ROMUALD WITWIŃSKI.

O powierzchniach prostoliniowych, posiadających punkty Cayleya.

Sur les surfaces réglées possédant des points de Cayley.

WSTĘP.

Określenie. Mówimy, iż punkt A jest punktem Cayleya dla powierzchni prostoliniowej, jeżeli spodki prostopadłych, wyprowadzonych z punktu A na tworzące, są położone na przekroju płaskim powierzchni. Będziemy oznaczali przez P_A płaszczyznę tego przekroju. Dla powierzchni, zwanej cylindroidą Cayleya (cylindroïde de Cayley), każdy punkt A przestrzeni jest punktem Cayleya.

Matematycy francuscy, Appell i Bricard udowodnili [1], iż ta cylindroida jest jedyną powierzchnią prostoliniową rzeczywistą, posiadającą własność powyższą dla każdego punktu przestrzeni. Dla innych powierzchni prostoliniowych punkty Cayleya A są więc albo punktami odosobnionemi, albo też punktami, tworzącemi krzywe lub powierzchnie.

W rozprawie niniejszej pozostawiamy na uboczu powierzchnie prostoliniowe, posiadające zero, jeden lub dwa punkty Cayleya: przedmiotem badań naszych będą powierzchnie, posiadające przynajmniej trzy punkty Cayleya.

Ustalam klasyfikacyę następującą:

1. Powierzchnie o płaszczyźnie kierunkowej, posiadające dwa punkty Cayleya, posiadają nieskończoną liczbę takich punktów; punkty te są położone albo na walcu obrotowym, albo na płaszczyźnie. Równanie tych powierzchni otrzymamy przez eliminacyę parametru t z równań

[1]) Bulletin de la Société mathématique de France, 1900—1901.

$$y = tx - kt^2,$$

$$z = \frac{at^3 + bt^2 + ct}{1 + t^2}.$$

Zbiór wyrazów stopnia najwyższego jest

$$z\,(x^2 + y^2)\,(kz + ax).$$

Powierzchnie te są więc rzędu czwartego. Gdy $a = 0$, $k = 0$, mamy cylindroidę Cayleya. Pomijamy badanie tych powierzchni, nie przedstawiające zresztą żadnej trudności.

2. Powierzchnie o stożku kierunkowym. Znajdujemy:

1) Powierzchnie S_9 rzędu dziewiątego o stożku kierunkowym rzędu trzeciego, z dziesięcioma punktami Cayleya;

2) Powierzchnie rzędu ósmego S_8 ze stożkiem kierunkowym rzędu drugiego z czterema punktami Cayleya; mamy wówczas nieskończoną liczbę punktów, położonych na stożkowej;

3) Powierzchnie rzędu szóstego S_6 ze stożkiem kierunkowym rzędu drugiego. Tutaj punkty Cayleya wytwarzają krzywą rzędu szóstego, która w przypadku ogólnym nie rozpada się i której sześć kierunków asymptotycznych są prostopadłemi do sześciu płaszczyzn cyklicznych stożka kierunkowego.

W przypadkach szczególnych krzywa ta może rozpadać się na stożkową i krzywą rzędu czwartego z dwiema prostemi Cayleya. Proste te są zawsze prostopadłe do płaszczyzn cyklicznych stożka kierunkowego.

4) Wreszcie stopień powierzchni można zniżyć do stopnia drugiego; krzywa rzędu szóstego sprowadza się wówczas do sześciu prostych (przy jednym z układów tworzących).

Są to prostopadłe wspólne do tworzących izotropowych powierzchni, albo jeszcze prostopadłe do płaszczyzn cyklicznych, poprowadzonych przez ogniska konturu widocznego powierzchni do płaszczyzn cyklicznych środkowych. Jeżeli z punktu jednej z tych prostych poprowadzimy prostopadłe do tworzących układu rozważanego, wówczas spodki tych prostopadłych będą położone na kole kwadryki.

Określenie kompleksu AP_A.

Dane są punkt A i płaszczyzna P_A; nazywamy kompleksem AP_A zbiór prostych Δ, posiadających tę własność, iż spodek prostopadłej, wyprowadzonej z punktu A do prostej Δ, jest położony w płaszczyźnie P_A. Kompleks

ten jest rzędu drugiego. Jego stożek o wierzchołku S posiada przekroje kołowe:

1° Płaszczyzny równoległe do P_A;

2° Płaszczyzny prostopadłe do S_A.

Krzywą kompleksu, położoną na płaszczyźnie Q, jest parabola, mająca za ognisko spodek prostopadłej, wyprowadzonej z punktu A do płaszczyzny Q, i za styczną w wierzchołku linię przecięcia płaszczyzn Q i P_A.

Oznaczenia. Posługiwać się będę kilkakrotnie osiami pochyłemi:

$$\angle\, yOz = \varphi, \quad \angle\, zOx = \varphi', \quad xOy = \varphi''.$$

W celu określenia prostej Δ posługuję się często oznaczeniem

$$x = az + p,$$

$$y = bz + q,$$

albo też oznaczeniem dwóch punktów $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$. Kładę, jak zwykle,

$$x_0 - x_1 = X, \qquad y_1 z_0 - y_0 z_1 = L,$$

$$y_0 - y_1 = Y, \qquad z_1 x_0 - z_0 x_1 = M,$$

$$z_0 - z_1 = Z, \qquad x_1 y_0 - x_0 y_1 = N.$$

Możemy wówczas położyć:

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = 1, \quad L = q, \quad M = -p, \quad N = bp - aq.$$

Połóżmy:

$$\rho = NY - MZ = (b^2 + 1)\,p - abq,$$

$$\rho' = LZ - NX = -abp + (a^2 + 1)\,q,$$

$$\rho'' = MX - LY = -ap - bq.$$

Spółrzędne punktu A oznaczać będę zazwyczaj przez α, β, γ, równanie płaszczyzny P_A przez

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Jeżeli więc przyjmiemy dla uproszczenia

$$U = X + Y\cos\varphi'' + Z\cos\varphi',$$

$$V = X\cos\varphi'' + Y + Z\cos\varphi,$$

$$W = X\cos\varphi' + Y\cos\varphi + Z,$$

wówczas równanie kompleksu AP_A przybierze postać:

$$D(UX+VY+WZ)+(AX+BY+CZ)(\alpha U+\beta V+\gamma W)+A(NV-MW)$$
$$+B(LW-NU)+C(MU-LV)=0.$$

W odniesieniu do osi prostokątnych będzie:

$$D(X^2+Y^2+Z^2)+(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)(AX+BY+CZ)+A\rho+B\rho'+C\rho''=0$$

albo

$$\varphi(XYZ)+A\rho+B\rho'+C\rho''=0.$$

CZĘŚĆ PIERWSZA.

Badanie powierzchni S_9.

Osi prostokątne. Powierzchnie, posiadające trzy punkty Cayleya A, B, C, mają za tworzące trzy proste, wspólne trzem kompleksom AP_A, BP_B, CP_C. Załóżmy tu, iż płaszczyzny P_A, P_B, P_C tworzą trójścian prawdziwy:

$$A:\alpha\beta\gamma, \qquad P_A: Ax+By+Cz+D=0,$$
$$B:\alpha'\beta'\gamma', \qquad P_B: A'x+B'y+C'z+D'=0,$$
$$C:\alpha''\beta''\gamma'' \qquad P_C: A''x+B''y+C''z+D''=0;$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1' & B_1' & C_1' \\ A_1'' & B_1'' & C_1'' \end{vmatrix}$$ wyznacznik dołączony do Δ.

Powierzchnia nasza jest określona przez trzy kompleksy:

$$A\rho+B\rho'+C\rho''+\varphi_1(XYZ)=0,$$
$$A'\rho+B'\rho'+C'\rho''+\varphi_2(XYZ)=0,$$
$$A''\rho+B''\rho'+C''\rho''+\varphi_3(XYZ)=0;$$

skąd, z uwagi na to, iż $\Delta \neq 0$, można znaleść ρ, ρ', ρ'',

$$A\rho+A_1\varphi_1+A_1'\varphi_2+A_1''\varphi_3=0, \qquad \ldots,$$

albo, dla uproszczenia,

$$\begin{aligned} \Delta\rho+\Phi_1&=0, & \Phi_1&=A_1\varphi_1+A_1'\varphi_2+A_1''\varphi_3, \\ \Delta\rho'+\Phi_2&=0, & \Phi_2&=B_1\varphi_1+B_1'\varphi_2+B_1''\varphi_3, \\ \Delta\rho''+\Phi_3&=0, & \Phi_3&=C_1\varphi_1+C_2'\varphi_2+C_1''\varphi_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Mnożąc równania (1) przez X, Y, Z i dodając, otrzymujemy:

$$X\Phi_1+Y\Phi_2+Z\Phi_3=0. \tag{2}$$

Jest to stożek kierunkowy; jest on rzędu trzeciego.

Dowiedziemy teraz, iż równość ta nie jest nigdy tożsamością, i znajdziemy, w jakim przypadku może się rozpadać. Dwa pierwsze z równań (1) pozwalają wyznaczyć ρ i ρ':

$$\rho=(b^2+1)p-abq=-\frac{\Phi_1}{\Delta},$$

$$\rho'=-abp+(a^2+1)q=-\frac{\Phi_2}{\Delta},$$

skąd

$$\begin{aligned} x-az=p&=\frac{a\Phi_3-\Phi_1}{\Delta(a^2+b^2+1)}, \\ y-bz=q&=\frac{b\Phi_3-\Phi_2}{\Delta(a^2+b^2+1)}, \\ bx-ay&=\frac{a\Phi_2-b\Phi_1}{\Delta(a^2+b^2+1)}. \\ a\Phi_1+b\Phi_2+c\Phi_3&=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Są to równania powierzchni. Ostatnie daje stożek kierunkowy, przyczem c jest to spółczynnik zmienny jednorodności. Szukając punktów przecięcia z prostą, znajdujemy, iż powierzchnia S_9 jest rzędu dziewiątego, i może rozpadać się na trzy cylindroidy. Przekrój, dokonany przez płaszczyznę w nieskończoności, składa się z krzywej sześciennej stożka kierunkowego i z sześciu tworzących izotropowych, które otrzymamy, rozwiązując układ

$$a^2+b^2+c^2=0,$$
$$a\Phi_1+b\Phi_2+c\Phi_3=0.$$

Krzywa sześcienna może być zupełnie dowolna, lecz wyznacza ona sześć tworzących izotropowych. Nadto, każdej tworzącej stożka kierunkowego odpowiada jedna i tylko jedna tworząca powierzchni, i nawzajem. Pozostaje do wykazania, iż związek

$$a\Phi_1 + b\Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

nie jest tożsamością.

Twierdzenie. Jeżeli układ $P_A P_B P_C$ tworzy trójścian prawdziwy, i jeżeli punkty A, B, C nie schodzą się z wierzchołkiem trójścianu, wówczas związek między parametrami kierunkowemi prostej nie jest tożsamością.

Zastosujmy tu osi pochyłe i weźmy

$$P_A = yOz, \quad P_B = zOx, \quad P_C = xOy.$$

Trzy kompleksy możemy wyrazić w postaci:

$$NV - MW + x(\alpha U + \beta V + \gamma W) = 0,$$

$$LW - NU + y(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) = 0,$$

$$MU - LV + z(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0,$$

skąd otrzymujemy stożek

$$Ux(\alpha U + \beta V + \gamma W) + Vy(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) + Wz(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0.$$

Połóżmy:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi'' & \cos\varphi' \\ \cos\varphi'' & 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi' & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \text{wyznacznik dołączony.}$$

Jeżeli uczynimy zamianę zmiennych i weźmiemy UVW, równanie przybierze postać:

$$U(\alpha U + \beta V + \gamma W)(aU + bV + dW)$$

$$+ V(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W)(bU + cV + eW)$$

$$+ W(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W)(dU + eV + fW) = 0.$$

Zakładając, iż jest to tożsamość, z łatwością otrzymamy, iż α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' równają się zeru.

Wykażemy dalej, że w ogólności stożek rzędu trzeciego nie rozpada się; mamy więc istotnie, w ogólności, powierzchnię S_9 rzędu dziewiątego, która nie rozpada się i jest przecięta płaszczyzną w nieskończoności, jak to wyżej było już zaznaczone.

Poszukiwanie wszystkich punktów Cayleya powierzchni S_9.

Twierdzenie wstępne. Jeżeli powierzchnia S_9, utworzona przez trzy kompleksy AP_A, BP_B, CP_C, należy do czwartego kompleksu tejże formy, wówczas ten ostatni jest kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych trzech pierwszych kompleksów, innemi słowy — jest jednym z kompleksów o trzech wyrazach.

$$\lambda F_1 + \mu F_2 + \nu F_3 = 0,$$

przyczem $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ są to równania trzech pierwszych kompleksów.

W rzeczy samej, trzy kompleksy dane mogą być zastąpione przez

$$\rho + \Phi_1(a, b) = 0,$$

$$\rho' + \Phi_2(a, b) = 0,$$

$$\rho'' + \Phi_3(a, b) = 0,$$

które są ich kombinacyami liniowemi o spółczynnikach stałych (zastąpiliśmy $\frac{\Phi}{\Delta}$ przez Φ). Kompleks czwarty ma postać

$$F_4 \equiv A^{IV}\rho + B^{IV}\rho' + C^{IV}\rho'' + \varphi_4(ab) = 0,$$

wobec czego dla powierzchni S_9 mamy:

$$\varphi_4 = A^{IV}\Phi_1 + B^{IV}\Phi_2 + C^{IV}\Phi_3,$$

co jest tożsamością, w przeciwnym razie stożek kierunkowy byłby rzędu drugiego. Zatem

$$F_4 \equiv A^{IV}(\rho + \Phi_1) + B^{IV}(\rho' + \Phi_2) + C^{IV}(\rho'' + \Phi_3),$$

co dowodzi twierdzenia.

Wyznaczenie dziesięciu punktów Cayleya powierzchni S_9.

Gdy chodzi o wyznaczenie punktów Cayleya w odniesieniu do osi prostokątnych jakichkolwiek, znajdujemy, iż są one położone w przecięciu trzech powierzchni rzędu dziewiątego, które posiadają wspólną krzywą sześcienną skośną. Krzywa ta nie odpowiada zagadnieniu, co nasuwa myśl o istnieniu dziesięciu punktów. Biorąc osi pochyłe, możemy obrać, jak wyżej, płaszczyzny P_A, P_B, P_C za płaszczyzny spółrzędnych: $P_A = yOz$, $P_B = zOx$, $P_C = xOy$. Trzy kompleksy są:

$$NV - MW + X(\alpha U + \beta U + \gamma W) = 0,$$
$$LW - NU + Y(\alpha' U + \beta' V + \gamma' W) = 0,$$
$$MU - LV + Z(\alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W) = 0.$$

Dodając je, po uprzedniem pomnożeniu przez λ, μ, ν i utożsamiając z równaniem

$$A(NV - MW) + B(LW - NU) + C(MU - LV)$$
$$+ (AX + BY + CZ)(\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W)$$
$$+ D(UX + VY + WZ) = 0,$$

znajdujemy:

$$\lambda = A, \quad \mu = B, \quad \nu = C.$$

Wyrazy, zawierające X^2, Y^2, Z^2, dają następnie:

$$\lambda(\alpha + \beta\cos\varphi'' + \gamma\cos\varphi') = D + \lambda(\alpha_1 + \beta_1\cos\varphi'' + \gamma_1\cos\varphi'),$$
$$\mu(\alpha'\cos\varphi'' + \beta' + \gamma'\cos\varphi) = D + \mu(\alpha_1\cos\varphi'' + \beta_1 + \gamma_1\cos\varphi),$$
$$\nu(\alpha''\cos\varphi' + \beta''\cos\varphi + \gamma'') = D + \nu(\alpha_1\cos\varphi' + \beta_1\cos\varphi + \gamma_1),$$

albo, wprowadzając łatwe do zrozumienia znakowanie,

$$\lambda U_A = D + \lambda U,$$
$$\mu V_B = D + \mu V,$$
$$\nu W_C = D + \nu W.$$

Przypadek pierwszy.

$$U \neq U_A, \quad V \neq V_B, \quad W \neq W_C.$$

Wówczas

$$\lambda = \frac{-D}{U - U_A}, \quad \mu = \frac{-D}{V - V_B}, \quad \nu = \frac{-D}{W - W_C}.$$

