Porównywając z równaniem (68), widzimy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym szukanym jest warunek $\lambda' = \mu$. Gdy ten warunek jest spełniony, wówczas wszystkie kwadryki, dotykające ich obwiedni według prostej (D) i prostej równoległej, nie mogą dotykać tej obwiedni według dwóch innych prostych, w przeciwnym razie te ostatnie również byłyby równoległe.

RÉSUMÉ.

Ce travail est consacré au développement des quelques résultats intéressants qui se rattachent à la déformation infiniment petite des surfaces réglées et que M. Haag a résumés dans ses deux Notes, présentées à l' Académie des Sciences (Comptes Rendus, 1909).

En partant des équations de la surface (S) non développable, comprenant, comme on sait, les trois fonctions θ_1, θ_2, θ_3 qui sont les trois solutions d' une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = k \theta,$$

je cherche d'abord quelles doivent être les fonctions θ_1, θ_2, θ_3, k pour que la surface (S) soit une surface réglée, dont les génératrices aient pour paramètre α. Parmi les autres en s'appuyant sur ces considérations, je déduis le théorème suivant: les équations de la surface réglée (S) la plus générale n'ayant pas de plan directeur et rapportée à ses lignes asymptotiques sont les équations (D); les équations (E) définissent la surface (S_1) la plus générale qui corresponde à (S) avec orthogonalité des éléments (Goursat).

L'étude des propriétés géométriques qu'on peut déduire des formules que je donne, je commence par la question suivante: Une surface réglée (S) étant donnée, y a-t-il plusieurs manières de mettre ses équations sous la forme (D)? Cette question admet la réponse suivante: La surface (S) étant donnée sous la forme (D), la manière la plus générale de l'obtenir sous la même forme consiste à faire le changement de variables et à remplacer les fonctions a, b, c par les autres fonctions (voir le texte polonais, page 125).

J'étudie les propriétés projectives de la surface (S) et je cherche les conditions pour que la surface possède deux droites et pour qu'elle soit du second degré etc.

Dans la deuxième partie de mon travail je passe en revue les conséquences diverses qui découlent des formules (D), (E) et des propriétés générales de la déformation infiniment petite des surfaces.

M. HAMBURGER.

O rozwiązaniach osobliwych równań różniczkowych algebraicznych rzędu pierwszego.[1]

Sur les solutions singulières des équations différentielles algébriques du premier ordre.

Rozwiązania osobliwe równania różniczkowego algebraicznego rzędu pierwszego

$$f(x, y, y') = 0,$$

jeżeli istnieją, czynią jak wiadomo, zadość równaniu wyróżnikowemu

$$\Delta(x, y) = 0,$$

wynikającemu przez eliminacyę funkcyi y' z dwóch równań

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

W ogólności wszakże żaden z utworów, zawartych w równaniu wyróżnikowem, nie przedstawia rozwiązania równania różniczkowego, wogóle przeto nie istnieje żadne rozwiązanie osobliwe, gdyż, aby takie rozwiązanie istniało, musi być spełnione, równanie warunkowe, dające się łatwo ustanowić.

Jeżeli, z drugiej strony, idąc za Lagrangem, który pierwszy wyjaśnił związek pomiędzy rozwiązaniem osobliwem a ogólnem, wyjdziemy z równania pierwotnego

$$F(x, y, C) = 0,$$

gdzie C oznacza stałą dowolną, to równanie wyróżnikowe

---

[1]) Przekład rozprawy ogłoszonej w tomie **112**-ym czasopisma: „Journal für die reine und angewandte Mathematik" (rok 1893). *S. D.*

$$D(x, y) = 0,$$

wynikające przez eliminacyę stałej C z dwóch równań

$$F(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0,$$

da nam w ogólności rozwiązania osobliwe równania różniczkowego rzędu pierwszego, wyprowadzonego z równania pierwotnego.

Pozorna, występująca tu, sprzeczność pobudziła Darboux'a i Cayley'a [1] do podjęcia na nowo badań, mających za przedmiot teoryę rozwiązań osobliwych. Osiągnięte wyniki doprowadziły do ważnych wniosków o znaczeniu geometrycznem obu wymienionych równań wyróżnikowych, wtedy gdy nie dają one rozwiązań równania różniczkowego. Atoli zadawalającego wyjaśnienia omawianego paradoksu w wywodach obu znakomitych matematyków nie znajdujemy. Darboux [2] pytanie to rozstrzyga na tej podstawie, iż twierdzenie orzekające, że każde równanie różniczkowe rzędu pierwszego ma całkę postaci $F(x, y, C) = 0$, gdzie F posiada własności funkcyi analitycznej, jest—zdaniem jego—przypuszczeniem nieuzasadnionem. Wszakże zdanie to nie daje się pogodzić z Cauchy'ego dowodem istnienia całek równania różniczkowego algebraicznego o dowolnych wartościach początkowych. Ale i dopuszczalność powyższej postaci równania całkowego wynika, jak to okażemy, z istnienia całek ogólnych równań różniczkowych cząstkowych, ściśle uzasadnionego najprzód przez Cauchy'ego, a następnie przez Z. Kowalewską i samego Darboux'a.

Cayley [3] stara się usunąć wspomnianą trudność przy pomocy tej okoliczności, że równanie całkowe jest zwykle przestępne, a krzywe przestępne nie mają w ogólności obwiednich; tak więc wyjątki w pierwszym przypadku, mianowicie, że równanie różniczkowe posiada rozwiązanie osobliwe, byłyby i wyjątkami w drugim przypadku, mianowicie, że równanie przestępne przedstawia układ krzywych z obwiednią.

Zobaczymy wszakże w następnym wykładzie, że istnienie obwiednich lub rozwiązań osobliwych nie ma nic wspólnego z naturą przestępną lub al-

[1]) Darboux, Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre. Bulletin des sciences mathématiques 4, 1873, p. 158—176 oraz komunikat uprzedni o tych wynikach w Comptes rendus, 1870.

Cayley, On the Theory of the Singular solutions of the first order. Messenger of Mathematics, Vol. II, 1873, p. 6—12, Vol. VI, 1811, p. 23—27.

[2]) Bull. des sciences math. 4, p. 167.

[3]) Messienger of Mathematics, 6, p 23, 24. Porówn. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleihungen, übersetzt von Maser, str. 42.

gebraiczną ogólnego równania całkowego. [1] Własność posiadania obwiednich przez układ krzywych wypływa mianowicie już z zachowania się tego układu w ograniczonym obszarze zmiennej niezależnej, wewnątrz którego istnieją stosowalne przedstawienia tych krzywych.

Jeżeli tedy — co nie zachodzi przy zwykłem wyprowadzaniu obwiednich z równania pierwotnego — ustanowimy dokładnie w formie analitycznej warunek, przy którym równanie wyróżnikowe $D = 0$ nie daje żadnego właściwego rozwiązania równania różniczkowego, wyprowadzonego z równania pierwotnego [2], to ujawni się osobliwa okoliczność, że gdy równanie różniczkowe ma spółczynniki ogólne, wtedy równanie całkowe ma tę szczególną naturę, że układ krzywych, który je przedstawia, nie posiada wcale obwiednich. Przypadek prawidłowy w równaniu różniczkowem warunkuje przeto przypadek wyjątkowy w równaniu całkowem, i odwrotnie: jeżeli równanie całkowe dane jest ze spółczynnikami ogólnemi, to wyprowadzone z niego równanie różniczkowe daje nam przypadek wyjątkowy, w którym istnieją całki osobliwe.

Zresztą nie jest odosobnionym fakt, że jedna i ta sama własność pewnych utworów występuje w jednem przedstawieniu jako przypadek ogólny, w innem zaś jako przypadek wyjątkowy. I tak np. krzywa w spółrzędnych punktowych, jeżeli spółczynniki jej równania są ogólne, nie posiada punktów podwójnych. Jeżeli natomiast równanie krzywej jest dane w spółrzędnych liniowych, to spółczynniki muszą spełniać pewien warunek, gdy nie ma ona

[1]) Cayley podaje sam przykład na to, że układ krzywych przestępnych może posiadać obwiednią; układ taki nazywa on „quasi algebraicznym". Podaje też twierdzenie i dowód tegoż, że układ krzywych algebraicznych posiada zawsze obwiednią, a więc, że równanie różniczkowe, nie dopuszczające rozwiązania osobliwego, nie może też mieć żadnego rozwiązania ogólnego w postaci równania całkowego algebraicznego. Nieprawdziwość tego twierdzenia pokazuje już znany przykład Serreta lub następujący układ krzywych algebraicznych:

$$(x + y + C)^2 = (x - y)^3,$$

który nie posiada obwiedniej. Albowiem równanie wyróżnikowe względem C jest $x - y = 0$, a równanie różniczkowe, któremu czyni zadość gromada krzywych

$$4(1 + y')^3 - 9(x - y)(1 - y')^2 = 0,$$

nie spełnia się przez $x - y = 0$.

[2]) Schmidt w rozprawie „Über die singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung" (O rozwiązaniach osobliwych równań różniczkowych rzędu pierwszego), (Giessen 1884), gani również braki zwykłego wyprowadzania obwiednich, ale czyni tylko uwagę, że przy pewnych okolicznościach równanie wyróżnikowe $D = 0$ daje także rozwiązania szczególne, natomiast nie wyjaśnia przypadku, w którym nie daje ono wcale rozwiązania, lubo autor lekko dotyka tego przypadku przy wymienieniu przykładu Serretowskiego.

posiadać punktów podwójnych. Odwrotnie rzecz się ma co do istnienia stycznych podwójnych.

Istnienie obwiedniej zależy w rzeczy samej od natury gromady krzywych, nie zaś od jej przedstawienia. Od formy przedstawienia zależy tylko to, czy istnienie lub nieistnienie obwiedniej występuje jako przypadek ogólny [1].

Wychodząc najprzód z równania różniczkowego, stosować będziemy zasady, będące u podstawy ważnej rozprawy Fuchsa: „Über die Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen" (O równaniach różniczkowych, których całki posiadają stałe punkty rozgałęzienia) [2]. Jej znaczenie zasadnicze polega na rozkładzie wyróżnika Δ równania różniczkowego na jego czynniki liniowe, oraz na rozwinięciu rozmaitych zespojonych gałęzi funkcyi y', jako funkcyi algebraicznej zmiennej y, danej przez równanie różniczkowe, na szeregi, postępujące według potęg takiego dzielnika $y-\eta$, o spółczynnikach zależnych, podobnie jaki i η, od zmiennej x. Całkując równanie różniczkowe w tej formie otrzymane z tym warunkiem, aby dla wartości dowolnej zmiennej x całka y stawała się równą funkcyi η, otrzymujemy, odpowiednio do każdej grupy zespojonych gałęzi funkcyi y', rozwinięcie funkcyi $y-\eta$ na szereg, postępujący według potęg różnicy $x-c$, jeżeli wogóle przedstawienie takie istnieje. Wykładnik najniższej potęgi w tych szeregach, mianowicie to, czy jest on we wszystkich niewiększy, albo w niektórych większy od 1, oraz występujący z drugiej strony przypadek, że pewne

---

[1]) Fine w rozprawie: „Singular Solutions of Ordinary Differential equations" (American Journal of Mathematics, **12**, 1890, str. 295 (i dalsze), stara się pytanie rozwiązać również na drodze analitycznej. Wynik, do którego dochodzi, mianowicie, że: „rozwiązanie osobliwe równania różniczkowego nie jest w znaczeniu właściwem rozwiązaniem, jak, podobnie, nie jest niem funkcya dowolna χ dla równania $\frac{dy}{dx}\chi=\varphi(x, y)\chi$, nie odpowiada, oczywiście, istotnemu stanowi rzeczy; $\chi=0$ nie jest w samej rzeczy rozwiązaniem, ale nie jest też obwiednią gromady krzywych, przedstawionych przez równanie różniczkowe. Jeżeli Fine twierdzi (str. 296), że w punktach na $\Delta=0$ rozwinięcie funkcyi y według potęg zmiennej x jest wogóle rozbieżne, to stosuje się to tylko wtedy, gdy ograniczamy się do potęg całkowitych. Lecz, jak to niżej wykażemy, istnieją — z wyłączeniem pojedyńczych punktów — we wszystkich pozostałych punktach na $\Delta=0$ rozwinięcia według potęg ułamkowych, przedstawiające gałęzie krzywych, przez te punkty przechodzące, jako rozwiązanie równania różniczkowego.

[2]) Sprawozdania Akademii berlińskiej 1884, t. **32**, p. 699 i dalsze. Zwracamy też uwagę na bardzo cenną dla głębszego pojmowania pracy Fuchsa rozprawę Wallenberga: „Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung" (Przyczynek do badania równań różniczkowych rzędu pierwszego) (Halle, 1890), w której w szczególności rozważane są równania, zawierające pochodne aż do 3-go stopnia. Całkowita praca, której powyższa rozprawa jest tylko pierwszą częścią, ukazała się w tomie **35** czasopisma „Zeitschrift für Mathematik und Physik".

z tych przedstawień sprowadzają się do $y-\eta=0$, stanowią cechy charakterystyczne, orzekające, że $y=\eta$ nie jest całką albo jest całką osobliwą, a więc obwiednią gromady odpowiednich krzywych całkowych, albo wreszcie przedstawia całkę szczególną, przyczem obie ostatnie własności mogą być złączone.

W zakończeniu Rozdziału pierwszego podajemy dowód na to, że każde równanie różniczkowe algebraiczne pierwszego rzędu i stopnia n-tego względem y' posiada równanie całkowe, które w otoczeniu dowolnej pary wartości $x=a$, $y=b$ — z wyłączeniem tylko odosobnionych par wartości — daje się przedstawić nieskończenie wieloma sposobami w postaci

$$F(x, y, C)=0,$$

gdzie F jest funkcyą całkowitą stopnia n-tego względem stałej dowolnej C o spółczynnikach, które są szeregami, postępującemi według potęg dodatnich różnic $x=a$, $y-b$, posiadającemi pewien obszar zbieżności.

