB, \quad B/AD.$

W przypadku (α) otrzymujemy na mocy tw. 11 $[A,B,C,D \longrightarrow B, C, A, D]$ związek $C/BD$. W przypadku (β) otrzymujemy na mocy tw. 11 $[A, B, C, D \longrightarrow A, C, B, D]$ związek $C/AD$. [Dowód opiera się na zasadzie XV i tw. 11].

**Tw. 29.** Jeżeli $H$, $X$, $Y$, $Z$, $U$ oznaczają różne i współliniowe punkty, to ze związków $Y/XU$, $Z/XU$, $H\sim/XU$ wynikają związki:

$$H\sim/XY, \quad H\sim/XZ, \quad H\sim/YZ, \quad H\sim/YU, \quad H\sim/ZU.$$

**Dowód.** Mamy więc udowodnić twierdzenia: Związki

(α) $\quad Y/XU, \quad Z/XU, \quad H\sim/XU$ dają $H\sim/XY$;

(β) $\quad Y/XU, \quad Z/XU, \quad H\sim/XU$ dają $H\sim/XZ$;

(γ) $\quad Y/XU, \quad Z/XU, \quad H\sim/XU$ dają $H\sim/YZ$;

(δ) $\quad Y/XU, \quad Z/XU, \quad H\sim/XU$ dają $H\sim/YU$;

(ε) $\quad Y/XU, \quad Z/XU, \quad H\sim/XU$ dają $H\sim/ZU$.

Jeżeli przyjmiemy, że tw. (α) jest prawdziwe, to przestawienie w niem liter $X, U$ na $U, X$, daje (XIII) nam prawdziwość tw. (δ); przestawienie zaś liter $Y$, $Z$ na $Z$, $Y$ w tw. (α) daje nam tw. (β); a jeżeli w tw. (β) przestawimy ze sobą litery $X$, $U$, to otrzymamy tw. (ε). Wskutek tego wystarczy nam udowodnić tw. (α) i (γ).

**Dowód tw.** (α). Przyjmijmy, że jest $H/XY$; w takim razie ze związków $H/XY$ i $Y/XU$ wynika, na mocy tw. 11 $[A, B, C, D \longrightarrow X, H, Y, U]$, związek $H/XU$ sprzeczny z założeniem; tem samem tw. (α) jest prawdziwe.

**Dowód tw.** (γ). Ze związków $Y/XU$ i $Z/XU$ otrzymujemy na podstawie tw. 12 $[A, B, C, E \longrightarrow U, Y, Z, X]$ związek $X\sim/YZ$, równoważny (XV), albo związkowi $Y/XZ$ albo związkowi $Z/XY$. Przyjmijmy, że zachodzi związek $H/YZ$. Na mocy tw. 11 $[A, B, C, D \longrightarrow Z, H, Y, X]$ i zasady XIII ze związków $H/YZ$ i $Y/XZ$ wynika związek $H/ZX$ (γ'); znów na mocy tw. 11 $[A, B, C, D \longrightarrow X, H, Z, U]$ i zasady XIII ze związków $H/ZX$ i $Z/XU$ wynika związek $H/XU$ (γ''), co jest sprzeczne z założeniem. Przestawiając litery $Y$, $Z$ na $Z$, $Y$ w zdaniach (γ') i (γ''), otrzymujemy (XIII), że także zdania: $H/YZ$, $Z/XY$, $Y/XU$ powodują sprzeczność. Tem samem twierdzenie zostało udowodnione.

(Dowód polega na zasadach XIII, XV i tw. 11, 12).

**Tw. 30.** Prosta i punkt na niej nie leżący określają jedną i tylko jedną płaszczyznę, która przez tę prostą i punkt przechodzi.

Dowód, jako łatwy pomijamy, opiera się na zasadach III, IV, VI, VIII, IX.

**Tw. 31.** Jeżeli $A, B, C, D, E$ oznacza pięć różnych i współliniowych punktów, to istnieje co najmniej jeden punkt $F$ na prostej $[AB]$ taki, że jest $F\sim/AB$, $F\sim/AC$, $F\sim/AD$, $F\sim/AE$, $F\sim/BC$, $F\sim/BD$, $F\sim/BE$, $F\sim/CD$, $F\sim/CE$, $F\sim/DE$.

