icm©

$$r_s \geqq r_{s-1} + s; \quad \sum_{k=r_s}^{\infty} |a_{n_i k}| \leqq \frac{1}{s^3\, 2^{s-1}}, \quad i = 1, 2 \ldots s-1$$

n_s est le premier entier remplissant les conditions:

$$n_s > n_{s-1}; \quad \sum_{k=1}^{r_s+s-1} |a_{n_s k}| \leqq \frac{1}{s^3}; \quad \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_s k} - 1 \right| < \frac{1}{s^3}.$$

Il existe toujours de nombres assujetis aux conditions indiquées en vertu de conditions de M. Toeplitz.

La série de puissances:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{s=1}^{\infty} x^{r_s} P_s(x)$$

est la série cherchée. La démonstration est basée sur les remarques suivantes:

a) Posons $\sum_{m=1}^{s} x^{r_m} P_m(x) = T_s(x)$

pour tout point $x = e^{i\varphi}$, il existe une infinité d'indices s pour lesquels:

$$|T_s(x) - T_{s-1}(x)| = |P_s(x)| \geqq \frac{\sqrt{s}}{2},$$

b) On a pour $|x| = 1$, en posant:

$$\sigma_k(x) = \sum_{m=1}^{k} a_m x^m$$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, \sigma_j(x)$$

a relation:

$$\lim_{s=\infty} |A_{n_s}(x) - T_s(x)| = 0.$$

Je remarque ensuite, qu'en posant:

$$\sum_{s=1}^{\infty} e^{r_s \varphi i} P(e^{\varphi i}) = U(\varphi) + i\, V(\varphi),$$

$$S(c, \varphi) = U(\varphi) + c\, V(\varphi)$$

et en supposant réels les a_{ik} et c, il y a, parmi les séries trigonométriques $S(c, \varphi)$, de séries non sommables par le procédé $(\mathfrak{A})$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ sauf peut être dans un ensemble de points de mesure nulle.

ROMUALD WITWIŃSKI.

Badanie z teoryi odkształceń nieskończenie małych powierzchni prostoliniowych.

Étude sur la théorie de la déformation infiniment petite des surfaces réglées.

W „Sprawozdaniach Akademii Paryskiej" z roku 1909 matematyk francuski J. Haag ogłosił dwie noty, zawierające nader interesujące rezultaty z teoryi odkształcenia nieskończenie małego powierzchni prostoliniowych. Wyniki badań Haaga są podane tylko w streszczeniu i nie wyświetlają wcale samej metody poszukiwań autora.

W rozprawie niniejszej zamierzam rozwinąć i uzupełnić wyniki badań Haaga, szerzej przedstawić niektóre rezultaty poszczególne, nawiązując swe poszukiwania do pięknych badań Darboux'a.

I.

1. Równania każdej powierzchni nierozwijalnej (S), odniesionej do linij asymptotycznych, możemy napisać w postaci [1)]

$$\begin{aligned} x &= \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ y &= \int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta, \qquad \text{(A)} \\ z &= \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta, \end{aligned}$$

---

1) G. Darboux, Théorie des surfaces, t. VI, p. 24.

gdzie θ_1, θ_2, θ_3 są trzy rozwiązania równania postaci

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = k\theta, \tag{B}$$

proporcyonalne do dostaw kierunkowych normalnej w punkcie $M(\alpha, \beta)$ i związane prócz tego zależnością

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \sqrt{-RR'},$$

gdzie R i R' oznaczają promienie główne krzywizny powierzchni w punkcie M. W ten sposób, dla powierzchni danej i punktu danego te trzy funkcye mają wartości, wyznaczone w zupełności [1].

Jeżeli ω jest rozwiązaniem jakimkolwiek równania (B), wówczas powierzchnia najogólniejsza (S_1), która odpowiada powierzchni (S) o elementach ortogonalnych jest dana zapomocą wzorów:

$$\begin{aligned} x_1 &= \int \left(\theta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ y_1 &= \int \left(\theta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ z_1 &= \int \left(\theta_3 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta. \end{aligned} \tag{C}$$

Zauważmy, że dwa różne rozwiązania ω i ω' równania (B) nie mogą nigdy dać tej samej powierzchni (S_1), albowiem, gdyby to istotnie było możliwe, wówczas mielibyśmy równanie

$$\theta_1 \frac{\partial(\omega - \omega')}{\partial \alpha} - (\omega - \omega') \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} = 0,$$

i analogiczne równania — dla θ_2 i θ_3. Równania te są zgodne tylko dla $\omega = \omega'$, ponieważ wyznaczniki takie, jak $\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}$, nie mogą wszystkie trzy być równe zeru, bo inaczej powierzchnia (S) sprowadzałaby się do krzywej.

---

[1]) Należy jednak zauważyć, że powierzchnia nie zmienia się, gdy zmienimy znaki przy funkcyach θ_i, i że ta powierzchnia przekształca się na symetryczną względem punktu początkowego, jeżeli pomnożymy wszystkie rozwiązania θ_i przez $\sqrt{-1}$. To dowodzi w szczególności faktu, że nie będziemy mieli wszystkich powierzchni rzeczywistych z liniami asymptotycznemi rzeczywistemi, ograniczając się tylko do rozwiązań rzeczywistych równania (B); należy do nich dołączyć rozwiązania czyste urojone.

2. To ustaliwszy, szukajmy, jakie powinny być funkcye θ_1, θ_2, θ_3, k, aby powierzchnia S była powierzchnią prostoliniową, której tworzące prostoliniowe mają parametr, równy α.

Uważajmy punkt m o spółrzędnych θ_1, θ_2, θ_3. Prosta Om jest równoległa do normalnej w punkcie M do powierzchni (S); jest więc ona zawarta w płaszczyźnie (π), poprowadzonej przez punkt O prostopadle do tworzącej D, przechodzącej przez punkt M. Płaszczyzna ta, gdy zmienia się parametr α, obwija stożek dodatkowy stożka kierunkowego powierzchni. Założymy, że ten ostatni nie sprowadza się do płaszczyzny, a nieco później tylko zbadamy przypadek powierzchni z płaszczyzną kierunkową. Przy tych warunkach niech będą a, b, c spółrzędne (funkcye parametru α) punktu jakiegokolwiek n charakterystyki płaszczyzny (π), czyli prostopadłej OA do płaszczyzny asymptotycznej powierzchni (S), która to płaszczyzna, jak wiadomo, jest równoległa do płaszczyzny stycznej stożka kierunkowego. Gdy zmienia się parametr α, punkt n opisuje krzywą, styczną do płaszczyzny (π), tak że pochodne a', b', c' funkcyj a, b, c względem α są spółrzędnemi punktu płaszczyzny (π), nie położonego na prostej On [1]. Wnosimy stąd, że funkcye θ_1, θ_2, θ_3, które są spółrzędnemi punktu płaszczyzny (π), mogą być przedstawione w postaci:

$$\theta_1 = \lambda a + \mu a', \quad \theta_2 = \lambda b + \mu b', \quad \theta_3 = \lambda c + \mu c', \tag{1}$$

gdzie λ i μ oznaczają dwie odpowiednio obrane funkcye zmiennych α i β. Wyrażając, że funkcya θ_1 spełnia równanie (B), otrzymamy:

$$a\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} - k\lambda\right) + a'\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha \partial \beta} - k\mu\right) + a'' \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = 0. \tag{2}$$

Mamy również dwa równania analogiczne, które otrzymamy, zastępując a przez b i c. Zauważmy teraz, że wyznacznik $|a \; a' \; a''|$ nie może być równy zeru, bo inaczej krzywa-miejsce punktu n byłaby położona w płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt O, i prosta D byłaby stale prostopadła do tej płaszczyzny, co jest niemożliwe, albowiem wówczas powierzchnia (S) byłaby powierzchnią walcową. Równania (2) pociągają więc za sobą równania następujące:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} - k\lambda = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha \partial \beta} - k\mu = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = 0. \tag{3}$$

---

[1]) To ostatnie nie byłoby prawdziwe, gdyby powierzchnia posiadała płaszczyznę kierunkową, albowiem, w tym przypadku, prosta OA byłaby stałą, jako prostopadła do płaszczyzny kierunkowej.

Ostatnie z tych równań wskazuje, że parametr μ zależy tylko od parametru α. Przypomnijmy sobie teraz, że punkt n był obrany zupełnie dowolnie na prostej OA; możemy więc, nie zmieniając powierzchni (S), zastąpić funkcye a, b, c przez ρa, ρb, ρc, gdzie ρ jest funkcya dowolna zmiennej α. Przy tych warunkach, funkcya θ_1, naprzykład, staje się równą $(\lambda\rho+\mu\rho')\,a+\mu\rho\, a'$. Ponieważ μ nie może być zerem (inaczej prosta OM opisywałaby stożek, i powierzchnia byłaby rozwijalną), przeto możemy przyjąć $\mu\rho=1$. To prowadzi oczywiście do założenia $\mu=1$ we wzorach (1). Na mocy tej hypotezy, równania (3) sprowadzają się do następujących:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta}-k\lambda=0,\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}-k=0. \tag{4}$$

Eliminując k, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\,\lambda=0. \tag{5}$$

Całkując względem β znajdujemy:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}-\frac{1}{2}\,\lambda^2=A_1'-\frac{1}{2}\,A_1^2, \tag{6}$$

gdzie A_1 jest funkcya dowolna parametru α. Otrzymujemy równanie Riccati'ego, którego rozwiązanie szczególne jest A_1. Stosując zwykłą metodę całkowania i chcąc uniknąć kwadratur, kolejno kładziemy:

$$A_1=-\frac{A_2'}{A_2},\qquad A_2=-\frac{1}{2A'}.$$

Całkę ogólną równania (6) i — co za tem idzie, — równania (5) możemy więc napisać w postaci

$$\lambda=\frac{A''}{A'}-\frac{2A'}{A+B},$$

gdzie A i B są dwie odpowiednie funkcye dowolne parametrów α i β. Drugie z równań (4) daje

$$k=\frac{2A'B'}{(A+B)^2}.$$

Możemy zresztą uprościć te wyrażenia zapomocą wyboru należytego parametrów α i β, które, jak dotąd, były obrane w sposób zupełnie dowolny. Wziąwszy pod uwagę, że żadna z funkcyj A i B nie może sprowadzać się do wielkości stałej (jak to przy tem założeniu jest widoczne, jeżeli położymy wartość λ w wyrażeniach (1) na funkcye θ_1, θ_2, θ_3), będziemy mogli obrać

funkcyę A dla parametru α i funkcyę B dla parametru β. Przy tych warunkach mamy:

$$\lambda=-\frac{2}{\alpha+\beta},\qquad k=\frac{2}{(\alpha+\beta)^2};$$

zatem:

$$\theta_1=-\frac{2a}{\alpha+\beta}+a',\qquad \theta_2=\frac{-2b}{\alpha+\beta}+b',\qquad \theta_3=\frac{-2c}{\alpha+\beta}+c'. \tag{7}$$

Równanie (B) przybiera postać

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{2\theta}{(\alpha+\beta)^2}. \tag{8}$$

Jest to równanie o równych niezmiennikach, którego całka ogólna jest szczebla (rang) drugiego (G. Darboux, Théorie des surfaces, t. II, str. 143). Ta całka ogólna równa się, jak wiadomo,

$$\omega=\frac{2(A+B)}{\alpha+\beta}-(A'+B'), \tag{9}$$

gdzie A jest funkcya dowolna parametru α, i B — funkcya dowolna parametru β.