W Rozdziale drugim wychodzimy z równania skończonego

$$F(x, y, C)=0$$

stopnia n-tego względem C, o spółczynnikach, które są funkcyami analitycznemi zmiennych x i y, i wyprowadzamy stąd, przy pomocy eliminacyi stałych, równanie różniczkowe, które w ogólności różni się czynnikiem, od y' niezależnym, od równania różniczkowego algebraicznego, któremu ma czynić zadość równanie pierwotne założenia. Stąd okazuje się, że równanie, powstające przez eliminacyę wielkości C z równań $F(x, y, C)=0$, $\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C}=0$, czyni wprawdzie zawsze zadość równaniu wyprowadzonemu, nie mniej jednak nie może być ono uważane za całkę, jeżeli wraz z $D=0$ znika wspomniany czynnik wolny od y', gdy właściwemu równaniu różniczkowemu nie staje się zadość na mocy równania $D=0$. Tym sposobem ustanawiamy warunek, przy którym gromada krzywych, przedstawiona przez równanie $F(x, y, C)=0$, nie posiada obwiedniej. Badamy tu bliżej czynniki liniowe $y-\eta$ funkcyi D i rozwijamy rozmaite gałęzie funkcyi C, jako funkcye zmiennej y, na szeregi według potęg różnicy $y-\eta$ ze spółczynnikami zależnemi od x. Za pomocą odwrócenia otrzymujemy stąd tyleż przedstawień różnicy $y-\eta$ według potęg różnicy $x-c$, przyczem wielkości C nadaje się wartość szczególną taką, aby dla dowolnej wartości c zmiennej x funkcya y stawała się równą funkcyi η. Co do tych szeregów, o ile ich forma lub istnienie dają cechy charakterystyczne dla omawianej natury krzywej $y=\eta$, stwierdzają się wyniki, pozyskane z rozważania równania różniczkowego. Ponieważ tym sposobem badania, wychodzące z równania całkowego i różniczkowego, prowadzą do zgodnego celu, przeto twierdzenie o rzekomej niezgodności obu sposobów rozważania traci w zupełności prawo bytu.

Rozważania nasze poprzedzimy jeszcze ogólną uwagą o funkcyach, czyniących zadość równaniu różniczkowemu algebraicznemu rzędu pierwszego. Briot i Bouquet w sławnej rozprawie, która ukazała się najprzód w tomie **36** dziennika „Journal de l'École polytechnique", dowiedli twierdzenia, że równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ma rozwiązanie, które dla $x = x_0$ przyjmuje wartość y_0 i daje się rozwinąć na szereg $y = \mathfrak{P}(x - x_0)$, postępujący według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x - x_0$, w przypadku, gdy funkcya $f(x, y)$ daje się w otoczeniu punktu $x = x_0$, $y = y_0$ przedstawić przez szereg, postępujący według potęg całkowitych dodatnich różnic $x - x_0$, $y - y_0$. Wypowiedzieli oni następnie, że nie istnieje inne rozwiązanie y, które dla $x = x_0$ staje się równem y_0. Gdy bowiem drugą całkę, o ile ona istnieje, przedstawimy w postaci $y + z = \mathfrak{P}(x - x_0) + z$, tak że z znika dla $x = x_0$, wtedy z czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$\frac{dz}{dx} = f(x, \mathfrak{P}(x - x_0) + z) - f(x, \mathfrak{P}(x - x_0)) = z^m \varphi(x, z),$$

gdzie m jest liczbą całkowitą dodatnią, różną od zera, φ zaś daje się rozwinąć na szereg, postępujący według potęg całkowitych dodatnich wielkości $x - x_0$ i z. Z postaci tego równania wnoszą Briot i Bouquet, że, prócz $z = 0$, nie czyni zadość temu równaniu żadna inna funkcya z, znikająca dla $x = x_0$. Wniosek ten, jak to wykazał Fuchs w rozprawie: „Über die Werte welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können" (O wartościach, które mogą przyjmować całki równania różniczkowego rzędu pierwszego w punktach osobliwych), nie jest bez zastrzeżeń prawdziwy. Istnieje bowiem w ogólności nieskończenie wiele takich całek, mających tę własność charakterystyczną, że dla zmiennej x, uważanej za funkcyę zmiennej z, jest $z = 0$ punktem nieoznaczoności. Jeżeli zaś postawimy żądanie, aby całka z dała się rozwinąć według potęg różnicy $x - x_0$, wtedy istotnie $z = 0$ jest jedyną, powyższemu równaniu różniczkowemu zadość czyniącą, funkcyą, która znika dla $x = x_0$. W samej rzeczy, nie mogłaby bowiem w takiem rozwinięciu zmiennej z zachodzić żadna ujemna ani ułamkowa różnicy $x - x_0$, gdyż w przypadku pierwszym samo z, w drugim zaś pochodna rzędu skończonego zmiennej z dla $x = x_0$ musiałyby stawać się nieskończenie wielkiemi. Lecz z poprzedzającego równania różniczkowego wynika, przy pomocy kolejnych różniczkowań, że dla $x = x_0$, wraz z z, wszystkie pochodne funkcyi z muszą znikać. Jeżeli zaś zamiast z napiszemy szereg, postępujący według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x - x_0$, to z uwagi dopiero co uczynionej wynika, że wszystkie spółczynniki w tym szeregu znikają.

Tym sposobem utrzymuje się twierdzenie Briota-Bouqueta z tą zmianą, że równaniu różniczkowemu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

w którem funkcya $f(x, y)$ daje się w pewnem otoczeniu punktu $x = x_0$, $y = y_0$ przedstawić przez szereg, postępujący według potęg różnic $x - x_0$, $y - y_0$, czyni zadość jedyna całka szczególna y, rozwijalna na szereg według potęg różnicy $x - x_0$, przyjmująca dla $x = x_0$ wartość y_0 i rozwijająca się mianowicie na szereg według całkowitych potęg tej różnicy.

I.

Niechaj

$$f(x, y, y') \equiv A_0 y'^n + A_1 y'^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \tag{1}$$

będzie dane równanie różniczkowe stopnia n-tego względem y' o spółczynnikach $A_0, A_1 \ldots$, które są funkcyami całkowitemi wymiernemi zmiennych x, y, nie mającemi wspólnego dzielnika. Zakładamy, że równanie jest nieprzywiedlne względem y'. Przez eliminacyę funkcyi y' z równań

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = 0$$

powstaje równanie wyróżnikowe

$$\Delta = 0,$$

dające warunek, aby niektóre pierwiastki y' równania (1) były równe.

Niechaj będzie $y = \eta$ pierwiastkiem równania $\Delta = 0$ i przytem η taką funkcyą zmiennej x, aby A_0 nie znikało tożsamościowo, gdy y zastąpimy przez η. Wtedy wewnątrz obszaru zbieżności funkcyi η w płaszczyznie x około punktu $x = a$, w którego otoczeniu daje się η przedstawić za pomocą szeregu, postępującego według całkowitych dodatnich potęg różnicy $x - a$, równanie

$$f(x, \eta, y') = 0 \tag{2}$$

wyznacza n określonych funkcyj y', z których żadna nie staje się tożsamościowo, t. j. dla każdej wartości na x, nieskończenie wielką, ale niektóre z nich zlewać się mogą. Dajmy, że p pierwiastków y' równania (2) staje się równemi ζ, gdzie ζ jest funkcyą zmiennej x; wtedy istnieje p funkcyj y', które czynią zadość równaniu (1), uważanemu za równanie algebraiczne pomiędzy y i y' ze spółczynnikami, zależnemi od x, i mają dla $y = \eta$

wspólną, od x zależną, wartość ζ. Te funkcye y' rozpadają się wogólności na grupy zespojonych ze sobą gałęzi; jedna taka grupa o α ($\leqq p$) gałęziach przedstawia się w sposób następujący:

$$y' - \zeta = g_0 (y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1 (y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \ldots,$$

gdzie $\varkappa$, jak i α, oznacza liczbę całkowitą dodatnią różną od zera, spółczynniki zaś g_0, $g_1 \ldots$ są szeregami, postępującemi według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x-a$. Zakładamy nadto, że g_0 nie znika tożsamościowo.

Równanie poprzednie napiszmy w postaci

$$\frac{d(y-\eta)}{dx} = \zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_0 (y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1 (y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \ldots \tag{3}$$

Rozpatrzmy najprzód przypadek, w którym $y=\eta$ nie jest całką danego równania różniczkowego; wtedy nie jest tożsamościowo $\zeta = \frac{d\eta}{dx}$. Jeżeli położymy

$$y = \eta + u^{\alpha},$$

będzie:

$$\alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dx} = \zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_0 u^{\varkappa} + g_1 u^{\varkappa+1} + \ldots$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-1}}{\zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_0 u^{\varkappa} + g_1 u^{\varkappa+1} + \ldots}. \tag{4}$$

W rozważanym obszarze płaszczyzny x możemy obrać jeden punkt $x=c$ dowolnie tak, aby w tym punkcie $\zeta - \frac{d\eta}{dx}$ nie było zerem. Prawa strona równania (4) jest przeto funkcyą zmiennych x i u, rozwijalną w otoczeniu pary wartości $x=c$, $u=0$ według potęg całkowitych dodatnich wielkości $x-c$ i u. A zatem funkcya x zmiennej u, czyniąca zadość poprzedniemu równaniu różniczkowemu i przyjmująca wartość c dla $u=0$, daje się przedstawić w postaci

$$x - c = \frac{1}{\left(\zeta - \frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}} u^{\alpha} + b\, u^{\alpha+\varkappa} + b_1 u^{\alpha+\varkappa+1} + \ldots$$

Przez odwrócenie tego szeregu otrzymujemy:

$$u = (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{\left(\zeta - \frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c}}\, (x-c)^{\frac{1}{\alpha}} + \beta_2 (x-c)^{\frac{2}{\alpha}} + \ldots,$$

a po podniesieniu do potęgi α-tej:

$$y - \eta = \left(\zeta - \frac{d\eta}{dx}\right)_{x=c} (x-c) + \gamma_1 (x-c)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \gamma_2 (x-c)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \ldots \tag{I}$$

To równanie przedstawia grupę α gałęzi funkcyi całkowej y, zespojonych w punkcie rozgałęzienia $x=c$, o wartości równej $\eta(c)$ i o pochodnych pierwszych, mających wspólną wartość $\zeta(c)$, w punkcie $x=c$. Ponieważ dla $x=c$ jest tu $\frac{d\eta}{dx}$ różne od ζ, to gałęzie dotykają się wzajemnie w punkcie $x=c$, nie dotykając krzywej $y=\eta$. Jeżeli zmieniać będziemy sposobem ciągłym parametr dowolny c w obszarze płaszczyzny x, w którym η i ζ pozostają jednoznacznemi i ciągłemi, to równanie (I) przedstawiać będzie α-krotnie nieskończoną gromadę dotykających się wzajemnie gałęzi krzywych całkowych szczególnych, które krzywa $y=\eta$ przecina w punktach dotknięcia, nie będąc atoli do tych krzywych styczną.

Przyjmowaliśmy dotąd, że A_0 nie znika tożsamościowo, gdy y zastąpimy przez η. Jeżeli wszakże jest $A_0=0$ dla $y=\eta$, wtedy niektóre pierwiastki y' równania (I), dajmy na to, p pierwiastków stają się nieskończonemi, niezależnie od x. Niechaj pomiędzy p funkcyami y', które czynią zadość równaniu (1) i stają się wtedy nieskończonemi dla $y=\eta$, istnieje znowu grupa α zespojonych w punkcie $y=\eta$ gałęzi, to będzie je można przedstawić w postaci:

$$y' = (y-\eta)^{-\frac{\varkappa}{\alpha}} \left\{ g_0 + g_1 (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + g_1 (y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \ldots \right\},$$

gdzie $\varkappa$, jak i α, jest liczbą całkowitą dodatnią, różną od zera, spółczynniki zaś g_0, $g_1 \ldots$ oznaczają szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x-a$, gdzie a oznacza, jak wyżej, wartość dowolną, w której otoczeniu η jest funkcyą jednoznaczną i ciągłą. O spółczynniku g_0 zakładamy, że nie znika tożsamościowo. Z poprzedniego równania, po wprowadzeniu podstawienia

$$y = \eta + u^{\alpha},$$

otrzymujemy:

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\varkappa+\alpha-1}}{g_0 - u^{\varkappa} \frac{d\eta}{dx} + g_1 u + g_2 u^2 + g_3 u^3 + \ldots}.$$

Jeżeli w rozważanym obszarze płaszczyzny x obierzemy punkt dowolny $x=c$, w którym g_0 nie znika, będzie można prawą stronę powyższego równania przedstawić za pomocą szeregu, postępującego według potęg całkowitych dodatnich wielkości $x-c$ i u i zbieżnego w otoczeniu wartości $x=c$, $u=0$. Istnieje przeto funkcya x zmiennej u, czyniąca zadość temu równaniu różniczkowemu, dająca się przedstawić za pomocą szeregu, postępującego według potęg całkowitych dodatnich zmiennej u i przyjmująca wartość c dla $u=0$, mianowicie:

$$x-c=\frac{\alpha}{(\alpha+\varkappa)\,g_0}\,u^{\alpha+\varkappa}+\beta_1 u^{\alpha+\varkappa+1}+\dots$$

Przez odwrócenie otrzymujemy:

$$u=(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=\sqrt[\alpha+\varkappa]{\frac{(\alpha+\varkappa)\,g_0}{\alpha}}\,(x-c)^{\frac{1}{\alpha+\varkappa}}+\gamma_1(x-c)^{\frac{2}{\alpha+\varkappa}}+\dots$$

a przez podniesienie do potęgi α-tej:

$$y-\eta=\sqrt[\alpha+\varkappa]{\left(\frac{\alpha+\varkappa)\,g_0}{\alpha}\right)^{\alpha}}(x-c)^{\frac{\alpha}{\alpha+\varkappa}}+\delta_1(x-c)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\varkappa}}+\dots \qquad \text{(II)}$$

Równanie to przedstawia $\alpha+\varkappa$ gałęzi funkcyi całkowej y, które w $x=c$ mają swój punkt rozgałęzienia, w tym punkcie przyjmują wartość $\eta(c)$, a których pierwsze pochodne stają się wszystkie nieskończonemi w punkcie $x=c$, a więc są tu różne od wartości (skończonej) $\left|\frac{d\eta}{dx}\right|_{x=c}$. Gałęzie dotykają się przeto wzajemnie w punkcie $x=c$, nie dotykając krzywej $y=\eta$. Jeżeli zmieniać będziemy c sposobem ciągłym, otrzymamy $(\alpha+\varkappa)$-krotną gromadę dotykających się wzajemnie gałęzi krzywych, które krzywa $y=\eta$ w punktach styczności przecina, nie będąc atoli do tych krzywych styczną.