**Dowód.** Oznaczenia $A, B, C$ wybieram tak, iż (XV) jest $B/AC$ i wtedy albo $D/AC$ albo $D\sim/AC$; w drugim przypadku na mocy tw. 28 $[A, B, C, D \rightarrow A, C, B, D]$ wynika, że jest albo $B/AD$ i $C/AD$, albo $A/CD$ i $B/CD$. W każdym więc razie można punkty $A, B, C, D$ tak oznaczyć przez $X, Y, Z, U$, iż jest $Y/XU$ i $Z/XU$. Piąty punkt ma albo własność $E/XU$ albo $E\sim/XU$. W drugim przypadku (XV) jest albo $X/EU$ albo $U/XE$; mamy do odróżnienia dwa przypadki:

($\alpha$) $\quad Y/XU, \quad Z/XU, \quad X/EU$;

($\beta$) $\quad Y/XU, \quad Z/XU, \quad U/XE$.

Otóż ze związków $Y/XU$ i $X/EU$, na mocy tw. 11 $[A, B, C, D \rightarrow U, Y, X, E]$, otrzymujemy $Y/EU$; przez zamianę $Y$ na $Z$ otrzymujemy $Z/EU$, czyli w przypadku ($\alpha$) otrzymujemy związki:

($\alpha'$) $\quad X/EU, \quad Y/EU, \quad Z/EU$.

Przestawiając litery $X, U$ na $U, X$, widzimy, że przypadek ($\alpha$) przechodzi w przypadek $\beta$, tedy $\beta$ daje nam związki

($\beta'$) $\quad U/EX, \quad Y/EX, \quad Z/EX$,

otrzymane z ($\alpha'$). W każdym razie (XIII) pięć punktów $A, B, C, D, E$ możemy tak oznaczyć literami $X, Y, Z, T, U$, iż jest

$$Y/XU, \quad Z/XU, \quad T/XU.$$

Istnieje (XIV) punkt $V$ na prostej $[AB]$ różny od punktów $A, B$ $C, D, E$ tak, że jest $U/VX$. Jest więc (XV) $V\sim/UX$. Jeżeli przez $M$ oznaczymy jeden z punktów $Y, Z, T$, to ze związków $M/XU$ i $U/VX$ otrzymujemy na mocy tw. 11 $[A, B, C, D \rightarrow X, M, U, V]$ i zasady XIII, że jest $M/VX$ stąd $V\sim/MX$ (XV) lub $V\sim/XM$ (XIII).

Okazaliśmy więc, że jest

$$V\sim/XY, \quad V\sim/XZ, \quad V\sim/XT, \quad V\sim/XU.$$

Jeżeli przez $M, N$ oznaczymy dwa różne z punktów $Y, Z, T$, to otrzymujemy, jak wyżej, $M/XV$, $N/XV$, przeto na mocy tw. 12 $[A, B, C, E \rightarrow X, M, N, V]$, że jest $V\sim/MN$ jest więc:

$$V\sim/YZ, \quad V\sim/YT, \quad V\sim/ZT.$$

Oznaczmy $Z, Y, T$ przez $M$; tedy ze związków $M/XU$ i $U/VX$ na mocy tw. 2 $[A, B, C, D \rightarrow X, U, M, V]$ związek $U/MV$, stąd (XV): $V\sim/MU$, przeto



jest

$$V\sim/YU, \quad V\sim/ZU, \quad V\sim/TU.$$

Tem samem twierdzenie w zupełności udowodnione. (Dowód opiera się na zasadach XIII, XIV, XV i na tw. 2, 11, 12, 28).

**Tw. 32.** Niech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ oznaczają cztery płaszczyzny, które przechodzą przez prostą $x$; niech prosta $l$, nie przecinając prostej $x$, przecina te płaszczyzny odpowiednio w punktach $A, B, C, D$, prosta $l'$ w punktach $A', B', C', D'$, też nie przecinając prostej $x$.

Jeżeli punkty $C, D$ przeplatają punkty $A, B$, to także punkty $C', D'$ przeplatają punkty $A', B'$.

**Dowód.** Najpierw zajmiemy się kolejno dwoma szczególnemi przypadkami, a potem ogólny przypadek do drugiego sprowadzimy.