Wreszcie wyrazy iloczynowe dają nam trzy równania. Naprzykład, wyraz, zawierający YZ, daje:

$$\mu(\alpha'\cos\varphi' + \beta'\cos\varphi + \gamma') + \nu(\alpha''\cos\varphi'' + \beta'' + \gamma''\cos\varphi)$$
$$= \mu(\alpha_1\cos\varphi' + \beta_1\cos\varphi + \gamma_1) + \nu(\alpha_1\cos\varphi'' + \beta_1 + \gamma_1\cos\varphi) + 2D\cos\varphi,$$

czyli

$$\mu W_B + \nu V_C = \mu W + \nu V + 2D\cos\varphi,$$

albo

$$\mu(W_B - W) + \nu(V_C - V) = 2D\cos\varphi.$$

Zastępując λ, μ, ν przez ich wartości, widzimy, iż punkty Cayleya są punktami wspólnemi trzem kwadrykom

$$S. \qquad 2\cos\varphi = \frac{V - V_C}{W - W_C} + \frac{W - W_B}{V - V_B},$$
$$S'. \qquad 2\cos\varphi' = \frac{W - W_A}{U - U_A} + \frac{U - U_C}{W - W_C},$$
$$S''. \qquad 2\cos\varphi'' = \frac{U - U_B}{V - V_B} + \frac{V - V_A}{U - U_A}.$$

Są to trzy walce obrotowe, dające się z łatwością określić geometrycznie. Naprzykład, walec S jest walcem obrotowym o tworzących, prostopadłych do płaszczyzny yOz, albowiem płaszczyzny $V = 0$, $W = 0$ są to dwie płaszczyzny prostopadłe, jedna do Oy, druga do Oz. Poza tem, zbiór wyrazów stopnia drugiego jest

$$-\sin^2\varphi\,(y^2 + z^2 + 2yz\cos\varphi).$$

Równanie S spełnia się przy $V = V_B$, $W = W_B$, to znaczy, kwadryka S przechodzi przez punkt B, i również przez punkt C. Wreszcie kwadryka S przechodzi przez linię przecięcia płaszczyzn

$$W = W_C, \qquad V = V_B.$$

Walec obrotowy S, prostopadły do płaszczyzny P_A, przechodzi przez punkty B i C, następnie przez linię przecięcia płaszczyzny, poprowadzonej przez punkt B prostopadle do linii przecięcia płaszczyzn P_A, P_C, z płaszczyzną, poprowadzoną przez punkt C prostopadle do linii przecięcia płaszczyzn P_A, P_B. Zupełnie taksamo dadzą się określić dwa pozostałe walce. Trzy te walce nie mogą posiadać krzywej wspólnej; przecinają się one w ośmiu punktach, lecz jeden z nich ω powinien być odrzucony. Jest on określony przez równania

$$U = U_A, \qquad V = V_B, \qquad W = W_C.$$

Mamy więc siedm punktów; dołączając do nich jeszcze trzy punkty ABC, otrzymujemy razem dziesięć punktów.

Przypadek drugi. Różnice $U - U_A$, $V - V_B$, $W - W_C$ nie są wszystkie trzy różne od zera. Znajdujemy wówczas, iż dwa z spółczynników λ, μ, ν równają się zeru; mamy zatem trzy punkty A, B, C.

Wyznaczenie dziesięciu punktów Cayleya według danych trzech walców S, S', S''.

Dane są trzy walce obrotowe S, S', S'', których osi nie są równoległe do jednej i tej samej płaszczyzny, i które posiadają punkt rzeczywisty wspólny ω. Obieramy ten punkt za punkt wyjścia; siedm innych punktów uważamy jako punkty Cayleya. Tworzymy trójścian $Oxyz$, którego ściany są prostopadłe do walców. Pozostają do znalezienia trzy punkty Cayleya A, B, C. Płaszczyzna, przechodząca przez punkt ω i prostopadła do Ox, przecina walec S'' według dwóch tworzących; jedna z nich przechodzi przez punkt ω, druga — przez punkt A. Tak samo, płaszczyzna, która przechodzi przez punkt ω i jest prostopadła do Ox, da nam inną prostą, przechodzącą przez punkt A, skąd znajdujemy punkt A. W ten sam sposób wyznaczają się punkty B i C.

Uwaga. Z powyższego wynika, że, jeżeli trzy punkty A, B, C, o których założymy, iż są niezmiennie z sobą związane, wykonywają ruch przeniesienia względem trójścianu $P_A P_B P_C$, to ten ruch pociąga za sobą bez odkształcenia również i ruch układu dziesięciu punktów.

Wyznaczenie dziesięciu płaszczyzn Cayleya, odpowiadających dziesięciu punktom.

Jeżeli oznaczymy przez $ux+vy+wz=0$ równanie płaszczyzny Cayleya, odpowiadającej punktowi $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ albo lepiej x, y, z, wówczas sześć równań, wyżej znalezionych możemy napisać w postaci:

$$\begin{aligned} u(U-U_A) &= -s,\\ v(V-V_B) &= -s,\\ w(W-W_C) &= -s; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} v(W-W_B)+w(V-V_C)+2s\cos\varphi &= 0,\\ w(U-U_C)+u(W-W_A)+2s\cos\varphi' &= 0,\\ u(V-V_A)+v(U-U_B)+2s\cos\varphi'' &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Eliminując $\frac{u}{s}$, $\frac{v}{s}$, $\frac{w}{s}$, otrzymamy trzy walce, które wyznaczają punkt Cayleya x, y, z. W celu otrzymania płaszczyzn Cayleya należy postąpić wręcz przeciwnie: wyeliminować x, y, z, innemi słowy UVW. Tym sposobem znajdziemy:

$$\begin{aligned} s(v^2+w^2-2vw\cos\varphi)+vw[W_B-W_C)\,v+(V_C-V_B)\,w] &= 0,\\ s(w^2+u^2-2wu\cos\varphi')+wu[U_C-U_A)\,w+(W_A-W_C)\,u] &= 0,\\ s(u^2+v^2-2uv\cos\varphi'')-uv[(V_A-V_B)\,u+(U_B-U_A)\,v] &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Równanie trzecie, naprzykład, przedstawia epicykloidę o trzech punktach zwrotu, styczną do osi Ox, Oy. Lepiej jest postąpić w sposób inny,

aby otrzymać płaszczyzny Cayleya. Niech będzie D czwarty punkt Cayleya, P_D — płaszczyzna odpowiadająca. Szukajmy równania płaszczyzny P_D. Mamy:

$$u=\frac{s}{U_A-U_D},\quad \ldots;$$

zatem równanie płaszczyzny P_D jest

$$\frac{x}{U_A-U_D}+\frac{y}{V_B-V_D}+\frac{z}{W_C-W_D}+1=0.$$

Płaszczyzna ta przecina osi w trzech punktach H, K, L, dla których

$$\overline{OH}=U_D-U_A,\quad \overline{OK}=V_D-V_B,\quad \overline{OL}=W_D-W_C.$$

Stąd konstrukcya następująca:

Obrać na osiach wektory OH, OK, OL, równe rzutom ortogonalnym odcinków AD, BD, CD na osi Ox, Oy, Oz. Płaszczyzna HKL jest płaszczyzną szukaną P_D.

Wnosimy stąd, że, jeżeli zbiór dziesięciu punktów bierze udział w ruchu przeniesienia względem trójścianu $P_A P_B P_C$, wówczas siedm innych płaszczyzn Cayleya są nieruchome.

Przykład zniżenia liczby punktów Cayleya.

Liczba ta 10 może być zniżona. Wskażę tutaj jeden przykład. Weźmy osi prostokątne, i następnie punkt A na osi Ox, punkt B na osi Oy, punkt C na osi Oz:

$$OA=\alpha,\qquad OB=\beta,\qquad OC=\gamma$$

i

$$P_A\equiv yOz,\qquad P_B\equiv zOx,\qquad P_C\equiv xOy.$$

Znajdujemy siedm punktów Cayleya, które stanowią siedm z liczby wierzchołków równoległościanu prostokątnego. Stożek kierunkowy powierzchni jest

$$\alpha x^3+\beta y^3+\gamma z^3=0.$$

Równanie powierzchni otrzymamy, eliminując a, b z równań:

$$\alpha a^3+\beta b^3+\gamma=0,$$

$$x-az=\frac{a(\gamma-\alpha a)}{a^2+b^2+1},\qquad y-bz=\frac{b(\gamma-\beta b)}{a^2+b^2+1}.$$

Cztery nowe płaszczyzny Cayleya mają za równania:

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+1=0,$$

które odpowiada punktowi początkowemu

$$\alpha x-\beta y=0, \qquad \beta y-\gamma z=0, \qquad \gamma z-\alpha x=0.$$

Trzy pozostałe płaszczyzny przechodzą przez jedną i tę samą prostą.

Podwójny i potrójny rozkład powierzchni S_9.

Aby udowodnić istnienie dziesięciu punktów Cayleya, zakładaliśmy, że powierzchnia S_9 nie rozpada się. Wykażemy teraz, że powierzchnia S_9 może rozpadać się albo na powierzchnię rzędu szóstego S_6 i cylindroidę Cayleya, albo też na trzy cylindroidy. W tym ostatnim przypadku dziesięć punktów byłyby punktami Cayleya, wspólnemi trzem cylindroidom, innemi słowy — punktami, mającemi tę samą płaszczyznę Cayleya dla każdego z nich.

Aby powierzchnia S_9 rozpadała się, trzeba i wystarcza, żeby jej stożek kierunkowy rozpadał się, a wówczas otrzymujemy powierzchnię o płaszczyźnie kierunkowej, posiadającą trzy płaszczyzny Cayleya, tworzące trójścian, co zachodzi tylko dla konoidy.

Obierzmy trójścian $P_A P_B P_C$ za trójścian odniesienia. Punkty A, B, C mają za spółrzędne $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$. Stożek kierunkowy ma za równanie

$$0=Ux(\alpha U+\beta V+\gamma W)+Vy(\alpha' U+\beta' V+\gamma' W)+Wz(\alpha'' U+\beta'' V+\gamma'' W).$$

Przemieńmy zmienne i oznaczmy przez

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \text{wyznacznik dołączony do} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi'' & \cos\varphi' \\ \cos\varphi'' & 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi' & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix},$$

Wiemy, iż, jeżeli powierzchnia S_9 rozpada się i daje cylindroidę o płaszczyźnie kierunkowej Q, ma to miejsce i wtedy, gdy punkt A, B lub C przemieszcza się prostopadle do płaszczyzny Q. Na fakcie tym opierać będziemy wszystkie dalsze swe rozważania. Obierzmy U, V, W za zmienne; stożek przybiera postać:

$$\begin{aligned} & U(\alpha U+\beta V+\gamma W)(aU+bV+dW) \\ & +V(\alpha' U+\beta' V+\gamma' W)(bU+cV+eW) \\ & +W(\alpha'' U+\beta'' V+\gamma'' W)(dU+eV+fW)=0. \end{aligned}$$

Wyraźmy, iż stożek ten rozpada się i zawiera płaszczyznę

$$U=pV+qW;$$

w ten sposób otrzymujemy cztery równania:

$$(\beta'+\alpha' p)(c+bp)(\beta+\alpha p)(ap^2+bp)=0, \tag{7}$$

$$(\gamma''+\alpha'' q)(f+dq)(\gamma+dq)(aq^2+dq)=0, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & (\beta'+\alpha' p)(e+bq)+(\gamma'+\alpha' q)(c+bp) \\ & +(\beta''+\alpha'' p)(e+dp)+(\beta+\alpha p)(2apq+dp+bq) \\ & \qquad +(\gamma+\alpha q)(ap^2+bp)=0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & (\gamma'+\alpha' q)(e+bq)+(\beta''+\alpha'' p)(f+dq) \\ & +(\gamma''+\alpha'' q)(e+dp)+(\beta+\alpha p)(aq^2+dq) \\ & \qquad +(\gamma+\alpha q)(2apq+dp+bq)=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Dajmy sobie trójścian $P_A P_B P_C$ i punkt A $(\alpha\beta\gamma)$; równania powyższe pokazują, iż punkty $B(\alpha', \beta', \gamma')$ i $C(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ są położone — jeden na prostej Δ', drugi na prostej Δ''; dwie te proste zależą od dwóch parametrów p, q. Więc proste Δ i Δ'' tworzą dwie kongruencye i odpowiadają sobie w tych dwóch kongruencyach według pewnego prawa. Otóż, każdy raz, gdy dwie proste Δ' przecinają się, proste odpowiadające prostej Δ'' również przecinają się. Rachunki, przy przyjęciu osi pochyłych, są zbyt długie, lecz mogą być z łatwością przeprowadzone, gdy trójścian $P_A P_B P_C$ jest trójprostokątny. Oparte są one na następujących rozważaniach:

Wyobraźmy sobie, iż dane nam są punkty A i B; równanie (7) daje nam trzy wartości na p. Z równań (8), (9) i (10) eliminujemy $\beta''+\alpha'' p$ i $\gamma''+\alpha'' q$; mamy równanie stopnia trzeciego względem q.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \beta''+\alpha'' p=f_1(q), \\ & \gamma''+\alpha'' q=\frac{f_3(q)}{f+dq}, \end{aligned} \tag{11}$$

przyczem f_1, f_3 są stopnia 1 i 3. Podstawiamy w równanie (10).

Tym sposobem, w przypadku najogólniejszym mamy dziewięć układów wartości względem p, q, i każdemu układowi równania (11) podporządkowują prostą, na której znajduje się punkt C.

W ten sposób, po obraniu punktów A i B, aby powierzchnia S_9 rozpadała się, trzeba i wystarcza, aby punkt C znajdował się w punkcie, dowolnie obranym na dziewięciu prostych, w zupełności wyznaczonych. Otóż powiadam, że te dziewięć prostych przecinają się po trzy w sześciu punktach, innemi słowy, dają sześć boków i trzy przekątne sześcioboku skośnego.

Stąd wynika, że, jeżeli punkty A i B raz są obrane, wówczas istnieje dziewięć prostych, na których należy obrać punkt C, aby otrzymać rozkład podwójny, i sześć punktów $C_1, C_2, \ldots, C_6$, dla których mamy rozkład potrójny, to znaczy, że, gdy punkt C jest wzięty w jednym z tych sześciu punktów, wówczas powierzchnia S_9 rozpada się na trzy powierzchnie rzędu trzeciego, które są cylindroidami.

Zamierzamy najprzód wykazać, iż na każdej z dziewięciu prostych istnieją dwa punkty C, dla których ma miejsce rozkład potrójny. Bezpośrednio daje się zauważyć, że gdy przez jeden punkt przechodzą dwie proste Δ'', to przez ten punkt koniecznie przechodzą trzy proste: są to prostopadłe do płaszczyzn rozkładu stożka.

Równanie stożka względem U, V, W ma postać:

$$U(\alpha U+\beta V+\gamma W)(aU+bV+dW+\ldots=0.$$

Uporządkujmy względem U i podzielmy przez $U-(pV+qW)$; ponieważ punkt C jest położony na jednej z dziewięciu prostych, przeto dzielenie wypełnia się bez reszty; iloraz wynosi:

$$AU^2+A'V^2+A''W^2+2BVW+2B'WU+2B''UV=0.$$

Spółczynniki są:

$$A=a\alpha,$$
$$A'=c\alpha'+(b+ap)(\beta+\alpha p)+b(\beta'+\alpha'p),$$
$$A''=f\alpha''+(d+aq)(\gamma+\alpha q)+d(\gamma''+\alpha''q),$$
$$2B=(d+aq)(\beta+\alpha p)+(b+ap)(\gamma+\alpha q)+b(\gamma'+\alpha'q)$$
$$+e\alpha'+e\alpha''+d(\beta''+\alpha''p),$$
$$2B'=d\alpha+d\alpha''+a(\gamma+\alpha q),$$
$$2B''=a(\beta+\alpha p)+b\alpha+b\alpha'.$$

Na rozważanej przez nas prostej parametry $\alpha'', \beta'', \gamma''$ zmieniają się, lecz wielkości $\beta''+\alpha''p$ i $\gamma''+\alpha''q$ są stałe.

Jeżeli zastąpimy α'' przez x, wówczas spółczynniki mają postać:

$$A,\quad A',\quad A''=A_1''+fx,$$
$$2B=2B_1+ex,\qquad 2B'=2B_1'+dx,\qquad 2B'';$$

x jest jedyna zmienna. Przyrównywając do zera wyróżnik, otrzymujemy równanie stopnia drugiego względem x, spółczynnik przy x^2 nie równa się zeru; więc istnieją dwa punkty rozkładu potrójnego na każdej z dziewięciu prostych i sześć punktów, posiadających tę własność, iż przez każdy z nich przechodzą trzy proste.