Jeżeli teraz otrzymane wartości na θ_1, θ_2, θ_3, ω podstawimy w równania (A) i (C), wówczas z łatwością otrzymamy:

$$\begin{aligned}
x&=\frac{2(cb'-bc')}{\alpha+\beta}+\int(b'c''-c'b'')\,d\alpha,\\
y&=\frac{2(ac'-ca')}{\alpha+\beta}+\int(c'a''-a'c'')\,d\alpha,\\
z&=\frac{2(ba'-ab')}{\alpha+\beta}+\int(a'b''-b'a'')\,d\alpha,
\end{aligned} \tag{D}$$

$$\begin{aligned}
x_1&=a'B'+\frac{2(aA'-a'A-aB'-a'B)}{\alpha+\beta}+\int(A'a''-A''a')\,d\alpha,\\
y_1&=b'B'+\frac{2(bA'-b'A-bB'-b'B)}{\alpha+\beta}+\int(A'b''-A''b')\,d\alpha,\\
z_1&=c'B'+\frac{2(cA'-c'A-cB'-c'B)}{\alpha+\beta}+\int(A'c''-A''c')\,d\alpha.
\end{aligned} \tag{E}$$

W tych wzorach, trzy funkcye a, b, c mogą być obrane dowolnie, z zastrzeżeniem jednego tylko warunku

$$\delta=\|\,a\;\;a'\;\;a''\,\|\neq 0, \tag{10}$$

ponieważ, jakiekolwiek są funkcye θ_1, θ_2, θ_3, one spełniają równanie (8), i, ponadto, linie (α) powierzchni, przedstawionej przez równania (D) są oczywiście linie proste.

Ostatecznie — w równaniach (D) mamy równania powierzchni prostoliniowej (S) najogólniejszej, nie mającej płaszczyzny kierunkowej i odniesionej do jej linij asymptotycznych; równania (E) określają powierzchnię najogólniejszą (S_1), która odpowiada powierzchni (S) o elementach ortogonalnych.

Goursat otrzymał podobne rezultaty jeszcze w 1896 r. w poszukiwaniach swych, dotyczących zastosowań pewnych własności ogólnych równań liniowych i metody Laplace'a[1]. Matematyk ten wskazał również sposób, dający możność uniknięcia kwadratur, występujących w dwóch grupach wzorów, sposób, który zresztą dawniej jeszcze stosował Koenigs wyłącznie do powierzchni prostoliniowych, przytem na drodze zupełnie odmiennej[2].

3. Zanim przystąpię do badania własności geometrycznych, które można wyprowadzić z wzorów poprzednich, poprzedzę niniejsze rozważania kilkoma uwagami, które będą pożyteczne w dalszym ciągu.

Postawmy sobie najpierw zagadnienie następujące: Dana jest powierzchnia prostoliniowa (S); znaleść metodę, pozwalającą przedstawić równania tej powierzchni w postaci (D). Innemi słowy, czy możliwe jest znalezienie trzech nowych funkcyj a_0, b_0, c_0 zmiennej α, dających początek tej samej powierzchni, co i trzy funkcye a, b, c? Jeżeli tak, wówczas każdemu punktowi M powierzchni (S) odpowiadają dwa układy spółrzędnych (α, β) i (α_0, β_0), i ponieważ dla każdego z nich linie spółrzędne są liniami asymptotycznemi, zatem z koniecznością funkcya α_0 jest funkcyą zmiennej α, i funkcya β_0 jest funkcyą zmiennej β. Prócz tego, funkcye θ_1', θ_2', θ_3' zmiennych α_0, β_0, odpowiadające drugiemu układowi, posiadają w punkcie M te same wartości, co i funkcye θ_1, θ_2, θ_3 zmiennych α, β, albo funkcye $-\theta_1$, $-\theta_2$, $-\theta_3$, jak to wynika ze znaczenia geometrycznego tych ilości (n^0 1)[3].

Mamy więc, naprzykład, tożsamość następującą

$$\theta_1'(\alpha_0, \beta_0) \equiv \theta_1(\alpha, \beta). \tag{11}$$

Po zatem,

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k(\alpha, \beta)\,.\,\theta_1, \qquad \frac{\partial^2 \theta_1'}{\partial\alpha_0\,\partial\beta_0} = k(\alpha_0, \beta_0)\,.\,\theta_1', \tag{12}$$

[1]) Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace (American Journal, t. XVIII, n^0 4); Sur les lignes asymptotiques (Bulletin de la Société mathématique de France, 1896 r.).

[2]) Comptes rendus de l'Académie, 2 stycznia 1888.

[3]) Ten warunek konieczny jest również dostateczny, ponieważ wzory (A) zachowują tę samą formę po zamianie zmiennych, która nie zmienia linij spółrzędnych.

i z tożsamości (11) otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 \theta_1'}{\partial\alpha_0\,\partial\beta_0} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,\frac{d\alpha}{d\alpha_0}\,\frac{d\beta}{d\beta_0};$$

podstawiając we wzór (12), mamy:

$$k(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta \equiv k(\alpha_0, \beta_0)\,d\alpha_0\,d\beta_0.$$

Zamiana zmiennych ($\alpha \mid \alpha_0$, $\beta \mid \beta_0$) powinna przekształcić sam na siebie element liniowy

$$ds^2 = k(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta. \tag{13}$$

Otóż w przypadku rozważanym element ten jest

$$ds^2 = \frac{2\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha+\beta)^2}.$$

Otrzymujemy więc element liniowy kuli, a wiadomo, że przekształcenie najogólniejsze, które go pozostawia bez zmiany, jest dane przez wzory

$$\alpha_0 = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}, \qquad \beta_0 = \frac{m\beta - n}{-p\beta + q}, \tag{14}$$

gdzie m, n, p są cztery wielkości stałe dowolne[1].

Jeżeli teraz zastąpimy w równaniach (11) funkcje θ_1 i θ_1' przez ich wartości, otrzymane z wzorów (7), będziemy mieli tożsamość

$$-\frac{2a_0}{\alpha_0+\beta_0} + \frac{da_0}{d\alpha_0} \equiv \frac{-2a}{\alpha+\beta} + \frac{da}{d\alpha};$$

skąd, biorąc pod uwagę wzory (14), znajdujemy jeden jedyny ułamek

$$a_0 = a\,\frac{mq - np}{(p\alpha + q)^2}. \tag{15}$$

Gdybyśmy położyli $\theta_1' = -\theta_1$, przyszlibyśmy do wzoru (13) i, co za tem idzie, do (14); tylko wzór (15) byłby zastąpiony przez

$$a_0 = -a\,\frac{mq - np}{(p\alpha + q)^2}. \tag{16}$$

Ostatecznie, — postawione zagadnienie jest całkowicie rozwiązane i ma odpowiedź następującą: Powierzchnia (S) dana jest w formie (D):

[1]) Darboux, loc. cit., t. 1, str. 30, 31.

sposób najogólniejszy otrzymania tej powierzchni w tej samej formie polega na zamianie zmiennych wzorów (14) i na zastąpieniu funkcyj a, b, c zmiennej α przez funkcye a_0, b_0, c_0 zmiennej α_0, wyprowadzone z poprzednich zapomocą wzorów (15) lub (16).

4. Można również postawić sobie zagadnienie analogiczne dla powierzchni (S_1):

Dane są funkcye a, b, c; czy można znaleść dwie pary funkcyj (A, B) i (A_1, B_1), które, będąc podstawione we wzory (E), dają te same wartości na x_1, y_1, z_1?

Wiemy już (n⁰ 1), że wartości, odpowiadające rozwiązaniu ω, muszą być koniecznie identyczne. Stąd, według wzoru (9), wynika, że różnice $A_2 = A_1 - A$, $B_2 = B_1 - B$ powinny czynić zadość tożsamości

$$A_2' + B_2' - \frac{2(A_2 + B_2)}{\alpha + \beta} = 0.$$

Otóż, jeżeli nadamy parametrowi β jakąkolwiek wartość liczebną, będziemy mieli równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego względem A_2; całkując, przekonywamy się, że A_2 jest trójmianem stopnia drugiego względem α. Tak samo, B_2 jest trójmianem stopnia drugiego względem β. Stosując metodę spółczynników nieoznaczonych, znajdujemy następujący wynik:

Dla tego, żeby funkcye A_1, B_1 dawały te same wartości na x_1, y_1, z_1, co i funkcye A, B, potrzeba i wystarcza możliwość znalezienia trzech stałych m, n, p, związanych zależnością:

$$A_1 = A + m\alpha^2 + n\alpha + p, \qquad B_1 = B - m\beta^2 + n\beta - p. \tag{17}$$

5. Kończę uwagi wstępne, wprowadzając równanie różniczkowe

$$\theta''' + \lambda\theta'' + \mu\theta' + \nu\theta = 0, \tag{18}$$

w którem spółczynniki λ, μ, ν są w zupełności wyznaczone przez warunek, że równanie spełnia się dla trzech funkcyj liniowo niezależnych a, b, c.

Równanie to charakteryzuje powierzchnię (S) w przekształceniach homograficznych, zachowujących płaszczyznę w nieskończoności.

W rzeczy samej, niech będą a_0, b_0, c trzy jakiekolwiek z rozwiązań tego równania, liniowo niezależne; będziemy mieli:

$$\begin{aligned} a_0 &= ma + m_1 b + m_2 c, \\ b_0 &= na + n_1 b + n_2 c, \\ c_0 &= pa + p_1 b + p_2 c, \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie m, m_1, ... p_2 oznaczają dziewięć wielkości stałych, których wyznacznik nie równa się zeru.

Obliczmy wartości odpowiadające x_0, y_0, z_0, które dają wzory (D). W tym celu, zauważmy, że ilości $c_0 b_0' - b_0 c_0'$ i $c_0'' b_0' - b_0'' c_0'$ mogą być uważane jako iloczyny odpowiednie macierzy $\begin{Vmatrix} n & n_1 & n_2 \\ p & p_1 & p_2 \end{Vmatrix}$ przez macierze $\begin{Vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{Vmatrix}$ i $\begin{Vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{Vmatrix}$. Wnosimy stąd, że jeżeli M, M_1, M_2, ..., P_2 są to minory Δ, odpowiadające wielkościom m, m_1, m_2, ..., p_2, wówczas, pomijając stałe, które wynikają z kwadratur, mamy:

$$\begin{aligned} x_0 &= Mx + M_1 y + M_2 z, \\ y_0 &= Nx + N_1 y + N_2 z, \\ z_0 &= Px + P_1 y + P_2 z; \end{aligned} \tag{20}$$

wzory te istotnie określają najogólniejsze przekształcenie homograficzne, zachowujące płaszczyznę w nieskończoności.