1) Załóżmy, że proste $l, l'$ leżą na jednej płaszczyźnie $\pi$, która ma z prostą $x$ wspólny punkt $M$. Płaszczyzna $\pi$ nie przechodzi przez prostą $x$. Załóżmy bowiem, że płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez prostą $x$; punkt $A$ nie leży na prostej $x$ i leży, jak prosta $x$, na płaszczyznach $\alpha$ i $\pi$, tedy (tw. 30) płaszczyzny $\alpha$ i $\pi$ są identyczne; punkty $B, C, D$, jako leżące na prostej $l$, a więc i na płaszczyźnie $\pi$, leżą też na płaszczyźnie $\alpha$; przeto punkt $B$, jako wspólny płaszczyznom $\alpha$ i $\beta$ (tw. 23), leży na prostej $x$, co jest przeciwne założeniu, że prosta $l$ nie przecina prostej $x$. Płaszczyzna tedy $\pi$ nie przechodzi przez prostą $x$. Stąd wynika, że pary płaszczyzn $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$ są parami różnych płaszczyzn; każda z tych par ma punkt wspólny $M$; (tw. 23) pary te mają przeto odpowiednio wspólne proste $a, b, c, d$, przechodzące przez punkt $M$, leżące na płaszczyźnie $\pi$, różne od prostej $x$ i od siebie różne. Na mocy tw. 23 punkty $A, A'$ leżą na prostej $a$; $B, B'$ na $b$; $C, C'$ na $c$; $D, D'$ na $d$. Innemi słowy: cztery różne proste $a, b, c, d$, które leżą na płaszczyźnie $\pi$ i przechodzą przez punkt $M$, przecięte są różnemi prostemi $l$ i $l'$, które przez punkt $M$ nie przechodzą; na mocy więc tw. 21 z faktu, że punkty $C, D$ przeplatają punkty $A, B$, wynika także, że punkty $C', D'$ przeplatają punkty $A', B'$.

2) Rozważmy drugi przypadek szczególny: przez prostą $l$ przechodzi płaszczyzna $\pi$, przecinająca oś $x$ w punkcie $M$ i taka, iż punkty $A', B', C', D'$ leżą wszystkie po jednej stronie płaszczyzny $\pi$. Płaszczyzna $\pi$ przez prostą $x$ nie przechodzi.

Na prostej $x$ obieramy punkty $N$ i $P$ tak (IV, XIV) tak, że $M/NP$; punkty $N, P$ nie leżą na płaszczyźnie $\pi$, bo w przeciwnym razie (II, III, IX) prosta $x$ leżałaby na płaszczyźnie $\pi$; punkty $N, P$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\pi$; punkty $N, P$ są różne od punktów $A', B', C', D'$; albo tedy punkty $N$ i $A'$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\pi$, albo po tej samej stronie (tw. 24). W pierwszym przypadku (tw. 27) punkt $N$ leży po przeciwnej stronie płaszczyzny $\pi$, niż punkty $A'$, $B'$, $C'$, $D'$; w drugim przypadku (tw. 25 i 27) punkt $P$ leży po przeciwnej stronie płaszczyzny $\pi$, niż punkty $A'$, $B'$, $C'$, $D'$; w tym przypadku zmienimy oznaczenia $N$, $P$ na $P$, $N$ tak, iż w obu przypadkach punkt $N$ leży po przeciwnej stronie płaszczyzny $\pi$, niż punkty $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Punkt $N$ nie leży na prostej $l$; prosta $l$ i punkt $N$ określają (tw. 30) płaszczyznę $\sigma$, na której leżą. Na prostej $[NA']$ (II) leży punkt $A''$ płaszczyzny $\pi$ i taki, że jest $A''/NA'$, nadto (IX) punkt $A''$ leży też na płaszczyźnie $\sigma$, płaszczyzny $\pi$ i $\sigma$ przecinają się tedy (tw. 23) wzdłuż prostej $l''$, przechodzącej przez punkt $A''$. Ponieważ punkty $N$ i $A'$ leżą na płaszczyźnie $\alpha$, przeto (IX) i punkt $A''$ leży na płaszczyźnie $\alpha$; punkt $A''$ nie leży na prostej $x$ (XII, II). Zupełnie analogicznie wykazuje się istnienie punktów $B''$, $C''$, $D''$ na prostej $l''$ i odpowiednio płaszczyznach $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Punkty wspólne płaszczyzn $\pi$ i $\alpha$ (tw. 23) leżą na prostej $a$ przez punkt $M$, punkt $A''$ przeto leży też na prostej $a$. Podobnie wykaże się istnienie prostych $b$, $c$, $d$. Też tw. 23 pozwoli uzasadnić istnienie pęku prostych $[NA']$, $]NB']$, $[NC']$, $[ND']$. Na mocy tw. 21, jeżeli punkty $C, D$ przeplatają punkty $A, B$, to punkty $C''$, $D''$ przeplatają punkty $A''$, $B''$, a wtedy też punkty $C'$, $D'$ przeplatają punkty $A'$, $B'$.