Przypadek trójścianu trójprostokątnego. Jeżeli płaszczyzny P_A, P_B, P_C tworzą trójścian trójprostokątny, rachunki stają się znacznie mniej skomplikowane. Znajdujemy tylko trzy proste, dające trójścian. Jeżeli są obrane dwa z punktów A, B, C, wówczas trzeci jest w zupełności wyznaczony, gdy jest rozkład potrójny. Jeżeli, naprzykład, weźmiemy

$$\alpha''=0,\quad \beta''=0,\quad \gamma''=+1 \quad \text{dla } C,$$

wówczas punkty A i B odpowiadają sobie na mocy wzorów następujących, które wyznaczają przekształcenie dwuwymierne:

$$x_1=\frac{9x_0y_0^2}{4z_0^3+27x_0^2},$$
$$y_1=\frac{y_0^3}{4z_0^3+27x_0^2},$$
$$z_1=\frac{-3y_0^2z_0}{4z_0^3+27x_0^2};$$

$$x_0=\frac{x_1^3}{4z_1^3+27y_1^2},$$
$$y_0=\frac{9x_1^2y_1}{4z_1^3+27y_1^2},$$
$$z_0=\frac{-3x_1^2z_1}{4z_1^3+27y_1^2}.$$

Przykład rozkładu podwójnego (osi prostokątne).

A:	1,	0,	1;	P_A:	$y-z=0$,
B:	-1,	0,	1;	P_B:	$y+z=0$,
C:	0,	1,	0;	P_C:	$z-x=0$.

Powierzchnia S_9 rozpada się i daje:

1. Konoidę
$$z(x^2+y^2)=xy;$$

2. Powierzchnię S_6, określoną przez równania:

$$a = \frac{1-b^2}{3b-1},$$

$$x - az = p = \frac{(1-a)(ab+b-1)}{a^2+b^2+1},$$

$$y - bz = q = \frac{a(1-b^2)+2b}{a^2+b^2+1}.$$

Przykład dziewięciu prostych.

Jeżeli weźmiemy

$$\varphi = \varphi' = 90^0, \qquad \varphi'' = 60^0$$

i

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 3, \quad \alpha'' = 0, \quad \beta'' = -8, \quad \gamma'' = -4,$$

mamy najpierw dla q trzy wartości

$$q = +1, \qquad q = -1, \qquad q = \infty.$$

Mamy z początku sześć następujących prostych Δ', które odpowiadają wartościom:

$$q = +1 \quad \text{przy} \quad p = 2,\ 1,\ 5;$$

$$q = -1 \quad \text{przy} \quad p = 2,\ -1,\ 3.$$

$$\begin{array}{ll} \Delta_1' : y + 2x = 18, & z + x = 9, \\ \Delta_2' : y + x \ = 0, & z + x = -3, \\ \Delta_3' : y + 5x = 0, & z + x = 45, \\ \Delta_4' : y + 2x = -18, & z - x = 33, \\ \Delta_5' : y - x \ = 0, & z - x = -3, \\ \Delta_6' : y + 3x = 0, & z - x = 45. \end{array}$$

Proste te przecinają się parami w sześciu punktach:

B_1 :	6,	6,	3,
B_2 :	−18,	54,	27,
B_3 :	0,	0,	45,
B_4 :	6,	−30,	39,
B_5 :	−18,	18,	15,
B_6 :	0,	0,	−3.

Pozostają do znalezienia trzy inne proste, odpowiadające pierwiastkowi nieskończonemu. Znajdujemy trzy proste

$$B_3 B_6, \qquad B_1 B_4, \qquad B_2 B_5$$

Mamy

3 proste równoległe do $z + x = \text{const.}$,

3 „ „ „ $z - x = \text{const.}$,

3 „ „ „ $z = \text{const.}$

Zachodzi to zawsze, ponieważ mamy na p trzy wartości p_1, p_2, p_3; proste, wzięte po trzy, są równoległe do płaszczyzn

$$y + p_1 x = 0, \qquad y + p_2 x = 0, \qquad y + p_3 x = 0.$$

CZĘŚĆ DRUGA.

Badanie powierzchni S_8.

Powierzchnie te otrzymamy, zakładając, iż płaszczyzny P_A, P_B, P_C są równoległe do jednej i tej samej prostej, przyczem dwie z nich równoległemi mogą nie być.

Zagadnienie wstępne. Warunek niezależności trzech kompleksów AP_A, BP_B, CP_C, gdzie płaszczyzny P_A, P_B, P_C są równoległe do jednej i tej samej prostej, prostej Oz, naprzykład.

Powiadam, iż są one niezależne, jeżeli wyznaczają powierzchnię. W przypadku przeciwnym liczba równań sprowadza się do dwóch; mamy kongruencyę:

$$\angle xOz = 90^0, \qquad \angle yOz = 90^0, \qquad \angle xOy = \varphi.$$

Kompleks pierwszy: $A : \alpha\beta\gamma, \quad P_A : x = 0.$

Kompleks drugi: $B : \alpha'\beta'\gamma', \quad P_B : y = 0.$

Dwa te kompleksy mają za równania:

$$X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + NY - MZ + \cos\varphi\,[X(\alpha Y + \beta Y) + NX] = 0,$$

$$Y(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) + LZ - NX + \cos\varphi\,[Y(\alpha' Y + \beta' X) - NY] = 0.$$

Mnożąc przez λ, μ, dodając i utożsamiając z wyrażeniem

$$D(X^2+Y^2+(\alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z)(AX+BY)$$
$$+A(NY-MZ)+B(LZ-NX)$$
$$+\cos\varphi\,[(\alpha_1 Y+\beta_1 X)(AX+BY)+2DXY+ANX-BNY]=0,$$

znajdziemy:

$$\lambda=A,\qquad \mu=B,\qquad D=0.$$

Otóż płaszczyzny P_A, P_B, P_C muszą przechodzić przez jedną i tę samą prostą, którą tutaj stanowi prosta Oz, o ile tylko trzecia jest wynikiem dwóch innych.

Pozostałe warunki wyrażają, iż punkty A, B, C są położone w tej samej płaszczyźnie, prostopadłej do Oz; niech nią będzie płaszczyzna xOy. Nadto

BC jest prostopadła do P_A,
CA „ „ „ P_B,
AB „ „ „ P_C.

Przypuściliśmy, że jeżeli trzy kompleksy nie są niezależne, czyli że jeden jest wynikiem dwu pozostałych, wówczas były one związane zależnością jednorodną o spółczynnikach stałych.

Otóż w odniesieniu do osi prostokątnych możemy je wyrazić w postaci:

$$A\rho+B\rho'+\varphi_1(XYZ)=0,$$
$$A'\rho+B'\rho'+\varphi_2(XYZ)=0,$$
$$A''\rho+B''\rho''+\varphi_3(XYZ)=0,$$

z warunkiem, iż

$$AB'=BA'\neq 0.$$

Dwa pierwsze równania wyznaczają ρ i ρ'; podstawiając w równanie trzecie, otrzymamy stożek kierunkowy albo tożsamość. Jeżeli trzy kompleksy nie są niezależne, wówczas mamy tożsamość, a zatem związek, wskazany wyżej. Stąd wynika

Twierdzenie. Na to, aby kompleks CP_C był wynikiem dwóch kompleksów AP_A, BP_B, gdzie P_A, B_B przecinają się według prostej Δ, i P_C jest równoległa do Δ, jest konieczne, aby płaszczyzna P_C przechodziła przez prostą Δ i żeby

BC było prostopadłe do P_A,
CA „ „ „ P_B,
AB „ „ c P_C.

Stopień powierzchni S_8. Przekrój przez płaszczyznę w nieskończoności.

Niech będą dane trzy kompleksy niezależne AP_A, BP_B, PC_C; załóżmy, iż płaszczyzny P_A, P_B, P_C są równoległe do osi Oy.

Równania trzech kompleksów są:

$$A\rho+C\rho''+(AX+CZ)(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)+D(X^2+Y^2+Z^2)=0,$$
$$A'\rho+C'\rho''+\ldots=0,$$
$$A''\rho+C''\rho''+\ldots=0.$$

Załóżmy, iż $AC'-CA'\neq 0$; wówczas dwa pierwsze równania dają ρ i ρ''. Podstawiając w równanie trzecie, otrzymujemy stożek. Mamy tedy trzy równania postaci:

$$\rho=\Phi_1(X,\ Y,\ Z)=\Phi(a,\ b,\ 1)=\Phi_1(a,\ b,\ c),$$
$$\rho'=\Phi_2,$$
$$\Phi_3=0,$$

funkcye Φ_1, Φ_2, Φ_3 są jednorodne i rzędu drugiego względem X, Y, Z albo a, b, c.

Znajdujemy stąd:

$$x-az=p=\frac{\Phi_1-a\Phi_2}{a^2+b^2+1},$$
$$y-bz=q=\frac{-a\Phi_1-(b^2+1)\Phi_2}{a^2+b^2+1},$$
$$\Phi_3=0.$$

Mamy cztery tworzące izotropowe w płaszczyźnie w nieskończoności. Przekrój przez tę płaszczyznę składa się 1) z czterech tych prostych, 2) stożkowej stożka kierunkowego, 3) dwóch tworzących, ortogonalnych do linii przecięcia płaszczyzn P_A, P_B. Wreszcie, powierzchnia jest wymierna i rzędu ósmego.

Warunek zniżenia stopnia powierzchni S_9 i S_8.

Stopień ten zniża się, jeżeli liczniki ułamków p, q zawierają czynnik a^2+b^2+1, innemi słowy, jeżeli tworzące izotropowe są w odległości skończonej. Rozważanie stożka kompleksu wykazuje, iż jest konieczne: albo, żeby dwie z płaszczyzn P_A, P_B, P_C były równoległe (mamy wówczas prostą Cayleya), albo, żeby punkty A, B, C były położone w jednej linii prostej. Stopień wówczas zniża się do dwóch jedności. Powrócimy do prostych Cayleya. Zakładamy, iż

$$a^2 + b^2 \neq \text{const}.$$

Wyznaczenie punktów Cayleya powierzchni S_8.

$$\angle xOy = \varphi, \quad \angle yOz = 90^0, \quad \angle zOx = 90^0;$$

$$A : \alpha\beta\gamma, \qquad P_A : x = 0,$$

$$B : \alpha'\beta'\gamma', \qquad P_B : y = 0,$$

$$C : \alpha''\beta''\gamma'', \qquad P_C : y - mx + h = 0.$$

Trzy te kompleksy mają za równania:

$$X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) + (NY - MZ) + \cos\varphi\,[X(\alpha Y + \beta X) + NX] = 0,$$

$$Y(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) + (LZ - NX) + \cos\varphi\,[Y(\alpha' Y + \beta' X) - NY] = 0,$$

$$h(X^2 + Y^2 + Z^2) + (\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z)(Y - mX)$$
$$- m(NY - MZ) + (LZ - NX)$$
$$+ \cos\varphi\,[(\alpha'' Y + \beta'' X)(Y - mX) + 2hXY - mNX - NY] = 0.$$

Oznaczam przez xyz nowy punkt Cayleya. Mnożąc równania powyższe przez λ, μ, ν, dodając i następnie utożsamiając z wyrażeniem

$$D(X^2 + Y^2 + Z^2) + xX + yY + zZ)(AX + BY)$$
$$+ A(NY - MZ) + B(LZ - NX)$$
$$+ \cos\varphi\,[(xY + yX)(AX + BY) + 2DXY + ANX + BNY] = 0,$$

dochodzimy z łatwością do równań następujących:

$$\lambda U_A = m\nu U_C$$

$$\beta V_B = -\nu V_C,$$

$$\lambda V_A + \mu U_B + \nu U_C = m\nu V_C,$$

$$\lambda(z - \gamma) = m\nu(z - \lambda''),$$

$$\mu(z \quad \gamma') = -\nu(z - \gamma''),$$

gdzie $U_{A=0}$ przedstawia płaszczyznę, prostopadłą do Ox, przechodzącą przez punkt $A, \ldots$

Przypadek pierwszy: γ, γ', γ'' nie są równe. Znajdujemy wówczas jeden tylko nowy punkt Cayleya, który znajduje się w przecięciu trzech płaszczyzn:

płaszczyzna Q_A prostopadła do P_A, poprowadzona przez BC,
„ Q_B „ „ P_B „ „ CA,
„ Q_C „ „ P_C „ „ AB.

Jeżeli punkty A, B, C są położone w linii prostej, mamy więc prostą Cayleya, w przeciwnym razie — cztery punkty.

Przypadek drugi: $\gamma' = \gamma$. Możemy założyć:

$$\gamma' = \gamma = 0, \qquad \gamma'' \neq 0.$$

Również znajdujemy jeden tylko nowy punkt Cayleya albo prostą, jeżeli prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny P_C.

Przypadek trzeci: $\gamma = \gamma' = \gamma''$. Tutaj punkty A, B, C są położone w płaszczyźnie, prostopadłej do prostej Δ, do której płaszczyzny P_A, P_B, P_C są równoległe. Przypadek ten prowadzi nas do rozważania stożkowej Cayleya.

Powierzchnie S_8, posiadające stożkową Cayleya.

Możemy założyć $\gamma = \gamma' = \gamma'' = 0$. Równania, znalezione wyżej, dają wówczas $z = 0$, czyli że nowe punkty Cayleya są w płaszczyźnie ABC. Nadto znajdujemy:

$$m(V_A U_C - U_A V_C)\, V_B = (U_B V_C - V_B U_C)\, U_A.$$

Jest to równanie stożkowej, przechodzącej: 1° przez ABC, 2° przez $A'B'C'$; C' — w przecięciu $U_A = 0$, $V_B = 0, \ldots$ Tym sposobem otrzymujemy twierdzenie Pascala z prostą Pascala, odsuniętą w nieskończoność. Sześciokątem jest $AB'CA'BC'A$, przyczem:

AB' jest równoległa do BA', obie prostopadłe do P_C,
BC' „ „ „ CB' „ „ „ P_A,
CA' „ „ „ AC' „ „ „ P_B.

Stożkowa więc może być zupełnie dowolna.

Płaszczyzna Cayleya, która odpowiada punktowi xy tej stożkowej, ma postać:

$$mV_B(U_C - U_A)\,x + U_A(V_B - V_C)\,y + hU_A V_B = 0.$$

Płaszczyzna ta obwija walec klasy trzeciej, którego tworzące są równoległe do prostej Δ.

Przykład liczbowy z kołem Cayleya.

Weźmy osi prostokątne, punkt A na Ox, punkt B na Oy, punkt C w punkcie początkowym,

$$CA = CB = 2h,$$

$$P_A : yOz, \quad P_B : zOx, \quad P_C : x + y + h = 0.$$

Równania powierzchni są:

$$x - az = p = - ah(a^3 + b^3 + a),$$

$$y - bz = q = - bh(a^3 + b^3 + b),$$

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Powierzchnia jest istotnie rzędu ósmego i nie rozpada się.

Równanie koła Cayleya jest:

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 2h(x + y).$$

Płaszczyzny Cayleya są równoległe do osi Oz, i ich ślady na płaszczyźnie xOy obwijają epicykloidę o trzech punktach zwrotu. Śladami temi są proste Simsona trójkąta CEF:

$$\overline{CE} = - h \text{ na } Cx$$

$$CF = - h \text{ na } Cy.$$

Rozkład powierzchni S_8 na dwie powierzchnie S_4 o płaszczyźnie kierunkowej. Warunek rzeczywistości powierzchni S_8.

Ze względu na łatwość pytania, ograniczę się na podaniu rezultatów. Powierzchnie S_8 mogą być rzeczywiste lub urojone zależnie od tego, czy stożek kierunkowy rzędu drugiego jest rzeczywisty lub urojony. Powierzchnie te rozpadają się na dwie powierzchnie S_4 o płaszczyźnie kierunkowej, jeżeli walec rozpada się na dwie płaszczyzny. (Co do powierzchni S_4, należy powiedzieć, iż posiadają one krzywą sześcienną skośną węzłową (nodale), nakreśloną na walcu obrotowym Cayleya.

Obrawszy płaszczyzny P_A, P_B, P_C równolegle do prostej Δ oraz punkty A i B, twierdzimy, iż powierzchnia S_8 rozpada się, gdy punkt C jest wzięty na kwadryce, która, zależnie od przypadku, może być paraboloidą eliptyczną lub hyperboliczną. W tym tylko ostatnim przypadku dwie powierzchnie S_4 są rzeczywiste, i ich płaszczyzny kierunkowe są prostopadłe do two-

rzących paraboloidy hyperbolicznej, które przechodzą przez rozpatrywany punkt C.