Można zastosować to twierdzenie w celu uproszczenia badania własności rzutowych powierzchni (S). Naprzykład, znajdźmy warunek, aby linia (β) była prosta. Na mocy powyższego, warunek ten dotyczy tylko funkcyj λ, μ, ν. By możliwie szybko otrzymać ten warunek, możemy założyć, że sprowadziliśmy w zagadnieniu prostą do położenia, w którem jest ona skierowana według Oz. Jeżeli napiszemy teraz, że normalna wzdłuż linii (β) pozostaje prostopadła do Oz, co się wyraża zależnością $\theta_3 = 0$, otrzymamy:[1]

$$c' - \frac{2c}{\alpha + \beta} = 0,$$

skąd

$$c = m(\alpha + \beta)^2, \qquad (m = \text{const.}),$$

Podstawiając w równanie (18), otrzymamy warunek szukany

$$2\lambda + 2\mu(\alpha + \beta) + \nu(\alpha + \beta)^2 = 0. \tag{21}$$

Dlatego, żeby powierzchnia posiadała dwie proste (β), trzeba i wystarcza, aby równanie (21) posiadało dwa pierwiastki stałe względem β, co daje dwa warunki

[1]) Warunek ten, będąc oczywiście konieczny, jest również dostateczny, ponieważ, jeżeli płaszczyzna, styczna w każdym punkcie linii (β), jest równoległa do Oz, wówczas ta linia jest koniecznie prostą równoległą do Oz, gdyż wszystkie jej płaszczyzny ściśle styczne są równoległe do tej prostej.

icm©

$$\frac{\mu}{\nu} + \alpha = \text{const.}, \qquad \frac{2\lambda}{\nu} + \frac{2\mu\alpha}{\nu} + \alpha^2 = \text{const.}$$

D l a t e g o, ż e b y p o w i e r z c h n i a (S) b y ł a r z ę d u d r u g i e g o, trzeba i wystarcza, aby równanie (21) sprawdzało się niezależnie od wartości β; skąd warunki:

$$\lambda = \mu = \nu = 0.$$

W przypadku, gdy istnieje tylko jedna prosta (β), można na mocy przekształcenia (14), założyć, że ta prosta odpowiada $\beta = \infty$; warunek (21) sprowadza się wówczas do warunku $\nu = 0$. Można wywnioskować, że t a p r o s t a w c h o d z i d o r a c h u n k u d w a r a z y, innemi słowy, — że wartość odpowiednia β jest pierwiastkiem dwukrotnym równania (21); zakładając stale, że ten pierwiastek jest nieskończony, wnosimy, że to, co wyżej powiedziano, tłómaczy się zapomocą warunków $\mu = \nu = 0$. Przypadek ten różni się od poprzedniego tem, że z m i e n n o ś ć p ł a s z c z y z n y s t y c z n e j w z d ł u ż p r o s t e j r o z p a t r y w a n e j p o d l e g a p r a w u C h a s l e s'a. Można to udowodnić w sposób zupełnie intuicyjny, zakładając, że powierzchnia posiada dwie proste (β), nieskończenie blizkie.

Dowód analityczny ścisły może być uskuteczniony w sposób następujący. Biorąc, jak wyżej, prostą za oś z, z łatwością znajdujemy, że płaszczyzna, styczna w punkcie $M(\alpha, \infty)$, ma za równanie

$$a' X + \theta' \Psi = 0;$$

z drugiej strony rzędna z punktu M jest

$$z = \int (a' b'' - b' a'')\, d\alpha.$$

Czytelnik sam z łatwością udowodni, że dlatego, aby z było funkcyą homograficzną $\frac{b'}{a'}$, jest koniecznem i dostatecznem istnienie tożsamości następującej:

$$m a' + n b' = p \qquad (m,\ n,\ p = \text{const.}),$$

Można zresztą, zapomocą podstawienia, które ma miejsce we wzorach (19), założyć $n = 0$, innemi słowy, przyrównać a' do wielkości stałej, nie równej zeru, jak to wynika z warunku (10). Wprowadzając tę hypotezę w równanie (18) (w którem oczywiście zakładamy $\nu = 0$), bezpośrednio znajdujemy warunek szukany: $\mu = 0$.

II.

Przejdźmy teraz do wyprowadzenia różnych wniosków, które wypływają z wzorów (D) i (E), uwag poprzednich i własności ogólnych odkształcenia nieskończenie małego powierzchni.

6. Badanie powierzchni (S). Badania nasze zaczniemy, wykazując, w jaki sposób równania (D) pozwalają zbadać zasadnicze własności powierzchni prosto-liniowej.

Przypomnijmy sobie wprzódy, że dostawy kierunkowe prostopadłej do płaszczyzny asymptotycznej są proporcyonalne do a, b, c; oznaczmy te dostawy przez $\frac{a}{\rho}$, $\frac{b}{\rho}$, $\frac{c}{\rho}$, kładąc

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{22}$$

Dostawy kierunkowe tworzącej są:

$$\frac{c b' - b c'}{\rho_1}, \qquad \frac{a c' - c a'}{\rho_1}, \qquad \frac{b a' - a b'}{\rho_1}; \tag{23}$$

dalej

$$\rho_1{}^2 = S\,(c b' - b c')^2 = \rho^2\,(\sigma^2 - \rho'^2), \tag{24}$$

gdzie

$$\sigma^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2. \tag{25}$$

Wreszcie dostawy kierunkowe normalnej w punkcie M są:

$$\frac{\theta_1}{\rho_2}, \qquad \frac{\theta_2}{\rho_2}, \qquad \frac{\theta_3}{\rho_2},$$

gdzie

$$\rho_2{}^2 = \theta_1{}^2 + \theta_2{}^2 + \theta_3{}^2 = \sigma^2 - \rho'^2 + \left(\frac{2\rho}{\alpha + \beta} - \rho'\right)^2. \tag{26}$$

Wiemy zresztą, że $\rho_2{}^4 = -RR'$ (n⁰ 1). Wiemy również, na mocy wzorów E n n e p e r a, że $\rho_2{}^2$ równa się wraz ze znakiem promieniowi skrętu τ linii (β), przechodzącej przez punkt M. To łatwo stwierdzić bezpośrednią metodą, która nam da natychmiast znak promienia τ.

Na mocy tego, co było powiedziane w n⁰ 3, możemy ograniczyć się do rozważania linii $\beta = \infty$. Zakładając o krzywej, że jest ustawiona w sposób dowolny, i oznaczając przez s łuk tej krzywej, będziemy mieli, że dostawy stycznej i binormalnej odpowiednio są:

$$(b' c'' - c' b'')\frac{d\alpha}{ds}, \qquad (c' a'' - a' c'')\frac{d\alpha}{ds}, \qquad (a' b'' - b' a'')\frac{d\alpha}{ds};$$

$$\frac{\theta_1}{\rho_2} = \frac{a'}{\sigma}, \qquad \frac{\theta_2}{\rho_2} = \frac{b'}{\sigma}, \qquad \frac{\theta_3}{\rho_2} = \frac{c'}{\sigma}.$$

Stąd wyprowadzamy dostawy kierunkowe normalnej głównej, która wraz z dwiema innemi prostemi tworzy trójścian trójprostokątny dodatni; dostawa, odpowiadająca osi Ox jest, naprzykład

icm©

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\alpha}{ds}[b'(a'b''-b'a'')-c'(c'a''-a'c'')]$$

$$=\frac{1}{\sigma}\frac{d\alpha}{ds}(a'\sigma\sigma'-a''\sigma^2)=\frac{d\alpha}{ds}(a'\sigma'-a''\sigma).$$

Stosując jeden z wzorów Freneta, otrzymujemy teraz:

$$\frac{a''}{\sigma}-\frac{a'\sigma'}{\sigma^2}=\frac{a'\sigma'-a''\sigma}{\tau};$$

skąd $\tau=-\sigma^2$. Więc, w przypadku ogólnym, mamy:

$$\tau=-\rho_2^2. \tag{27}$$

Szukajmy teraz punktu środkowego M_0. Normalna w tym punkcie musi być położona w płaszczyźnie asymptotycznej; skąd warunek

$$a\theta_1+b\theta_2+c\theta_3=0,$$

z którego znajdujemy:

$$\beta_0=\frac{2\rho}{\rho'}-\alpha. \tag{28}$$

Wprowadzając tę wartość we wzory (D), będziemy mieli równania linii zwężenia.

Znajdźmy parametr rozmieszczenia $\bar{\omega}$. Tworząca jest ustawiona przez swoją dostawę kierunkową (23): miarą algebraiczną h wektora (M_0M) jest:

$$h=\rho_1\left(\frac{2}{\alpha+\beta}-\frac{2}{\alpha+\beta_0}\right)=\rho_1\left(\frac{2}{\alpha+\beta}-\frac{\rho'}{\rho}\right). \tag{29}$$

Z drugiej strony, niech będzie V kąt płaszczyzny środkowej z płaszczyzną styczną w punkcie M, kąt mierzony około tworzącej o stałym kierunku. Na mocy definicyi mamy:

$$\bar{\omega}=\frac{h}{\operatorname{tg} V}.$$

Otóż, aby obliczyć tang V, wystarczy mieć dostawy kierunkowe półprostej, która tworzy z tworzącą i normalną do płaszczyzny asymptotycznej trójścian trójprostokątny dodatni. Ponieważ dostawy tych dwóch ostatnich prostych są znane, możemy zatem wyprowadzić z nich dostawy pierwszej; dostawa, naprzykład, odpowiadająca osi Ox, jest:

$$\frac{1}{\rho\rho_1}[b(ba'-ab')-c(ac'-ca')]$$

$$=\frac{1}{\rho\rho_1}[a'\rho^2-a\rho\rho']=\frac{a'\rho-a\rho'}{\rho_1}.$$

Wówczas mamy:

$$\operatorname{tg} V=\frac{\frac{1}{\rho}Sa\theta_1}{\frac{1}{\rho_1}S(a'\rho-a\rho')\theta_1}=\frac{\rho_1\left(\rho_1-\frac{2\rho}{\alpha+\beta}\right)}{\rho(\sigma^2-\rho'^2)}=\frac{h}{\rho'^2-\sigma^2}.$$

Zatem:

$$\bar{\omega}=\rho'^2-\sigma^2\ ^{1)} \tag{30}$$

Porównanie równań (24), (26), (27), (29) i (30) prowadzi nas do równania następującego:

$$\rho_2^2=-\tau=-\bar{\omega}+\frac{\rho^2h^2}{\rho_1^2}=-\bar{\omega}+\frac{h^2}{-\bar{\omega}};$$

skąd wypływa następujący piękny wzór

$$h^2+\bar{\omega}^2=\tau\bar{\omega}, \tag{31}$$

który można przetłómaczyć na konstrukcyę w sposób następujący:

Dana jest powierzchnia liniowa; niech będzie M jeden z punktów tej powierzchni i M_0 — punkt środkowy tworzącej, przechodzącej przez punkt M. Wystawmy w punkcie M_0 prostopadłą Δ do prostej M_0M i odłóżmy na niej długość M_0K, równą parametrowi rozmieszczenia. Płaszczyzna, poprowadzona przez punkt M prostopadle do KM, przecina prostą Δ w punkcie K' tak, że odcinek KK' równa się promieniowi skrętu w punkcie M linii asymptotycznej, przechodzącej przez punkt M. Poza tem, ten promień skrętu jest tego samego znaku, co i parametr rozmieszczenia.