3) W ogólnym przypadku udowodnimy twierdzenie w sposób następujący. Na mocy tw. 28 i 29 A. XIV, XV obieramy na prostej $l$ punkt $E$, różny od punktów $A$, $B$, $C$, $D$ taki, aby było $E\sim/AB$, $E\sim/AC$, $E\sim/AD$, $E\sim/BC$, $E\sim/BD$, $E\sim/CD$; punkt $E$ nie leży na prostej $x$. Przez $\varepsilon$ oznaczymy płaszczyznę, przechodzącą (tw. 30) przez punkt $E$ i prostą $x$; płaszczyzna $\varepsilon$ przez prostą $l$ nie przechodzi, bo (jak okazałem w przypadku 1), przechodząc przez prostą $l$, nie mogłaby przechodzić przez prostą $x$; podobnież przez prostą $l'$ nie przechodzi. Płaszczyzna $\varepsilon$ (tw. 22) albo prostą $l'$ przecina w punkcie $E'$ albo jej nie przecina.

W pierwszym przypadku obieramy punkt $K$ różny od punktów $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ na prostej $l'$ tak, iż jest (tw. 31) $K\sim/A'B'$, $K\sim/A'C'$, $K\sim/A'D'$, $K\sim/A'E'$, $K\sim/B'C'$, $K\sim/B'D'$, $K\sim/B'E'$, $K\sim/C'D'$, $K\sim/C'E'$, $K\sim/D'E'$.

W drugim przypadku obieramy punkt $K$, różny od $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ na prostej $l'$ (tw. 28, 29) tak, iż jest $K\sim/A'B'$, $K\sim/A'C'$, $K\sim/A'D'$, $K\sim/B'C'$, $K\sim/B'D'$, $K\sim/C'D'$. Na prostej $x$ (IV) obieramy punkt $L$. Punkty $E$, $K$, $L$ są od siebie różne i niewspółliniowe. Gdyby bowiem punkty $L$, $E$, $K$ były współliniowe, to, ponieważ punkty $L$ i $E$ leżą na płaszczyźnie $\varepsilon$, wtedyby i punkt $K$ leżał (IX) na niej, kiedy płaszczyzna $\varepsilon$ albo prostej $l'$ nie przecina, albo ją przecina w punkcie $E'$ różnym od $K$ (tw. 22 A. XII). Punkty $E$, $K$, $L$ określają (VI) płaszczyznę $\sigma$. Płaszczyzna $\sigma$ nie przechodzi przez prostą $x$, bo w przeciwnym razie przechodziłaby przez punkt $E'$, alboby prostej $l'$ nie przecinała.

Płaszczyzna $\sigma$ albo 1) przechodzi przez proste $l$ i $l'$, albo 2) przechodzi



przez jedną z nich, nie przechodząc przez drugą, albo 3) nie przechodzi przez żadną z nich. Przypadek 1) już widocznie załatwiony. Gdy płaszczyzna $\sigma$ przechodzi przez prostą $l$, nie przechodząc przez prostą $l'$, to punkty $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ leżą po jednej stronie płaszczyzny $\sigma$ i w tym przypadku twierdzenie jest już udowodnione.

Jeżeli płaszczyzna $\sigma$ przechodzi przez prostą $l'$, a przez prostą $l$ nie przechodzi, to dla czterech punktów $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, jako różnych i współliniowych, możemy (tw. 19) mieć tylko jeden z następujących związków.

($\alpha$) punkty $C'$, $D'$ przeplatają punkty $A'$, $B'$;

($\beta$) punkty $B'$, $C'$ przeplatają punkty $A'$, $D'$;

($\gamma$) punkty $B'$, $D'$ przeplatają punkty $A'$, $C'$.

W przypadku ($\beta$) otrzymalibyśmy na mocy przypadku 2), że punkty $B$, $C$ przeplatają punkty $A$, $D$, co być nie może (tw. 20); podobnie i przypadek ($\gamma$) zachodzić nie może. W tym więc przypadku twierdzenie udowodniono.

Załóżmy wreszcie, że płaszczyzna $\sigma$ nie przechodzi przez proste $l$ i $l'$; wtedy punkty $A$, $B$, $C$, $D$ leżą po jednej stronie płaszczyzny $\sigma$; to samo można powiedzieć o punktach $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Albo punkty $A$ i $A'$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\sigma$; albo po jej przeciwnych stronach (tw. 24). W pierwszym przypadku wszystkie punkty $A$, $B$, $C$, $D$, $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ (tw. 25) leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\sigma$. Jak w przypadku 2), można okazać, że można na prostej $x$ obrać punkt $N$, który leży po przeciwnej stronie płaszczyzny $\sigma$, niż punkty $A$, $B$, $C$, $D$, $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Zresztą postępujemy, jak właśnie w przypadku 2).