Gdy paraboloida jest hyperboliczna, powierzchnia S_8 jest zawsze rzeczywista; gdy paraboloida jest eliptyczna, wówczas dzieli przestrzeń na dwa obszary: należy obrać C w jednym z nich, aby powierzchnia S_8 była rzeczywista.

Przyczynek, dotyczący dziesięciu punktów powierzchni S_9. Przykład liczbowy Darboux'a.

Powróćmy do przypadku powierzchni S_9. Istnieje naogół dziesięć punktów Cayleya, którym odpowiada dziesięć płaszczyzn.

Można postawić pytanie, czy te dziesięć punktów i płaszczyzny odpowiadające odgrywają zupełnie tę samą rolę i czy, naprzykład, trzy z płaszczyzn zawsze tworzą trójścian. Otóż z przykładów liczbowych staje się jasnem, iż to ma miejsce niezawsze.

Gdy to istotnie zachodzi, wnosimy, iż trzy kompleksy odpowiadające nie są niezależne, bo inaczej stożek kierunkowy byłby rzędu drugiego. Zakładamy, iż jest on rzędu trzeciego. Wówczas, na mocy powyższego, mamy, iż każdy kompleks jest kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych dwóch innych kompleksów, trzy płaszczyzny P_A, P_B, P_C przechodzą przez prostą Δ, — i mamy:

prostą BC, prostopadłą do P_A,
" CA, " " P_B,
" AB, " " P_C.

Powiadam, iż siedm punktów, różnych od A, B, C, są położone na trzech walcach obrotowych o osiach, prostopadłych do Δ.

Niech, jak powiedziano, dane będą A, B, C, P_A, P_B, P_C; weźmy:

$$A : \alpha\beta 0, \quad P_A : x = 0,$$

$$B : \alpha'\beta' 0, \quad P_B : y = 0,$$

$$yOz = 90^0, \quad zOx = 90^0, \quad xOy = \varphi.$$

Aby wyznaczyć powierzchnię, należy dać sobie czwarty kompleks

$$D : \alpha''\beta''\gamma'', \quad P_D : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Rachunki, analogiczne do poprzednich, prowadzą do pięciu równań:

$$\lambda(U - U_A) + A(U - U_D) = C(z - \gamma''),$$

$$\mu(V - V_B) + B(V - V_D) = C(z - \gamma''),$$

$$C(V-V_D)+B(z-\gamma'')+\mu z=0,$$
$$C(U-U_D)+A(z-\gamma'')+\lambda z=0,$$
$$A(V-V_D)+B(U-U_D)+\lambda(V-V_A)$$
$$+\mu(U-U_B)-2C(z-\gamma'')\cos\varphi=0.$$

Wyznaczając z dwóch pierwszych równań λ, μ i podstawiając w trzy ostatnie równania, otrzymujemy równania trzech powierzchni, które wyznaczają siedm punktów, różnych od A, B, D. Równanie czwarte daje

$$(S)\qquad C(V-V_D)(V-V_B)+B(V-V_B)(z-\gamma'')$$
$$+Cz(z-\gamma'')-Bz(V-V_D)=0.$$

Jest to walec, którego tworzące są prostopadłe do płaszczyzny yOz albo P_A; walec ten jest obrotowy, i przechodzi przez punkty B, C, D. Równanie piąte daje walec, prostopadły do płaszczyzny P_B. Równanie szóste dałoby powierzchnię rzędu trzeciego, lecz można ją pominąć, albowiem, wprowadzając punkt C, mielibyśmy trzeci walec, prostopadły do płaszczyzny P_C. Mamy więc następujące

Twierdzenie. Uważajmy zbiór dziesięciu punktów Cayleya powierzchni S_9. Jeżeli pozostawimy na uboczu trzy z tych punktów, wówczas siedm pozostałych są położone na trzech walcach obrotowych, których osi są prostopadłe do płaszczyzn Cayleya, odpowiadających trzem pierwszym punktom. Trzy te płaszczyzny tworzą zazwyczaj trójścian, w przeciwnym razie, przechodzą przez jednę i tę samą prostą Δ: własność zachowuje się, i trzy walce są wówczas ortogonalne do prostej Δ.

W przykładzie liczbowym Darboux'a, który zamierzam tu podać, fakt ten ma miejsce cztery razy na sto dwadzieścia kombinacyj płaszczyzn, wziętych po trzy.

Przykład liczbowy Darboux'a. Osi prostokątne. Weźmy:

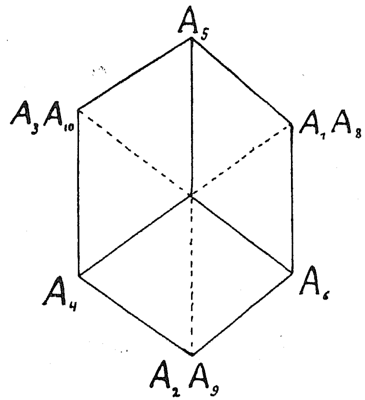
A_1:	1	0	0	P_1:	$y+z=0,$
A_2:	0	1	0	P_2:	$z+x=0,$
A_3:	0	0	1	P_3:	$x+y=0.$

Znajdujemy wówczas:

A_4:	-1	0	0	P_4:	$y-z=0,$
A_5:	0	-1	0	P_5:	$z-x=0,$
A_6:	0	0	-1	P_6:	$x-y=0,$
A_7:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	P_7:	$x+y+z-\frac{1}{2}=0,$
A_8:	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	P_8:	$x-y-z-\frac{1}{2}=0,$
A_9:	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	P_9:	$-x+y-z-\frac{1}{2}=0,$
A_{10}:	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	P_{10}:	$-x-y+z-\frac{1}{2}=0.$

Płaszczyzny są identyczne z płaszczyznami Darboux'a; trzy pierwsze punkty są symetryczne względem punktu początkowego. Jeżeli rozpatrzymy sto dwadzieścia kombinacyj z dziesięciu płaszczyzn, wziętych po trzy, znajdziemy tylko cztery trójściany nieprawdziwe, innemi słowy cztery układy trzech płaszczyzn, przechodzących przez prostą Δ, mianowicie:

P_1 P_2 P_6,	które	przechodzą	przez	$x=y=-z,$
P_1 P_3 P_5,	„	„	„	$z=x=-y,$
P_2 P_3 P_4,	„	„	„	$y=z=-x,$
P_1 P_5 P_6,	„	„	„	$z=y=z.$



Można zrzutować dziesięć punktów według wierzchołków i środka sześcioboku foremnego, jak to wskazuje rysunek.

$$
\begin{array}{llll}
A_7 & \text{ma za wysokość} & h, \\
A_8\ A_9\ A_{10} & \text{"}\ \ \text{"}\ \ \text{"} & \frac{h}{3}, \\
A_1\ A_2\ A_3 & \text{"}\ \ \text{"}\ \ \text{"} & \frac{5h}{6}, \\
A_4\ A_5\ A_6 & \text{"}\ \ \text{"}\ \ \text{"} & \frac{h}{6}.
\end{array}
$$

Lecz tutaj powierzchnia S_9 rozpada się na trzy cylindroidy:

$$x(y^2+z^2)+yz=0,$$
$$y(z^2+x^2)+zx=0,$$
$$z(x^2+y^2)+xy=0.$$

Dziesięć punktów są wspólne cylindroidom, symetrycznym do pierwszych względem punktu początkowego.

O ruchach algebraicznych Darboux'a.

Po otrzymaniu wszystkich tych rezultatów, autor niniejszej rozprawy miał możność przeczytania pracy Darboux'a, dotyczącej ruchów algebraicznych i zamieszczonej w końcu „Kinematyki" Koenigsa. Znakomity geometra, po uprzedniem zdefiniowaniu pewnego ruchu bryły niezmiennej o dwóch parametrach, stawia sobie za cel rozwiązanie pytania o możliwości istnienia takich punktów bryły, które kreślą płaszczyzny. Darboux dowodzi, iż, w przypadku najogólniejszym, takich punktów istnieje dziesięć; jest to właśnie ta liczba, którą znalazłem dla badanych punktów Cayleya. Otóż w poszukiwaniach mych, nasuniętych mi przez pracę Darboux'a, badałem, czy dziesięć punktów Darbouxa nie mogłyby być wyznaczone w sposób analogiczny do wskazanej przezemnie konstrukcyi punktów Cayleya i doszedłem do rezultatów tych samych. Ruch, badany przez Darboux'a, wynika z obrotu (renversement) bryły stałej dokoła prostej, przechodzącej przez punkt początkowy, w połączeniu z przeniesieniem (translation). Ruch ten można zastąpić przez obrót dokoła prostej Δ, równoległej do pierwszej i przeniesienie, równoległe do Δ. Zamiast pozostawienia dwóch parametrów niezależnych, można je związać zależnością w ten sposób, aby przeniesienie równało się zeru. Wówczas prosta Δ opisuje jedną z powierzchni S_9, którą badamy.

Wzajemnie, niech Σ będzie bryła, wytworzona przez zbiór punktów Cayleya i Σ'—bryła, symetryczna z Σ względem tworzących powierzchni S_9.

Jest jasnem, iż będziemy mieli dziesięć punktów bryły Σ', które opisywać będą krzywe płaskie: są to punkty Darboux'a. Punkty te są identyczne z punktami, badanemi przezemnie; płaszczyzny są położone w sposób nieco różny, lecz posiadają własności analogiczne. Przedstawię tutaj rachunki Darboux'a w formie nieco odmiennej, w ten sposób, aby uwidocznić konstrukcyę geometryczną punktów, gdy dane są trzy z nich oraz płaszczyzny odpowiadające. Konstrukcyi tej nie podaje Darboux w swej pracy (Cinématique de Koenigs, p. 363).

Oznaczmy jeszcze przez φ, φ', φ'' kąty między osiami i połóżmy dla uproszczenia:

$$P=\lambda+\mu\cos\varphi''+\nu\cos\varphi',$$
$$Q=\lambda\cos\varphi''+\mu+\nu\cos\varphi,$$
$$R=\lambda\cos\varphi'+\mu\cos\varphi+\nu.$$

Oznaczmy przez xyz punkt figury stałej, przez $x'y'z'$ — punkt, odpowiadający figury ruchomej. Wzory, które następują, określają przeniesienie plus obrót:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{f_1(\lambda\mu\nu)+x(\lambda P-\mu Q-\nu R)+2\lambda Q y+2\lambda R z}{\lambda P+\mu Q+\nu R}, \\
y' &= \frac{f_2(\lambda\mu\nu)+y(\mu Q-\nu R-\lambda P)+2\mu R z+2\mu P x}{\lambda P+\mu Q+\nu R}, \\
z' &= \frac{f_3(\lambda\mu\nu)+z(\nu R-\lambda P-\mu Q)+2\nu P x+2\nu Q y}{\lambda P+\mu Q+\nu R},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

gdzie:

$$f_i=a_i\lambda^2+a_i'\mu^2+a_i''\nu^2+2b_i\mu\nu+2b_i'\lambda\nu+2b_i''\mu\lambda.$$

Napiszmy, iż

$$lx'+my'+nz'+p=0,$$

jakiekolwiek są λ, μ, ν. Mamy w ten sposób sześć równań; napiszemy z nich tylko dwa; pozostałe wyprowadzają się z tych dwóch przez przestawienia, dokonane na xyz, $\varphi\varphi'\varphi''$, przecinkach przy a, b i wskaźnikach:

$$
\begin{aligned}
& l(a_1+x+2y\cos\varphi''+2z\cos\varphi') \\
&\quad +m(a_2-y)+n(a_3-z)+p=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& l(b_1-x\cos\varphi)+m(b_2+z+x\cos\varphi') \\
&\quad +n(b_3+x\cos\varphi''+y)+p\cos\varphi)=0.
\end{aligned}
$$

Wyraźmy, iż punkt, odpowiadający punktowi $x=\alpha$, $y=\lambda$, $z=\gamma$, kreśli płaszczyznę $x=0$; następnie — punkt, odpowiadający punktowi $\alpha''\beta''\gamma''$: $z=0$. Kładąc dla uproszczenia

$$U = x + y\cos\varphi'' + z\cos\varphi',$$
$$V = x\cos\varphi'' + y + z\cos\varphi,$$
$$W = x\cos\varphi' + y\cos\varphi + z,$$
$$U_A = \alpha + \beta\cos\varphi'' + \gamma\cos\varphi',$$

. . . .

otrzymujemy sześć równań następujących:

$$2l(U - U_A) = \quad l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p,$$
$$2m(V - V_B) = \quad l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p,$$
$$2n(W - W_C) = \quad l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p,$$

$$m(W - W_B) + n(V - V_C) = \cos\varphi\,[l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p],$$
$$n(U - U_C) + l(W - W_A) = \cos\varphi'\,[l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p],$$
$$l(V - V_A) + m(U - U_B) = \cos\varphi''[l(x-\alpha) + m(y-\beta') + n(z-\gamma'') - p]$$

Stąd, z łatwością znajdujemy:

$$\frac{W - W_B}{V - V_B} + \frac{V - V_C}{W - W_C} = 2\cos\varphi,$$

— walec obrotowy o tworzących, prostopadłych do płaszczyzny yz. Jest to równanie, już znalezione.

Dyskusyę analogiczną pomijam.

Powierzchnie Steinera.

Weźmy znów osi prostokątne i dajmy sobie punkt xyz; szukajmy spółrzędnych punktu symetrycznego $x'y'z'$ względem prostej Δ, określonej, jak zwykle, przez sześć spółrzędnych:

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N, \qquad \rho = NY - MZ, \ \ldots,$$

$$x' = \frac{2\rho + x(X^2 - Y^2 - Z^2) + 2yXY + 2zXZ}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$y' = \frac{2\rho' + y(Y^2 - Z^2 - X^2) + 2zYZ + 2xYX}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$z' = \frac{2\rho'' + z(Z^2 - Y^2 - X^2) + 2xZX + 2yYZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Wystarcza położyć:

$$2\rho = f_1(XYZ),$$
$$2\rho' = f_2(XYZ),$$
$$2\rho'' = f_3(XYZ),$$

aby znaleść wzory (12) w układzie osi prostokątnych; ale dlatego trzeba, aby było:

$$Xf_1 + Yf_2 + Zf_3 = 0, \tag{13}$$

innemi słowy, zamiast tego, aby wielkości X, Y, Z uważać za niezależne, trzeba związać je zależnością (13), która przedstawia stożek kierunkowy powierzchni S_9.

Wreszcie, mając daną powierzchnię S_9, jeżeli z punktu $\alpha\beta\gamma$ poprowadzimy prostopadłe do tworzącej $XYZLMN$, wówczas spodek ma za spółrzędne:

$$x = \frac{\rho + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$y = \frac{\rho' + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$z = \frac{\rho'' + Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Otóż, dla powierzchni mamy równania w postaci:

$$\rho = -\Phi_1(XYZ), \qquad \rho' = -\Phi_2, \qquad \rho'' = -\Phi_3;$$

zatem krzywa, opisana przez spodek prostopadłej, poprowadzonej z punktu $\alpha\beta\gamma$ do tworzących, jest nakreślona na powierzchni Steinera:

$$x = \frac{-\Phi_1 + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$y = \frac{-\Phi_2 + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$z = \frac{-\Phi_2 + Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

gdzie X, Y, Z uważamy, jako od siebie niezależne. Daje to nową własność powierzchni S_9.

W części trzeciej pracy zajmę się badaniem powierzchni S_6, które posiadają krzywą szóstego rzędu Cayleya, i hyperboloidami, dla których krzywa rzędu szóstego rozpada się na sześć prostych. Wreszcież badam powierzchnie rozwijalne, posiadające nieskończoną liczbę punktów Cayleya albo, co prowadzi do tego samego, —krzywe skośne, posiadające nieskończoną liczbę spodkowych płaskich. Dają się one z łatwością wyznaczyć, bez uciekania się do kwadratur.

CZĘŚĆ TRZECIA.

Powierzchnie o płaszczyźnie kierunkowej.