Oczywista, iż można również dobrze powiedzieć, że krzywizna zupełna w punkcie M równa się $-\frac{1}{\overline{KK'^2}}$. W szczególności, krzywizna zupełna w punkcie środkowym równa się $-\frac{1}{\bar{\omega}^2}$.

Wzór (28) daje nam bezpośrednio rozwiązanie następującego zagadnienia: Znaleść powierzchnie prostoliniowe, których linia zwężenia jest jednocześnie linią asymptotyczną. Istotnie, możemy założyć (n⁰ 3), że ta linia asymptotyczna odpowiada wartości $\beta=\infty$, co daje

---

[1]) Można zauważyć, że ten parametr rozmieszczenia jest istotnie ujemny, jak tylko a, b, c są rzeczywiste. To samo dotyczy promienia skrętu τ, obliczonego wyżej. Lecz to nie powinno nas dziwić, albowiem wiemy (n⁰ 1), że nadając tylko wartości rzeczywiste na a, b, c, nie otrzymamy wszystkich powierzchni rzeczywistych. Aby je otrzymać wszystkie, należy wziąć wartości czyste urojone, co daje wówczas parametr rozmieszczenia dodatni i promień skrętu dodatni.

nam warunek konieczny i dostateczny: $\rho' = 0$. Będziemy mieli wszystkie rozwiązania zagadnienia, biorąc na a, b, c trzy jakiekolwiek funkcye, czyniące zadość tożsamości

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1\,.$$

W tym przypadku parametr rozmieszczenia równa się co do wielkości i znaku promieniowi skrętu linii zwężenia. Parametr ten sprowadza się zresztą do $-\sigma^2$, tak że będzie stały, gdy weźmiemy

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \text{const.}$$

7. Badanie powierzchni (S_1). Jedynie interesującemi są własności tej powierzchni, dotyczące linij (α). A priori, te ostatnie muszą być płaskie, przyczem płaszczyzna każdej z nich jest prostopadła do tworzącej odpowiedniej powierzchni (S). To łatwo sprawdzić na równaniach (E). Połóżmy dla uproszczenia

$$u = \int (A' a'' - A'' a')\, d\alpha, \quad v = \int (A' b'' - A'' b')\, d\alpha,$$
$$w = \int (A' c'' - A'' c')\, d\alpha;$$

będziemy mieli

$$(x_1 - u)(c b' - b c') + (y_1 - v)(a c' - c a') + (z_1 - w)(b a' - a b') = 0. \quad (32)$$

Tak się przedstawia równanie płaszczyzny linii (α), jeżeli będziemy uważali x_1, y_1, z_1 jako spółrzędne bieżące. Ta płaszczyzna obwija rozwijalną Δ, której stożek kierunkowy jest dodatkowy dla stożka powierzchni (S). Zależy ona od funkcyi dowolnej A, co nasuwa myśl, że ta rozwijalna stanowi rozwijalną najogólniejszą, przybierającą stożek kierunkowy poprzedni. W rzeczy samej, jeżeli dana jest ta rozwijalna, konieczne jest wyznaczenie funkcyi A w ten sposób, aby było:

$$u(c b' - b c') + v(a c' - c a') + w(b a' - a b') = p, \quad (33)$$

gdzie p oznacza funkcyę daną parametru α.

Jeżeli zauważymy, że

$$u = A' a' - 2A'' a + 2\int A''' a\, d\alpha,$$

wówczas równanie powyższe możemy napisać w postaci:

$$(c b' - b c')\int A''' a\, d\alpha + (a c' - c a')\int A''' b\, d\alpha + (b a' - a b')\int A''' c\, d\alpha = \frac{p}{2}.$$

Różniczkując kolejno trzy razy i zastępując, pochodne trzecie funkcyj a, b, c przez ich wartości z równania (18), po dokonaniu wszystkich rachunków, otrzymamy:

$$2A'''\delta = -\lambda(\lambda p' + \mu p + p'') + \nu p - \lambda p'' - \lambda' p' - \mu p' - \mu' p - p'''.$$

Otóż wnosimy, że istnienie rozwijalnej Δ jest równoważne istnieniu funkcyi A''' i nawet A, ponieważ można bez zmiany powierzchni (S_1) dołączyć do tej funkcyi trójmian jakikolwiek drugiego stopnia względem α, modyfikujący funkcyę B (n° 4).

W szczególności, jeżeli rozwijalna Δ jest stożkiem o wierzchołku 0, wówczas mamy $p = 0$; można więc wziąć $A = 0$. Wówczas funkcye u, v, w są wielkości stałe, równe zeru, w przeciwnym razie równanie (33) wyrażałoby, że powierzchnia (S) posiada płaszczyznę kierunkową.

Widzimy, jaką jest rola funkcyi dowolnej A. Przeciwnie, rola funkcyi B polega na ustaleniu natury linij płaskich (α). Ale nie można w sposób prosty geometryczny wskazać, jaki jest stopień ogólności, który zachodzi w wyborze tych linij, gdy dana jest powierzchnia rozwijalna-obwiednia ich płaszczyzn, innemi słowy, — funkcya A. Wszystko to, co utrzymywać możemy, sprowadza się do tego, że możemy obrać dowolnie jedną z tych linij; funkcya B jest wówczas wyznaczona przez równanie różniczkowe rzędu pierwszego, tak że przewidywać można istnienie jeszcze jednej stałej dowolnej w rozwiązaniu. Pomijając bliższe pogłębienie tego pytania, nie przedstawiającego zresztą większego interesu, poczynimy jedynie tylko następujące spostrzeżenie: Jeżeli linia szczególna (α) jest prostą, wówczas wszystkie inne są również prostemi, i powierzchnia (S_1) jest rozwijalna.

W rzeczy samej, jeżeli napiszemy, że x_1, y_1, z_1 czynią zadość równaniom rzutów prostej na płaszczyzny spółrzędnych, wówczas otrzymamy zależności w postaci następującej:

$$m_1\left(B' - \frac{2B}{\alpha + \beta}\right) + m_2 \frac{B'}{\alpha + \beta} + \frac{m_3}{\alpha + \beta} + m_4 = 0, \quad (34)$$

gdzie spółczynniki m_i są to stałe, przyczem dwa pierwsze nie równają się zeru dla jednego conajmniej rzutu.

To równanie liniowe całkuje się z łatwością i daje na B trójmian drugiego stopnia względem β, który może sprowadzać się do zera, przy zmienieniu funkcyi A (n° 4). Otóż, jeżeli uczynimy $B = 0$ w równaniach (E), z łatwością znajdziemy powierzchnię rozwijalną, której krawędź zwrotu ma za równania

$$x = u + \frac{A'}{A}(a A' - a' A), \qquad y = v + \frac{A'}{A}(b A' - b' A),$$
$$z = w + \frac{A'}{A}(c A' - c' A).$$

icm©

Można byłoby wyprowadzić stąd rozwiązanie zagadnienia odkształcenia nieskończenie małego powierzchni rozwijalnych, dla których metoda wzorów Lelieuvre'a jest niedostateczna. Nie będziemy jednak tu zajmowali się tem pytaniem, tem bardziej, że można zagadnienie rozwiązać wprost, wychodząc z odkształcenia skończonego.

8. Badanie dwunastu powierzchni. Poszukiwania dalsze będą polegały na tem, aby otrzymać szereg rezultatów, stosując teoryę dwunastu powierzchni, którą tak pięknie nawiązał Darboux do zagadnienia ogólnego odkształcenia nieskończenie małego (Théorie des surfaces, t. IV, str. 48 i następne).

Mamy najpierw powierzchnię (A), określoną przez równania:

$$x' = \frac{\theta_1}{\omega} = \frac{2a - a'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)}, \quad y' = \frac{\theta_2}{\omega} = \frac{2b - b'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)}, \quad z' = \frac{\theta_3}{\omega} = \frac{2c - c'(\alpha+\beta)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)}. \tag{35}$$

Linie (α) tej powierzchni są płaskie; ich płaszczyzny są to płaszczyzny (π), poprowadzone przez punkt 0 prostopadle do tworzących (α) powierzchni (S). Jeżeli jedna z nich jest prostoliniowa, wówczas to samo ma miejsce dla wszystkich pozostałych, i powierzchnia (A) jest rozwijalna. W rzeczy samej, jeżeli napiszemy, że x', y', z' spełniają równania rzutów prostej na płaszczyzny spółrzędnych, otrzymamy związki następujące:

$$B'(\alpha+\beta) - 2B + m\beta + n = 0 \qquad (m,\ n = \text{const.}).$$

Równanie to, scałkowane względem B, daje trójmian drugiego stopnia względem β, który może sprowadzać się do zera (n° 4). Ale wtenczas łatwo jest stwierdzić, że (A) jest powierzchnią rozwijalną, której krawędź zwrotu ma za równania:

$$x = -\frac{a}{A}, \qquad y = -\frac{b}{A}, \qquad z = -\frac{c}{A}.$$

Przejdźmy teraz do powierzchni (Σ), której punkt P, homologiczny z punktem M powierzchni (S), ma za spółrzędne:

$$X = x + y'z_1 - z'y_1, \qquad Y = y + z'x_1 + x'z_1, \qquad Z = z + x'y_1 - y'x_1.$$

Kładąc dla uproszczenia

$$\xi = \int (b'c'' - c'b'')\,d\alpha, \qquad \eta = \int (c'a'' - a'c'')\,d\alpha, \qquad \zeta = \int (a'b'' - b'a'')\,d\alpha,$$

mamy, naprzykład,

$$X = \xi + \frac{2B'(cb' - bc') + 2(bw - cv) + (\alpha+\beta)(c'v - b'w)}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)}; \tag{36}$$

spółrzędne Y i Z wyprowadzimy zapomocą przestawień kołowych.

Wiadomo, że powierzchnia (E) jest odniesiona do swych linij asymptotycznych i odpowiada ona powierzchni (A) o elementach ortogonalnych. Przy $B=0$, jest ta powierzchnia oczywiście prostoliniową. Jeżeli rozwijalna Δ (n° 7) jest stożkiem o wierzchołku O, możemy wziąć $A = u = v = w = 0$. Wówczas X sprowadza się do

$$X = \xi + \frac{2(cb' - bc')}{\alpha + \beta - \dfrac{2B}{B'}}.$$

Otóż punkt P zlewa się z punktem M' powierzchni (S), którego spółrzędne (α', β') równają się $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta - \dfrac{2B}{B'}$. Wobec tego, powierzchnia (Σ) zlewa się z powierzchnią (S). Oto dwa przypadki, kiedy powierzchnia (Σ) jest prostoliniowa; wykażemy, że inne przypadki zachodzić nie mogą, gdy założymy, że jej tworzące prostoliniowe są linie (α).