Jeżeli zaś punkty $A$, $A'$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny $\sigma$, to obieramy na prostej $x$ punkt $N$ po stronie przeciwnej niż punkt $A$ i punkt $P$ tak, iż $L/PN$ (XIV). Wtedy (tw. 27) punkt $N$ leży po przeciwnej stronie płaszczyzny $\sigma$, niż punkty $A$, $B$, $C$, $D$, punkt $P$ leży też po przeciwnej stronie tej płaszczyzny niż punkty $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Punkt $P$ i prosta $l'$ określają płaszczyznę $\rho'$, punkt $N$ i prosta $l$ określają (tw. 30) płaszczyznę $\rho$. Przez rozważanie płaszczyzn $(\rho\sigma)$ i płaszczyzn $(\rho', \sigma)$ sprowadzamy przypadek obecny do przypadku 2).

Twierdzenie więc jest w zupełności udowodnione.

(Dowód opiera się na zasadach: II, III, IV, VI, IX, XII, XIV, XV i na tw. 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31. Uwzględniając zasady, na których pomocnicze twierdzenia się opierają, otrzymujemy, że dowód tw. 32 posługuje się zasadami: II, III, IV, V, VI, VIII, IX, X, XII, XIII, XIV, XV, XVI).

**Def. 11.** Zbiór wszystkich płaszczyzn, mających prostą $x$ wspólną, nazywać będziemy pękiem płaszczyzn o osi $x$.

**Def. 12.** [1] Jeżeli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ oznaczają cztery różne płaszczyzny pęku płaszczyzn o osi $x$, jeżeli prosta $l$, nie przecinając osi $x$, przecina je odpowiednio w punktach różnych $A$, $B$, $C$, $D$, to zdanie: „płaszczyzny $\gamma$, $\delta$ przeplatają płaszczyzny $\alpha$, $\beta$“ uważać będziemy za równoważne zdaniu: „punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$“.

§ **9.** Dla uzupełnienia dotychczasowych twierdzeń podamy jeszcze dwa, z których pierwsze udowodnimy, drugiego zaś twierdzenia dowód pominiemy.

**Tw. 33.** [2] Jeżeli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ oznaczają cztery różne płaszczyzny pęku płaszczyzn o osi $x$ i jeżeli $\pi$ i $\pi'$ oznaczają dwie płaszczyzny, przecinające oś $x$ w punktach $M$ wzgl. $M'$, jeżeli $a$, $b$, $c$, $d$ oznaczają cztery różne proste pęku prostych o wierzchołku $M$, wzdłuż których płaszczyzna $\pi$ przecina płaszczyzny $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, jeżeli $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ oznaczają cztery różne proste pęku prostych o wierzchołku $M'$, wzdłuż których płaszczyzna $\pi'$ przecina płaszczyzny $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ i jeżeli proste $c$, $d$ przeplatają proste $a$, $b$, to proste $c'$, $d'$ przeplatają proste $a'$, $b'$. [3]

**Dowód.** Skoro płaszczyzna $\pi$ przecina oś $x$ w punkcie $M$, więc ma ten punkt wspólny z płaszczyzną $\alpha$; ponieważ są też płaszczyzny $\pi$ i $\alpha$ od siebie różne, (tw. 23) przecinają się tedy wzdłuż prostej $a$; zupełnie podobnie uzasadni się istnienie prostych $b$, $c$, $d$, $a'$, $b'$, $c'$, $d'$.

Prosta $a$ jest różna od prostej $b$, w przeciwnym bowiem razie byłaby prostą wspólną płaszczyznom $\alpha$, $\beta$, na mocy tedy tw. 23 prosta $a$ byłaby identyczna z osią $x$, czyli prosta $x$ leżałaby na płaszczyźnie $\pi$, wbrew założeniu i zupełnie podobnie wykaże się, że proste $a$, $b$, $c$, $d$ są od siebie różne, a na mocy tw. 23 wynika, że należą do pęku prostych o wierzchołku $M$. Podobnie wykaże się, że proste $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ są czterema, od siebie różnemi prostemi pęku prostych o wierzchołku $M'$. Skoro według założenia proste $c$, $d$ przeplatają proste $a$, $b$, więc istnieje prosta $l$, nie przechodząca przez punkt $M$ i przecinająca proste $a$, $b$, $c$, $d$ odpowiednio w punktach $A$, $B$, $C$, $D$ różnych między sobą i takich, że punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$. Według tw. 18 istnieje prosta $l'$, która nie przechodzi przez punkt $M'$ i przecina proste $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ odpowiednio w punktach $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ między sobą różnych. Prosta $l$ nie jest identyczna z osią $x$, ani jej nie przecina; gdyby bowiem prosta $l$ miała z osią $x$ wspólny punkt $N$, to ponieważ punkty $N$ i $A$ są od siebie różne i leżą na prostej $l$, więc ją (III) określają, przeto prosta $l$ leży na płaszczyźnie $\alpha$ (IX), a że leży (IX) też na płaszczyźnie $\pi$, więc byłaby identyczna z prostą $a$ (tw. 23), przechodziłaby więc przez punkt $M$ wbrew założeniu. Podobnie i prosta $l'$ nie ma punktu wspólnego z osią $x$. Prosta $l$ nie leży na płaszczyźnie $\alpha$, inaczejby punkt $B$ płaszczyzny $\beta$, leżący na prostej $l$, był też punktem płaszczyzny $\alpha$ i przeto leżałby (tw. 23) na osi $x$ i tem samem prosta $l$ miałaby punkt wspólny $B$ z osią $x$. Podobnie dowodzi się następujących dwóch zdań: prosta $l$ przecina płaszczyzny $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ odpowiednio w punktach $A$, $B$, $C$, $D$, nie mając żadnego punktu wspólnego z osią $x$; prosta $l'$ przecina płaszczyzny $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ odpowiednio w punktach $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, nie mając żadnego punktu wspólnego z osią $x$. Na mocy przeto tw. 32, jeżeli punkty $C$, $D$ przeplatają punkty $A$, $B$, to także punkty $C'$, $D'$ przeplatają punkty $A'$, $B'$, wtedy na mocy Def. 3 proste $c'd'$ przeplatają proste $a'$, $b'$.