Formy rozwinięcia (I) i (II) są jedynemi formami, zachodzącemi wtedy, gdy $y=\eta$ n i e j e s t całką równania danego (1); mają one tę wspólną cechę charakterystyczną, że w y k ł a d n i k n a j n i ż s z e j w y s t ę p u j ą c e j w n i c h p o t ę g i r ó ż n i c y $x-c$ n i e j e s t w i ę k s z y o d 1.

Może zajść, że gdy w równaniu różniczkowem (1) położymy $y=\frac{1}{z}$, równanie wyróżnikowe przekształconego równania różniczkowego względem z' będzie miało pierwiastek $z=0$. Mówimy wtedy, że $y=\infty$ jest pierwiastkiem równania $\Delta=0$. Jeżeli tedy $y=\infty$ nie jest zarazem całką równania różniczkowego (t. j. $z=0$ nie jest całką równania przekształconego), to utrzymują się — jak o tem za pomocą podstawienia $y=\frac{1}{z}$ przekonać się można — formy rozwinięcia (I) lub (II), jeżeli w nich $y-\eta$ zastąpimy przez $\frac{1}{y}$.

Nakoniec może Δ posiadać czynnik niezależny od y; niechaj $x-a$ będzie jednym z jego dzielników liniowych, wtedy należy w równaniu różniczkowem uważać x za funkcyę zmiennej y. Jeżeli więc $x=a$ nie jest zarazem całką, otrzymujemy formy przedstawienia różnicy $x-a$ według potęg

różnicy $y-c$, gdy we wzorach (I) i (II) zamienimy x na y, η zaś zastąpimy przez a. Jeżeli $x=\infty$ jest pierwiastkiem równania $\Delta=0$, nie będąc całką, wtedy należy w powyższych formach rozwinięcia zastąpić $y-\eta$ przez $\frac{1}{x}$, x zaś przez y.

Przechodzimy teraz do rozpatrzenia przypadku, w którym $y=\eta$, gdzie η jest pierwiastkiem skończonym równania $\Delta=0$, ma być całką równania różniczkowego (1). Jeden z pierwiastków y' równania

$$f(x,\eta,y')=0$$

będzie wtedy równy $\frac{d\eta}{dx}$. Pomiędzy funkcyami y', które czynią zadość równaniu (1) i dla $y=\eta$ przyjmują wartość $\frac{d\eta}{dx}$, niechaj istnieje grupa α zespojonych w punkcie $y=\eta$ gałęzi; grupa ta będzie miała formę (3), w której ζ należy zastąpić przez $\frac{d\eta}{dx}$. Mamy tedy:

$$\frac{d(y-\eta)}{dx}=g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_2(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\dots \qquad (5)$$

gdzie spółczynniki $g_0, g_1\dots$ mają te same własności co wyżej. w szczególności zaś g_0 nie znika tożsamościowo. Podstawienie

$$y=\eta+u^{\alpha}$$

daje:

$$\alpha u^{\alpha-1}\frac{du}{dx}=g_0u^{\varkappa}+g_1u^{\varkappa+1}+\dots$$

a stąd:

$$\frac{dx}{du}=\frac{\alpha u^{\alpha-1-\varkappa}}{g_0+g_1u+g_2u^2+\dots}. \qquad (6)$$

Należy tu odróżnić dwa przypadki główne:

$$\alpha-1-\varkappa\geqq 0, \qquad \alpha-1-\varkappa<0.$$

1) Jeżeli $\alpha-1-\varkappa\geqq 0$, to ponieważ $\varkappa>0$, będzie $0<\varkappa\leqq\alpha-1$, lub $0<\varkappa<\alpha$. Ten przypadek zajść może tylko wtedy, gdy $\alpha>1$.

Jeżeli obierzemy znowu wartość dowolną c w obszarze jednoznaczności funkcyj $g_0, g_1\dots$ na płaszczyźnie x w ten sposób, aby g_0 nie znikało dla $x=c$, wtedy prawa strona równania (6) da się rozwinąć na szereg, postępujący według potęg całkowitych dodatnich wielkości $x-c$ i u, a równaniu różniczkowemu (6) czyni zadość funkcya x zmiennej u, która dla $u=0$ przyjmuje wartość c i daje się przedstawić w ten sposób:

$$x - c = \left| \frac{\alpha}{(\alpha - \varkappa)\, g_0} \right|_{x=c} u^{\alpha-\varkappa} + \beta_1 u^{\alpha-\varkappa+1} + \ldots$$

Przez odwrócenie otrzymujemy:

$$u = (y - \eta)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha-\varkappa]{\left| \frac{(\alpha - \varkappa)\, g_0}{\alpha} \right|_{x=c}} (x - c)^{\frac{1}{\alpha-\varkappa}} + \gamma_2 (x - c)^{\frac{2}{\alpha-\varkappa}} + \ldots$$

przez podniesienie zaś do potęgi α-tej:

$$y - \eta = \sqrt[\alpha-\varkappa]{\left(\left| \frac{(\alpha - \varkappa)\, g_0}{\alpha} \right|_{x=c} \right)^{\alpha}} (x - c)^{\frac{\alpha}{\alpha-\varkappa}} + \delta (x - c)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\varkappa}} + \ldots \tag{III}$$

Cechą charakterystyczną formy rozwinięcia (III), która może zachodzić tylko w przypadku, gdy $y = \eta$ jest całką równania (1), jest to, że wykładnik najniższej potęgi różnicy $x - c$ jest zawsze większy od 1. Równanie (III) przedstawia grupę $\alpha - \varkappa$ (w rozważanym przypadku $\geqq 1$) zespojonych w punkcie c gałęzi funkcyi całkowej y, mających tę własność, że w punkcie $x = c$ dla wszystkich gałęzi jest:

$$y = \eta, \quad y' = \eta', \quad y^{(\lambda)} = \eta^{(\lambda)},$$

gdzie λ, gdy $\alpha - \varkappa > 1$, jest największą liczbą całkowitą, zawartą w $\frac{\alpha}{\alpha - \varkappa}$, a gdy $\alpha - \varkappa = 1$, oznacza wartość $\alpha - 1$, tak że, — jak wyżej zauważono — ponieważ α jest tu >1, λ jest równe conajmniej 1. Gałęzie mają przeto wzajemnie ze sobą i z krzywą $y = \eta$ w punkcie c styczność rzędu λ-tego. Jeżeli więc zmieniać będziemy c sposobem ciągłym, otrzymamy $(\alpha - \varkappa)$-krotnie nieskończoną gromadę gałęzi wzajemnie stycznych, które w punktach styczności spotykają krzywą $y = \eta$ i są do niej styczne. Jest tedy $y = \eta$ obwiednią tej gromady lub całką osobliwą. Jeżeli $\varkappa = \alpha - 1$, liczba gałęzi stycznych w punkcie c do krzywej $y = \eta$, jest równa 1. W tym przypadku punkt ruchomy c nie stanowi punktu rozgałęzienia dla całek, powstających z gałęzi zespojonych zmiennej y', jako funkcyi zmiennej y, przedstawionych przez grupę, którą określa równanie (5) [1].

Jeżeli $y = \infty$ jest pierwiastkiem równania $\Delta = 0$ i zarazem całką równania różniczkowego, należy położyć $y = \frac{1}{z}$ i zastosować rozwinięcie formy (5), w której należy podstawić z' zamiast y' oraz z zamiast $y - \eta$. Jeżeli

[1]) Porów. Fuchs, Berliner Sitzungsber. 1884, 32 S. 705, gdzie występowanie tego przypadku lub rozważanego poniżej $\varkappa > \alpha - 1$ jest warunkiem koniecznym np. to, aby całki równania różniczkowego nie miały ruchomych punktów rozgałęzienia.

dostaniemy wtedy $\varkappa < \alpha$, to na $z = \frac{1}{y}$ otrzymamy rozwinięcie postaci (III), i $y = \infty$ przedstawia obwiednią.

Jeżeli wreszcie $x - a$ jest dzielnikiem wyrażenia Δ, $x = a$ zaś całką, to należy przemienić x i y i podjąć odpowiednie badanie. Tożsamo stosuje się, gdy $x = a$ jest całką, $x - a$ zaś nie jest dzielnikiem wyrażenia Δ i gdy zarazem dwa pierwiastki y' stają się nieskończenie wielkiemi dla $x = a$.

2) $\alpha - 1 - \varkappa < 0$, a przeto $\varkappa > \alpha - 1$ lub $\varkappa \geqq a$. Podstawienie $y = \eta + u^{\varkappa}$ w równaniu (5) daje:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha} u^{\varkappa-(\alpha-1)} \{ g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + \ldots \},$$

gdzie teraz $\varkappa - (\alpha - 1)$ jest liczbą całkowitą dodatnią, różną od zera. Według uwagi końcowej Wstępu, równaniu różniczkowemu, prócz $u = 0$, nie czyni zadość żadna całka, rozwijalna według potęg całkowitych lub ułamkowych różnicy $x - c$, i mająca wartość zero dla wartości dowolnie obranej $x = c$. Równaniu różniczkowemu (5) nie czyni przeto zadość, prócz $y' = \eta$, żadna całka, rozwijalna według potęg różnicy $x - c$ i równa η dla dowolnej wartości c. Daje to wskazówkę, że $y = \eta$ jest całką szczególną danego równania różniczkowego; prócz tego krzywa ta może być obwiednią dla gromady całek, powstającej z innej grupy funkcyj y' i w której przedstawieniu według formy (5) jest $\varkappa \leqq \alpha - 1$.

Modyfikacye, występujące w przypadku, gdy $y = \infty$ lub $x = a$ są pierwiastkami równania $\Delta = 0$, są te same, jak w przypadku poprzedzającym.

Powyższe wyniki streszczamy w sposób następujący:

Jeżeli $y = \eta$ jest pierwiastkiem skończonym równania wyróżnikowego $\Delta = 0$, wtedy są możliwe trzy przypadki:

1) $y = \eta$ nie jest całką równania różniczkowego; wtedy wszystkie całki szczególne równe η w punkcie dowolnym $x = c$ płaszczyzny x, w którym funkcya η pozostaje jednoznaczną i ciągłą, dają się przedstawić w postaci:

$$y - \eta = \mathfrak{P}(x - c),$$

gdzie $\mathfrak{P}$ oznacza szereg, postępujący według potęg dodatnich całkowitych lub ułamkowych różnicy $x - c$. We wszystkich tych szeregach wykładnik najniższej potęgi różnicy $x - c$ nie jest większy od 1.

2) $y = \eta$ jest całką osobliwą, t. j. obwiednią gromady krzywych całkowych szczególnych; wtedy istnieje jedna lub więcej grup całek równych η w punkcie c i rozgałęziających się w tym punkcie całek szczególnych y — jeżeli tylko grupa nie składa się z jednej całki nierozgałęzionej—dających się przedstawić w formie powyższej, przyczem wykładnik najniższej potęgi różnicy $x - c$ jest większy od 1.

3) $y = \eta$ jest tylko całką szczególną albo też zarazem osobliwą; wtedy w każdym razie redukują się niektóre przedstawienia całek szczególnych y, które stają się równemi η w punkcie $x = c$, do $y - \eta = 0$; w przypadku pierwszym jest w innych przedstawieniach wszędzie wykładnik najniższej potęgi różnicy $x - c$ niewiększy od 1, w drugim zaś przypadku istnieją prócz tego całki szczególne, stające się równemi η w punkcie $x = c$ i dla których wspomniany wykładnik jest od 1 większy.

Modyfikacye, zachodzące w przypadku gdy $\Delta = 0$ posiada pierwiastek nieskończony lub pierwiastek $x = a$, niezależny od y, są wskazane w rozważaniach poprzednich.

Naturę całki $y = \eta$ można zresztą poznać bezpośrednio z formy rozwinięcia (5) dla funkcyi y', która to forma stosuje się zawsze, jeżeli $y = \eta$ jest całką równania różniczkowego

$$\frac{d(y-\eta)}{dx} = g_0 (y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1 (y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \ldots$$

gdzie $\varkappa$ i α są liczby całkowite dodatnie, różne od zera.

η jest całką osobliwą, gdy $\varkappa < \alpha$, szczególną, gdy $\varkappa \geqq \alpha$, jedną i drugą zarazem, jeżeli istnieją rozwinięcia jednej i drugiej natury.

Mamy tu stwierdzenie kryteryum Laplace'a dla całek osobliwych, o ile rzecz dotyczy całek równań różniczkowych algebraicznych. W samej rzeczy, tylko gdy $\varkappa < \alpha$, jest $\frac{\partial y'}{\partial y} = \infty$ dla $y = \eta$. Lecz należy tu uwzględnić, że y', jako funkcya wielowartościowa zmiennej y, może posiadać równocześnie takie gałęzie, dla których $\frac{\partial y'}{\partial y} = \infty$, i inne, dla których to wyrażenie jest skończone dla $y = \eta$, tak że jedna i ta sama całka może być równocześnie osobliwą i szczególną. Zakładamy naturalnie jeszcze, że $y = \eta$ jest wogóle całką, do czego potrzeba i wystarcza, aby jeden z pierwiastków y' równania

$$f(x, \eta, y') = 0$$

był równy $\frac{d\eta}{dx}$.

Czynimy nadto uwagę następującą. Można wyróżnik Δ sprowadzić do postaci

$$\Delta = P^{\lambda} Q^{\mu} R^{\nu} \ldots,$$

gdzie $P, Q, R \ldots$ oznaczają różne od siebie wielomiany nieprzywiedlne o zmiennych x i y.

