Les surfaces (S) qui correspondent à la solution particulière ainsi déterminée, ont pour équation générale

$$\frac{1-C^2}{2}\log z = \log r + Cw;$$

elles rentrent dans la famille des surfaces spirales qui ont été signalées par M. A. Buhl dans son mémoire: Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures (Nouvelles Annales, octobre 1908, § 7); en appliquant les formules de M. Buhl, on trouve pour projections des asymptotiques deux familles de spirales logarithmiques

$$\frac{dr^2}{r^2} + 2C\,d\omega\,\frac{dr}{r} + d\omega^2 = 0$$

(en écartant le cas singulier $C = i$, pour lequel la surface dégénérerait en un plan imaginaire).

STRESZCZENIE.

W pracy niniejszej, którą obszernie podaję w języku francuskim, zajmuję się zagadnieniem, postawionem po raz pierwszy przez Ribaucoura, które brzmi tak: Dana jest powierzchnia drugiego stopnia i dowolna płaszczyzna; wyznaczyć na tej powierzchni sieć sprzężoną tak, aby ta sieć rzutowała się na płaszczyźnie danej według sieci ortogonalnej.

Rozwiązanie tego zagadnienia było ogłoszone w czasopiśmie Nouvelles Annales de Mathématiques (1872 r., str. 177), a niedawno matematyk francuski E. Turrière w rozprawie p. t.: Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan, ogłoszonej w Bulletin de la Société mathématique de France, uogólnił zagadnienie Ribaucoura, zastępując kwadrykę powierzchnią algebraiczną ogólną. Matematyk ten staje na punkcie widzenia teoryi pewnych równań liniowych o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, posiadających trzy rozwiązania, z których trzecie jest sumą kwadratów dwóch pierwszych. Rozwiązuję w tej pracy uogólnione zagadnienie Ribaucoura na drodze zupełnie odmiennej od tej, którą obiera E. Turrière, stosując rozważania przeważnie czysto-geometryczne.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

O niesumowalnych szeregach potęgowych i trygonometrycznych.

Sur les séries de puissances et les séries trigonométriques non sommables.

Lusin zbudował szereg potęgowy o spółczynnikach dążących do zera, rozbieżny w każdym punkcie koła zbieżności [1]. Zadaniem niniejszej noty jest uogólnienie powyższego wyniku, przez udowodnienie następującego twierdzenia:

Do każdej liniowej metody sumowania szeregów dobrać można szereg potęgowy o spółczynnikach, dążących do zera, niesumowalny według tej metody w żadnym punkcie koła zbieżności, oraz szereg trygonometryczny również o spółczynnikach, dążących do zera, niesumowalny według powyższej metody w żadnym punkcie przedziału $(0, 2\pi)$, prócz może punktów pewnego zbioru o mierze zero.

Wyjaśnimy przedewszystkiem, co rozumieć będziemy przez metodę liniową sumowania [2].

Macierz nieskończona

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{1}$$

określa metodę liniową sumowania (którą nazwiemy „metodą $(\mathfrak{A})$“), jeżeli zbieżność ciągu $\{u_n\}$ pociąga za sobą zbieżność ciągu $\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u_k\right\}$ sumo-

[1]) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. **32**, str. 386—390.

[2]) Steinhaus, O pewnem uogólnieniu pojęcia granicy. Prace mat.-fizyczne, t. **22** str. 121—134.

walnym według tej metody nazywamy:

ciąg $\{v_n\}$, wtedy, gdy ciąg $\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} v_k\right\}$ jest zbieżny;

szereg $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$, wtedy, gdy ciąg $\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left(\sum_{m=1}^{k} v_m\right)\right\}$ jest zbieżny.

Na to, aby macierz $(\mathfrak{A})$ określała metodę sumowania w ustalonem powyżej znaczeniu, muszą być spełnione następujące warunki: [1])

α) $$\lim_{n=\infty} a_{nk} = 0, \qquad k = 1, 2 \dots$$

β) $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqq M, \qquad n = 1, 2 \dots \quad M \text{ jest pewną stałą,}$$

γ) $$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1.$$

Zadanie nasze sprowadza się do zbudowania szeregu

$$\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r x^r \tag{2}$$

spełniającego warunek:

$$\lim_{r=\infty} \alpha_r = 0 \tag{3}$$

i niesumowalnego według metody $(\mathfrak{A})$ w żadnym punkcie koła $|x| = 1$.

Określamy ciągi: liczb $\{\varphi_s\}$, wielomianów $\{P_s(x)\}$ i przedziałów $\{I_s\}$, $s = 1, 2 \dots$ w następujący sposób:

$$\varphi_1 = 0 \tag{4}$$

$$\varphi_{s+1} = \varphi_s + \frac{(2s+1)\pi}{3s(s+1)} = \varphi_s + \frac{\pi}{3s} + \frac{\pi}{3(s+1)}, \tag{5}$$

$$P_s(x) = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{e^{-m\varphi_s i} x^m}{\sqrt{s}}; \tag{6}$$

wreszcie I_s jest przedziałem na okręgu koła $z = e^{i\varphi}$, określonym przez nierówności:

$$\varphi_s - \frac{\pi}{3s} \leqq \varphi \leqq \varphi_s + \frac{\pi}{3s}, \tag{7}$$

[1]) O. Toeplitz, Prace mat.-fizyczne, tom **22**, str. 113—119.

przyczem, wobec związków (5), przedziały I_s, następując po sobie w kierunku przeciwnym obrotowi strzałki zegarowej, stykają się końcami. Długość przedziału I_s wynosi $\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{s}$, ponieważ zaś szereg

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{s}$$

jest rozbieżny, więc przedziały I_s nakrywają okrąg koła $z = e^{i\varphi}$ nieskończoną liczbę razy, przytem bez luk.