(Dowód opiera się na zasadach III, IX i na tw. 18, 23, 32).

**Tw 34.** [1] Jeżeli $A$, $B$, $C$, $D$ oznaczają cztery, różne punkty prostej $l$, zaś $M$ i $M'$ dwa punkty, nie leżące na prostej $l$ i jeżeli proste $[MC]$, $[MD]$ przeplatają proste $[MA]$, $[MB]$, to proste $[M'C]$, $[M'D]$ przeplatają proste $[M'A]$, $[M'B]$.

Dowód domijamy [2].

[1]) Pasch, loc. cit. str. 63, 64 (wyd. z r. 1912).

[2]) Pasch, loc. cit. str. 32.

[3]) **Def. 13.** Zbiór wszystkich prostych płaszczyzny $\pi$, przechodzących przez punkt $M$ tej płaszczyzny zowiemy pękiem prostych o wierzchołku $M$ (w płaszczyźnie $\pi$).



## Dodatek do twierdzenia 18-go.

Aksyomaty, wyliczone w § 3, pozwalają na to, aby tw. 18 uogólnić w postaci następującej:

**Tw. 18** bis. Jeżeli zachowamy założenia i oznaczenia tw. 18, to przez każdy punkt $A$ prostej $a$, różny od punktu $M$, istnieje nieskończenie wiele różnych prostych przecinających proste $a$, $b$, $c$, $d$.

Aby dowód tego twierdzenia uprościć, wprowadzamy nowe pojęcie:

**Def. 14.** Jeżeli $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$ oznaczają $n$ $(n \geqslant 4)$ punktów współliniowych i różnych od siebie i jeżeli jest $X_1 \sim / X_i X_k$ dla każdych liczb $i$, $k$, spełniających warunki $i = 2, 3, \ldots, n$; $k = 2, 3, \ldots, n$; $i \neq k$, to punkt $X_1$ nazwiemy punktem zewnętrznym w szeregu do punktów $X_1$, $X_2 \ldots, X_n$; w szczególności, gdy $n = 4$, to $X_1$ nazwiemy punktem zewnętrznym czwórki punktów $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$.

**Tw.** (A). Gdy dane są cztery punkty $A$, $B$, $C$, $D$, różne od siebie

[1]) Pasch, loc. cit. str. 54.

[2]) Czytelnik z łatwością zauważy, że nie posługiwaliśmy się ani razu zasadą I; bez niej twierdzenia 1—34 są prawdziwe. Zasada I zapewnia nas o tem, że klasa punktów, a wskutek zasad II, V i VI także klasy prostych i płaszczyzn nie są pustemi.

i współliniowe, to dokładnie dwa z nich są punktami zewnętrznemi tej czwórki.

**Dowód.** Gdy dane cztery różne i współliniowe punkty $A$, $B$, $C$, $D$, to według tw. 19 można obrać ich oznaczenia tak, że jest $B/AC$ i $D\sim/AC$. Na mocy A. XV mamy więc:

albo ($\alpha$) $\quad B/AC$ i $A/CD$;

albo ($\beta$) $\quad B/AC$ i $C/AD$.

W przypadku ($\alpha$) okażemy, że punkty $C$, $D$ i tylko te są punktami zewnętrznemi, w przypadku ($\beta$), że punkty $A$, $D$ są punktami zewnętrznemi czwórki punktów $A$, $B$, $C$, $D$.