We wstępie do pracy niniejszej mówiliśmy już, iż równanie tych powierzchni otrzymuje się przez eliminacyę parametru t z równań

$$y = tx^2 - kt^2$$

$$z = \frac{at^3 + bt^2 + ct}{1 + t^2}.$$

Punkty Cayleya tworzą walec obrotowy, na którym jest nakreślona krzywa węzłowa powierzchni; krzywa ta jest krzywą sześcienną skośną. Badając pytanie, które jest łatwe, otrzymałem następujące

Twierdzenie. Uważajmy w płaszczyźnie P dwie parabole o ogniskach F, F' i o kierownicach Δ, Δ'. Parabole te posiadają trzy styczne wspólne w odległości skończonej, tworzące trójkąt ABC. Koło, opisane na tym trójkącie, jest stałe, gdy każda z kierownic przesuwa się równolegle do samej siebie, a ogniska pozostają bez zmiany.

Łatwo widzieć, jak zmienia się twierdzenie, jeżeli prosta Δ jest równoległa do prostej Δ'.

Przejdę teraz do innych badań, stanowiących ciąg dalszy dwóch pierwszych części.

Badanie powierzchni S_6.

Powierzchnie te wynikają z rozkładu powierzchni S_9 na cylindroidę i powierzchnię rzędu szóstego. Klasa najbardziej interesująca tych powierzchni wynikać będzie z badania pewnej kongruencyi, którą zamierzam określić, i która jest ściśle związana z rodziną Lamégo, znalezioną przez Humberta (Systèmes orthogonaux, par G. Darboux, p. 100, 101, ...).

Definicya kongruencyi h, k, l.

Oznaczmy w ten sposób kongruencyę, określoną przez równania

$$\begin{aligned} \rho &= hYZ, \\ \rho' &= kZX, \\ \rho'' &= lXY, \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

gdzie h, k, l są trzy liczby dowolne, związane zależnością

$$h + k + l = 0.$$

Przypomnę czytelnikowi oznaczenia, przyjęte w mej pracy. Jeżeli X, Y, Z, L, M, N są to sześć spółrzędnych prostej, wówczas kładę:

$$\rho = NY - MZ,$$

$$\rho' = LZ - NX,$$

$$\rho'' = MX - LY.$$

Równości pierwsze dają nam, jak to powinno być,

$$\rho X + \rho' Y + \rho'' Z = 0.$$

Zajmiemy się przedewszystkiem szukaniem punktów Cayleya tej kongruencyi, innemi słowy, szukajmy punktu x, y, z w ten sposób, aby prowadząc z tego punktu prostopadłe do prostych kongruencyi, otrzymać spodki, położone na jednej płaszczyźnie

$$Px + Qy + Rz + S = 0.$$

Stosując postępowanie, które już było wskazane, otrzymujemy, w myśl wyznaczenia punktu Cayleya xyz i płaszczyzny odpowiadającej, sześć równań:

$$S + Px = 0,$$

$$S + Qy = 0,$$

$$S + Rz = 0,$$

$$hP + Qz + Ry = 0,$$

$$kQ + Rx + Pz = 0,$$

$$lR + Py + Qx = 0.$$

Ostatecznie znajdujemy dziesięć punktów Cayleya: cztery wierzchołki A, B, C, D czworościanu i środki sześciu krawędzi. Krawędzie przeciwległe tego czworościanu są równe; prostopadłe wspólne do dwóch krawędzi przeciwległych przechodzą przez środki tych krawędzi, — są to osi spółrzędnych. Jeżeli, dla ustalenia myśli, założymy iż $h > 0$, $k < 0$, $l < 0$, wówczas cztery te punkty mają za spółrzędne:

$$(A) \qquad \sqrt{kl}, \qquad i\sqrt{-hl}, \qquad -i\sqrt{-hk},$$

$$(B) \qquad \sqrt{kl}, \qquad -i\sqrt{-hl}, \qquad +i\sqrt{-hk},$$

$$(C) \qquad -\sqrt{kl}, \qquad i\sqrt{-hl}, \qquad i\sqrt{-hk},$$

$$(D) \qquad -\sqrt{kl}, \qquad -i\sqrt{-hl}, \qquad -i\sqrt{-hk};$$

proste AB, CD są rzeczywiste, pozostałe krawędzie są urojone.

Znajdujemy rzeczywiste punkty Cayleya:

Punkt

$$(E) \qquad x = +\sqrt{kl}, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

$$(P_E) \qquad \frac{z}{y} = -\sqrt{\frac{l}{k}},$$

i punkt

$$(F) \qquad x = -\sqrt{kl}, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

$$(P_F) \qquad \frac{z}{y} = +\sqrt{\frac{l}{k}}.$$

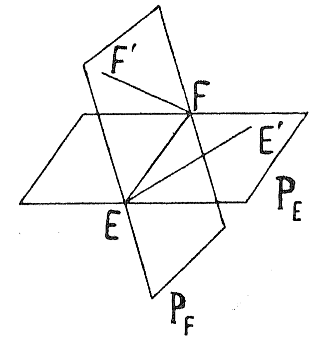
Te elementy rzeczywiste pozwolą mi podać bardzo prostą definicyę geometryczną kongruencyi h, k, l.

Pierwsza definicya geometryczna kongruencyi h, k, l i kongruencyi sprzężonej.

Uważajmy dwie płaszczyzny sieczne P_E, P_F i na przecięciu ich dwa punkty E i F.

Niech w płaszczyźnie P_E, około punktu E, obraca się prosta EE',

i w płaszczyźnie P_F dokoła punktu F — prosta FF'; prostopadła wspólna do tych dwóch prostych opisuje kongruencyę.



W celu otrzymania kongruencyi, którą nazywać będziemy kongruencyą sprzężoną, zjednoczymy E z P_F i F z P_E.

Pokażemy teraz zupełnie odmienny sposób otrzymania kongruencyi h, k, l.

Rodzina powierzchni Lamégo-Humberta.[1]

Szukając powierzchni prostoliniowych, które posiadają punkty Cayleya w jednej linii prostej, znalazłem, iż te punkty są położone na sześciu prostych dla każdego układu tworzących, w przypadku hyperboloid. Szukając tedy równania ogólnego hyperboloid, mających te same proste Cayleya, znalazłem równanie następujące, gdzie u oznacza parametr zmienny:

$$\frac{x^2}{(u+\beta)\,(u+\gamma)} + \frac{y^2}{(u+\gamma)\,(u+\alpha)} + \frac{z^2}{(u+\alpha)\,(u+\beta)} + 1 = 0.$$

Jest to właśnie rodzina Lamégo-Humberta. Jeżeli założymy

$$\gamma \angle \alpha \angle \beta,$$

gdzie α, β, γ są dodatnie, będziemy mieli hyperboloidę, przyczem u zmienia się od $-\infty$ do $-\gamma$. Proste rzeczywiste Cayleya dla jednego z układów tworzących są:

---

[1]) „Comptes rendus" Akademii paryskiej, 1890.

$$x = +\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)},$$

$$\frac{y}{z} = -\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma}}$$

i

$$x = -\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)},$$

$$\frac{y}{z} = +\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\gamma}},$$

które, rzecz jasna, nie zmieniają się, gdy zastąpimy α, β, γ przez $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$, $\gamma+\lambda$.

Razem istnieje sześć prostych Cayleya, które są sześcioma krawędziami czworościanu $ABCD$, analogicznego z tym, o którym mowa była wyżej. Można określić te sześć prostych w sposób następujący:

Są to prostopadłe wspólne do tworzących izotropowych albo jeszcze — prostopadłe do płaszczyzn cyklicznych, poprowadzone przez ogniska konturu widocznego powierzchni do płaszczyzn cyklicznych środkowych. Cztery wierzchołki $ABCD$ odgrywają specyalną rolę: jeżeli przez jeden z nich poprowadzimy prostopadłe do tworzących, wówczas spodki będą położone w linii prostej dla każdej hyperboloidy. Dla każdego z innych punktów prostej Cayleya spodki są położone na kole kwadryki.

Druga definicya kongruencyi h, k, l.

Będziemy oznaczali przez H_u hyperboloidy Humberta

$$\frac{x^2}{(u+\beta)(u+\gamma)} + \frac{y^2}{(u+\gamma)(u+\alpha)} + \frac{z^2}{(u+\alpha)(u+\beta)} + 1 = 0.$$

Na mocy tego, co powiedziano wyżej, będziemy oczywiście mieli kongruencyę h, k, l, uważając tworzące tego samego układu wszystkich tych hyperboloid. To właśnie zamierzam stwierdzić wprost. Kładę dla uproszczenia

$$(u+\beta)(u+\gamma) = A, \quad (u+\gamma)(u+\alpha) = B, \quad (u+\alpha)(u+\beta) = C.$$

Na to, aby prosta $x = az + p$, $y = bz + q$ była położona na powierzchni, spełniać się muszą konieczne trzy warunki, które, rozwiązane względem A, B, C, dają:

$$A = \frac{p(aq-bp)}{b}, \quad B = \frac{q(aq-bp)}{-a}, \quad C = -\frac{pq}{ab};$$

skąd:

$$(u+\alpha)^2 = \frac{q^2}{a^2}.$$

Jeżeli, naprzykład, przyjmiemy

$$u + \alpha = -\frac{q}{a},$$

wówczas znajdziemy:

$$\beta - \alpha = \frac{ap+bq}{ab},$$

$$\gamma - \beta = aq - bp - \frac{p}{b},$$

$$\alpha - \gamma = bp - aq - \frac{q}{a};$$

skąd:

$$\rho = (\beta-\gamma)\,b,$$

$$\rho' = (\gamma-\alpha)\,a,$$

$$\rho'' = (\alpha-\beta)\,ab,$$

albo, przy innych oznaczeniach,

$$\rho = (\beta-\gamma)\,YZ,$$

$$\rho' = (\gamma-\alpha)\,ZX,$$

$$\rho'' = (\alpha-\beta)\,XY.$$

Wystarcza więc położyć

$$h = \beta-\gamma, \quad k = \gamma-\alpha, \quad l = \alpha-\beta;$$

mamy wreszcie

$$h + k + l = 0.$$

Kongruencya sprzężona $(-h, -k, -l)$ jest utworzona z tworzących drugiego układu.

Pożyteczną nam jeszcze będzie inna definicya kongruencyi h, k, l. W tym celu wypowiemy następujące łatwe do udowodnienia

Twierdzenie. Uważajmy hyperboloidę prostoliniową H i tworzącą stałą G tej hyperboloidy. Niech będzie G' tworząca ruchoma tego samego układu i AB—prostopadła wspólna do G, G':

1⁰. Prosta AB opisuje cylindroidę o osi G, której jedna z tworzących jest prostopadła do G, poprowadzona przez punkt środkowy w płaszczyźnie środkowej.

2⁰. Cylindroida ta przecina hyperboloidę H według stożkowej, która rzutuje się według koła na płaszczyźnie prostopadłej do G. Elipsa ta jest miejscem spodków prostopadłych, poprowadzonych do tworzących cylindroidy ze wszystkich punktów tworzącej G_1, równoległej do G.

Uważajmy teraz jedną z powierzchni H_u i na niej tworzącą G' drugiego układu; tworząca ta przebija odpowiadającą kulę Monge'a w dwóch punktach M i N, przez które przechodzi tworząca pierwszego układu. Otóż tworząca G' jest prostopadłą wspólną do dwóch tworzących tego pierwszego układu, — skąd

Trzecia definicya kongruencyi h, k, l.

Uważajmy hyperboloidę H i tworzące jednego z układów; prostopadłe wspólne do tych tworzących, wziętych po dwie, wytwarzają kongruencyę h, k, l, która pozostaje tą samą, jeżeli zastąpimy H przez jakąkolwiek z hyperboloid, posiadających te same proste Cayleya.

Rząd i klasa kongruencyi h, k, l. Jeżeli odwołamy się do pierwszej definicyi zapomocą dwóch kompleksów EP_E, FP_F, przekonamy się, iż konieczne jest pozostawienie na uboczu prostych, które przecinają EF ortogonalnie.

To ustaliwszy, łatwo jest stwierdzić, iż rząd kongruencyi równa się 3 i klasa równa się 2. Kongruencya ta posiada następującą wybitną własność:

Pierwsza własność.

Twierdzenie. Każda powierzchnia równikowa kongruencyi h, k, l (to znaczy—zbiór prostych kongruencyi, równoległych do płaszczyzny danej) jest cylindroidą.

Szukając warunków na to, aby prosta $x = az + p$, $y = bz + q$ była położona na hyperboloidzie H_u, znajdziemy zależności, które można napisać w postaci:

$$p = b(u + \beta),$$

$$q = -a(u + \alpha),$$

$$aq - bp = u + \gamma;$$

skąd

$$u = -\frac{a^2\alpha + b^2\beta + \gamma}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Jeżeli więc damy sobie a, b, czyli kierunek prostej u, wówczas hyperboloida H_u jest wyznaczona, i związki powyższe dadzą p, q.

Chcąc otrzymać proste kongruencyi, równoległe do płaszczyzny P, szukamy prostej Δ, należącej do kongruencyi, która jest prostopadła do płaszczyzny P i sprzężona, na hyperboloidzie H_u, której jest częścią; bierzemy prostopadłe wspólne do Δ i do tworzących tego samego układu: mamy cylindroidę, o której mowa w twierdzeniu.

Druga własność.

Twierdzenie. Przez punkt M przestrzeni przechodzą trzy proste G_1, G_2, G_3 kongruencyi pierwszej i trzy proste G_1', G_2', G_3' kongruencyi sprzężonej:

1⁰ Dwa trójściany $G_1G_2G_3$ i $G_1'G_2'G_3'$ są dodatkowe;

2⁰ Płaszczyzny G_1G_1', G_2G_2', G_3G_3' przechodzą przez jedną i tę samą prostą; więc

3⁰ Przez linię przecięcia dwóch powierzchni H_u przechodzi trzecia powierzchnia.

Część pierwsza wynika z rozważania cylindroidy, utworzonej przez prostopadłe wspólne do G_1 i do tworzących tego samego układu na hyperboloidzie H_u; dwie pozostałe części wynikają z pierwszej; wreszcie, ostatnią można z łatwością stwierdzić bezpośrednio.

Powierzchnia ogniskowa kongruencyi h, k, l.
Powierzchnia środków (médiane). Powierzchnia środkowa.

Powierzchnię ogniskową otrzymamy, szukając obwiedni hyperboloidy H_u, gdy zmienia się u. Prowadzi to do wyeliminowania u z dwóch równań.

$$x^2 + y^2 + z^2 + \mu = -3u^2 - 6\lambda u,$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \nu = +2u^3 + 3\lambda u^2;$$

przyczem, dla uproszczenia, kładziemy

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\lambda, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \mu, \qquad \alpha\beta\gamma = \nu.$$

Równanie pierwsze przedstawia kulę Monge'a hyperboloidy H_u: więc punkty ogniskowe prostej kongruencyi są to punkty, w których prosta ta przecina hyperboloidę H_u, której stanowi część. Wnosimy stąd, iż dwa te ogniska F i F' są jednakowo odległe od punktu początkowego. Otóż:

1⁰ Powierzchnia środków (p. Guichard, Comptes Rendus, 1891, str. 1425 i następne), czyli miejsce środka FF' schodzi się z miejscem spodka K prostopadłej, poprowadzonej z punktu O do prostej: jest to powierzchnia Steinera;

2⁰ Powierzchnia środkowa, to znaczy obwiednia płaszczyzny, poprowadzonej przez k, prostopadle do prostej, sprowadza się do punktu O.

Powierzchnia ogniskowa ma za równanie

$$4\,(x^2 + y^2 + z^2 + \mu - 3\lambda^2)^2$$
$$+ 27\,[\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + \mu) + 2\lambda^3 + \nu] = 0.$$

Powierzchnia ta jest bardzo interesująca. Ograniczę się do wskazania jednej z jej własności:

Twierdzenie. Powierzchnia ogniskowa kongruencyi h, k, l posiada sześć kół styczności (to znaczy kół, według których płaszczyzna koła jest styczna do powierzchni; powierzchnia falowa (la surface des ondes) ma, naprzykład, cztery koła styczności.

Równania, napisane powyżej, dowodzą, iż powierzchnia ogniskowa jest miejscem stożkowej kulistej. Rozważanie płaszczyzn cyklicznych stożka

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$$

prowadzi nas do równań powyższych w trzech formach. Każda z tych form daje nam dwa koła styczności. Jeżeli, jak to wyżej zakładaliśmy, $\gamma < \alpha < \beta$ i $\alpha, \beta, \gamma > 0$, wówczas równanie, które daje koła rzeczywiste, jest następujące:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \mu = -3u^2 - 6\lambda u,$$

$$(\beta - \alpha) y^2 + (\gamma - \alpha) z^2 = (u + \alpha)^2 (2u + \beta + \gamma).$$

Przy $u = -\alpha$ mamy dwa koła rzeczywiste, prostopadłe do prostych Cayleya hyperboloidy H_u. Płaszczyzna jednego z tych kół przecina powierzchnię według tego koła, uwzględnionego dwukrotnie, oraz innego koła.