W rzeczy samej, załóżmy wprzódy, że linia szczególna α jest prostą, nie równoległą do prostej D. Linia homologiczna z (A) znajduje się wówczas w płaszczyźnie prostopadłej do tej prostej; ponieważ ona jest już położona w płaszczyźnie Π, prostopadłej do prostej D, przeto linia ta jest koniecznie prostą, i, wobec tego, można przyjąć $B=0$, i powierzchnia (Σ) jest prostoliniowa.

Rozumowanie powyższe chybia, jeżeli prosta (α) powierzchni (Σ) jest równoległa do prostej (D). Ale, gdy to ma miejsce, wówczas dwie ilości $S(X-\xi)\,a$ i $S(X-\xi)\,a'$ muszą sprowadzać się do funkcyj zmiennej α. Otóż, są one odpowiednio równe

$$\frac{\alpha+\beta}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)}\,Su\,(cb' - bc')$$

i

$$\frac{2Su\,(cb' - bc')}{(A'+B')(\alpha+\beta) - 2(A+B)}.$$

icm©

Jeżeli te wartości nie są równe zeru, ich stosunek $\alpha+\beta$ nie może być niezależny od β. Mamy więc

$$Su(cb'-bc')=0.$$

Zwracamy się do równania (33). Równanie to sprawdza się w ogólności przy pewnych wartościach szczególnych α. Aby równanie to było spełnione niezależnie od wartości α, należy założyć, że rozwijalna Δ jest stożkiem o wierzchołku O; w tym przypadku powierzchnia (Σ) zlewa się z powierzchnią (S).

9. Kongruencye (S). W dalszym ciągu nie będziemy więcej zajmowali się badaniem teoryi dwunastu powierzchni, ponieważ nie wydaje się nam, by badania te mogły nas doprowadzić do wyników istotnie interesujących; zajmiemy się teraz specyalnie powierzchnią (Σ) w przypadku, gdy ta powierzchnia jest powierzchnią prostoliniową, przyczem $B=0$.

Wiadomo, że prosta MP jest styczna w punkcie M do powierzchni (S) i w punkcie P — do powierzchni (Σ); wytwarza ona kongruencyę, której dwie powłoki powierzchni ogniskowej są powierzchniami prostoliniowemi, na których tworzące prostoliniowe odpowiadają sobie wzajemnie. Będziemy nazywali kongruencyą (G) każdą kongruencyę, posiadającą tę własność.

Powiadam, że każdą kongruencyę (G) można otrzymać sposobem powyższym. W rzeczy samej, niech będą (S) i (S') dwie powłoki powierzchni ogniskowej takiej kongruencyi, i M, M' dwa punkty homologiczne dowolne. Wiadomo, że kiedy prosta MM' wytwarza kolejno dwie rodziny rozwijalnych kongruencyj, wówczas punkty M i M' opisują odpowiednio na powierzchniach (S) i (S') dwie siecie sprzężone. Z drugiej strony, na mocy założenia, gdy punkt M opisuje prostą D na powierzchni (S), punkt M' opisuje prostą D' na powierzchni (S'). Ponieważ te proste są liniami asymptotycznemi na powierzchniach je zawierających, wnosimy stąd, że linie asymptotyczne drugiej rodziny są również liniami homologicznemi na dwóch powierzchniach[1]. Teraz już można będzie zastosować twierdzenie Guicharda[1] i twierdzić, że powierzchnia (S') może być wyprowadzona, jak powierzchnia (Σ), z powierzchni (S). Otóż poznaliśmy wszystkie przypadki, kiedy powierzchnia (Σ) jest powierzchnią prostoliniową, której prostemi są linie (α). Przypadek $A=0$ nie daje nic, ponieważ powierzchnia (Σ) zlewa się z powierzchnią (S); kongruencya sprowadza się do tworzących powierzchni (S). Pozostaje więc tylko przypadek, kiedy $B=0$, który chcieliśmy udowodnić.

[1] To wynika z następującej własności ogólnej: Jeżeli wykażemy między dwiema powierzchniami dowolnemi (S) i (S') istnienie odpowiedniości punktowej, przekształcającej dwie siecie szczególne powierzchni (S) na dwie siecie sprzężone powierzchni (S'), wówczas linie asymptotyczne odpowiadają sobie na dwóch powierzchniach. Istotnie, wiadomo, że w dwóch punktach homologicznych M i M' styczne homologiczne są w odpowiedniości homograficznej. Zatem styczne asymptotyczne powierzchni (S), dzielące harmonicznie dwie pary stycznych $(Mt, M\theta)$, $(Mt_1, M\theta_1)$ do dwóch sieci przedłożonych, mają za homologiczne, w punkcie M' dwie styczne asymptotyczne powierzchni (S'), które dzielą harmonicznie pary $(M't', M'\theta')$, $(M't_1', M'\theta_1')$, homologiczne, na mocy założenia, z poprzedniemi.

Ostatecznie, kongruencyę najogólniejszą (G) otrzymamy, łącząc punkty M i P, których spółrzędne są dane przez wzory (D) i (36), gdzie zakładamy $B=0$. Kongruencyę tę można również otrzymać bez żadnej kwadratury, albowiem można uniknąć kwadratur, występujących w ξ, η, ζ, u, v, w (n° 2).

10. Postawmy teraz zagadnienie w sposób nieco odmienny i więcej symetryczny. Dajmy sobie dwie powierzchnie prostoliniowe w formie (D). Będziemy mieli, naprzykład, powierzchnię (S), określoną przez funkcye a, b, c zmiennej α; następnie — powierzchnię (S_1)[2], określoną przez trzy funkcye a_1, b_1, c_1 zmiennej α_1 zapomocą wzorów, jak następujący:

$$x_1=\frac{2(c_1b_1'-b_1c_1')}{\alpha_1+\beta_1}+\xi_1, \tag{D$_1$}$$

w którym położyliśmy

$$\xi_1=\int(b_1'c_1''-c_1'b_1'')\,d\alpha_1,$$

i gdzie wskaźniki pokazują pochodne, wzięte względem α_1.

To ustaliwszy, szukajmy, jakie związki powinny zachodzić między α i α_1 z jednej strony, i między β i β_1 z drugiej strony, a także,—jakie warunki winny spełniać funkcye a, b, c, a_1, b_1, c_1 na to, aby prosta MM_1 wytwarzała kongruencyę (G) powierzchni ogniskowych (S) i (S_1).

Można byłoby odpowiedzieć na to pytanie, opierając się na paragrafie poprzednim i utożsamiając powierzchnię (S_1) z powierzchnią (Σ). Wolimy jednak zastosować następującą metodę bezpośrednią. Napiszmy, że prosta MM_1 jest styczna w punkcie M do powierzchni (S) i w punkcie M_1 — do powierzchni (S_1); odwołując się na dostawy kierunkowe normalnej w punkcie M do powierzchni (S) (n° 6), mamy:

$$S\left(a'-\frac{2a}{\alpha+\beta}\right)\left(\xi_1-\xi+\frac{2A_1}{\alpha_1+\beta_1}-\frac{2A}{\alpha+\beta}\right)=0, \tag{37}$$

[1] G. Darboux, loc. cit. n° 888.

[2] Jasnem jest, że ta powierzchnia nie ma nic wspólnego z powierzchnią (S_1) paragrafów poprzednich. To samo ma miejsce dla wszystkich następujących oznaczeń.

$$S\left(a_1' - \frac{2a_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)\left(\xi - \xi_1 + \frac{2A}{\alpha+\beta}\Big) - \frac{2A_1}{\alpha_1+\beta_1}\right) = 0, \tag{38}$$

gdzie dla uproszczenia położyliśmy

$$A = cb' - bc', \qquad A_1 = c_1 b_1' - b_1 c_1'.$$

Równanie (37), naprzykład, ma postać

$$\frac{m}{(\alpha+\beta)(\alpha_1+\beta_1)} + \frac{n}{\alpha+\beta} + \frac{p}{\alpha_1+\beta_1} + q = 0 \tag{39}$$

wraz z równościami

$$\begin{aligned} m &= -4SaA_1, & n &= -2Sa(\xi_1 - \xi), \\ p &= 2Sa'A_1, & q &= Sa'(\xi_1 - \xi). \end{aligned} \tag{40}$$

Jeżeli nadamy zmiennej α jakąkolwiek wartość liczebną, wówczas otrzymamy między β i β_1 związek homograficzny. Pomijając przekształcenia (14), (15), (16), wyrażone, naprzykład, na powierzchni (S), można założyć $\beta_1 = \beta$. Wprowadzając to założenie w równanie (39), mamy

$$q = 0, \qquad n + p = 0, \qquad m + n\alpha_1 + p\alpha = 0. \tag{41}$$

Wprowadzając w (38), mielibyśmy tak samo:

$$q_1 = 0, \qquad n_1 + p_1 = 0, \qquad m_1 + n_1\alpha + p_1\alpha_1 = 0, \tag{42}$$

nazywając przez m_1, n_1, p_1, q_1 ilości, wyprowadzone z m, n, p, q przez zamianę liter a, b, c i a_1, b_1, c_1.

Równania $q = 0$, $q_1 = 0$ dają nam przedewszystkiem:

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi &= \rho\,(c' b_1' - b' c_1'), \\ \eta_1 - \eta &= \rho\,(a' c_1' - c' a_1'), \\ \zeta_1 - \zeta &= \rho\,(b' a_1' - a' b_1', \end{aligned} \tag{43}$$

gdzie ρ oznacza pewien czynnik proporcyonalności [1]. Kładąc te wartości zamiast n i n_1, otrzymamy

[1]) To zakłada, że równości $\frac{a_1'}{a'} = \frac{b_1'}{b'} + \frac{c_1'}{c'}$ nie mają miejsca. Lecz gdyby istotnie tak było, mielibyśmy $p = 0$; skąd $n = 0$, $m = 0$. Otóż z równości $p = m = 0$ wyprowadzilibyśmy $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}$; tworzące D i D_1 byłyby równoległe i wobec tego zlewające się (n° 8), co dawałoby niedorzeczne rozwiązanie.

$$n = -\rho p_1, \qquad n_1 = -\rho p.$$

Drugie z równań (42) możemy wówczas napisać:

$$\rho^2 p + n = 0;$$

porównywając je z ostatniem z równań (41) i z uwagi, że wartości n i p nie mogą obie być równe zeru, inaczej m także równałoby się zeru, i proste D i D_1 byłyby równoległe, — otrzymujemy $\rho^2 = 1$. Pomijając zmianę znaku przy a, b, c, weźmy $\rho = 1$. Mamy więc teraz do sprawdzenia tylko trzy równania następujące:

$$p = p_1, \qquad m + p(\alpha - \alpha_1) = 0, \qquad m_1 + p_1(\alpha_1 - \alpha) = 0. \tag{44}$$