W przypadku ($\alpha$) na mocy definicyi ani punkt $A$, ani punkt $B$ nie są punktami zewnętrznymi; załóżmy, że też punkt $C$ nie jest zewnętrznym t. zn. że oprócz związków ($\alpha$) zachodzi jeszcze najmniej jeden z następujących:

($\alpha_1$) $C/AB$, albo ($\alpha_2$) $C/AD$, albo ($\alpha_3$) $C/BD$.

Ale związki ($\alpha_1$) i ($\alpha_2$) są niezgodne ze związkami ($\alpha$) na mocy A. XV. Okażemy, że też związek ($\alpha_3$) jest niezgodny ze związkami ($\alpha$). Przyjmijmy bowiem, że jest

$$B/AC, \quad A/CD, \quad C/BD.$$

Ale na mocy tw. 2 [$A, B, C, D \rightarrow C, A, B, D$] otrzymujemy, ze związków $B/AC$, $A/CD$ związek $A/BD$; ze związków $A/BD$ i $C/BD$ otrzymujemy na mocy tw. 12 [$A, B, C, E \rightarrow D, A, C, B$] związek $B\sim/AC$, sprzeczny z jednym ze związków ($\alpha$). Stąd wynika, że punkt $C$ jest punktem zewnętrznym. I punkt $D$ jest też punktem zewnętrznym; gdyby bowiem nim nie był, to, prócz związków ($\alpha$) i związku stąd wyprowadzonego, t. j. prócz związków:

($\alpha_0$) $\quad B/AC, \quad A/CD, \quad A/BD,$

musiałby zachodzić jeden ze związków:

($\alpha'$) $D/AB$, albo ($\alpha''$) $D/AC$, albo ($\alpha'''$) $D/BC$.

Związki ($\alpha'$) i ($\alpha''$) są niezgodne ze związkami ($\alpha_0$) na mocy A. XV. Także związek ($\alpha'''$) nie może zachodzić. Z tw. 11 [$A, B, C, D \rightarrow B, A, D, C$] wynika bowiem, że związki $A/BD$ i $D/BC$ prowadzą do związku $A/BC$, niezgodnego ze związkami ($\alpha$). Przeto i punkt $D$ jest punktem zewnętrznym czwórki punktów $A$, $B$, $C$, $D$. Tem samem tw. (A) w przypadku ($\alpha$) jest udowodnione.

Zauważmy dalej, że przypadek ($\alpha$) przechodzi w przypadek ($\beta$) przez przestawienie liter [$A, B, C, D \rightarrow C, B, A, D$]. Twierdzenie (A) jest więc w całości udowodnione. Dowód oparty na A. XIII, XV, tw. 2, 11, 12, 19.



**Tw.** (B). Jeżeli zachowamy oznaczenia i założenia tw. 18 co do liter $a$, $b$, $c$, $d$ $A$, $M$ i jeżeli ($l$) oznacza prostą przechodzącą przez punkt $A$ i przecinającą proste ($a$, $b$, $c$, $d$), to można znaleść prostą ($l'$), różną od prostej ($l$), przechodzącą przez punkt $A$ i też przecinającą proste ($a$, $b$, $c$, $d$).

**Dowód.** Oznaczmy przez $A$, $B$, $C$, $D$ punkty, w których prosta $l$ przecina proste $a$, $b$, $c$, $d$; te punkty są od siebie różne; na mocy przeto tw. (A) istnieją w czwórce punktów $A$, $B$, $C$, $D$ dwa i tylko dwa punkty zewnętrzne tej czwórki i albo $A$ jest punktem zewnętrznym albo nie.

($\alpha$) Niech $A$ będzie punktem zewnętrznym czwórki punktów $A$, $B$, $C$, $D$; oznaczenia możemy tak wybrać, że drugim punktem zewnętrznym tej czwórki jest punkt $D$. Stąd nie może być ani $A/CD$ ani $D/AC$, więc będzie (A. XV) $C/AD$; podobnie otrzymuje się związek $B/AD$. Obieramy punkt $D'$ (A. XIV) tak, że jest $D'/MD$. Punkty $A$, $D$, $D'$ nie są współliniowe (A. II, III). Na mocy A. IX i VIII wolno do punktów $A$, $D$, $D'$ i prostej $b$ wzgl. $c$ stosować A. XVI, aby otrzymać, że proste $b$ wzgl. $c$ mają po punkcie wspólnym z prostą ($l'$), określoną (A. II) przez punkty $B$ i $D'$. W tym więc przypadku twierdzenie (B) jest prawdziwe.