Powierzchnie Steinera.

Powierzchnie te rzędu czwartego, badane przez Weierstrassa, Cayleya, Cremonę i innych (p. np. Journal f. reine und angewandte Mathematik, t. 63–64), posiadają trzy proste podwójne, przecinające się i cztery stożkowe styczności, położone na jednej i tej samej kwadryce. Wynika stąd, iż wszelka płaszczyzna styczna przecina powierzchnię według dwóch stożkowych. Wszystkie te własności wyprowadzają się z łatwością z badania kongruencyi h, k, l. Niech będzie punkt jakikolwiek M o spółrzędnych α, β, γ. Jeżeli poprowadzimy z tego punktu prostopadłą do prostych kongruencyi

$$\rho = hYZ,$$

$$\rho' = kZX,$$

$$\rho'' = lXY,$$

wówczas spółrzędne x, y, z spodka dane będą przez wzory:

$$x = \frac{hYZ + X(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$y = \frac{kZX + Y(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$z = \frac{lXY + Z(\alpha X + \beta Y - \gamma Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

które określają powierzchnię Steinera w spółrzędnych, naprzykład, $u = \dfrac{X}{Z}$, $v = \dfrac{Y}{Z}$.

Proste kongruencyi mogą być ugrupowane w cylindroidy; osi tych cylindroid tworzą kongruencyę sprzężoną: trzy z liczby tych osi przechodzą przez punkt M: są to, oczywiście, trzy proste podwójne powierzchni Steinera. Stąd — własność płaszczyzn stycznych. Wreszcie, elipsy, nakreślone na powierzchni, otrzymują się zapomocą cylindroid.

W celu otrzymania ostatniej własności, zakładamy, iż α, β, γ równają się zeru, co zresztą z łatwością można uogólnić. Powierzchnia Steinera wówczas jest:

$$x = \frac{hYZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad y = \frac{kZX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad z = \frac{lXY}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Przetnijmy powierzchnię tę płaszczyzną

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Koniecznie wziąć należy proste kongruencyi, równoległe do tworzących stożka

$$AhYZ + BkZX + ClXY + D(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Jeżeli płaszczyzna przemieszcza się równolegle do samej siebie, innemi słowy, jeżeli parametry A, B, C są stałe, zmienia się zaś parametr D, stożek rozpada się trzykrotnie na dwie płaszczyzny, proste odpowiadające dają dwie cylindroidy, zatem płaszczyzny odpowiadające dają dwie elipsy: mamy w ten sposób trzy płaszczyzny styczne, równoległe do płaszczyzny danej. Lecz, gdy stożek jest obrotowy, w przypadku granicznym dwie elipsy nakrywają się wzajemnie, i będziemy mieli elipsę styczności. Należy więc wyznaczyć stożki obrotowe w postaci

$$AhYZ + BkZX + ClXY = 0,$$

czyli stożki, przechodzące przez trzy osi spółrzędnych. Otóż, przez trzy proste, tworzące trójścian, można poprowadzić cztery stożki obrotowe: mamy więc istotnie cztery elipsy styczności.

Przekształcenie dwuwymierne, podporządkowywujące kulę powierzchni Steinera.

Rozważania powyższe doprowadziły nas do przekształceń dwuwymiernych, dających odpowiedniość między kulą i powierzchnią Steinera. Przykład:

$$x' = \frac{y}{k}, \qquad x = h y',$$

$$y' = \frac{x}{h}, \qquad y = k x',$$

$$z' = \frac{l x y}{h k z}, \qquad z = \frac{l x' y'}{z'}.$$

Jeżeli punkt (x', y', z') kreśli kulę

$$(\Sigma) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2z' = 0,$$

wówczas punkt (x, y, z) kreśli powierzchnię Steinera

$$(S) \qquad h y^2 z^2 + k z^2 x^2 + l z^2 y^2 - 2 h k l x y z = 0.$$

Istnieją cztery stożki obrotowe, zawierające osi Ox, Oy, Oz. W celu otrzymania płaszczyzn stożkowych styczności, koniecznie należy rozważyć przecięcie kuli Σ przez jeden z tych czterech stożków.

Przekrojowi płaskiemu powierzchni S odpowiada na kuli Σ przecięcie jednego stożka, mającego za wierzchołek punkt początkowy, z kulą Σ. Jeżeli płaszczyzna jest styczna do powierzchni S, stożek ten rozpada się. I t. d.

Powierzchnie S_6, odpowiadające kongruencyi h, k, l.

Obrawszy liczby h, k, l w ten sposób, aby było $h + k + l = 0$, będziemy mieli powierzchnię S_6, uważając te proste kongruencyi, które są równoległe do tworzących stożka rzędu drugiego

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + D y z + E z x + F x y = 0.$$

Szukając punktów Cayleya powierzchni, znajdujemy krzywą rzędu szóstego — przecięcie dwóch powierzchni rzędu trzeciego. Przecięcie to rozpada się na krzywą sześcienną, nie odpowiadającą pytaniu, i krzywą rzędu szóstego. Dodajmy jeszcze, iż krzywa ta rzędu szóstego nie zmienia się, gdy zastąpimy stożek przez stożek spółcykliczny.

W celu uproszczenia rachunków, weźmiemy stożek w postaci

$$(C) \qquad A x^2 + B y^2 + C z^2 = 0.$$

Równania powierzchni S_6 przybierają postać:

$$x = a z + \frac{b (h - a^2 l)}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$y = b z + \frac{a (k - b^2 l)}{a^2 + b^2 + 1},$$

$$A a^2 + B b^2 + C = 0;$$

to znaczy, będziemy mieli równanie tej powierzchni, gdy wyeliminujemy a i b.

Niech będzie (x, y, z) punkt Cayleya i,

$$P x + Q y + R z + S = 0,$$

płaszczyzna odpowiadająca. Musi zachodzić równanie

$$P h Y Z + Q k Z X + R l X Y + S (X^2 + Y^2 + Z^2)$$
$$+ (x X + y Y + z Z)(P X + Q Y + R Z) \equiv \lambda (A X^2 + B Y^2 + C Z^2),$$

które daje

$$S + P x = \lambda A, \qquad P h + R y + Q z = 0,$$
$$S + Q y = \lambda B, \qquad Q k + P z + R x = 0,$$
$$S + R z = \lambda C, \qquad R l + Q x + P y = 0.$$

Otóż w tablicy

$$\begin{vmatrix} h & z & y & (B-C) x \\ z & k & x & (C-A) y \\ y & x & l & (A-B) z \end{vmatrix}$$

należy przyrównać do zera dwa wyznaczniki o trzech kolumnach, naprzykład

$$(S) \qquad \begin{vmatrix} h & z & y \\ z & k & x \\ y & x & l \end{vmatrix} = 0,$$

$$(S') \qquad \begin{vmatrix} h & z & y \\ z & k & x \\ (B-C) x & (C-A) y & (A-B) z \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli weźmiemy $h > 0$, $k < 0$, $l < 0$, wówczas dwie te powierzchnie będą miały trzy proste wspólne, które nie wchodzą w rachubę: prostą w nieskończoności płaszczyzny $z = 0$ oraz

$$z = \varepsilon i \sqrt{-hk}, \qquad \frac{y}{x} = -\varepsilon i \sqrt{-\frac{h}{k}}. \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Pozostaje krzywa rzędu szóstego, posiadająca osi Ox, Oy, Oz jako osi symetryi.

Dalej zobaczymy, iż krzywa ta posiada sześć kierunków asymptotycznych, które są prostopadłe do płaszczyzn cyklicznych stożka (C).

Krzywa węzłowa powierzchni S_6. Jeżeli weźmiemy na krzywej rzędu szóstego punkt A, i z tego punktu poprowadzimy prostopadłe do tworzących powierzchni S_6, wówczas spodki prostopadłych będą położone w płaszczyźnie P_A. Płaszczyzna ta przecina powierzchnię S_6 według krzywej rzędu czwartego, nakreślonej na powierzchni Steinera, która odpowiada punktowi A, i, prócz niej, według dwóch prostych: punkt przecięcia tych dwóch prostych kreśli krzywą węzłową, którą możnaby wyznaczyć w pewnych przypadkach szczególnych. Podamy niżej przykłady, kiedy krzywa ta rozpada się na trzy stożkowe.

Warunki rozkładu krzywej rzędu szóstego.

Należy przekonać się, czy naogół krzywa ta rzędu szóstego nie rozpada się; łatwe jest znalezienie wszystkich przypadków rozkładu. Weźmy znowu sześć równań względem x, y, z, P, Q, R, S. Trzy ostatnie równania dają nam równania powierzchni (S) w odniesieniu do spółrzędnych $u = \frac{P}{R}$, $v = \frac{Q}{R}$:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{P\,(hP^2 - kQ^2 - lR^2)}{2PQR}, \\
y &= \frac{Q\,(kQ^2 - hP^2 - lR^2)}{2PQR}, \\
z &= \frac{R\,(lR^2 - hP^2 - kQ^2)}{2PQR}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Podstawiając w równanie

$$P\,(B - C)\,x + Q\,(C - A)\,y + R\,(A - B)\,z = 0,$$

znajdujemy warunek

$$
\begin{aligned}
&(B - C)\,P^2\,(hP^2 - kQ^2 - lR^2) \\
&+ (C - A)\,Q^2\,(kQ^2 - lR^2 - hP^2) \\
&+ (A - B)\,R^2\,(lR^2 - hP^2 - kQ^2) = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Jeżeli punkt (P, Q, R) kreśli krzywą rzędu czwartego (2), wówczas punkt (x, y, z), dany przez równania (1), opisuje krzywą rzędu szóstego, nakreśloną na powierzchni (S). Na to, aby krzywa rzędu szóstego rozpadała się, jest konieczne i dostateczne, aby rozpadało się równanie (2).

Mamy tu trójmian dwukwadratowy względem P, i badanie nie przedstawia żadnych trudności. Znajdujemy:

Przypadek pierwszy rozkładu. Krzywa rzędu szóstego rozpada się na krzywą rzędu czwartego i stożkową, jeżeli tylko jest spełniony jeden z warunków następujących:

$$
\begin{aligned}
l\,(B - C) + h\,(A - B) &= 0, \\
h\,(C - A) + k\,(B - C) &= 0, \\
k\,(A - B) + l\,(C - A) &= 0.
\end{aligned}
$$

Przykład liczbowy:

Przy

$$h = 2, \quad k = 1, \quad l = -3.$$

$$h\,(C - A) + k\,(B - C) = 0,$$

znajdujemy stożkową

$$z = 0, \quad 2x^2 + y^2 + 6 = 0,$$

która jest urojona, i krzywą rzędu czwartego

$$
\begin{aligned}
2x^2 - y^2 + z^2 - 2 &= 0, \\
xyz + y^2 - 4x^2 &= 0,
\end{aligned}
$$

posiadającą dwie proste wspólne

$$
\begin{aligned}
y &= \varepsilon x\sqrt{2}, \\
z &= \varepsilon\sqrt{2}.
\end{aligned}
\qquad (\varepsilon = \pm 1).
$$

Pozostawiamy na uboczu przypadek, w którym liczby h, k, l są równe; w przypadku tym można otrzymać trzy stożkowe: koło i dwie parabole.

Przypadek drugi rozkładu. Przypadek ten odpowiada warunkowi

$$Ah + Bk + Cl = 0,$$

albo też

$$\frac{h}{C - B} = \frac{k}{A - C} = \frac{l}{B - A},$$

czyli, że stożek (C) powinien mieć za płaszczyzny cykliczne:

$$\frac{x^2}{h} = \frac{y^2}{k}, \qquad \frac{y^2}{k} = \frac{z^2}{l}, \qquad \frac{z^2}{l} = \frac{x^2}{h}.$$

W tym to przypadku powierzchnię możemy przedstawić w ten sposób:

$$x = az + \frac{Bh}{B - C}\,b,$$

$$y = bz - \frac{Ah}{B - C}\, a,$$

$$Aa^2 + Bb^2 + C = 0.$$

Eliminując a, b, znajdujemy:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \frac{ABC}{(B-C)^2} h^2 = 0,$$

i krzywa rzędu szóstego rozpada się na sześć prostych. Powierzchnia

$$\text{(S)} \qquad 2xyz - (hx^2 + ky^2 + lz^2) + hkl = 0$$

posiada sześć prostych w odległości skończonej: dwie równoległe do każdej z płaszczyzn spółrzędnych. Naprzykład

$$z^2 = hk,$$

$$hx = yz,$$

albo:

$$z = \varepsilon \sqrt{hk}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{z}.$$

Te sześć prostych należą do powierzchni S'.

Jeżeli rozważamy hyperboloidę zwykłą

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

przyczem $a > b$, wówczas sześć prostych Cayleya tworzą taki czworościan, o którym była mowa na początku. Dwie krawędzie przeciwległe są rzeczywiste i mają za równania:

$$x = \varepsilon \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}}{a}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

$$\frac{y}{y} = \frac{-acx}{b(a^2+c^2)}.$$

Płaszczyzny odpowiadające Cayleya są płaszczyznami cyklicznemi. Te sześć prostych Cayleya są prostopadłe wspólne do tworzących izotropowych.

Niech będzie Δ jedna z tych prostych; jest ona prostopadła do płaszczyzny cyklicznej. Jeżeli przez punkt A prostej Δ poprowadzimy prostopadłe do tworzących układu rozważanego, wówczas spodki będą położone na kole

kwadryki, której płaszczyzna nie jest równoległa do rozważanej przez nas pierwszej płaszczyzny cyklicznej.

Przypadek szczególny hyperboloid prostokątnych. Można wykazać, iż proste Cayleya mogą być tworzącemi hyperboloidy. Ma to miejsce dla hyperboloid, które nazywać będę hyperboloidami prostokątnemi i które są utworzone przez prostą przecięcia dwóch płaszczyzn prostokątnych, obracających się odpowiednio dokoła dwóch prostych Δ, Δ'. Proste te Δ, Δ' są właśnie prostemi Cayleya: tutaj własność staje się oczywistą. Na to, aby hyperboloida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

była prostokątną, trzeba i wystarcza, aby było:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Kierunki asymptotyczne krzywych rzędu szóstego Cayleya.

Lemmat. Niech będzie O punkt na osi cylindroidy, w którym przecinają się dwie tworzące prostokątne, czyniące z osią trójścian trójprostokątny. Jeżeli pewien punkt M oddala się w nieskończoność na prostej λ, wówczas płaszczyzna P_M staje się płaszczyzną P, prostopadłą do osi. Aby otrzymać tę płaszczyznę, prowadzimy przez oś płaszczyznę, równoległą do prostej λ; płaszczyzna ta przecina cylindroidę według tworzącej, przecinającej oś w punkie A. Płaszczyzna P przechodzi przez punkt B, symetryczny z punktem A względem punktu O.

Dowód jest bepośredni; pomijamy go.

Twierdzenie. Kierunki asymptotyczne krzywej rzędu szóstego Cayleya, odpowiadającej powierzchni S_6 kongruencyi h, k, l, są to sześć prostopadłych do płaszczyzn cyklicznych obranego stożka. Krzywa nie zmienia się, gdy zastąpimy stożek przez stożek współcykliczny; gdy więc stożek znika, wówczas powierzchnia S_6 rozpada się na dwie cylindroidy, mające jedną tworzącą wspólną — prostopadłą wspólną do ich osi.

Niech będą μ, μ' osi tych dwóch cylindroid; O — punkt, położony na osi pierwszej z nich, o której mówiliśmy wyżej: CD — prostopadła wspólna do μ i do μ'. Płaszczyzna P, prostopadła do μ i przechodząca przez CD, jest styczna do drugiej cylindroidy. Istnieje więc prosta Δ, równoległa do μ', przytem taka, iż dla każdego punktu A prostej Δ płaszczyzna P_A zlewa się z płaszczyzną P.

Gdy punkt A odchodzi w nieskończoność, płaszczyzna P_A nie zmienia się w pierwszej cylindroidzie, i dąży do płaszczyzny P w drugiej. Będziemy więc mieli powierzchnie prostoliniowe wzajemne.

Powierzchnie prostoliniowe wzajemne.