Drugie z nich możemy napisać tak:

$$S\,[a'(\alpha - \alpha_1) - 2a]\,A_1 = 0,$$

ponieważ, prócz tego, mamy tożsamościowo

$$S\,[a'(\alpha - \alpha_1) - 2a]\,A = p,$$

i minory $u = BC_1 - CB_1$, $v = CA_1 - AC_1$, $w = AB_1 - BA_1$ nie równają się oba zeru, wnosimy stąd:

$$a'(\alpha - \alpha_1) - 2a = \lambda u, \qquad b'(\alpha - \alpha_1) - 2b = \lambda v,$$
$$c'(\alpha - \alpha_1) - 2c = \lambda w.$$

Tak samo:

$$a_1'(\alpha_1 - \alpha) - 2a_1 = \lambda_1 u, \qquad b_1'(\alpha_1 - \alpha) - 2b_1 = \lambda_1 v,$$
$$c_1'(\alpha_1 - \alpha) - 2c_1 = \lambda_1 w.$$

Stąd wyciągamy:

$$\begin{aligned} 2A &= \lambda\,(c'v - b'w), \qquad 2A_1 = \lambda_1\,(c_1'v - b_1'w); \\ p &= \lambda_1\,(Sa'(c_1'v - b_1'w) = \lambda_1 Su\,(c'b_1' - b'c_1'), \\ p_1 &= \lambda Sa_1'(c'v - b'w) = \lambda Su\,(c_1'b' - b_1'c'). \end{aligned}$$

Warunek $p = p_1$ daje nam wówczas $\lambda_1 = -\lambda$, albowiem widzieliśmy, że p i p_1 nie mogą być równe zeru. Mamy więc

$$a'(\alpha - \alpha_1) - 2a = a_1'(\alpha - \alpha_1) + 2a_1$$

i dwa równania analogiczne. Te trzy równości pociągają zresztą za sobą oczywiście trzy równnnia (44).

Ostatecznie więc, w a r u n k i s z u k a n e są n a s t ę p u j ą c e:

$$(\alpha - \alpha_1)(a' - a_1) = 2(a + a_1), \tag{45}$$

$$\xi_1 - \xi = c' b_1' - b' c_1', \tag{46}$$

wraz z warunkami, które z nich wyprowadzamy zapomocą przestawień kołowych. Równania takie, jak (46), służą zresztą do tego, aby ustalić stałe całkowania, odpowiadające ξ_1, η_1, ζ_1, gdy obrane zostały już te stałe, które wprowadzają się w ξ, η, ζ. W rzeczy samej, powiadam, że, różniczkując równanie (46), otrzymujemy tylko wniosek z równań takich, jak równanie (45). Wyraźniej, równanie (46) zróżniczkowane możemy napisać:

$$(c_1'' d\alpha_1 - c'' d\alpha)(b' + b_1') - (b_1'' d\alpha_1 - b'' d\alpha)(c' + c_1') = 0. \tag{47}$$

Otóż, różniczkując równanie (45), otrzymujemy:

$$(\alpha - \alpha_1)(a_1'' d\alpha_1 - a'' d\alpha) = -(d\alpha + d\alpha_1)(a' + a_1'); \tag{48}$$

i istotnie widzimy, że równanie (47) jest wnioskiem z równań takich, jak równanie (48).

Spostrzegamy z łatwością, jaki jest stopień ogólności rozwiązania. Można wybrać dowolnie funkcye a, b, c, innemi słowy, powierzchnię (S), następnie związek między α_1 i α. Funkcya a_1 jest wówczas dana przez równanie różniczkowe liniowe (45), i funkcye b_1 i c_1 — przez równania analogiczne. Co do odpowiedniości między M i M_1, to jest ona ustalona na dwóch tworzących homologicznych zapomocą równości $\beta = \beta_1$.

Przypomnijmy przytem, że dla tego, aby mieć warunki żądane w formie najogólniejszej, byłoby konieczne utożsamienie równań (37) i (38) z zależnością homograficzną dowolną między β i β_1, — niech nią będzie:

$$m\beta\beta_1 + n\beta + p\beta_1 + q = 0. \tag{49}$$

Mielibyśmy rachunki bardziej skomplikowane, których można uniknąć, dokonywając naprzykład, na powierzchni (S) zamian zmiennych (n° 3)

$$\beta \,\Big|\, \frac{n\beta + q}{-m\beta - p}, \qquad \alpha \,\Big|\, \frac{n\alpha - q}{m\alpha - p}, \qquad a \,\Big|\, \frac{a(mq - np)}{(m\alpha - p)^2}.$$

Równania (45) i (46) przybierają wówczas postać [1]:

[1]) Aby uskutecznić szybko rachunek równania (51), należy zauważyć, że jeżeli oznaczymy indeksem zero stare zmienne, będziemy tożsamościowo mieli:

$$\xi_0 + \frac{2(c_0 b_0' - b_0 c_0')}{\alpha_0 + \beta_0} = \xi + \frac{2(c b' - b c')}{\alpha + \beta},$$

ponieważ powierzchnia (S) nie zmienia się. Teraz już będziemy mieli ξ_0, czyniąc $\beta_0 = \infty$, więc $\beta = -\frac{p}{m}$. Podstawiając to w (46), to jest

$$\xi_1 - \xi_0 = c_0' b_1' - c_0' b_1',$$

i biorąc pod uwagę (50), otrzymamy (51).

$$\begin{aligned}(m\alpha\alpha_1 - n\alpha - p\alpha_1 + q)(a' - a_1') \\ = 2\,[m(a\alpha_1 - a_1\alpha) + p a_1 - n a],\end{aligned} \tag{50}$$

$$\xi_1 - \xi = c' b_1' - b' c_1' + \frac{4m(b c_1 - c b_1)}{m\alpha\alpha_1 - n\alpha - p\alpha_1 + q}. \tag{51}$$

Można wreszcie w tych równaniach zmienić znaki przy a, b, c, albo przy a_1, b_1, c_1.

11. Obwiedne kwadryk. Powierzchnie (S) i (S_1), o których zakładamy, że czynią zadość warunkom (45) i (46), szukajmy miejsca prostej MM_1, gdy zmienia się tylko β. Ponieważ odpowiedniość między M i M_1 jest homograficzna, przeto miejsce to jest kwadryką. Jest to łatwo sprawdzić rachunkiem elementarnym. Aby otrzymać równania prostej MM_1, wystarcza wziąć równania płaszczyzn stycznych w punkcie M do powierzchni (S) i w punkcie M_1 do powierzchni (S_1), co kolejno daje:

$$2P - Q(\alpha + \beta) = 0, \qquad 2P_1 - Q_1(\alpha_1 + \beta) = 0, \tag{52}$$

jeżeli dla uproszczenia położymy

$$P_1 = S a_1 (x - \xi_1), \qquad Q_1 = S a_1' (x - \xi_1),$$
$$P = S a (x - \xi), \qquad Q = S a' (x - \xi).$$

Eliminacya β daje równanie miejsca

$$2(PQ_1 - QP_1) + (\alpha_1 - \alpha) Q Q_1 = 0, \tag{53}$$

co istotnie przedstawia kwadrykę (Q).

Gdy zmienia się α, kwadryka ta stale dotyka swojej obwiedni według czterech boków czworoboku skośnego. W rzeczy samej, krzywa styczności zawiera już dwie proste D i D_1, które są tworzącemi tego samego układu kwadryki. Ponieważ ta krzywa jest linią przecięcia kwadryki (Q) z inną powierzchnią drugiego stopnia [naprzykład powierzchnią (Q), nieskończenie bliską], przeto jest ona wyznaczona przez cztery boki czworoboku skośnego (Ω), w którym D i D_1 są to dwa boki przeciwległe.

Równanie (53) określa rodzinę kwadryk najogólniejszą, posiadającą własność poprzednią: albowiem, jeżeli mamy taką rodzinę, wówczas tworzące każdego układu kwadryki zmiennej wytwarzają kongruencyę (G), która może być otrzymana sposobem powyższym (n° 9).

Znamy już dwa boki D i D_1 czworoboku (Ω). Powiadam, że dwa inne boki są stycznemi asymptotycznemi wspólnemi do powierzchni (S) i (S_1). Można byłoby dowieść tej własności analitycznie, różniczkując równanie (53) w ten sposób, aby mieć charakterystykę kwadryki (Ω). Ale rachunki są zbyt długie, i my ograniczymy się do podania dowodu geometrycznego następującego.

Niech będzie (H) hyperboloida ściśle styczna do powierzchni (S) wzdłuż (D); jest ona utworzona, jak wiadomo, przez styczne asymptotyczne powierzchni (S) w różnych punktach prostej (D). Kwadryki (Q) i (H) przecinają się według prostej (D); zatem te kwadryki mają wspólne dwie tworzące (d) i (d_1) układu, do którego nie należy (D). Niech będzie (s) powierzchnia, utworzona przez (d), naprzykład. Wykażemy, że kwadryka (Q) przecina się z powierzchnią (s) według linii (d). Istotnie, każda płaszczyzna (Π), przechodząca przeż (d) dotyka powierzchni (Q), (s), (H) w trzech punktach m, m', m'', które parami są w odpowiedniości homograficznej. Punkty podwójne homografii (m', m'') zlewają się z punktem M, ponieważ są to punkty ogniskowe prostej (d), uważanej, jako należącej do kongruencyi stycznych asymptotycznych powierzchni (S), ponieważ powierzchnie (s) i (H) są utworzone obie przez proste tej kongruencyi.[1] Punkty podwójne homografii (m, m'') również pokrywają się punktem M, ponieważ punkty przecięcia powierzchni (Q) i (H), odpowiadające prostej (d) same zlewają się w punkcie M. Wnosimy stąd, że mają miejsce dwa związki następujące:

$$\frac{1}{Mm'} - \frac{1}{Mm''} = k, \qquad \frac{1}{Mm} - \frac{1}{Mm''} = k' \quad (k,\ k' = \text{const.}),$$

skąd:

$$\frac{1}{Mm} - \frac{1}{Mm'} = k' - k = k''.$$

Otóż prosta (d) stale należy do kongruencyi (G) i, wobec tego, powierzchnia (s) jest styczna w punkcie M_1 do powierzchni (S_1). Ponieważ to samo ma miejsce dla kwadryki (Q), widzimy, że punkt M_1 jest homologiczny sam dla siebie w homografii (m, m'). To dowodzi, że k'' równa się zeru i wobec tego punkty m i m' zawsze pokrywają się wzajemnie. Innemi słowy, powierzchnie (Q) i (s) przecinają się według prostej (d).

Tak samo można byłoby dowieść, że kwadryka Q przecina według prostej (d_1) powierzchnię (s_1), utworzoną przez tę prostą. Ostatecznie, *czworobok* (Ω) *jest istotnie wyznaczony przez proste* (D), (D_1), (d) i (d_1), i można powiedzieć, że *powierzchnia prostoliniowa, utworzona przez każdy bok, przybiera za styczne asymptotyczne*

[1]) Przypominam czytelnikowi, że jeżeli dwie powierzchnie prostoliniowe, mające tworzącą (d) wspólną, są utworzone przez proste, należące do tej samej kongruencyi, wówczas ich punkty przecięcia na prostej (d) są punktami ogniskowemi tej prostej.

dwa boki, które go przecinają, ponieważ cztery boki odgrywają oczywiście tę samą rolę w zadaniu.