Otóż można wykazać, że gdy η jest pierwiastkiem równania $F = 0$, które niechaj będzie stopnia m-tego, i gdy zarazem $y = \eta$ jest całką równania różniczkowego, wtedy i $y = \eta_1$ jest również jego całką, jeżeli η_1 jest innym pierwiastkiem równania $P = 0$. Albowiem według założenia jest tożsamościowo

$$f\left(x, \eta, \frac{d\eta}{dx}\right) = 0.$$

Jeżeli tu $\frac{d\eta}{dx}$ i potęgi funkcyi η wyższe od $(m-1)$-ej przy pomocy równania $P = 0$ sprowadzimy do postaci $a_0 + a_1 \eta + \ldots + a_{m-1} \eta^{m-1}$, wtedy równanie to, po zniesieniu wspólnego mianownika, przejdzie na następujące:

$$p_0 + p_1 \eta + \ldots + p_{m-1} \eta^{m-1} = 0,$$

gdzie spółczynniki $p_0, \ldots, p_{m-1}$ są funkcyami całkowitemi wymiernemi zmiennej x. Z powodu nieprzywiedlności równania $P = 0$, muszą te spółczynniki znikać tożsamościowo, równanie przeto

$$f\left(x, \eta, \frac{d\eta}{dx}\right) = 0$$

sprawdza się dla każdego pierwiastka równania $P = 0$. Ale i własność pierwiastka η, polegająca na tem, że jest on obwiednią albo całką szczególną, jest jednaka dla wszystkich pierwiastków tego samego równania. Wiąże się to, jak zauważyliśmy, z formą rozwinięcia (5) dla $\frac{d(y-\eta)}{dx}$ według potęg różnicy $y - \eta$, które, kładąc $y = \eta + v$, możemy tak napisać:

$$\frac{dv}{dx} = g_0 v^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1 v^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \ldots \tag{7}$$

Ponieważ zaś, jeżeli y oznacza całkę, równania

$$f\left(x, \eta, \frac{d\eta}{dx}\right) = 0, \quad f\left(x, \eta + v, \frac{d\eta}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) = 0$$

zachodzą równocześnie, to, jeżeli drugie z tych równań uporządkujemy według potęg wielkości v i $\frac{dv}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$ zaś wyrazimy przez η, otrzymamy, po zniesieniu wspólnego mianownika,

$$0 = h_{10} v + h_{01} \frac{dv}{dx} + h_{20} v^2 + h_{11} v \frac{dv}{dx} + h_{02} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \ldots \tag{8}$$

gdzie strona prawa jest wielomianem o zmiennych v i $\frac{dv}{dx}$, spółczynniki zaś h_{10}, $h_{01}, \ldots$ są funkcyami całkowitemi wymiernemi zmiennych x i η. Jeżeli $\frac{dv}{dx}$, jako funkcyę algebraiczną zmiennej v, określoną przez poprzednie równanie, rozwiniemy na szereg według potęg zmiennej v, to postać tego rozwinięcia zależeć będzie od pewnych równań warunkowych pomiędzy spółczynnikami, które to warunki, wskutek nieprzywiedlności równania $P=0$, pozostają bez zmiany, jeżeli jeden pierwiastek η równania $P=0$ zastąpimy przez inny. Przy takiem zastąpieniu nie mogą przybyć nowe warunki, zmieniające postać rozwinięcia, gdyż każdy taki warunek dla η_1 stosowałby się i do η. Rozwinięcie (7) utrzymuje się tedy, jeżeli w spółczynnikach $g_0, g_1, \ldots$ zależnych od x i η, zastąpimy η przez η_1; tylko wtedy należy położyć $y-\eta_1$ zamiast v. Będzie zatem także:

$$\frac{d(\eta-\eta_1)}{dx} = g_0(x, \eta_1)(y-\eta_1)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1(x, \eta_1)(y-\eta_1)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \ldots$$

Jeżeli $\varkappa < \alpha$, to η_1, podobnie jak i η, jest obwiednią gromady α-krotnie nieskończonej całek y, lecz składającą się teraz z takich całek szczególnych y, które w punkcie $x=c$ przyjmują wartości funkcyi η_1. Podobnież, jeżeli $\varkappa \geqq \alpha'$, jest η_1 jak i η, całką szczególną.

Wystarcza tedy zbadać według poprzedzającej metody tylko po jednym z pierwiastków równań

$$P=0, \quad Q=0, \quad R=0, \ldots$$

na które rozpada się równanie wyróżnikowe $\Delta=0$, aby poznać charakter krzywych

$$P=0, \quad Q=0, \quad R=0 \ldots,$$

mianowicie, czy są krzywemi całkowemi, czy też ewentualnie obwiedniemi lub krzywemi szczególnemi gromady.

Na zakończenie wyprowadzimy z danego równania różniczkowego (1) ogólne równanie całkowe z jedną stałą dowolną.

Niechaj równaniu (1) czyni zadość równanie całkowe

$$\varphi(x, y) = C,$$

gdzie C oznacza stałą dowolną. Wtedy musi się spełniać tożsamościowo równanie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 0,$$

jeżeli zamiast y' podstawimy pierwiastek równania (1). Jeżeli $x=a$, $y=b$ jest parą wartości, dla której ani Δ ani y' nie stają się nieoznaczonemi, wtedy

równanie $f(a, b, y')=0$ ma n różnych od siebie pierwiastków $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, i jeżeli $\alpha_\varkappa$ jest różne od zera, to funkcya $\frac{1}{y'}$, która dla $x=a$, $y=b$ przechodzi na $\frac{1}{\alpha_\varkappa}$, może być rozwinięta na szereg, postępujący według potęg całkowitych dodatnich różnic $x-a$, $y-b$, mianowicie

$$\frac{1}{y'} = g_0^\varkappa + g_1^\varkappa(y-b) + g_2^\varkappa \frac{(y-b)^2}{1-2} + \ldots,$$

gdzie $g_0^\varkappa$, $g_1^\varkappa \ldots$ oznaczają szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x-a$, i gdzie $g_0^\varkappa$ dla $x=a$ przyjmuje wartość $\frac{1}{\alpha_\varkappa}$. Otrzymujemy tedy równanie różniczkowe cząstkowe dla funkcyi φ:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(g_0^\varkappa + g_1^\varkappa(y-b) + g_2^\varkappa \frac{(y-b)^2}{1-2} + \ldots\right). \tag{10}$$

Temu równaniu, jak to wykazała Kowalewska, można uczynić zadość za pomocą szeregu z pewnym obszarem granicznym, mającego postać

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi^\nu(x) \frac{(y-b)^\nu}{\nu!}, \tag{11}$$

gdzie $\varphi(x)$, $\varphi'(x) \ldots$ oznaczają szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x-a$, przyczem φ^0 można wybrać dowolnie, pozostałe zaś szeregi można wyznaczyć przy pomocy równania tożsamościowego, które otrzymujemy, podstawiając wyrażenie (11) w równaniu (10):

$$\varphi^1 + \varphi^2(y-b) + \varphi^3 \frac{(y-b)^2}{1.2} + \varphi^4 \frac{(y-b)^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$= -\left(\frac{d\varphi^0}{dx} + \frac{d\varphi^1}{dx}(y-b) + \frac{d\varphi^2}{dx}\frac{(y-b)^2}{1.2} + \ldots\right)\left(g_0^\varkappa + g_1^\varkappa(y-b) + g_2^\varkappa \frac{(y-b)^2}{1.2} + \ldots\right).$$

Z poprzedzającej tożsamości wynikają równania zwrotne:

$$\varphi^1 = -g_0^\varkappa \frac{d\varphi^0}{dx},$$

$$\varphi^2 = -\left(g_0^\varkappa \frac{d\varphi^1}{dx} + g_1 \frac{d\varphi^0}{dx}\right),$$

$$\varphi^3 = -\left(g_0^\varkappa \frac{d\varphi^2}{dx} + 2g_1^\varkappa \frac{d\varphi^1}{dx} + g_2^\varkappa \frac{d\varphi^0}{dx}\right),$$

$$\varphi^4 = -\left(g_0^\varkappa \frac{d\varphi^3}{dx} + 3g_1^\varkappa \frac{d\varphi^2}{dx} + 3g_2^\varkappa \frac{d\varphi^1}{dx} + g_3^\varkappa \frac{d\varphi^0}{dx}\right)$$

. . . .

przez które szeregi φ^1, $\varphi^2 \ldots$ są jednoznacznie wyznaczone.

Z jednorodności równania różniczkowego (10) wypływa zresztą jasno, że, gdy napiszemy jedno rozwiązanie φ, ustaliwszy funkcyę dowolną φ^0 (najprościej przyjąć $\varphi^0 = x$), wtedy każde inne rozwiązanie daje się przedstawić przez $w(\varphi)$, gdzie w oznacza funkcyę dowolną. Równanie całkowe przez to się nie zmieni, gdyż $\varphi(x, y) = C$ przechodzi tylko na $\varphi(x, y) = C'$, można więc bez szkody dla ogólności położyć $\varphi^0 = x$.

Jeżeli jeden—i to pojedyńczy—pierwiastek y' równania $f(a, b, y') = 0$ jest równy zeru, wtedy funkcya y', przyjmująca dla $x = a$, $y = b$ wartość zero, daje się przedstawić w ten sposób:

$$y' = h_0 + h_1 (x - a) + h_2 \frac{(x-a)^2}{1.2} + \dots$$

gdzie h_0, $h_1 \dots$ są szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnicy $y - b$, i gdzie h_0 znika dla $y = b$. Otrzymujemy tedy na φ równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(h_0 + h_1 (x - a) + h_2 \frac{(x-a)^2}{1.2} + \dots\right), \tag{12}$$

któremu czyni zadość szereg

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\nu=0} \psi^\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!},$$

zbieżny w otoczeniu punktów $x = a$, $y = b$; ψ^0, $\psi^1 \dots$ oznaczają tu szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnicy $y - b$; ψ^0 można przyjąć dowolne (i bez szkody dla ogólności $\psi^0 = y$), szeregi zaś ψ^1, $\psi^2, \dots$ wyznaczają się przy pomocy wzorów zwrotnych:

$$\psi^1 = -h_0 \frac{\partial \psi^0}{\partial y},$$

$$\psi^2 = -\left(h_0 \frac{d\psi'}{dy} + h_1 \frac{\partial \psi^0}{\partial y}\right),$$

$$\varphi^2 = -\left(h_0 \frac{d\psi^2}{dy} + 2 h_1 \frac{d\psi^1}{dy} + h_2 \frac{\partial \psi^0}{\partial y}\right).$$

. . . .

Jeżeli więc $x = a$, $y = b$ jest parą wartości, dla której równanie

$$f(x, y, y') = 0$$

posiada n oznaczonych różnych od siebie pierwiastków y', z których jeden

może być i nieskończony, wtedy istnieje n różnych od siebie rozwiązań równania różniczkowego (1), mających postać:

$$\varphi_1(x, y) = C, \quad \varphi_2(x, y) = C, \dots, \varphi_n(x, y) = C,$$

gdzie φ_1, $\varphi_2 \dots$ oznaczają szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnic $x - a$, $y - b$ i zbieżne w otoczeniu pary wartości $x = a$, $y = b$.

Niechaj $x = a$, $y = b$ będzie taką parą wartości, dla której Δ staje się równem zeru w ten mianowicie sposób, że pierwiastek $y = \eta$ tego równania, który dla $x = a$ przechodzi na b, jest jednoznaczny i ciągły w otoczeniu punktu $x = a$, taką więc parą, że η daje się rozwinąć na szereg według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x - a$. Niechaj dla $y = \eta$ wielokrotny pierwiastek y' posiada wartość ζ i niechaj ζ będzie skończone dla $x = b$; wtedy istnieje grupa α funkcyj y', dających się przedstawić w sposób następujący:

$$y' = \zeta + g_0 (y - \eta)^{\frac{\alpha}{\alpha}} + g_1 (y - \eta)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \dots \quad (\alpha \leqq n),$$

gdzie ζ, g_0, $g_1 \dots$, podobnie jak η, są szeregami, postępującemi według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x - a$, η zaś przyjmuje dla $x = a$ wartość b.

Równanie różniczkowe w otoczeniu punktów $x = a$, $y = b$, będzie postaci:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\zeta + g_0 (y - \eta)^{\frac{\alpha}{\alpha}} + g_1 (y - \eta)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \dots\right).$$

Połóżmy: $$y = \eta + u^\alpha$$

i φ, jako funkcyę zmiennych x i u, oznaczmy przez $\bar{\varphi}$; będzie:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d\eta}{dx}, \qquad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} = \alpha u^{\alpha-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Jest tedy w otoczeniu punktów $x = a$, $u = 0$:

$$\alpha u^{\alpha-1} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u}\left(\zeta - \frac{d\eta}{dx} + g_0 u^\alpha + g_1 u^{\alpha+1} + \dots\right).$$

Jeżeli, po pierwsze, $\zeta - \frac{d\eta}{dx}$ nie jest tożsamościowo zerem, to załóżmy, że jest też różne od zera dla $x = a$; wtedy równanie można przekształcić na następujące

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\{h_0 + h_1 u + h_2 u^2 + \dots\}, \tag{13}$$

gdzie h_0, $h_1 \ldots$ są szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x-a$. Równanie to jest przeto postaci (10) i czyni mu zadość szereg

$$\bar{\varphi} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi^{\nu}(x)\, \frac{u^{\nu}}{\nu!} \tag{14}$$

w ten sposób, że φ^0, $\varphi^1 \ldots$ oznaczają szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x-a$, przyczem φ^0 jest dowolne, a pozostałe szeregi są jednoznacznie wyznaczone przez szereg φ^0.

Jeżeli, po drugie, $\zeta - \frac{d\eta}{dx}$ jest tożsamościowo zerem i jeżeli dla $x = a$ znikają g_0, $g_1 \ldots$, $g_{\lambda-1}$, nie znika zaś g_λ, i jeżeli założymy że i tu g_λ nie znika dla $x = a$, to, gdy $\alpha - 1 \geqq \varkappa + \lambda$, będzie możliwe przekształcenie na postać (13) i stosować się będzie rozwiązanie postaci (14). Lecz jeżeli $\alpha - 1 < \varkappa + \lambda$, wtedy otrzymujemy:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u}\{g_\lambda u^{\mu} + g_{\lambda+1} u^{\mu+1} + \ldots\}, \quad (\mu = \varkappa + \lambda - \alpha + 1),$$

i jeżeli wyrażenie w nawiasie po stronie prawej uporządkujemy według potęg różnicy $x-a$, będzie

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u}\left\{h_0 + h_1(x-a) + h_2\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2} + \ldots\right\},$$

gdzie h_0, $h_1 \ldots$ oznaczają szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich zmiennej u. Równanie jest postaci (12) i czyni mu zadość szereg

$$\bar{\varphi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi^{\nu}\,\frac{(x-a)^{\nu}}{\nu!}, \tag{15}$$

w którym ψ^0, $\psi^1, \ldots$ są szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich zmiennej u, ψ_0 jest dowolne, a pozostałe szeregi są przez ψ^0 jednoznacznie wyznaczone.