Niech będzie S powierzchnia prostoliniowa, Δ — tworząca, Δ' — prostopadła do Δ, poprowadzona w płaszczyźnie stycznej w punkcie środkowym O i przechodząca przez ten punkt. Prosta Δ' opisuje drugą powierzchnię, którą nazywam wzajemną względem pierwszej. Wykażemy, iż punkt O kreśli linię zwężenia wspólną dwóm powierzchniom, które są styczne według tej linii zwężenia. Obierzmy metodę, którą Darboux posługiwał się tak często w swojej teoryi powierzchni, i niech będzie $Oxyz$ trójścian ruchomy $Oz \equiv \Delta$, $Ox \equiv \Delta'$. Rzuty prędkości punktu (związanego z trójścianem) na osi ruchome, zgodnie z przyjętemi oznaczeniami, wyrażają się przez

$$V_x = \xi + qz - ry,$$
$$V_y = \eta + rx - pz,$$
$$V_z = \zeta + py - qx.$$

Dla punktu na osi Oz mamy:

$$V_x = \xi + qz,$$
$$V_y = \eta - pz,$$
$$V_z = \zeta.$$

Wyprowadzamy stąd równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni S w punkcie osi Oz, i, wyrażając, iż punkt O jest punktem środkowym i zOx — płaszczyzną środkową, znajdujemy:

$$q = 0, \qquad \eta = 0,$$

i nawzajem.

Wyprowadzamy stąd, iż dwie jakiekolwiek proste prostokątne, przecinające się w punkcie O, w płaszczyźnie zOx, kreślą dwie powierzchnie prostoliniowe wzajemne.

Powierzchnie prostoliniowe — wzajemności kwadryk.

Niech będzie S kwadryka, na której rozpatrujemy tylko jeden układ tworzących. Oznaczmy przez S' jej wzajemność, Powiadam, iż jest to jedna

z powierzchni S_6, wyżej określonych. W rzeczy samej, uważajmy kongruencyę h, k, l, utworzoną przez prostopadłe wspólne do tworzących rozpatrywanych kwadryki S: tworzące powierzchni S' stanowią ich część. Poza tem, są one równoległe do tworzących stożka wzajemnego względem stożka asymptotycznego powierzchni S. To dowodzi twierdzenia.

Inne powierzchnie S_6.

Wynikają one z rozkładu powierzchni S_9, i łatwo widzieć, iż otrzymują się one, gdy położymy:

$$\rho = \varphi(X, Y, Z),$$
$$\rho' = \varphi'(X, Y, Z),$$
$$\rho'' = \varphi''(X, Y, Z);$$

gdzie φ, φ', φ'' są trzy funkcye jednorodne, rzędu drugiego, takie, iż albo

$$X\varphi + Y\varphi' + Z\varphi'' \equiv 0,$$

— otrzymujemy wówczas powierzchnie, badane wyżej — albo też

$$X\varphi + Y\varphi' + Z\varphi'' \equiv P\Phi,$$

gdzie P jest funkcyą liniową, i Φ funkcyą stopnia drugiego. Należy tedy wziąć

$$\Phi(X, Y, Z) = 0$$

dla stożka kierunkowego powierzchni.

Ograniczę się do podania dwóch przykładów liczbowych, które prowadzą do przypadków rozkładu, godnych uwagi.

Przykład pierwszy. Rozważanie trzech kompleksów AP_A, BP_B, CP_C, gdzie

$$P_A : x = 0, \qquad P_B : y = 0, \qquad P_C : z - 0;$$
$$A : 0,\ 0,\ 2, \qquad B : 0,\ 0,\ -1, \qquad C : 0,\ 0,\ 1,$$

prowadzi do powierzchni

$$x = az - \frac{a}{a^2 + b^2 + 1},$$
$$y = bz + \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1},$$
$$b^2 = 2a^2 + 1.$$

Krzywa rzędu szóstego Cayleya rozpada się na trzy stożkowe, których kierunki asymptotyczne są prostopadłe do płaszczyzn cyklicznych stożka kierunkowego. Trzy te stożkowe są:

$1^0 \qquad x=0, \qquad y^2+3z^2=3;$

$2^0 \qquad y=0, \qquad 2x^2+3\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4};$

$3^0 \qquad z=\frac{1}{2}, \qquad 8x^2-4y^2+9=0.$

Powierzchnia ta posiada krzywą węzłową, utworzoną z trzech stożkowych:

$1^0 \qquad x=0, \qquad y^2+3z^2=6z;$

$2^0 \qquad y=0, \qquad 2x^2+3z(z+1)=0;$

$3^0 \qquad z=\frac{1}{2}, \qquad 8x^2-4y^2+9=0.$

Ta ostatnia jest stożkową potrójną i zlewa się z jedną ze stożkowych Cayleya.

Przykład drugi. Mając trzy kompleksy

$$\rho = X^2+Y^2,$$

$$\rho' = 4X^2,$$

$$\rho'' = XZ,$$

znajdujemy odpowiadającą powierzchnię:

$$x = az - \frac{b}{4a},$$

$$y = bz + \frac{b-4a}{4b},$$

$$a^2+b^2+1+4ab=0.$$

Krzywa rzędu szóstego rozpada się na

$$z=0, \qquad (x+1)\,y=4,$$

i krzywą dwukwadratową

$$y^2+z^2+x+1=0,$$

$$x(x+1)=y(y-4),$$

która jest jednobieżną. Znajdujemy hyperbolę węzłową, która ma za równania

$$z=0, \qquad 4xy=x+1.$$

Trzy rodzaje prostych Cayleya.

Ograniczymy się do wypowiedzenia rezultatów następujących, które można z łatwością wykazać. Powierzchnia prostoliniowa może posiadać prostą Cayleya; w tym przypadku jej stożek kierunkowy jest rzędu drugiego, i prosta jest prostopadła do jednej z płaszczyzn cyklicznych tego stożka. Te proste Δ są trzech rodzajów:

Rodzaj pierwszy. Jeżeli punkt A kreśli prostą Δ, płaszczyzna P_A toczy się na powierzchni klasy trzeciej — parabolicznej.

Rodzaj drugi. Płaszczyzna P_A obwija walec paraboliczny.

Rodzaj trzeci. Płaszczyzna P_A pozostaje równoległą do samej siebie.

Czytelnik zechce sam dowieść twierdzenia następującego: powierzchnie, posiadające dwie proste Cayleya rodzaju trzeciego, są rzędu czwartego o stożku kierunkowym rzędu drugiego; krzywa węzłowa jest krzywą sześcienną skośną, którą tworzące przecinają dwa razy.

Wyznaczenie krzywych skośnych, posiadających nieskończoną liczbę spodkowych płaskich.

Rozważmy teraz powierzchnie rozwijalne. Każdy punkt Cayleya daje spodkową płaską krawędzi zwrotu powierzchni. Aby mieć nieskończoną liczbę punktów Cayleya, trzeba rozpatrzyć dwa kompleksy MP_M i $MP_{M'}$, gdzie płaszczyzny P_M $P_{M'}$, są równoległe. Mamy twierdzenie następujące:

Twierdzenie. Jeżeli powierzchnia posiada dwa punkty Cayleya M', M, których płaszczyzny $P_{M'}$, P_M są równoległe, wówczas:

1^0 Stożek jest rzędu drugiego;

2^0 Wszystkie punkty prostej MM' są punktami Cayleya, płaszczyzny odpowiadające są równoległe i homograficznie odpowiadają punktom.

Istnieje jeden tylko punkt podwójny w odległości skończonej, to znaczy, jedyny punkt F znajduje się w płaszczyźnie odpowiadającej P_F: będę go nazywał punktem specyalnym Cayleya;

3^0 Płaszczyzny cykliczne stożka są: jedna—równoległa do P_F; druga—prostopadła do prostej Cayleya.

W rzeczy samej, niech będzie

$$M:\alpha\beta\gamma,\qquad P_M: Ax+By+Cz+D=0,$$
$$M':\alpha'\beta'\gamma',\qquad P_{M'}: Ax+By+Cz+D'=0;$$

dwa kompleksy możemy napisać w postaci:

$$A\rho+B\rho'+C\rho''+D(X^2+Y^2+Z^2)$$
$$+(AX+BY+CZ)(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)=0,$$
$$A\rho+B\rho'+C\rho''+D'(X^2+Y^2+Z^2)$$
$$+(AX+BY+CZ)(\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z)=0.$$

Wyprowadzamy stąd kompleks:

$$N:\frac{\alpha+\lambda\alpha'}{1+\lambda},\quad \frac{\beta+\lambda\beta'}{1+\lambda},\quad \frac{\gamma+\lambda\gamma'}{1+\lambda},$$
$$P_N: Ax+By+Cz+\frac{D+\lambda D'}{1+\lambda}=0,$$

. . . .

Proste, wspólne wszystkim tym kompleksom, tworzą więc kongruencyę, której powierzchnia ogniskowa rozpada się na stożkową w nieskończoności i powierzchnię, którą zamierzam wyznaczyć.

Twierdzenie. Wszystkie proste kongruencyi $MP_MMP_{M'}$, gdzie P_M, $P_{M'}$ są równoległe, są styczne do stożka kierunkowego stopnia drugiego, mającego za wierzchołek punkt specyalny F prostej MM'; ogniskowe są prostopadłe do płaszczyzn cyklicznych stożka kierunkowego; jest on podwójnie styczny do tego stożka według tworzących głównych.

Niech będzie

$$x=az+p,$$
$$y=bz+q,$$

prosta, opisująca kongruencyę.

Zakładamy, iż a, b są dwie zmienne, p i q—dwie funkcye zmiennych a i b. Chcemy wyznaczyć funkcyę λ w ten sposób, aby płaszczyzna

$$az+p-x+\lambda(bz+q-y)=0$$

była ogniskową, to znaczy, aby miała swój punkt charakterystyczny na prostej. Ten punkt charakterystyczny jest określony przez równanie

$$az+p-x+\lambda(bz+q-y)=0,$$
$$z+\frac{\partial p}{\partial a}+\frac{\partial\lambda}{\partial a}(bz+q-y)+\lambda\frac{\partial q}{\partial a}=0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial b}+\frac{\partial\lambda}{\partial b}(bz+q-y)+\lambda\left(z+\frac{\partial q}{\partial b}\right)=0.$$

Napiszmy, iż punkt ten jest położony na prostej

$$z+\frac{\partial p}{\partial a}+\lambda\frac{\partial q}{\partial a}=0,$$
$$\lambda z+\frac{\partial p}{\partial a}+\lambda\frac{\partial q}{\partial a}=0.$$

Rugując z, mamy:

$$\lambda^2\frac{\partial q}{\partial a}+\lambda\left(\frac{\partial p}{\partial a}-\frac{\partial q}{\partial b}\right)-\frac{\partial p}{\partial b}=0,$$

co daje na λ dwie wartości λ_1, λ_2; punkt ogniskowy jest wówczas dany przez równania:

$$z=-\frac{\partial p}{\partial a}-\lambda\frac{\partial q}{\partial a},$$
$$x=az+p,$$
$$y=bz+q.$$

Zastosujmy metodę tę do kongruencyi rozważanej. Niech będzie Δ prosta Cayleya, o której zakładamy, że jest w płaszczyźnie zOx, przyczem początkiem spółrzędnych jest punkt specyalny Cayleya, i $P\equiv xOy$. Niech będzie $(\alpha,\ O,\ \gamma)$ drugi punkt Cayleya i $z=h$ — punkt odpowiadający.

Jeżeli położymy

$$\frac{\alpha}{h}=m,\qquad \frac{\gamma}{h}=n+1,$$

wówczas kongruencyę możemy napisać w postaci:

$$ap+bq=0,$$
$$a^2+b^2=ma+n. \tag{1}$$

Równanie drugie wykazuje, iż a, b nie są niezależne i daje stożkową w nieskończoności. Weźmy tedy za zmienne a i q; b nie zależy od q. Punkt ogniskowy jest dany przez równania:

$$az + p - x + \lambda(bz + q - y) = 0,$$

$$z + \frac{\partial p}{\partial a} + \lambda z \frac{\partial q}{\partial a} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial q} + \lambda = 0.$$

Ostatnie równanie daje:

$$\lambda = -\frac{\partial p}{\partial q} = +\frac{b}{a}$$

albo

$$\lambda = -\frac{p}{q}.$$

Wyraża ono, iż płaszczyzna (2) przechodzi przez punkt początkowy. Otóż powierzchnia ogniskowa jest obwiednią płaszczyzny

$$qx - py = z(aq - bp),$$

ale p, q są proporcyonalne do $-b$, $+a$. Płaszczyznę możemy napisać tak:

$$ax + by - z(ma + n) = 0. \tag{3}$$

W ten sposób powierzchnia ogniskowa (powłoka druga) jest obwiednią płaszczyzny (3).

Niech będzie

$$ux + vy + wz = 0$$

równanie tej płaszczyzny. Znajdujemy

$$n(u^2 + v^2) - w(mu + w) = 0,$$

co pozwala zbadać stożek. Ten ostatni ma za równanie:

$$(m^2 + 4n)y^2 + 4u(x^2 - nz^2 - mxz) = 0.$$

Powierzchnie rozwijalne.

Napiszmy $\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{dq}{db}$; stąd, z łatwością wynika:

$$m\frac{dq}{q} = \frac{(m - 2a)(ma + 2n)}{2a^3(-a^2 + ma + n)}\, da;$$

zagadnienie jest sprowadzone do kwadratur.

Metoda druga. Można tu zastosować inną metodę, więcej elementarną.

Wiemy, że proste rozpatrywane, czyli styczne do jednej z krzywych szukanych, są równoległe do tworzących stożka rzędu drugiego.

Niech będzie

$$z^2 = a^2x^2 + b^2y^2 \tag{1}$$

ten stożek. Stożek wzajemny

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \qquad (a^2 - b^2 = c^2) \tag{2}$$

będzie stożkiem normalnych do płaszczyzn ściśle stycznych, albo stożkiem normalnych podwójnych.

Jeżeli więc $F(t)$ oznacza funkcyę dowolną, wówczas równanie płaszczyzny ściśle stycznej możemy napisać:

$$(a\cos t)\,x + (b\sin t)\,y + z - F(t) = 0;$$

skąd wynikają równania krzywej w postaci parametrowej:

$$x = \frac{-F'\sin t - F''\cos t}{a},$$

$$y = \frac{+F'\cos t - F''\sin t}{b},$$

$$z = F + F''.$$

Pisząc, iż spodki prostopadłych, poprowadzonych z punktu początkowego do stycznych, są położone w płaszczyźnie $z = mx$, znajdujemy na wyznaczenie funkcyi F równanie

$$L\frac{C}{F} = \int \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t - mab^2\cos t}{\sin t\,[c^2\cos t + ma(1 + b^2)]}\,dt,$$

gdzie C jest stała dowolna. Jedna z wartości funkcyi F jest

$$F = (1 - \cos t)^{\frac{c^2 - ma}{2c^2}}\,(1 + \cos t)^{\frac{c^2 + ma}{2c^2}};$$

m jest wyznaczone w funkcyi abc:

$$m = \frac{c}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

Jeżeli położymy $k = \frac{a}{c\sqrt{1+b^2}}$, wówczas krzywe szukane mają za równania parametrowe:

$$x = \frac{k[(k+1)t^2 + (1-k)]}{2a\,t^{k+1}},$$

$$\text{(A)} \qquad y = \frac{1 - q^2}{b\,t^k},$$

$$z = \frac{k[(k+1)t^2 + (k-1)]}{2\,t^{k+1}}.$$

Należy dołączyć do tych krzywych krzywe jednokładne względem punktu początkowego. Są one algebraiczne, jeżeli k jest liczbą całkowitą lub ułamkową. Można dać sobie zupełnie dowolnie b i k, naprzykład. Łatwo jest stwierdzić na wzorach (A), iż każda krzywa jest nakreślona na stożku stopnia drugiego, mającego za wierzchołek punkt początkowy i związanego, jak to powiedziano wyżej, ze stożkiem kierunkowym.

W rzeczy samej, z wzorów (A) znajdujemy:

$$ax + z = \frac{k(k+1)}{t^{k-1}},$$

$$ax - z = \frac{k(1-k)}{t^{k+1}};$$

skąd

$$a^2 x^2 - z^2 = \frac{b^2 k^2}{1-k^2} y^2;$$

jest to równanie stożka szukanego.