Wzajemnie, *każdy czworobok zmienny, posiadający tę własność, może być otrzymany w sposób powyższy.*

W rzeczy samej, wyobraźmy sobie, że takim czworobokiem jest czworobok (Ω), i uważajmy kwadrykę (Q), styczną do (S) wzdłuż (D) i przechodzącą przez (D_1). Kwadryka ta zawiera oczywiście proste (d) i (d_1). Prócz tego, rozumowanie powyższe stosuje się bez żadnej modyfikacyi, ponieważ powierzchnie (Q) i (s) posiadają tę samą płaszczyznę styczną w punkcie M_1, mianowicie płaszczyznę dM_1D_1. Więc powierzchnie te przecinają się według prostej (d). Tak samo (Q) jest styczna do (s_1) według prostej (d_1). Jeżeli teraz proste (d) i (d_1) będą odgrywały role prostych (D) i (D_1) i odwrotnie, wówczas można twierdzić również, że kwadryka (Q) przecina powierzchnię (S_1) według prostej (D_1). Ostatecznie, *czworobok* (Ω) *jest zawsze krzywą styczności kwadryki* (G) *ze swoją obwiednią*, i twierdzenie wzajemne zostało dowiedzione.[1]

12. Powyższe rozważania geometryczne pozwalają nam przedstawić teraz *nową metodę wyznaczenia kongruencyj* (G), albo, co prowadzi do tego samego, — rodzin kwadryk (Q). Wychodząc z powierzchni (S), danej przez równania (D), utwórzmy teraz kwadrykę (Q), przecinającą się z powierzchnią (S) według prostej (D), i zawierającą dwie styczne asymptotyczne (d) i (d_1). Następnie napiszemy, że ta kwadryka dotyka swojej obwiedni według tych dwóch prostych.

Równania prostej (D) są następujące:

$$P = 0, \qquad Q = 0. \tag{54}$$

Szukajmy równań stycznej asymptotycznej (d) w punkcie M o parametrze β. Mamy najpierw równanie (52) płaszczyzny stycznej. Spostrzegamy następnie, że dostawy kierunkowe prostej (d) są proporcyonalne do ilości takich, jak następujące:

$$b'c'' - c'b'' + \frac{2(cb'' - bc'')}{\alpha + \beta} - \frac{2(cb' - bc')}{(\alpha + \beta)^2}.$$

[1]) *Można założyć tylko, że boki przeciwległe* (d) i (d_1) *są to styczne asymptotyczne powierzchni* (S) i (S_1). Stąd z koniecznością wynika, że (D) i (D_1) są styczne asymptotyczne powierzchni (s) i (s_1). Istotnie, (S) i (s) przecinają się całkowicie według krzywej (Γ) — miejsca punktu M. Więc styczna w punkcie M do (Γ) ma tę samą sprzężoną względem tych dwóch powierzchni. Poza tem, (d) jest styczna asymptotyczna razem dla (S) i (s). Druga styczna asymptotyczna jest więc również ta sama dla dwóch powierzchni. Otóż, jest to (D) dla (S); więc również dla (s). Dowiedlibyśmy tak samo, że (D) jest to styczna asymptotyczna powierzchni (s_1) i że (D_1) jest styczna asymptotyczna dla powierzchni (s) i (s_1).

Łatwo już jest teraz widzieć, że prosta (d) jest prostopadła do kierunku, którego dostawy kierunkowe są proporcyonalne do ilości

$$a' - (\alpha + \beta)\, a'', \qquad b' - (\alpha + \beta)\, b'', \qquad c' - (\alpha + \beta)\, c''.$$

Stąd wynika równanie drugiej płaszczyzny, zawierającej prostą (d), mianowicie równanie

$$Q - 2\delta - R(\alpha + \beta) = 0,$$

w którem położyliśmy

$$R = S a'' (x - \xi).$$

Zatem równania prostej (d) są następujące:

$$\left.\begin{aligned} &P - mQ = 0 \\ &Q - 2\delta - 2mR = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left(m = \frac{\alpha + \beta}{2}\right). \tag{55}$$

Zupełnie tak samo, równania prostej (d_1) są formy następującej:

$$\begin{aligned} &P - nQ = 0, \\ &Q - 2\delta - 2nR = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Aby utworzyć kwadrykę (Q), zauważmy, że stanowi ona część pęku punktowego, wyznaczonego przez hyperboloidę ściśle styczną (H) i przez parę płaszczyzn $P - mQ = 0$, $P - nQ = 0$. Otóż równanie hyperboloidy (H) otrzymamy, eliminując m z równań (55), co daje:

$$H \equiv 2PR - Q(Q - 2\delta) = 0. \tag{57}$$

Równanie kwadryki (Q) ma więc postać:

$$S \equiv 2PR - Q(Q - 2\delta) + t(P - mQ)(P - nQ) = 0. \tag{58}$$

Należy teraz założyć, że t, m, n są to trzy funkcye zmiennej α i szukać charakterystyki kwadryki (Q). Różniczkując więc (58) względem α i uwzględniając tożsamości

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = Q - \delta, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = R,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = -\lambda R - \mu Q - \nu P, \qquad \frac{d\delta}{d\alpha} = -\lambda\delta,$$

z których dwie ostatnie otrzymują się z uwagi na wzór (18), — znajdujemy:

$$\begin{aligned} T \equiv & -2P(\lambda R + \mu Q + \nu P) \\ & - 2Q\lambda\delta + t'(P - mQ)(P - nQ) \\ & + t(P - mQ)(Q - \delta - nR - n'Q) \\ & + t(P - nQ)(Q - \delta - mR - m'Q) = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Musimy teraz wyrazić, że kwadryka, przedstawiona przez to równanie, przecina kwadrykę (Q) według czterech prostych, między któremi są proste (D), (d) i (d_1). Pierwsza z nich przechodzi już przez prostą (D). Jeżeli proste (d) i (d_1) są różne, wówczas dość wyrazić, że one sprawdzają tożsamościowo równanie (59); wówczas szybko prowadzi to do związków, które winny zachodzić między t, m, n. Ale metoda ta nie stosuje się, jeżeli proste (d) i (d_1) zlewają się, i, prócz tego, przedstawia ona niedogodność, albowiem nie daje czwartego boku czworokąta (Ω). Obierzemy więc i tu inną drogę.

Wyraźmy, że kwadryka (59) stanowi część pęku, wyznaczonego przez (Q) i dwie płaszczyzny (D, d), (D_1, d_1), mające odpowiednio równania:

$$P - mQ = 0, \qquad g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR) = 0,$$

gdzie g i h oznaczają dwa spółczynniki nieoznaczone. Powinna zachodzić tożsamość następująca:

$$T \equiv kS + (P - mQ)\,[g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR)],$$

albo

$$T \equiv kH + (P - mQ)\,[l(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR)],$$

gdzie położyliśmy $l = g + tk$. To powinno mieć miejsce, jakiekolwiek są wielkości P, Q, R. Rachunek utożsamienia nie nastręcza żadnych trudności i daje następujące wyniki:

$$l = t' - 2\nu, \qquad h = t, \qquad k = -\lambda + \frac{t(n - m)}{2}, \tag{60}$$

$$t\left(mn' + nm' - \frac{m + n}{2}\right) = \lambda - 2\nu mn, \tag{61}$$

$$t(1 - m' - n') = 2\mu + 2\nu(m + n). \tag{62}$$

Równania (61) i (62) wyrażają dwa warunki konieczne i dostateczne na to, aby kwadryka (Q) dotykała swojej obwiedni wzdłuż czworoboku skośnego.

Równania te można przedstawić w innej postaci, eliminując kolejno z nich m' i n', co daje się uskutecznić zapomocą kombinacyj liniowych $(61) + n\,(62)$ i $(61) + m\,(62)$; w ten sposób otrzymamy:

$$t(m-n)(1-2m') = 2(\lambda + 2\mu m + 2\nu m^2), \tag{63}$$

$$t(n-m)(1-2n') = 2(\lambda + 2\mu n + 2\nu n^2). \tag{64}$$

Są to te równania, które otrzymalibyśmy, stosując metodę, tylko co wzmiankowaną. Ale równania te stanowią układ równoważny z układem równań (61), (62) tylko przy $m \neq n$.

Boki (D), (d) i (d_1) czworoboku (Ω) mają odpowiednio za równania (54), (55), (56). Co do boku (D_1), to ten otrzymamy, przecinając kwadrykę (Q) płaszczyzną

$$g(P - nQ) + h(Q - 2\delta - 2nR) = 0;$$

znajdujemy z łatwością, że można wziąć za równania prostej (D_1) równania:

$$\left.\begin{aligned} &P\left[t' - 2\nu + t\lambda + \frac{t^2}{2}(m+n)\right] + tQ(1 - tmn) - 2t\delta = 0, \\ &Pt^2 + Q\left[t' - 2\nu + t\lambda - \frac{t^2}{2}(m+n)\right] + 2tR = 0. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Eliminując t z równań (63) i (64), widzimy, że można obrać dowolnie rodzinę prostych (d), aby tylko one były stycznemi asymptotycznemi powierzchni (s), przyczem proste (d_1) są wówczas wyznaczone przez równanie Riccati'ego.

13. Na zakończenie zajmę się jeszcze zbadaniem kilku uwagi godnych przypadków szczególnych, które otrzymamy, poddając czworobok (Ω) pewnym określonym warunkom.

Wymagajmy, naprzykład, aby w czworoboku (Ω) dwa boki zlewały się. Boki te, oczywiście, mogą być tylko bokami przeciwległemi.

Jeżeli temi bokami są boki (D) i (D_1), wówczas równania (65) muszą być równoważne równaniom (54); to tłómaczy się warunkiem koniecznym i dostatecznym $t = 0$. W tym przypadku, kwadryka (Q) jest więc hyperboloidą, ściśle styczną do powierzchni (S). Równania (63), (64) pokazują nam, że m i n są wówczas pierwiastkami równania drugiego stopnia

$$\lambda + 2\mu m + \nu m^2 = 0. \tag{66}$$

Można również powiedzieć, że parametry β dwóch wierzchołków podwójnych czworoboku (Ω) są dane przez równanie

$$2\lambda + 2\mu(\alpha + \beta) + \nu(\alpha + \beta)^2 = 0.$$

W przypadku, kiedy to równanie posiada jeden pierwiastek stały, znajdujemy warunek (21), aby powierzchnia (S) posiadała kierownicę prostoli-

niową. Dlatego, aby dwa pozostałe boki (d) i (d_1) również zlewały się, innemi słowy, — aby hyperboloida ściśle styczna do powierzchni (S) była jednocześnie ściśle styczna do innej powierzchni prostoliniowej (s), jest konieczne i dostateczne, aby zachodził związek

$$\mu^2 - 2\lambda\nu = 0.$$

Jeżeli tylko dwa boki (d) i (d_1) zlewają się, mamy $m = n$. Równania (63), (64) sprowadzają się wówczas do równania (66). Co do t, jest ono dane, naprzykład, przez równanie (62). Wzajemnie, jeżeli m czyni zadość równaniu (66), wówczas mamy bądź to $t = 0$, bądź to $m = n$, pomijając przypadek, w którym $m' = \frac{1}{2}$ i który dawałby $\beta = \text{const.}$ i prowadziłby do prostej (d) stałej, położonej na powierzchni (S).