($\beta$) Niech punkt $A$ nie będzie punktem zewnętrznym czwórki $A$, $B$, $C$, $D$ i niech punkty $C$, $D$ będą punktami zewnętrznemi tej czwórki punktów. Jest, jak łatwo wykazać, $A/CD$. Na prostej $d$ obieramy punkt $D'$ (A. XIV) tak, że jest $D/MD'$. Oznaczmy przez ($l'$) prostą określoną przez punkty $A$ i $D'$ (A. II, III). Do punktów $M$, $C$, $D$ i prostej ($l'$) stosujemy A. XVI; ze związków $A/CD$ i $D'\sim/MD$ wynika, że istnieje punkt $C'$ wspólny prostym ($l'$) i ($c$). Ponieważ jest $D\sim/AB$, więc na mocy A. XV jest albo $B/AD$ albo $A/BD$. Gdy jest $B/AD$, to do punktów $A$, $D$, $D'$ i prostej $b$ stosuję A. XVI; gdy zaś $A/BD$, to do punktów $M$, $B$, $D$ i prostej ($l'$) stosuję ten sam aksyomat; w obu przypadkach otrzymujemy, że proste $b$ i ($l'$) się przecinają. W obu przypadkach ($\alpha$) i ($\beta$) proste ($l$) i ($l'$) są od siebie różne (II, XII).

Twierdzenie (B) tem samem jest w zupełności udowodnione. Dowód oparty na zasadach A. II, III, VIII, IX, XIV, XV, XVI i tw. (A).

Aby teraz udowodnić tw. 18 bis, to dość wskazać na to, że tw. 18 zapewnia istnienie co najmniej jednej prostej ($l$), o której mowa w założeniu tw. (B). Nadto z łatwością można udowodnić, że na prostej ($\alpha$) istnieje nieskończenie wiele punktów ($D'$) od siebie różnych, o których mowa w dowodzie tw. B (zobacz G. B. Halsted, Géométrie rationnelle, tłóm. na język francuski, 1911, str. 272). Tem samem należy uważać tw. 18 bis za prawdziwe.

## RÉSUMÉ.

Die zwei ersten geometrischen Axiomgruppen des Hilbertschen Systems (mit unwesentlichen Veränderungen) als Grundsätze einer projektiven Geometrie annehmend, entwickelt der Verfasser den Begriff des Trennens für eigentliche Elemente nach dem Muster des Herrn M. Pasch. Unter Anderem beweist er folgenden Satz: Bezeichnen $a$, $b$, $c$, $d$ vier (eigentliche), verschiedene Geraden eines eigentlichen Strahlenbüschels vom Scheitel $M$, so lässt sich durch jeden Punkt $A$ der Geraden $a$, der von $M$ verschieden ist, wenigstens eine Gerade ziehen, die, ohne durch den Punkt $M$ zu gehen, auch die Geraden $b$, $c$, $d$ in eigentlichen Punkten schneidet. Dieser Satz wird als logische Folgerung aus den angeführten Grundsätzen abgeleitet.

In methodischer Hinsicht ist noch zu bemerken, dass bei jedem Beweise die Sätze angegeben wurden, aus welchen er abgeleitet wird.


H. MÜNTZ.

# Problemat osi głownych form kwadratowych i równań całkowych symetrycznych.

Das Hauptaxenproblem der quadratischen Formen und der symmetrischen Integralgleichungen.

Niechaj

$$x' = P[x]$$

będzie znakiem działania funkcyjnego, które przeprowadza „punkt“ $x$ w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów lub w oznaczonej przestrzeni funkcyjnej w inny takiż „punkt“. Stawiamy pytanie, dotyczące elementów niezmiennych lub „osi głównych“ takiego przekształcenia. Wtedy w wielu przypadkach pożytecznem jest rozważanie iteracyi danego działania według schematu

$$x^{(N+1)} = P[x^{(N)}];$$

iteracya ta przy pewnych okolicznościach może nam dać zupełne rozwiązanie zagadnienia. Najprostszy przykład tego rodzaju w przypadku zmiennych przerywanych przedstawia przekształcenie danej funkcyi rzeczywistej kwadratowej na jej osi główne, w przestrzeni zaś funkcyjnej rozkład danego jądra symetrycznego według jego funkcyj właściwych.

Wiadomo, że iteracye podstawienia liniowego, przyporządkowanego do formy kwadratowej w przypadku form określonych, prowadzą w ogólności do najmniejszej osi głównej [1]. E. Schmidt w pracy podstawowej [2] wykazał

[1]) Porówn. np. przedstawienie tej rzeczy u Kowalewskiego „Determinantentheorie“, Lipsk 1909. S. 197.

[2]) „Rozprawa“ (Getynga 1905) lub Math. Ann. **63**.