Pozostaje jeszcze do zbadania przypadek, w którym dla $y = \eta$ staje się y' nieskończonem, gdy więc grupa α funkcyj y' daje się przedstawić przez

$$y' = (y-\eta)^{-\frac{\varkappa}{\alpha}}\{g_0 + g_1(y-\eta) + g_2(y-\eta)^2 + \ldots\},$$

gdzie g_0 nie znika tożsamościowo. Zakładamy wtedy, że g_0 nie znika też dla $x = a$. Równanie różniczkowe brzmi wtedy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\{g_0 + g_1(y-\eta) + \ldots\},$$

a jeżeli wprowadzimy znowu zmienną $u = (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$, będzie:

$$\alpha u^{\varkappa+\alpha-1}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u}\left\{-u^{\varkappa}\frac{\partial u}{\partial x} + g_0 + g_1 u^{\varkappa} + \ldots\right\}.$$

Ponieważ g_0 dla $x = a$ jest od zera różne, to można równanie sprowadzić do postaci (13), a jego rozwiązanie do postaci (14). Wzory (14) i (15) przedstawiają oba po stronach prawych szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich wielkości $x-a$ i u, przyczem w jednym funkcya dowolna jest funkcyą zmiennej u, w drugim funkcyą zmiennej x. W otoczeniu każdej pary wartości $x = a$, $y = b$, dla której znika czynnik $y-\eta$ wyróżnika Δ, jeżeli tylko funkcya η jest ciągła w punkcie $x = a$ i pewne nieznikające tożsamościowo funkcye zmiennej x są też różne od zera dla $x = a$ —przy tych to zastrzeżeniach są wyłączone tylko odosobnione pary wartości— istnieć będzie rozwiązanie φ postaci:

$$\varphi = l_0 + l_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + l_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \ldots$$

gdzie l_0, $l_1 \ldots$ oznaczają szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnicy $x-a$. Możemy szereg ten napisać w postaci:

$$\varphi = L_0 + L_1(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} + L_2(y-\eta)^{\frac{2}{\alpha}} + \ldots + L_{\alpha-1}(y-\eta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \tag{16}$$

gdzie L_0, $L_1 \ldots$, $L_{\alpha-1}$ oznaczają szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnic $x-a$, $y-\eta$. Równanie (16), z powodu α wartości funkcyi $(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$, przedstawia α różnych od siebie rozwiązań

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_2, \ldots \quad \varphi = \varphi_{\alpha-1}.$$

Każda funkcya symetryczna wielkości φ_1, $\varphi_2, \ldots$, $\varphi_{\alpha-1}$ daje się przedstawić za pomocą szeregu, postępującego według potęg całkowitych dodatnich różnic $x-a$, $y-\eta$, a ponieważ η jest szeregiem postaci

$$\eta = b + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \ldots$$

więc ostatecznie przedstawić się daje przez szereg, postępujący według potęg całkowitych dodatnich różnic $x-a$, $y-b$.

Poprzednie wywody dają dowód następującego twierdzenia, dotyczącego równania różniczkowego cząstkowego

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,y'=0,$$

gdzie y' jest funkcyą algebraiczną zmiennych y i x, daną przez równanie

$$f(x,\, y,\, y')=0,$$

lub prościej równania cząstkowego

$$A_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^n - A_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+A_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{n-2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\dots+(-1)^n A_n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^n=0 \qquad (17)$$

Po wyłączeniu pewnych odosobnionych par wartości x i y, można dla dowolnie obranej pary wartości $x=a$, $y=b$ podać n różnych rozwiązań $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ równania różniczkowego (17) tej natury, że ich funkcye symetryczne dają się przedstawić przez szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnic $x-a$, $y-b$ i zbieżne w otoczeniu punktów $x=a$, $y=b$.

Jeżeli dla otrzymania równania, którego pierwiastkami są $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, wprowadzimy, zamiast ich funkcyj elementarnych symetrycznych, szeregi:

$$\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n=-B_1(x-a,\, y-b),$$

$$\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3+\dots+\varphi_{n-1}\varphi_n=B_2(x-a,\, y-b),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n=(-1)^n B_n(x-a,\, y-b),$$

otrzymamy:

$$\varphi^n+B_1\varphi^{n-1}+B_2\varphi^{n-2}+\dots+B_n=0,$$

jako równanie całkowe równania różniczkowego (17) w otoczeniu punktu $x=a$, $y=b$, a gdy jeszcze położymy $\varphi=C$, będzie

$$C^n+B_1C^{n-1}+B_2C^{n-2}+\dots+B_n=0; \qquad (18)$$

ogólnem równaniem całkowem danego równania (1); $B_1, B_2, \dots, B_n$ są to szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich różnic $x-a$, $y-b$ i zbieżne w otoczeniu par wartości $x=a$, $y=b$.

Funkcye $B_1, \dots, B_n$ dopuszczają przedłużenie w obszarze zbiorowym par wartości, przyczem należy ominąć kompleks par wartości, tworzący jedno lub więcej kontynuów, w których jedna z funkcyj B staje się nieskończoną, oraz pewne pary odosobnione, w których te funkcye stają się nieoznaczonemi. W otoczeniu tych ostatnich par nie istnieje wogóle żadne przedstawienie równania całkowego powyższej natury. Co się tyczy ogółu par pierwszego rodzaju, to w otoczeniu należącej do niego pary wartości istnieje równanie całkowe

$$C'^n+B_1'C'^{n-1}+B_2'C'^{n-2}+\dots+B_n'=0, \qquad (18a)$$

mające własność wspomnianą.

Związek pomiędzy pierwiastkami równania (18) i równania (18a) pozyskujemy na mocy uwagi, że gdy

$$u_1(x,\, y)=C,\quad u_2(x,\, y)=C,\dots,\quad u_n(x,\, y)=C$$

są n rozwiązaniami zupełnemi równania różniczkowego (1) takiemi, że pomiędzy $u_1, \dots, u_n$ nie istnieje żaden związek niezależny od x, y, wtedy wszystkie wogóle rozwiązania dane są przez

$$\varphi_1(u_1)=C,\quad \varphi_2(u)=C,\dots,\quad \varphi_n(u_n)=C,$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ są funkcye dowolne. Jeżeli więc pierwiastki równań (18) i (18a) oznaczymy odpowiednio przez

$$c_1, \dots c_n; \quad c_1' \dots c_n',$$

to zachodzić będzie związek

$$c_1'=\varphi_1(c_1),\quad c_n'=\varphi_n(c_2),\dots,\quad c_n'=\varphi_n(c_n).$$

Aby wyjaśnić to na przykładzie, rozważmy równanie

$$f(x,\, y)=C\varphi(x,\, y)\,e^{\frac{1}{\psi(x,\, y)}},$$

gdzie f, φ, ψ są wielomiany o zmiennych x, y. Jako rozwiązanie ogólne czyni ono zadość równaniu różniczkowemu rzędu i stopnia pierwszego względem zmiennej y ze spółczynnikami całkowitemi wymiernemi o zmiennych x i y. Dla wszystkich par wartości $x=a$, $y=b$, dla których φ i ψ nie znikają, C daje się przedstawić przez

$$C=\Psi(x-a,\, y-b),$$

gdzie Ψ oznacza szereg, postępujący według potęg całkowitych dodatnich różnic $x-a$, $y-b$. Jeżeli dla $x=a$, $y=b$ jest $\varphi=0$, lecz nie jest zerem ani f, ani ψ, wtedy:

$$C'=\frac{1}{C}=\frac{\varphi e^{\frac{1}{\psi}}}{\psi}=\Psi(x-a,\, y-b),$$

Jeżeli wreszcie dla $x=a$, $y=b$ jest $\psi=0$, gdy f i φ są od zera różne, będzie:

$$C'=\frac{1}{\log C}=\frac{\psi}{\psi(\log f-\log\varphi)-1}=\Psi(x-a,\, y-b).$$

Można oczywiście założyć, że wielomiany f i φ nie mają wspólnego dzielnika; dzielniki zaś wspólne wielomianu ψ z wielomianami f lub φ znikają z równania różniczkowego, które brzmi:

$$\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\,y'\right)=f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,y'\right)-\frac{f\varphi}{\psi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\,y'\right).$$

Ponieważ dla par wartości $x=a$, $x=b$, dla których znikają te wspólne dzielniki, y' nie pozostaje wogóle nieoznaczonem, to i dla nich istnieje przedstawienie postaci $C'=\mathfrak{P}(x-a,\ y-b)$, gdzie C' jest znowu funkcyą wielkości C, której atoli nie można wyrazić przez elementarne funkcye przestępne. Wyłączone są te odosobnione pary punktów, dla których znikają jeszcze dwa z pomiędzy wielomianów f, φ, ψ, po oddzieleniu wspomnianych wspólnych dzielników.

II.

Weźmy teraz pod uwagę równanie skończone

$$F(x,\ y,\ C)=0 \tag{19}$$

stopnia n-tego względem C ze spółczynnikami, które są funkcyami analitycznemi zmiennych x i y, o własnościach podanych na końcu poprzedzającego rozdziału.

Jeżeli zróżniczkujemy równanie (19) zupełnie względem x, uważając C za funkcyę zmiennych x i y, przez to równanie określoną, otrzymamy następujące równanie prawdziwe dla każdego dowolnego y, uważanego za funkcyę zmiennej x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\,y'=-\frac{\partial F}{\partial C}\,\frac{dC}{dx}, \tag{20}$$

gdzie dla skrócenia położono:

$$\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\,y'=\frac{dC}{dx}.$$

Jeżeli pomnożymy przez siebie n równań, powstających z równania (19) przez podstawienie, zamiast C, n pierwiastków $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tego równania, otrzymamy tożsamościowo:

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{C=C_\varkappa}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{C=C_\varkappa}y'\right)=(-1)^n\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{C=C_\varkappa}\frac{dC_1}{dx}\,\frac{dC_2}{dx}\cdots\frac{dC_n}{dx} \tag{21}$$

$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{C=C_\varkappa}$ jest wyróżnikiem równania (19) względem C, który oznaczmy przez D. Tożsamość (21) można przeto napisać w postaci:

$$M\,(A_0 y'^n+A_1 y'^{n+1}+\ldots+A_n)=(-1)^n D\,\frac{dC_1}{dx}\,\frac{dC_2}{dx}\cdots\frac{dC_n}{dx},$$

gdzie M jest czynnikiem, zawierającym tylko x i y, który może być i przestępny, jeżeli równanie (19) nie jest algebraiczne; $A_0, A_1, \ldots, A_n$ oznaczają funkcye całkowite wymierne zmiennych x i y bez wspólnego dzielnika. Czynnik w nawiasie, zawierający funkcyę y', który jak i w pierwszym rozdziale, oznaczymy przez $f(x,\ y,\ y')$, przyrównamy do zera, daje równanie różniczkowe, którego całką ogólną jest równanie (19). A zatem dla każdego x i y zachodzi równanie tożsamościowe

$$Mf(x,\ y,\ y')=(-1)^n D\,\frac{dC_1}{dx}\,\frac{dC_2}{dx}\cdots\frac{dC_n}{dx}.\text{[1]} \tag{22}$$

Dla dalszych wywodów jest konieczne zbadanie wpływu, jaki wywiera na funkcye D i M zmiana równania całkowego, polegająca na wprowadzeniu funkcyj dowolnych pierwiastków $C_\varkappa$ zamiast samych pierwiastków. Niechaj będzie równanie

$$F'(x,\ y,\ C')=0,$$

którego pierwiastki $C_1', \ldots, C_n'$ pozostają z pierwiastkami równania (19) w związku

$$C_1'=\varphi_1(C_1),\quad C_2'=\varphi_2(C_2),\ldots,\quad C_n'=\varphi_n(C_n).$$

Równanie $F'=0$ czyni, oczywiście, zadość temu samemu równaniu różniczkowemu, co i $F=0$; otrzymujemy przeto analogicznie z równaniem (22):

---

[1]) Wyrażenie $\frac{M}{D}$, gdy f jest stopnia drugiego względem y', można uważać za czynnik całkujący, gdyż znajomość tego wyrażenia, jak to wykazał Weingarten (Sprawozdania Akademii Berlińskiej 1883, **43**, 1166 i „Journal für die reine und angew. Mathematik", **103**) pozwala całkować równanie $f=0$ przy pomocy tylko kwadratur. Jeżeli mianowicie $a\,dx+b\,dy$, $a'\,dx+b'\,dy$ są oba czynniki liniowe formy $\frac{M}{D}\,f\,dx^2$, to z równania (22) wynikają równania:

$$e^{\varphi}(a\,dx+b\,dy)=d\,C_1,\qquad e^{-\varphi}(a'dx+b'dy)=d\,C_2,$$

których warunki całkowalności wyznaczają pochodne funkcyi φ, a więc funkcyę φ przez kwadraturę. Po znalezieniu funkcyi φ, znajdujemy C_1 i C_2 przez kwadratury.

$$M' f(x, y, y') = (-1)^n D \frac{dC_1'}{dx} \frac{dC_2'}{dx_2} \cdots \frac{dC_n'}{dx},$$

gdzie D' jest wyróżnikiem funkcyi F' względem C', M' zaś, podobnie jak M, oznacza czynnik wolny od y'. Z drugiej strony, jeżeli równanie (22) pomnożymy przez $\frac{dC_1'}{dC_1} \frac{dC_2'}{dC_2} \frac{dC_n'}{dC_n}$, będzie:

$$M \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{dC_\varkappa'}{dC_\varkappa} f(x, y, y') = (-1)^n D \frac{dC_1'}{dx} \frac{dC_2'}{dx} \cdots \frac{dC_n'}{dx}.$$

Z tych dwóch równań wypływa

$$\frac{D'}{M'} = \frac{D}{M} : \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{dC_\varkappa'}{dC_\varkappa} = \frac{D}{M} \psi_1(C_1) \ldots \psi_n(C_n), \tag{23}$$

gdzie $\psi_1, \ldots, \psi_n$ oznaczają funkcye dowolne.

Z równania (22) wynika, że równaniu $f(x, y, y') = 0$ staje się zadość:

1) Gdy $C_\varkappa =$ stałym dowolnym ($\varkappa = 1, 2 \ldots, n$).

Gdyż dla dowolnej wartości stałych nie może przez te równania spełnić się wolne od y' równanie $\frac{M}{D} = 0$. Są to t. zw. rozwiązania zupełne, z których przez nadanie stałym wartości szczególnych wynikają całki szczególne.