Możnaby wyniki powyższe uogólnić i dowieść twierdzenia następującego:

Twierdzenie. Uważajmy krzywą skośną taką, iż spodkowa z punktu O jest płaska, i jej płaszczyzna P_0 przechodzi przez punkt O. Niech będzie C_1 stożek, utworzony przez równoległe do stycznych, poprowadzonych przez punkt O, i C_2 — stożek o wierzchołku O, na którym jest położona krzywa. Stożki te C_1 i C_2 posiadają tę własność, iż każda płaszczyzna, równoległa do P_0, przecina je według dwóch krzywych γ_1, γ_2, posiadających tę własność, iż γ_1 jest spodkową γ_2 względem spodka prostopadłej, poprowadzonej z punktu O do płaszczyzny przekroju.

Prosta

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

posiadać powinna obwiednię; prócz tego jest

$$ap + bq = 0,$$

więc

$$p = \lambda b, \qquad q = -\lambda a;$$

równania prostej przybierają postać

$$x = az + \lambda b,$$

$$y = bz - \lambda a.$$

Zakładamy, iż w tych wzorach x, y, z oznaczają spółrzędne punktu styczności prostej z jej obwiednią. Wówczas

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

skąd

$$z\,da + \lambda\,db + b\,d\lambda = 0,$$

$$z\,db - \lambda\,da - a\,d\lambda = 0.$$

Weźmy a jako zmienną. Dać sobie $b = F(a)$, to znaczy dać sobie stożek C_1; niech będzie $b' = \frac{db}{da}$:

$$\lambda = e^{-\int \frac{1+b'^2}{a+bb'} da}; \tag{1}$$

jeżeli znane jest λ, wówczas x, y, z są dane przez wzory:

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{2ab + (b^2 - a^2) b'}{a + bb'},$$

$$\frac{y}{\lambda} = \frac{(b^2 - a^2) - 2ab'b}{a + bb'},$$

$$\frac{z}{\lambda} = \frac{b - ab'}{a - bb'}.$$

Jeżeli tworzymy równanie stożka C_2, λ znika.

Szukajmy przekroju tego stożka przez płaszczyznę $z = 1$.

Przekrój ten będzie określony przez równania

$$(\gamma_2) \qquad x = \frac{2ab + (b^2 - a^2) b'}{b - ab'}, \qquad y = \frac{(b^2 - a^2) - 2abb'}{b - ab'};$$

Jest to krzywa γ_2 płaszczyzny $z = 1$. Połóżmy

$$a = r \cos\theta,$$

$$b = r \sin\theta,$$

gdzie r, θ są spółrzędne biegunowe krzywej γ_1,

$$\frac{db}{da} = b' = \operatorname{tg}\alpha.$$

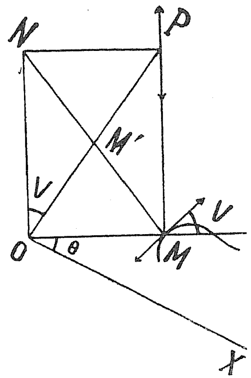
Niech będzie V kąt między styczną do krzywej γ_1 i promieniem — wektorem

$$\alpha = \theta + V;$$

wzory (γ_2) możemy napisać:

$$(\gamma_2')\qquad x = \frac{r}{\sin V} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - V\right), \qquad y = \frac{r}{\sin V} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2} - V\right).$$

Niech będzie M punkt r, θ; N — punkt $\dfrac{r\cos V}{\sin V}$, $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.



Tworzę prostokąt $MONP$; punkt P kreśli krzywą γ_2; punkt M' kreśli miejsce środka koła, przechodzącego przez punkt O i stycznego do krzywej γ_1. Jeżeli punkt P kreśli krzywą γ_2, wówczas koło o średnicy OP obwija krzywą γ_1; więc krzywa γ_1 jest spodkową krzywej γ_2.

Przypadek szczególny krzywych (A), **posiadających prostą Cayleya.** Krzywa γ_1 powinna być kołem, i krzywa γ_2 — stożkową o ognisku O; z łatwością widzimy, iż koło γ_1 jest kołem głównem stożkowej γ_2.

Wyznaczenie wszystkich krzywych, posiadających punkt specyalny Cayleya.

Znalezione wyżej wzory rozwiązują zagadnienie, lecz ilość λ jest dana przez kwadraturę. Otóż można znaleść wzory, nie zawierające wcale kwadratur. Znajdziemy ciekawy przykład równań o cząstkowych pochodnych, badanych przez Tannenberga i posiadających grupę ciągłą przekształceń. Weźmy równania linii prostej w postaci:

$$x = az + f, \qquad y = bz + g,$$

i zachowajmy litery p, q, dla oznaczenia pochodnych: $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{dz}{dy}$. Mamy więc do znalezienia krzywe, których styczne należą do kompleksu

$$af + bg = 0.$$

Krzywe szukane będą krzywemi całkowemi równania o pochodnych cząstkowych, które łatwo utworzyć:

$$\text{(B)}\qquad (px + qy - 2z)^2 = (x^2 + y^2)(p^2 + q^2).$$

Spostrzegamy następnie rozwiązanie

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

gdzie k jest stałą dowolną; przekształcenie Legendre'a nie zmienia równania. Zamierzamy pokazać, iż przekształcenie punktowe zamienia równanie (B) na równanie

$$\text{(C)}\qquad 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Zamiast tego, by rozpatrywać równania te względem p, q, dogodniej jest rozważać równania połączone. Naprzykład, równanie, połączone z (B) będzie:

$$\text{(B')}\qquad z(dx^2 + dy^2) = dz(x\,dx + y\,dy).$$

Każdemu punktowi przestrzeni (x, y, z) podporządkowuje ono kierunek (dx, dy, dz), wychodzący z tego punktu i położony na stożku kompleksu. Łatwo jest przekształcić (B'), aby otrzymać formę

$$\text{(C')}\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

połączoną z (C). Istotnie, równanie (B') możemy napisać:

$$dx^2 + dy^2 = du\,(x\,dx + y\,dy) \qquad (z = e^u).$$

Kładę

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta;$$

równanie przybiera postać:

$$d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = \rho\,du\,d\rho,$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \rho\frac{d\theta^2}{d\rho} = du \qquad (\rho = e^v),$$

$$dv + \frac{d\theta^2}{dv} = du,$$

$$d\theta^2 = dv\,(du - dv);$$

skąd z łatwością otrzymujemy formę wskazaną. Znajdujemy w ten sposób przekształcenie punktowe

$$x' = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

$$y' = L \sqrt{\frac{x^2+y^2}{z}},$$

$$z' = i L \sqrt{z},$$

które podporządkowuje krzywe szukane i minima, albo

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$$

i

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx^2 + dy^2}{x\,dx + y\,dy}.$$

Całka zupełna równania $1 + p^2 + q^2 = 0$ składa się ze wszystkich płaszczyzn stycznych do koła urojonego w nieskończoności:

$$a x' + \sqrt{1 + a^2}\, y' - z' + b = 0,$$

a, b są dwie stałe dowolne; przez przekształcenie, przybiera ona postać

$$\frac{a}{i} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{1+a^2}}{2} L\left(\frac{x^2+y^2}{z}\right) - L\sqrt{z} + b = 0;$$

skąd z łatwością znajdujemy

$$z = k e^{2h \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1-h^2}.$$

Mamy całkę zupełną równania (B). Przy $h = 0$ mamy:

$$z = k\sqrt{x^2+y^2},$$

h i k są dwie stałe dowolne.

Aby otrzymać krzywe całkowe, należy związać h i k pewną zależnością i szukać obwiedni powierzchni powyższych.

W spółrzędnych walcowobiegunowych powierzchnię tę możemy napisać:

$$z = k e^{2h\varphi} \rho^{1-h^2}.$$

Jest to powierzchnia spiralna. Krzywe szukane są więc obwiednią powierzchni spiralnej

$$z = F(h)\, e^{2h\varphi} \rho^{1-h^2},$$

gdy zmienia się h. Funkcya F jest funkcyą dowolną.

Wszystkie te krzywe posiadają grupę ciągłą przekształceń o 10 parametrach. W szczególności, grupa homograficzna

$$x' = l(hx - ky),$$

$$y' = l(kx + hy),$$

$$z' = l(h^2 + k^2) z,$$

zamienia jedne na drugie proste kompleksu

$$af + bg = 0.$$

Nota o powierzchniach prostoliniowych wzajemnych i o wyznaczeniu wszystkich powierzchni prostoliniowych, posiadających daną linię zwężenia.

Zamierzamy jeszcze podać własność powierzchni prostoliniowych wzajemnych, rozwiązując zagadnienie następujące: Dana jest krzywa; znaleść wszystkie powierzchnie prostoliniowe, przybierające tę linię za linię zwężenia.

Uważajmy trójścian Freneta tej krzywej. Niech będzie O punkt jakikolwiek tej krzywej, Ox styczna, Oy normalna główna, Oz normalna podwójna, S łuk krzywej. Rzuty prędkości punktu na osi ruchome Ox, Oy, Oz, z uwagi na to, iż $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $q = 0$, są:

$$V_x = \frac{dx}{dt} + \xi - ry = x' + \xi - ry,$$

$$V_y = y' + rx - pz,$$

$$V_z = z' + py.$$

Niech będzie $x = ay$, $y = bz$ prosta, która opisywać będzie powierzchnię prostoliniową, przyczem parametry a, b zmieniają się wraz z t. Wzory powyższe pozwalają wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej. Pisząc, iż punkt początkowy jest punktem środkowym, znajdujemy równanie

$$\text{(I)} \qquad a'(1+b)^2 - ab\,b' = br(1 + b^2 + a^2).$$

Można założyć $t = s$, wówczas $r = \frac{1}{R}$, R jest promieniem krzywizny w punkcie O. Mamy najpierw rozwiązanie $b = 0$ wraz z $a = \text{const}$. Jeżeli w równaniu (I) uważamy b jako funkcyę znaną zmiennej s, którą sobie dajemy, wówczas a jest niewiadomą zagadnienia, — i mamy do rozwiązania równanie różniczkowe (I), które jest równaniem Ricattiego. Widzimy dalej, iż równanie to sprawdza się, jeżeli

$$a^2+b^2+1=0,$$

co daje dwa rozwiązania względem a. Całkujemy z łatwością, kładąc

$$a=u\sqrt{b^2+1}.$$

Podstawiając w równanie (I), dla wyznaczenia u, znajdujemy równanie

$$\text{(II)} \qquad \frac{u'}{1+u^2}=\frac{br}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Rozwiązanie zupełne zagadnienia jest dane przez wzory:

$$a=\frac{r\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{r^2-\alpha'^2}},$$

$$b=\frac{\alpha'}{\sqrt{r^2-\alpha'^2}},$$

gdzie α jest funkcyą dowolną łuku s, i α' jest jej pochodną; r jest krzywizną krzywej danej.

Interpretacya geometryczna. Wzięliśmy

$$x=az, \qquad y=bz$$

za równania tworzącej względem osi ruchomych. Oznaczmy przez α kąt między tą prostą i płaszczyzną yOz, i przez β kąt, utworzony przez rzut tej prostej na płaszczyznę yOz i oś Oz; wówczas

$$a=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}, \qquad b=\operatorname{tg}\beta;$$

mamy

$$u=\operatorname{tg}\alpha.$$

Wzór (II) przybiera postać

$$\text{(III)} \qquad \alpha'=r\sin\beta.$$

Płaszczyzna, styczna w punkcie O, czyli płaszczyzna środkowa, przechodzi przez oś Ox i tworzy kąt β z płaszczyzną zOx. Jeżeli dwie powierzchnie prostoliniowe mają tę samą płaszczyznę środkową, innemi słowy, kąt β jest ten sam, wówczas

$$d\alpha=d\alpha_1,$$

$$\alpha-\alpha_1=\text{const.},$$

i nawzajem.

Tym sposobem, gdy mieć będziemy powierzchnię, odpowiadającą pytaniu, będziemy również mieli powierzchnię inną, prowadząc w każdej płaszczyźnie środkowej, przez punkt środkowy, prostą Δ', czyniącą kąt stały z tworzącą Δ pierwszej powierzchni. Prosta Δ' opisze drugą powierzchnię. Dwie te powierzchnie będą miały tę samą płaszczyznę styczną według ich wspólnej linii zwężenia. Jeżeli proste Δ, Δ' są prostokątne, mamy dwie powierzchnie prostoliniowe wzajemne. Rzecz jasna, stożki kierunkowe tych powierzchni są wzajemne (p. Darboux, Théorie des surfaces, t. IV, Chap. XIV).

Nota o kongruencyi h, k, l.

Kończąc tę pracę, zauważyłem, iż kongruencya h, k, l jest kongruencyą, utworzoną przez osi kompleksów liniowych o trzech wyrazach:

$$\lambda A+\mu B+\nu C=0,$$

gdzie λ, μ, ν oznaczają trzy parametry zmienne, i $A=0$, $B=0$, $C=0$ są równaniami trzech kompleksów liniowych (p., np., Géometrie réglée de Koenigs, p. 50). Wiadomo, iż te ∞^2 kompleksów mają wspólne tworzące jednego z układów hyperboloidy H. Osi przecinają tworzące te pod kątami prostemi, co prowadzi nas do trzeciej definicyi kongruencyi. Lecz można zastąpić hyperboloidę H przez jakąkolwiek inną z hyperboloid, mającą te same elementy Cayleya. Można wziąć hyperboloidę, zniekształconą na pęki płaskie (Koenigs, Géométrie réglée, p. 52): znajdujemy pierwszą definicyę. Wychodząc z tego nowego punktu widzenia, znajdujemy z łatwością cylindroidy, opisane na powierzchni ogniskowej, które były przez nas badane.

RÉSUMÉ.

Définition. Je dis qu'un point A est un point de Cayley pour une surface réglée lorsque les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur les génératrices forment une section plane de la surface; je désigne par P_A le plan de cette section. Pour la surface appelée cylindroïde de Cayley, tout point A de l'espace est un point de Cayley.

M. M. Appell et Bricard ont montré dans le Bulletin de la Société mathématique de France, année 1900 –1901, que ce cylindroïde était la seule surface réglée jouissant de la propriété en question pour tout point de l'espace. Pour les autres surfaces réglées, les points de Cayley A sont donc ou des points isolés ou bien formant des courbes ou des surfaces quand il en existe. Je laisse de côté des surfaces réglées qui possèdent zéro, un ou deux points de Cayley; j'étudie des surfaces qui possèdent au moins trois points de Cayley.

J'arrive alors à la classification suivante:

1° Les surfaces à plan directeur qui possèdent deux points de Cayley en possèdent une infinité situés sur un cylindre de révolution ou dans un plan. L'équation de ces surfaces résulte de l'élimination de t entre

$$y = tx - kt^2,$$
$$z = \frac{at^3 + bt^2 + ct}{1 + t^2}.$$

L'ensemble des termes du plus haut degré est

$$z(x^2 + y^2)(kr + ax).$$

Ces surfaces sont donc du quatrième degré. Si $a = 0$, $k = 0$, on a le cylindroïde de Cayley.

Tout ceci est extrêmement facile, je le laisse de côté.

2° Les surfaces à cône directeur. Je trouve:

1) Des surfaces S_9 du neuvième degré à cône directeur du troisième degré avec dix points de Cayley;

2) Des surfaces du huitième degré S_8 à cône directeur du deuxième degré avec quatre points de Cayley; on a alors une infinité formant une conique;

3) Des surfaces du sixième degré S_6 avec cône directeur du deuxième degré. Ici les points de Cayley forment une sextique qui dans le cas général est indécomposable et qui a pour ses dix directions asymptotiques les perpendiculaires aux six plans cycliques du cône directeur.

Dans les cas particuliers, la sextique peut se décomposer en une conique et une quartique ou en trois coniques.

Le degré 6 peut s'abaisser; c'est ainsi qu'on trouve des surfaces du quatrième degré avec deux droites de Cayley. Ces droites sont toujours perpendiculaires aux plans cycliques du cône directeur.

4) Enfin la surface peut s'abaisser au second degré; la sextique est alors réduite à six droites (pour l'un des systèmes de génératrices).

Ce sont les perpendiculaires communes aux génératrices isotropes de la

surface, ou encore les perpendiculaires aux plans cycliques menées par les foyers du contour apparent de la surface sur les plans cycliques centraux. Si d'un point d'une de ces droites on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices du système considéré, les pieds sont sur un cercle de la quadrique.

5) A la fin j'étudie les surfaces développables qui possèdent une infinité de points de Cayley ou, ce qui revient au même, les courbes gauches qui possèdent une infinité de podaires planes. On peut les déterminer facilement sans signe de quadrature.

SPIS RZECZY.