Styczne asymptotyczne (d') i (d_1'), które spełniają równanie (66), charakteryzują się własnością, że mają z powierzchnią styczność rzędu trzeciego. W rzeczy samej, można je uważać, jako położone na dwóch hyperboloidach ściśle stycznych, odpowiednio (H) i (H'). Otóż (H) zawiera trzy tworzące kolejne 1, 2, 3 powierzchni (S); hyperboloida (H') zawiera tak samo trzy tworzące kolejne 2, 3, 4. Więc proste (d') i (d_1') przecinają cztéry tworzące kolejne 1, 2, 3, 4, i istotnie posiadają z powierzchnią (S) styczność rzędu trzeciego [1]. Nazwijmy te styczne stycznemi hyperasymptotycznemi i — powierzchniami hyperasymptotycznemi powierzchni (S) — dwie powierzchnie prostoliniowe (s') i (s_1'), które one tworzą. Uwagi, poczynione wyżej, pozwalają nam wygłosić twierdzenie następujące:

Jeżeli powierzchnia prostoliniowa (s') jest hyperasymptotyczna dla innej powierzchni liniowej (S), to i odwrotnie, powierzchnia (S) jest hyperasymptotyczna dla powierzchni (s').

---

[1]) Analitycznie można rozumować, jak następuje. Niech będą $x_1, x_2, \ldots, x_6$ spółrzędne Kleina prostej (D), która wytwarza powierzchnię (S); są to funkcye parametru α. Półkwadryka (H), utworzona przez styczne asymptotyczne, jest określona przez trzy równania:

$$\Sigma X_i x_i = 0, \qquad \Sigma X_i x_i' = 0, \qquad \Sigma X_i x_i'' = 0,$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_6$ są spółrzędne bieżące Kleina. Dwie proste (d') i (d_1') powierzchni (H), stanowiące część charakterystyki, są wyznaczone przez równania (1) i równania, które wyprowadzimy z (1), biorąc pochodną względem α, co daje tylko nowe równanie $\Sigma X_i x_i''' = 0$. Otóż te cztery równania wyrażają dokładnie, że równanie względem α punktów przecięcia powierzchni (S) z prostą (X_i) posiada pierwiastek poczwórny, innemi słowy, że zachodzi styczność rzędu trzeciego.

icm©

Możemy również twierdzić, że jeżeli kwadryka zmienna (Q) stale dotyka swojej obwiedni według czworoboku skośnego, którego dwa boki kolejne są jeden dla drugiego stycznemi hyperasymptotycznemi, wówczas trzeci bok zlewa się koniecznie z jednym z poprzednich.

Mówiąc o hyperboloidzie ściśle stycznej, uczyńmy uwagę, że równanie (57) nadaje się bardzo dobrze do badania, a to dlatego, że środek ω jest dany przez równania:

$$P=0, \qquad Q=\delta, \qquad R=0;$$

skąd znajdujemy:

$$x-\xi=cb''-bc'', \quad y-\eta=ac''-ca'', \quad z-\zeta=ba''-ab''.$$

Szukajmy powierzchni liniowych, których hyperboloida ściśle styczna względem każdej tworzącej ma wierzchołek na tej tworzącej.

Wystarcza napisać, że prosta $M\omega$ jest prostopadła do płaszczyzny, stycznej w punkcie M. Jeżeli zauważymy, że dla punktu M mamy $P=0$, $Q=0$, $R=\frac{-2\delta}{\alpha+\beta}$, widzimy wówczas, że dwie płaszczyzny, przechodzące przez prostą $M\omega$, są następujące:

$$P=0, \qquad 2Q-R(\alpha+\beta)-2\delta=0.$$

Napiszmy że są one prostopadłe do płaszczyzny stycznej (52); mamy, zachowując oznaczenia n⁰ 6 i spostrzegając, że

$$Saa''=\rho\rho''+\rho'^2-\sigma^2,$$

$$\alpha+\beta=\frac{2\rho}{\rho'},$$

$$4\rho\rho'-2(\alpha+\beta)(\rho\rho''+\rho'^2-\sigma^2)-2(\alpha+\beta)\sigma^2+(\alpha+\beta)^2\sigma\sigma'=0.$$

Równanie pierwsze pokazuje nam, że wierzchołek w zagadnieniu musi być punktem środkowym, co jest zresztą widoczne geometrycznie, ponieważ powierzchnie (S) i (H) mają ten sam punkt środkowy. Drugie równanie, z uwagi na pierwsze, przybiera postać

$$\rho'\rho''=\sigma\sigma',$$

albo

$$\rho'^2-\sigma^2=\text{const.}$$

Otóż, powierzchnie szukane są to powierzchnie, których parametr rozmieszczenia jest stały.

W szczególności, jeżeli hyperboloida ściśle styczna jest stale obrotowa, z koniecznością znajdujemy przypadek poprzedni. Ale zachodzi warunek dodatkowy:

$$a''^2+b''^2+c''^2=\rho''^2.$$

Łatwo to widzieć, biorąc równanie względem S hyperboloidy; pozostawiam jednak czytelnikowi możność samemu przekonania się w tem, i nie będę dalej zatrzymał się nad tym przedmiotem.

14. Powróćmy do czworoboku (Ω), aby uwydatnić inne przypadki szczególne.

Żądajmy, naprzykład, aby dwa boki były równoległe. Będą to koniecznie dwa boki kolejne, o których zawsze można założyć że są niemi (D) i (d). Wówczas (d) będzie styczną asymptotyczną w punkcie w nieskończoności prostej (D). Ta prosta otrzymuje się, jeżeli położymy $m=0$ w równaniach (55). Następnie mamy:

$$tn=-2\lambda, \tag{67}$$

$$n'=1+\frac{\mu}{\lambda}n+\frac{\nu}{\lambda}n^2. \tag{68}$$

Aby prosta (d) była styczną hyperasymptotyczną, trzeba i wystarcza aby λ równało się zeru. Aby prosta (D_1) zlewała się z (D) i (d_1) z (d), przyczem żeby proste (d) i (D) zostawały zawsze równoległe, trzeba i wystarcza, aby było $\lambda=\mu=0$. To daje nam oczywiście rozwiązanie następującego zagadnienia:

Znaleść dwie powierzchnie prostoliniowe (S) i (s), których tworzące są parami równoległe, przytem takie, że hyperboloida, ściśle styczna do powierzchni (S) według jakiejkolwiek tworzącej, jest ściśle styczna do powierzchni (s) według tworzącej równoległej.

Proste (D) i (d) są zawsze, według założenia, równoległe; szukajmy warunku, aby dwa inne boki (D_1) i (d_1) również były równoległe.

Posługując się równaniami (56) i (65), znajdujemy jedyny warunek:

$$n\left(t'-2\nu+t\lambda+\frac{t^2n}{2}\right)+t=0,$$

który, z uwagi na (67), możemy napisać w postaci:

$$n'=1+\frac{\lambda'}{\lambda}n+\frac{\nu}{\lambda}n^2.$$

icm©

Porównywając z równaniem (68), widzimy, że **warunkiem koniecznym i dostatecznym szukanym jest warunek** $\lambda' = \mu$. Gdy ten warunek jest spełniony, wówczas wszystkie kwadryki, dotykające ich obwiedni według prostej (D) i prostej równoległej, nie mogą dotykać tej obwiedni według dwóch innych prostych, w przeciwnym razie te ostatnie również byłyby równoległe.

RÉSUMÉ.

Ce travail est consacré au développement des quelques résultats intéressants qui se rattachent à la déformation infiniment petite des surfaces réglées et que M. Haag a résumés dans ses deux Notes, présentées à l'Académie des Sciences (Comptes Rendus, 1909).

En partant des équations de la surface (S) non développable, comprenant, comme on sait, les trois fonctions θ_1, θ_2, θ_3 qui sont les trois solutions d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = k\theta,$$

je cherche d'abord quelles doivent être les fonctions θ_1, θ_2, θ_3, k pour que la surface (S) soit une surface réglée, dont les génératrices aient pour paramètre α. Parmi les autres en s'appuyant sur ces considérations, je déduis le théorème suivant: les équations de la surface réglée (S) la plus générale n'ayant pas de plan directeur et rapportée à ses lignes asymptotiques sont les équations (D); les équations (E) définissent la surface (S_1) la plus générale qui corresponde à (S) avec orthogonalité des éléments (Goursat).

L'étude des propriétés géométriques qu'on peut déduire des formules que je donne, je commence par la question suivante: Une surface réglée (S) étant donnée, y a-t-il plusieurs manières de mettre ses équations sous la forme (D)? Cette question admet la réponse suivante: La surface (S) étant donnée sous la forme (D), la manière la plus générale de l'obtenir sous la même forme consiste à faire le changement de variables et à remplacer les fonctions a, b, c par les autres fonctions (voir le texte polonais, page 125).

J'étudie les propriétés projectives de la surface (S) et je cherche les conditions pour que la surface possède deux droites et pour qu'elle soit du second degré etc.

Dans la deuxième partie de mon travail je passe en revue les conséquences diverses qui découlent des formules (D), (E) et des propriétés générales de la déformation infiniment petite des surfaces.

M. HAMBURGER.

O rozwiązaniach osobliwych równań różniczkowych algebraicznych rzędu pierwszego. [1)]

Sur les solutions singulières des équations différentielles algébriques du premier ordre.

Rozwiązania osobliwe równania różniczkowego algebraicznego rzędu pierwszego

$$f(x, y, y') = 0,$$

jeżeli istnieją, czynią jak wiadomo, zadość równaniu wyróżnikowemu

$$\Delta(x, y) = 0,$$

wynikającemu przez eliminacyę funkcyi y' z dwóch równań

$$f(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

W **ogólności** wszakże żaden z utworów, zawartych w równaniu wyróżnikowem, nie przedstawia rozwiązania równania różniczkowego, wogóle przeto nie istnieje żadne rozwiązanie osobliwe, gdyż, aby takie rozwiązanie istniało, musi być spełnione, równanie warunkowe, dające się łatwo ustanowić.

Jeżeli, z drugiej strony, idąc za **Lagrangem**, który pierwszy wyjaśnił związek pomiędzy rozwiązaniem osobliwem a ogólnem, wyjdziemy z równania pierwotnego

$$F(x, y, C) = 0,$$

gdzie C oznacza stałą dowolną, to równanie wyróżnikowe

---

1) Przekład rozprawy ogłoszonej w tomie **112**-ym czasopisma: „Journal für die reine und angewandte Mathematik" (rok 1893). *S. D.*