2) Gdy $\frac{D}{M} = 0$.

Jeżeli temu równaniu czyni zadość funkcya $y = \eta(x)$, nie zawarta w równaniach $C_\varkappa =$ stałym, jako rozwiązanie szczególne, to $y = \eta$ nazywa się **całką osobliwą**. Z równania (23) wypływa, że wszystkie całki osobliwe, które dostajemy z równania $\frac{D}{M} = 0$, są też zawarte w równaniu $\frac{D'}{M'} = 0$, i odwrotnie. Jeżeli bowiem jest $\frac{D}{M} = 0$ dla $y = \eta$, to $\frac{D'}{M'}$ mogłoby nie znikać tylko wtedy, gdyby było $\psi_\varkappa(C_\varkappa) = \infty$ dla $y = \eta$, lecz wtedy, wbrew założeniu, byłoby $y = \eta$ całką szczególną; podobnież — ponieważ $\psi_\varkappa(C_\varkappa)$ nie powinno być zerem dla $y = \eta$, — wynika stąd, że $\frac{D}{M}$ musi znikać równocześnie z $\frac{D'}{M'}$ dla całki osobliwej $y = \eta$. Dla rozstrzygnięcia tedy pytania o istnieniu całek osobliwych możemy stosować, zamiast równania (19), każde z przekształconych równań $F'(x, y, C') = 0$.

Ponieważ zresztą wszystkie rozwiązania osobliwe muszą być zawarte w równaniu wyróżnikowem $\Delta = 0$ równania różniczkowego, przeto wyrażenia $\frac{D}{M}$ i Δ mają dzielniki wspólne $y - \eta$, odpowiadające tym rozwiązaniom.

Dajmy tedy, że $y = \eta$ nie jest całką szczególną, t. j. nie powstaje z równania (19) przez nadanie wartości szczególnych stałej dowolnej C. Idzie o rozstrzygnięcie, kiedy $y = \eta$ jest całką osobliwą. Niechaj dla $x = a$ wartość funkcyi η będzie b; para $x = a$, $y = b$ nie ma należeć do wyłączonych wyżej par wartości, η zaś w otoczeniu punktu $x = a$ ma być funkcyą jednowartościową i ciągłą. Według uwagi na końcu pierwszego rozdziału, dla każdego pierwiastka $C_\varkappa$ istnieje funkcya analityczna $C_\varkappa' = \varphi_\varkappa(C_\varkappa)$, która w otoczeniu punktów $x = a$, $y = b$ ma charakter funkcyi całkowitej algebraicznej zmiennych x i y. Jeżeli utworzymy tedy równanie przekształcone

$$F'(x, y, C') = 0,$$

którego pierwiastkami są:

$$C_1' = \varphi_1(C_1), \quad C_2' = \varphi_2(C_2), \ldots, \quad C_n' = \varphi_n(C_n),$$

to spółczynniki przy potęgach wielkości C' w tem równaniu będą szeregami, postępującemi według potęg całkowitych dodatnich różnic $x - a$, $y - b$. Dla przeprowadzenia badania nad tem równaniem przyjmijmy, że równanie

$$F(x, y, C) = 0$$

posiada już przy $x = a$, $y = b$ żądane własności.

Wtedy wyrażenia

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{C=C_\varkappa} \text{ i } \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{C=C_\varkappa}$$

dają się również przedstawić przez takie szeregi, a więc też i wyrażenie

$$M f(x, y, y') = \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right)_{C=C_\varkappa},$$

a ponieważ spółczynniki funkcyi f są funkcyami całkowitemi wymiernemi zmiennych x i y, przeto i M daje się rozwinąć według potęg całkowitych dodatnich różnic $x - a$, $y - b$.

Jeżeli będziemy zmieniali a sposobem ciągłym w płaszczyznie x, to η zmieniać się będzie również sposobem ciągłym, poczynając od b; możemy więc pomyśleć zmianę wielkości a tak małą, a więc wartość funkcyi η tak blizką b, aby utrzymała się zbieżność spółczynników funkcyi F, jeżeli zastąpimy w nich b przez funkcyę η, byleby tylko x pozostawało w pewnem otoczeniu punktu a. Najprzód jest jasne, że gdy dla $y = \eta$ ma być $\frac{D}{M} = 0$, musi znikać D, gdyż M dla $x = a$, $y = b$ jest skończone i ciągłe, a więc nie może stawać się dla $y=\eta$ nieskończonem, niezależnie od x. Stąd wynika, że gdy $y=\eta$ jest całką osobliwą, to przynajmniej dwa pierwiastki równania (19) muszą być dla $y=\eta$ równe, i dalsze badanie skierowane będzie ku temu, by ze znikającej zawsze w tym przypadku, jak wykazujemy, prawej strony równania (22) wyciągnąć najwyższą potęgę różnicy $y-\eta$, która jako czynnik, nie zawierający y', należy do M. Stosownie do tego, czy pozostające po usunięciu tej potęgi wyrażenie różniczkowe znika albo nie znika dla $y=\eta$, jest $y=\eta$ całką równania $x=0$, albo nią nie jest. Niechaj tedy dla $y=\eta$ będzie p pierwiastków C równych ζ, gdzie ζ jest funkcyą zmiennej x, która nie będzie równa stałej, gdyż, jak to najprzód przyjmujemy, $y=\eta$ nie jest całką szczególną. Równanie (19), po uporządkowaniu według potęg różnic $y-\eta$, $C-\zeta$, otrzymuje postać:

$$F(x,\,y,\,C)=(y-\eta)\,\mathfrak{P}_0(y-\eta,\;C-\zeta)+(C-\zeta)^p\,\mathfrak{P}_1(y-\eta,\;C-\zeta)=0,$$

gdzie $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ są szeregami, postępującemi według potęg całkowitych dodatnich różnic $y-\eta$ i $C-\zeta$ ze spółczynnikami zależnemi od x, w których zachodzi tylko n pierwszych potęg różnicy $C-\zeta$; $\mathfrak{P}_1$ jest i dla $y=\eta$, $C=\zeta$ od zera różne. Wynika stąd następująca postać funkcyi $\frac{\partial F}{\partial c}$:

$$\frac{\partial F}{\partial C}=(y-\eta)\,\mathfrak{P}_2(y-\eta,\;C-\zeta)+(C-\zeta)^{p-1}\,\mathfrak{P}_3(y-\eta,\;C-\zeta),$$

gdzie $\mathfrak{P}_3$ nie znika dla $y=\eta$, $C=\zeta$.

Niechaj będzie grupa $\alpha\leqq p$ rozgałęziających się w punkcie $y=\eta$ funkcyj C, które przyjmując dla $y=\eta$ wartość ζ, rozwijają się w sposób następujący:

$$C-\zeta=g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\ldots, \tag{24}$$

gdzie C jest funkcyą skończoną zmiennych x i y w rozważanych obszarach, $\varkappa$ i α są liczbami całkowitemi dodatniemi różnemi od zera, g_0, $g_1\ldots$, tak jak i η, są funkcyami ciągłemi zmiennej x, z których funkcya g_0 nie znika tożsamościowo.

Wykładnik najniższej potęgi różnicy w rozwinięciu funkcyi $\frac{\partial F}{\partial C}$, po podstawieniu, zamiast $C-\zeta$, jego wyrażenia z równania (24), będzie wtedy tylko mniejszy od 1, jeżeli

$$(p-1)\frac{\varkappa}{\alpha}<1$$

i w tym przypadku rozwinięcie to rozpoczyna się od wyrazu $(y-\eta)^{(p-1)\frac{\varkappa}{\alpha}}$; poza tem wykładnik ten będzie równy 1, albo od 1 większy. Oznaczmy przez

m wykładnik najniższej potęgi różnicy $y-\eta$ w rozwinięciu funkcyi $\frac{\partial F}{\partial C}$ według potęg różnicy $y-\eta$; będzie:

$$\frac{\partial F}{\partial C}=(y-\eta)^m\,\mathfrak{P}_0\left(x,\;(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

gdzie $\mathfrak{P}_0$ nie znika tożsamościowo dla $y=\eta$, x zaś w nawiasie ma wskazywać, że spółczynniki szeregu $\mathfrak{P}_0$ są zależne od x. Ponieważ według równania (24) jest:

$$\frac{dC}{dx}=\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\,y'$$

$$=\frac{d\zeta}{dx}+(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}\,\mathfrak{P}_1\left(x,\;(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)+(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}-1}\,\mathfrak{P}_2\left(x,\;y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right),$$

gdzie funkcye $\mathfrak{P}_1$ i $\mathfrak{P}_2$ nie znikają dla $y=\eta$; wynika stąd:

$$\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}=\mathfrak{P}_0\left(x,\;(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\Bigg[(y-\eta)^m\left\{\frac{d\zeta}{dx}+(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}\,\mathfrak{P}_1\left(x,\;(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}$$
$$+(y-\eta)^{m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1}\,\mathfrak{P}_2\left(x,\;(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right)\Bigg]. \tag{25}$$

Wyrażenie to znika zawsze dla $y=\eta$. Oczywiste to dla przypadku $m=1$; gdy zaś $m<1$, wtedy, jak wyżej okazano, $m=(p-1)\frac{\varkappa}{\alpha}$, więc $m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1=p\frac{\varkappa}{\alpha}-1$; ponieważ $p\geqq\alpha$, przeto jest $m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1\geqq\varkappa-1$, a więc jest albo zerem, albo dodatnie. Jest tedy zawsze

$$(y-\eta)^{m+\frac{\varkappa}{\alpha}-1}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right)=0$$

dla $y=\eta$. Stąd wynika, że $\frac{\partial F}{\partial c}\frac{dC}{dx}$ i w przypadku, gdy $\frac{\varkappa}{\alpha}<1$, gdy więc $\frac{dC}{dx}$ staje się nieskończonem, znika dla $y=\eta$. Ponieważ wyrażenie po prawej stronie równania (22) jest równe $\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{C=C_\varkappa}\frac{dC_\varkappa}{\partial C}$, przeto twierdzenie powyższe, że wyrażenie to musi zawsze znikać wraz z D dla $y=\eta$, zostało udowodnione.

Jeżeli $\frac{\varkappa}{\alpha} \geqq 1$, to wyrażenie (25) po stronie prawej, po oddzieleniu czynnika $(y-\eta)^m$, otrzymuje dla $y=\eta$ wartość $\mathfrak{P}_0\left(x, (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\frac{d\zeta}{dx}$, która, według naszych założeń, jest różna od zera.

Jeżeli zaś $\frac{\varkappa}{\alpha} < 1$, wtedy w równaniu (25) jest $(y-\eta)^{m+\frac{\varkappa}{\alpha}}$ najwyższą wspólną potęgą różnicy $y-\eta$, a po oddzieleniu tego czynnika pozostaje wyrażenie

$$\mathfrak{P}_0\left\{\left(\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right)\mathfrak{P}_2+(y-\eta)^{1-\frac{\varkappa}{\alpha}}\left(\frac{d\zeta}{dx}+(y-1)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}\mathfrak{P}_1\right)\right\},$$

które — ponieważ według powyższego $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ są dla $y=\eta$ od zera różne — nie zawiera już czynnika $y-\eta$, znika wszakże dla $y=\eta$.

Z powyższych rozważań wyprowadzamy prawidło następujące:

Niechaj żadna z wartości ζ, które przyjmuje C dla $y=\eta$, nie będzie niezależna od x, a więc $y=\eta$ niechaj nie będzie całką szczególną, wtedy tworzymy dla wszystkich pierwiastków C rozwinięcie funkcyi $C-\zeta$ postaci (24) według potęg różnicy $y-\eta$.

Jeżeli we wszystkich tych rozwinięciach wykładnik najniższej potęgi różnicy $y-\eta$ jest większy od 1, albo równy 1, to $y=\eta$ nie jest całką równania różniczkowego; jeżeli przeciwnie w grupie rozwinięć ten wykładnik jest od 1 mniejszy, — co zresztą może zachodzić tylko wtedy, gdy więcej jest pierwiastków równych ζ dla $y=\eta$, a więc gdy $D=0$ — wtedy $y=\eta$ jest całką osobliwą.

Albowiem w przypadku pierwszym wyrażenie

$$\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\frac{\partial F}{\partial C_\varkappa}\frac{dC_\varkappa}{dx}=Mf(x, y, y'),$$

po podzieleniu przez pewną potęgę różnicy $y-\eta$, daje iloraz, nie znikający dla $y=\eta$. Lecz ponieważ tylko M zawiera czynnik wolny od y', widzimy więc, że równaniu $f(x, y, y')=0$ nie staje się zadość przez $y=\eta$. W drugim przypadku, po oddzieleniu najwyższej potęgi różnicy $y-\eta$, pozostaje jeszcze wyrażenie $M'f(x, y, y')$, znikające dla $y=\eta$, a ponieważ M' nie zawiera już $y-\eta$, musi przeto być $f(x, y, y')=0$ dla $y=\eta$. Zwracamy uwagę na to, że przypadek pierwszy może zachodzić tylko pod pewnemi warunkami dla spółczynników równania $F(x, y, C)=0$. Aby bowiem w rozwinięciu funkcyi $C-\zeta$ wykładnik najniższej potęgi różnicy $y-\eta$ był większy od 1, albo równy 1, wtedy dla $y=\eta$, $C=\zeta$, — gdy ζ jest wielokrotnym pierwiastkiem, — wraz z $F=0$ i $\frac{\partial F}{\partial c}=0$ także musi być równocześnie $\frac{\partial F}{\partial y}=0$.

Zobaczmy teraz, w jaki sposób w obu powyższych przypadkach kształtuje się rozwinięcie funkcyi $y-\eta$ według potęg różnicy $x-c$, jeżeli c jest wielkością dowolną w otoczeniu wartości a, y zaś przy pomocy odpowiednich wartości szczególnych na C w równaniu $F(x, y, C)=0$ tak się wyznacza, aby dla $x=c$ było $y=\eta$. W przedstawieniu (24)

$$C-\zeta=g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\ldots$$

jest, na podstawie naszego przyjęcia, ζ niezależne od x i daje się rozwinąć według potęg dodatnich różnicy $x-a$, a gdy c jest dostatecznie blizkie a, i według takichże potęg różnicy $x-c$; jest mianowicie:

$$\zeta=\zeta(c)+\alpha_1(x-c)+\alpha_2(x-c)^2+\ldots$$

Można przyjąć, że α_1 jest różne od zera, ponieważ $\frac{d\zeta}{dx}$ może znikać tylko dla odosobnionych wartości na x. Jeżeli w przedstawieniu (24) położymy $C=\zeta(c)$, aby było $y=\eta$ dla $x=c$, otrzymamy:

$$\begin{aligned}-\alpha_1(x-c)-\alpha_2(x-c)^2+\ldots&=g_0(y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+g_1(y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}}+\ldots\\&=g_0u^\varkappa+g_1u^{\varkappa+1}+\ldots\end{aligned}\tag{26}$$

$$\left(\text{gdzie } (y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=u\right).$$

Ponieważ g_0, według przyjęcia, nie znika tożsamościowo, to i g_0 dla dowolnej wartości na c jest od zera różne; otrzymujemy tedy z równania (26) następujące rozwinięcie na $x-c$:

$$x-c=-\frac{g_0(c)}{\alpha_1}u^\varkappa+\beta_1u^{\varkappa+1}+\ldots,$$

na stąd przez odwrócenie:

$$u=(y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=\sqrt[\alpha]{-\frac{\alpha_1}{g_0(c)}}(x-c)^{\frac{1}{\varkappa}}+\gamma_2(x-c)^{\frac{2}{\varkappa}}+\ldots,$$

przez podniesienie zaś do potęgi α-tej:

$$y-\eta=\sqrt[\varkappa]{\left(-\frac{\alpha_1}{g_0(c)}\right)^\alpha}(x-c)^{\frac{\alpha}{\varkappa}}+\delta_1(x-c)^{\frac{\alpha+1}{\varkappa}}+\ldots\tag{27}$$

Jeżeli $y=\eta$ nie jest całką, to we wszystkich rozwinięciach (24), jak wykazano, wykładnik najniższej potęgi różnicy $y-\eta$, a więc $\frac{\varkappa}{\alpha}$, musi być równy 1 albo większy od 1, a zatem być musi $\frac{\alpha}{\varkappa} \leqq 1$, a stąd wykładnik najniższej potęgi we wszystkich rozwinięciach różnicy $y-\eta$ według potęg różnicy $x-c$ jest większy od 1. (Porów. rozwinięcia I i II w rozdziale pierwszym).

Jeżeli natomiast $y=\eta$ jest całką osobliwą, to przynajmniej w jednem z rozwinięć (24) jest $\frac{\varkappa}{\alpha}<1$, a więc $\frac{\alpha}{\varkappa}>1$. Istnieje przeto w tym przypadku grupa całek szczególnych y, równych η w punkcie $x=c$ i takich, że wykładnik najniższej potęgi różnicy w rozwinięciu funkcyi $y-\eta$ jest większy od 1 (Porówn. rozwinięcie III w rozdziale pierwszym).

Wreszcie rozważmy przypadek, w którym $y=\eta$ jest całką szczególną. Wtedy równanie:

$$F(x,\, y,\, C)=0$$

musi dla $y=\eta$ posiadać przynajmniej jeden pierwiastek stały C, który może być pojedyńczy lub wielokrotny; wielokrotnym będzie wtedy, gdy — co dla nas szczególnie jest ważne—jest $y=\eta$ pierwiastkiem równania wyróżnikowego $D=0$. Przy zachowaniu założenia, że w otoczeniu pary wartości $x=a$, $y=b$, czyniącej zadość równaniu $y=\eta$, spółczynniki równania (19) mają wielokrotnie już wspomniane własności, do grupy funkcyj C, przyjmujących dla $y=\eta$ wartość stałą e, stosuje się rozwinięcie:

$$\begin{aligned} C-e &= g_0 (y-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1 (y-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \ldots \\ &= g_0 u^{\varkappa} + g_1 u^{\varkappa+1} + \ldots \quad \left((y-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} = u\right), \end{aligned} \tag{28}$$

gdzie $\varkappa$ i α są liczby całkowite dodatnie różne od zera, g_0 zaś nie znika tożsamościowo. Jeżeli tedy równaniu (28) ma czynić zadość funkcya y, która dla wartości dowolnej c w otoczeniu wartości a równa się η, lub funkcya u, znikająca dla $x=c$, musi być $C=e$. Otrzymujemy przeto:

$$0 = u^{\varkappa} \{g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + \ldots\}.$$

Temu równaniu, prócz $u=0$, nie czyni zadość żadna funkcya u rozwijalna według potęg różnicy $x-c$ i znikająca dla $x=c$, gdyż funkcya g_0, gdy c jest dowolne, jest dla $x=c$ różna od zera.

Wynika stąd, że z grupy pierwiastków C, przedstawionych przez wzór (28), nie można, prócz $y=\eta$, otrzymać żadnej całki szczególnej, równej η dla $x=c$ i takiej, że $y-\eta$ daje się rozwinąć według potęg różnicy $x-c$.

Może tylko zachodzić to, że równocześnie istnieją inne pierwiastki C, mające dla $y=\eta$ wartość ζ zależną od x, a wykładnik najniższej potęgi w rozwinięciu funkcyi $C-\zeta$ według potęg różnicy $y-\eta$ (24) jest mniejszy od 1. Wtedy równocześnie $y=\eta$ jest całką osobliwą.

Wyniki te — jak to wykazuje porównanie ze streszczeniem na str. 163 (13) w rozdziale pierwszym—są w zupełnej zgodności z odpowiedniemi wynikami, pozyskanemi przez rozważanie samego równania różniczkowego.

Gdy jednak spółczynniki równania różniczkowego $f(x,\, y,\, y')=0$, aby ono posiadało rozwiązanie osobliwe, muszą spełniać pewien warunek, mianowicie, że pierwiastek η równania $\Delta=0$ musi czynić zadość równaniu $f\left(x,\, \eta,\, \frac{d\eta}{dx}\right)=0$, to — odwrotnie — spółczynniki równania całkowego $F(x,\, y,\, C)=0$ muszą spełniać pewien warunek wtedy, gdy przedstawiona przez to równanie gromada krzywych **nie ma** posiadać obwiedniej, mianowicie: pierwiastki wspólne C równań $F=0$ i $\frac{\partial F}{\partial C}=0$ — o ile nie są niezależne od x, gdy za y weźmiemy odpowiedni pierwiastek η równania wyróżnikowego $D=0$, — muszą wszystkie dla $y=\eta$ czynić zadość równaniu $\frac{\partial F}{\partial y}=0$.

Tym sposobem gromada krzywych, dana przez równanie różniczkowe rzędu 1-go, nie ma w ogólności obwiedniej; przeciwnie zaś, gromada, przedstawiona przez równanie skończone z parametrem dowolnym, ma w ogólności obwiednię.

Zastosowania.[1]

1. Równanie Clairauta.

$$y = xy' + y'^2.$$

Tu jest $\Delta=\frac{x^2}{4}+y$, a więc jedyna funkcya η, czyniąca zadość równaniu $\Delta=0$, jest

$$\eta = -\frac{x^2}{4},$$

a zatem $y=\eta$ jest, jak o tem przekonać się można przez podstawienie, rozwiązaniem równania. Że to rozwiązanie jest osobliwe, przekonywamy się z rozwinięcia funkcyi $y'-\frac{d\eta}{dx}$ według potęg różnicy $y-\eta$. Jeżeli położymy

$$y = \eta + u = -\frac{x^2}{4} + u,$$

[1]) Przykłady wzięte z cytowanej rozprawy Darboux'a.

otrzymamy:

$$u = u'^2, \qquad u' = u^{\frac{1}{2}}$$

Jest tu $\varkappa = 1$, więc $\alpha = 2$, $\varkappa < \alpha$, przeto $y - \frac{x^2}{4}$ jest całką osobliwą. Istotnie wynika stąd takie rozwinięcie:

$$u = y - \eta = y + \frac{x^2}{4} = \left(\frac{x-c}{2}\right)^2;$$

wykładnik najniższej potęgi różnicy $x - c$ jest zatem większy od 1.

Jeżeli natomiast wyjdziemy z równania całkowego

$$y = Cx + C^2,$$

otrzymamy, według (22), przy pomocy różniczkowania zupełnego tożsamościowo

$$-y + xy' + y'^2 = (-4y - x^2)\frac{dC_1}{dx}\,\frac{dC_2}{dx}$$

$$= D\frac{dC_1}{dx}\,\frac{dC_2}{dx}.$$

jest tu przeto mnożnik $M = 1$, $\frac{D}{M} = D = -4y - x^2 = 0$, lub $y = -\frac{x^2}{4}$. A zatem $y = -\frac{x^2}{4}$ jest, według powyższego, całką, czego cechą jest to, że C, po rozwinięciu według potęg różnicy $y - \eta = y + \frac{x^2}{4}$, przedstawia się tak:

$$C = -\frac{x}{2} + \left(y + \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie wykładnik najniższej potęgi $\frac{1}{2}$ jest mniejszy od 1. Jeżeli w równaniu poprzedzającem nadamy stałej C wartość szczególną, aby dla $x = c$ było $y = \eta$, t. j. $= -\frac{c^2}{4}$, kładąc mianowicie $C = -\frac{c}{2}$, otrzymamy znowu powyższe rozwinięcie charakterystyczne dla całki osobliwej:

$$y - \eta = y + \frac{x^2}{4} = \left(\frac{x-c}{2}\right)^2.$$

2. Równanie Serreta

$$y - 2xy' - y'^2 = 0.$$

Tu jest $\Delta = 4(y + x^2)$, a więc jedyną funkcyą, czyniącą zadość równa-

niu $\Delta = 0$, jest $\eta = -x^2$; za pomocą podstawienia przekonać się można, że $y = \eta$ **nie jest** rozwiązaniem.

Kładąc

$$y = \eta + v = -x^2 + v,$$

otrzymujemy:

$$v'^2 = 2xv' + v - x^2; \qquad v' = x + \sqrt{v},$$

a, gdy położymy $v^2 = u$, dostaniemy:

$$2uu' = x + u,$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u}{x+u},$$

oraz

$$x - c = \frac{u^2}{c} + \alpha u^3 + \ldots,$$

jako całkę poprzedniego równania z wartościami początkowemi $x = c$, $u = 0$. Przez odwrócenie otrzymamy:

$$u = \sqrt{y - \eta} = \sqrt{c}\,(x-c)^{\frac{1}{2}} + \beta_2 (x-c)^{\frac{2}{2}} + \ldots,$$

$$y - \eta = c(x-c) + \gamma (x-c)^{\frac{3}{2}} + \ldots;$$

a więc wykładnik najniższej potęgi jest równy 1, zgodnie z teoryą, według której musi być on $\geqq 1$. Równanie całkowe ogólne brzmi:

$$(3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^3 = 0.$$

Przy pomocy różniczkowania zupełnego otrzymujemy, według (22), tożsamościowo:

$$144\,y(y + x^2)^3 (y - 2xy' - y'^2) = 16(y + x^2)^3 \frac{dC_1}{dx}\,\frac{dC_2}{dx}$$

$$= D\frac{dC_1}{dx}\,\frac{dC_2}{dx}.$$

Tu D zawiera się jako czynnik w $M = 144\,y(y + x^2)^3$, $D = 0$ czyni zatem zadość równaniu $Mf(x, y, y') = 0$, lecz nie spełnia równania $f = 0$, nie jest więc całką. Poznać to można przez rozwinięcie wielkości C według potęg różnicy $y - \eta = y + x^2$:

$$C - x^3 = -3x(y + x^2) + 2(y + x^2)^{\frac{3}{2}},$$

gdzie wykładnik najniższej potęgi **nie jest** mniejszy od 1. Jeżeli, kładąc

$C=c^3$, nadamy wartość szczególną na C, aby dla $x=c$ było $y=\eta$, t. j. $=-c^2$, to wprowadzając, jak wyżej, $y=-x^2+u^2$, otrzymamy:

$$-x^3+3xu^2+c^2=2u^3.$$

Równanie to ma dla $u=0$ pierwiastek pojedyńczy $x=c$, rozwinięcie zaś różnicy $x-c$ według potęg zmiennej u jest:

$$x-c=\frac{u^2}{c}+\alpha u^3+\ldots$$

stąd wyprowadzamy, jak wyżej:

$$y-\eta=y+x^2=c\,(x-c)+\gamma\,(x-c)^{\frac{3}{2}}+\ldots$$

Tu $\frac{D}{M}$ równe $\frac{1}{9y}$, przyrównane do zera, sprawdza, oczywiście, równanie $f(x,y,y')=0$, więc $y=\infty$ jest całką, a ponieważ ona nie zawiera się w $D=0$, przeto być musi całką szczególną, co stwierdzamy przez to, że dla $C=\infty$ jest $y=\infty$. Ale wypływa to i z równania różniczkowego, jeżeli położymy $y=\frac{1}{z}$; otrzymujemy: $z+2xz'-z'^2=0$. Dla $z=0$ równanie to ma jako pierwiastek pojedyńczy $z'=0$, skąd wynika już, że $z=0$ lub $y=\infty$ jest całką szczególną.

Rozważane równanie daje jeszcze sposobność do uczynienia następującej uwagi. Jest tu:

$$\Delta=4\,(y+x^2),\qquad D=16\,(y+x^2)^3,$$

Δ nie zawiera przeto żadnego czynnika, nie występującego w D. Darboux[1] widzi powód tego, że $\Delta=0$ nie daje rozwiązań osobliwych, w tej okoliczności, iż Δ zawiera w ogólności jeszcze inne czynniki niż te, które występują w D. Uzasadnia on ten pogląd, ustanawiając związek pomiędzy wyróżnikami D i Δ, dający się łatwo wyprowadzić z tożsamości:

$$Mf(x,y,y')=\prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{\partial F(x,y,C_\varkappa)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,C_\varkappa)}{\partial y}\,y'\right).$$

Związek ten brzmi:

$$M^{2n-2}\Delta=\prod_{\varkappa,\lambda}\left\{\frac{\partial F(x,y,C_\varkappa)}{\partial x}\,\frac{\partial F(x,y,C_\lambda)}{\partial y}-\frac{\partial F(x,y,C_\lambda)}{\partial x}\,\frac{\partial F(x,y,C_\varkappa)}{\partial y}\right\}^2.$$

Ponieważ strona prawa zawiera oczywiście czynnik

[1] Bulletin des sciences mathématiques 4, 1873 str. 173 i dalsze.

$$\prod_{\varkappa,\lambda}(C_\varkappa-C_\lambda)^2=D,$$

będzie przeto:

$$M^{2n-2}\Delta=D.\psi^2$$

Darboux pisze to równanie — stosujemy tu oznaczenia nasze — w ten sposób:

$$\Delta=DC^2$$

i uważa C za czynnik obcy, który w ogólności występuje jeszcze w Δ. Lecz, jak to jest jasne z poprzedzającej wyraźniejszej postaci równania, czynniki funkcyi ψ, nie zawarte w D, występują wszystkie tylko w M, tak że wspomniany związek nie pozwala wogóle na wyprowadzenie pewnego wniosku o czynnikach wyrażenia Δ, w porównaniu z czynnikami wyrażenia D. Istotne znaczenie dla pytania o istnieniu rozwiązań osobliwych, ma — jak to wykazano w rozdziale poprzednim — tylko stosunek $D:M$, bez względu na to, czy Δ albo D zawiera czynniki obce, albo ich nie zawiera. Jeżeli wszystkie czynniki wyróżnika D występują w stopniu równym lub wyższym także w M, to wtedy nie ma obwiedniej lub rozwiązania osobliwego; nie znając czynnika M, można to dla każdego czynnika $y-\eta$ wyrażenia D wywnioskować z potęgi początkowej różnicy $y-\eta$ w rozwinięciu wielkości C według potęg tej różnicy, jak to wyżej podano.

W przykładzie naszym jest:

$$n=2,\qquad M=144\,y\,(y+x^2)^3,$$

$$\Delta=4\,(y+x^2),\qquad D=16\,(y+x^2)^3$$

i otrzymujemy $\psi=72\,y\,(y+x^2)^3$ jako czynnik, którego składnik obcy y w D zawarty jest nie w Δ, lecz w M.

Jeżeli idzie o gromadę krzywych, którą przedstawia równanie stopnia 2-go względem parametru C ze spółczynnikami wszędzie jednoznacznemi, zależnemi od x i y, to warunek, aby ta gromada krzywych nie zawierała obwiedniej, można wyrazić w formie bardzo prostej.

Możemy równaniu całkowemu nadać postać

$$(f(x,y)+C)^2=\varphi(x,y).$$

Aby nie istniało rozwiązanie osobliwe, jest konieczne i dostateczne, by $\varphi=0$ posiadało tylko takie pierwiastki pojedyńcze $y=\eta$, które nadają funkcyi $f(x,y)$ wartości niezależne od x, gdy wszystkie inne pierwiastki są wielokrotne.

Jeżeli bowiem uczynimy $y=\eta$, $f(x,y)$ stałej $=a$, to $y=\eta$ będzie całką szczególną, a ponieważ $C=-a$ jest jedynym pierwiastkiem powyższego równania, to nie może być zarazem obwiednią innych krzywych całkowych lub całką osobliwą. Jeżeli w innym przypadku jest $y = \eta$ pierwiastkiem wielokrotnym równania $\varphi = 0$, gdy przeto

$$\varphi(x, y) = (y - \eta)^n \psi,$$

gdzie $n \geqq 2$, $\psi(x, y)$ zaś nie jest tożsamościowo zerem, otrzymujemy rozwinięcie:

$$C + f(x, \eta) = (-f(x, y) - f(x, \eta)) + (y - \eta)^{\frac{n}{2}} \{g_0 + g_1(y - \eta) + \ldots\},$$

gdzie, ponieważ $f(x, y) - f(x, \eta)$ zawiera czynnik $y - \eta$, będzie przeto wykładnik najniższej potęgi różnicy $y - \eta$ równy 1 lub większy od 1. To właśnie stanowiło kryteryum (porów. str. 163 (13)), że $y = \eta$ nie jest całką.

Można to widzieć i bezpośrednio, albowiem równanie różniczkowe, którego równanie powyższe jest całką ogólną, jest

$$4\varphi \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2,$$

gdzie dla skrócenia położono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{df}{dx},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Jeżeli tedy $\varphi = (y - \eta)^n \psi$, to, po podstawieniu tego wyrażenia i podzieleniu przez $(y - \eta)^n$, dostaniemy

$$4\psi \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = (y - \eta)^{n-2} \left\{ n\psi \left(y' - \frac{d\eta}{dx}\right) + (y - \eta) \frac{d\psi}{dx} \right\}^2.$$

Ponieważ $n \geqq 2$, przeto równaniu temu nie staje się zadość przez $y = \eta$, gdyż strona prawa znika, lewa zaś z powodu, że $\psi(x, \eta)$ jest różne od zera, mogłaby znikać tylko wtedy, gdyby $\frac{df}{dx}$ było tożsamościowo zerem dla $y = \eta$, co wszakże jest wykluczone, gdyż $f(x, y)$, według założenia, nie ma być stałe.

(Gdyby było $n = 1$, otrzymalibyśmy:

$$4(y - \eta) \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \left\{ \psi \left(y' - \frac{d\eta}{dx}\right) + (y - \eta) \frac{d\psi}{dx} \right\}^2,$$

t. j. równanie, które, jakkolwiek nie posiada czynnika $y - \eta$, sprawdza się przez $y = \eta$). Ponieważ równanie różniczkowe nie posiada w ogólności rozwiązania osobliwego, to równanie różniczkowe algebraiczne rzędu drugiego

będzie w ogólności posiadało równanie całkowe, którego spółczynniki, jeżeli są wszędzie jednoznaczne, czynią zadość powyższemu warunkowi, albo też spółczynniki tego równania całkowego stopnia drugiego względem C, które w otoczeniu punktu $y = \eta$ i w pewnym obszarze płaszczyzny α ma postać

$$C^2 + \mathfrak{P}_1(x - \alpha, y - \eta) C + \mathfrak{P}_2(x - \alpha, y - \eta) = 0,$$

będą miały tę własność względem pierwiastka η.

3. Równanie

$$y'^2 X - Y = 0,$$

gdzie:

$$X = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m),$$

$$Y = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \ldots (y - \alpha_n),$$

$a_1, a_2 \ldots, a_n$ są różne od siebie, podobnież $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$.

Dwa pierwiastki y' są równe,

1) gdy $y = \alpha_\lambda$, przyczem $y' = 0$,

2) gdy $x = a_\lambda$, przyczem $y' = \infty$.

Tak $y = \alpha_\lambda$, jak i $x = a_\lambda$ są całki. Że $x = \alpha_\lambda$ jest całką, widzimy z równania

$$y\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = X.$$

Że $y = \alpha_\lambda$ jest całką osobliwą, poznajemy z równania różniczkowego, mianowicie z potęgi początkowej funkcyi y w rozwinięciu:

$$y' = \frac{\sqrt{(\alpha_\lambda - \alpha_1) \ldots (\alpha_\lambda - \alpha_n)}}{X} (y - \alpha_\lambda)^{\frac{1}{2}} (1 + \beta_1 (y - \alpha_\lambda) + \ldots),$$

$$(\varkappa = 1, \quad \alpha = 2, \quad \varkappa < \alpha).$$

Ale też z równania całkowego

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{Y}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = C$$

wypływa najprzód, że $y = \alpha_\lambda$ nie jest całką szczególną, gdyż

$$\int_0^{\alpha_\lambda} \frac{dy}{\sqrt{Y}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

jest skończone i zależne od x. Że jest całką, poznajemy także z rozwinięcia:

$$C+\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\alpha_\lambda-\alpha_1)\ldots(\alpha_\lambda-\alpha_n)}}(y-\alpha_\lambda)^{\frac{1}{2}}+\beta(y-\alpha_\lambda)^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

gdzie wykładnik potęgi początkowej jest mniejszy od 1. Jeżeli położymy:

$$C=-\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

otrzymamy rozwinięcie

$$y-\alpha_\lambda=b_2(x-c)^2+b_3(x-c)^3+\ldots,$$

z którego widać, że $y=\alpha_\lambda$ jest obwiednią gromady krzywych całkowych y, którą przedstawia poprzednie równanie z parametrem c, który jest też zawarty w spółczynnikach b_2, $b_3\ldots$ Gdyby α_λ było pierwiastkiem p-krotnym równania $Y=0$ $(p\geqq 2)$, byłaby wtedy całka

$$\int_0^{\alpha_\lambda}\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\infty,$$

a więc $C=\infty$, niezależnie od x; w tym więc przypadku $y=\alpha_\lambda$ byłoby całką szczególną, co można też poznać z rozwinięcia

$$y'=g_0 y^{\frac{p}{2}}+\ldots\ (p\geqq 2).$$

Uwagi powyższe dotyczą też w sposób podobny i całek $x=a_\lambda$.

4. Równanie Boole'a

$$y'^4-4y(xy'-2y)^2=0.$$

Rozwiązując to równanie względem y', otrzymujemy cztery pierwiastki:

$$y'=\sqrt{y}\,(x\pm\sqrt{x^2-4\sqrt{y}}),$$

$$y'=-\sqrt{y}\,(x\pm\sqrt{x^2+4\sqrt{y}}).$$

Pierwiastki stają się równemi, gdy

$$1)\quad y=\eta=0,\qquad 2)\quad y=\eta=\frac{x^4}{16}.$$

$y=0$ czyni zadość równaniu różniczkowemu, jest więc całką. Dla dalszego badania rozwijamy $\frac{dy}{dx}-\frac{d\eta}{dx}=y'$ według potęg różnicy $y-\eta=y$. Oba rozwiązania

$$y'=\sqrt{y}\,(x-\sqrt{x^2-4\sqrt{y}}),$$

$$y'=\sqrt{y}\,(x-\sqrt{x^2+4\sqrt{y}})$$

dają dla dowolnego x, różnego od zera, rozwinięcia postaci

$$y'=\pm\frac{2y}{x}+\alpha y^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

przez co $y=0$ charakteryzuje się jako całka ogólna. Dwa pozostałe rozwiązania

$$y'=\sqrt{y}\,(x+\sqrt{x^2-4\sqrt{y}}),$$

$$y'=\sqrt{y}\,(x+\sqrt{x^2+4\sqrt{y}})$$

dają:

$$y'=\pm 2xy^{\frac{1}{2}}+\beta y^{\frac{3}{2}}+\ldots,$$

co wskazuje, że równocześnie $y=0$ jest obwiednią. Stwierdza to równanie całkowe

$$y=C^2(x-C)^2,$$

gdyż 1) $y=0$ wynika z $C=0$, jest więc całką szczególną; 2) $y=0$ dotyka wszystkich parabol, które przedstawia równanie całkowe w wierzchołku $x=C$, $y=0$. Równanie

$$y=\eta=\frac{x^4}{16}$$

czyni również zadość równaniu różniczkowemu, a mianowicie obu rozwiązaniom:

$$y'=\sqrt{y}\,(x+\sqrt{x^2-4\sqrt{y}}),$$

$$y'=\sqrt{y}\,(x-\sqrt{x^2-4\sqrt{y}}).$$

Jeżeli położymy

$$y=\frac{x^4}{16}+u,$$

będzie:

$$\frac{x^3}{4} + u' = \sqrt{\frac{x^4}{16} + u\left(x \pm \sqrt{x^2 - 4\sqrt{x^4 + 16u}}\right)},$$

a więc dla x różnego od zera:

$$\frac{x^3}{4} + u'$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{2u}{x^2} + \alpha_2 u^2 + \dots\right)\left(x \pm \frac{\sqrt{-8}}{x} u^{\frac{1}{2}} \pm \beta_2 u^{\frac{3}{2}} + \dots\right),$$

$$u' = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2x}\, u^{\frac{1}{2}} + \frac{2u}{x} + \gamma u^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

a zatem:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{dx} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2x}\,(y-\eta)^{\frac{1}{2}} + g\,(y-\eta)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

$$(\varkappa = 1, \quad \alpha = 2, \quad \varkappa < \alpha).$$

Stąd wynika, że $y = \eta = \frac{x^2}{4}$ jest całką osobliwą. Toż samo wynika z równania całkowego. Jeżeli w tem równaniu położymy $C = \frac{c}{2}$, aby dla $x = c$ było $y = \eta$, otrzymamy formę

$$y - \frac{x^4}{16} = \frac{c^2}{4}\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{x^4}{16}$$

$$= -\frac{1}{8}c^2(x-c)^2 - \frac{1}{4}c\,(x-c)^3 - \frac{1}{16}(x-c)^4,$$

która wskazuje, że krzywa $y = \frac{x^4}{16}$ jest obwiednią gromady parabol i z każdą z nich ma styczność rzędu pierwszego.

5. Równanie

$$2xy\,(1 + y'^2) - (xy' + y)^2 = 0.$$

Rozwiązanie brzmi:

$$y' = \frac{xy \pm \sqrt{2x \,.\, y\,(y-x)^2}}{2xy - x^2}$$

$$= \frac{y}{2y - x} \pm \frac{(y-x)\sqrt{2}\sqrt{y}}{\sqrt{x}\,(2y - x)}.$$

Dwa pierwiastki y' stają się równemi, gdy

$$1^0)\quad y = 0; \qquad 2^0)\quad y = x.$$

Oba równania czynią zadość równaniu różniczkowemu; $y = 0$ jest całką osobliwą, gdyż dla x, różnego od zera, rozwinięcie funkcyi y' zaczyna się od $y^{\frac{1}{2}}$. Jeżeli dalej położymy:

$$y = x + u,$$

otrzymamy:

$$1 + u' = \frac{x+u}{x+2u} \pm \frac{u\sqrt{2}\,.\sqrt{x+u}}{\sqrt{x+2u}},$$

$$u' = -\frac{u}{x+2u} \pm \frac{u\sqrt{2}\,.\sqrt{x+u}}{\sqrt{x+2u}},$$

$$u' = \left(-\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)u + \alpha_2 u^2 + \dots,$$

lub

$$\frac{d(y-x)}{dx} = \left(-\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)(y-x) + \dots$$

$$(\alpha = 1, \quad \varkappa = 1).$$

Widać stąd, że $y = x$ jest całką szczególną. Punkt $x = 0$, $y = 0$ należy w naszych rozważaniach do punktów wyłączonych, ponieważ w tym punkcie y' jest nieoznaczone. W rzeczy samej: $y = 0$ przestaje być w tym punkcie obwiednią i nie dotyka też dlatego całki $y = x$ w punkcie spotkania $x = 0$, $y = 0$.