Przypuśćmy teraz, że punkt $e^{\varphi i}$ należy do przedziału I_s; jest wtedy:

$$P_s(e^{i\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{s-1} e^{m(\varphi-\varphi_s)i} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{s-1} \cos m(\varphi - \varphi_s) + \frac{i}{\sqrt{s}} \sum_{m=0}^{s} \sin m(\varphi - \varphi_s), \tag{8}$$

a więc:

$$|P_s(e^{i\varphi})| \geqq \left|\sum_{m=0}^{s-1} \cos m(\varphi - \varphi_s)\right|. \tag{9}$$

Z drugiej strony:

$$|m(\varphi - \varphi_s)| \leqq \frac{m\pi}{3s} < \frac{\pi}{3}, \quad m = 0, 1 \dots, s-1, \tag{10}$$

$$\cos m(\varphi - \varphi_s) > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\sum_{m=0}^{s-1} \cos m(\varphi - \varphi_s) > \frac{s}{2}; \tag{12}$$

z uwagi więc na (9):

$$|P_s(e^{i\varphi})| > \frac{s}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s}}{2}. \tag{13}$$

Ponieważ każdy punkt $e^{i\varphi}$ należy do nieskończonej mnogości przedziałów I_s, więc każdemu takiemu punktowi odpowiada nieskończenie wiele wskaźników, dla których spełnia się nierówność (13).

Położmy teraz:

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{n-1} |a_{mk}|, \tag{14}$$

$$R_{mn} = \sum_{k=n}^{\infty} |a_{mk}|, \tag{15}$$

$$\beta_m = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}. \tag{16}$$

Ponieważ macierz nasza ma czynić zadość warunkom Toeplitza (α) — (γ), będzie więc:

$$\lim_{m=\infty} \beta_m = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{m=\infty} S_{mn} = 0. \tag{18}$$

dla każdego naturalnego n, i wreszcie:

$$\lim_{n=\infty} R_{mn} = 0 \tag{19}$$

dla każdego naturalnego m.

Określamy dalej dwa rosnące ciągi liczb naturalnych

$$\{r_s\}, \tag{20}$$

$$s = 1, 2 \ldots$$

$$\{n_s\} \tag{21}$$

w następujący sposób:

Po pierwsze:

$$r_1 = 1, \quad n_1 = 1.$$

Po drugie: niech będzie $s > 1$ i przypuśćmy, że liczby $r_1, r_2 \ldots, r_{s-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-1}$ zostały określone. Jako r_s weźmiemy najmniejszą liczbę naturalną spełniającą warunki:

$$r_s \geqq r_{s-1} + s, \tag{22}$$

$$R_{n_i r_s} \leqq \frac{1}{s^3 2^{s-i}} \tag{23}$$

dla $i = 1, 2 \ldots s-1$.

Wobec (19) warunkom powyższym oczywiście zadośćuczynić można.

Mając już r_s, określamy n_s przez warunki następujące:
n_s ma być pierwszą liczbą naturalną, dla której:

$$n_s > n_{s-1}, \tag{24}$$

$$S_{n_s r_s + s} \leqq \frac{1}{s^3}, \tag{25}$$

$$|\beta_{n_s}| < \frac{1}{s^3}; \tag{26}$$

liczba taka istnieje ze względu na (17) i (18).

Tworzymy teraz szereg potęgowy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k = \sum_{s=1}^{\infty} x^{r_s} P_s(x) \tag{27}$$

i udowodnimy, że szereg ten czynić będzie zadość warunkom zadania.

Do każdej liczby naturalnej k należy jedno i tylko jedno s takie, że:

$$r_s \leqq k < r_{s+1}. \tag{28}$$

Jeżeli teraz

$$r_s \leqq k < r_s + s, \tag{29}$$

to:

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-(k-r_s)\varphi_s i}; \tag{30}$$

jeżeli natomiast:

$$r_s + s \leqq k < r_{s+2}, \tag{31}$$

to będzie:

$$\alpha_k = 0. \tag{32}$$

Jest więc w każdym razie

$$\lim_{k=\infty} \alpha_k = 0, \tag{33}$$

t. zn. spółczynniki naszego szeregu dążą do zera.

Oznaczmy przez $\sigma_k(x)$ k-tą sumę cząstkową szeregu (27), przez $T_s(x)$ sumę

$$\sum_{m=1}^{s} x^{r_m} P_m(x). \tag{34}$$

Jest wtedy:

$$\sigma_k(x) = T_s(x) \tag{35}$$

dla

$$r_s + s \leqq k < r_{s+1}, \tag{36}$$

$$T_s(e^{i\varphi}) \leqq \sum_{m=1}^{s} m = \frac{s(s+1)}{2} \leqq s^2, \tag{37}$$

a więc:

$$|\sigma_k(x)| \leqq s^2 \tag{38}$$

dla $|x| \leqq 1$ oraz $k < r_{s+1}$.

Chcąc udowodnić niesumowalność szeregu (27) w punktach $|x| = 1$ według metody $(\mathfrak{A})$, wystarczy wykazać rozbieżność ciągu

$$\{A_n(x)\}, \qquad n = 1, \ldots, \qquad |x| = 1, \tag{39}$$

gdzie:

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sigma_k(x). \tag{40}$$

Połóżmy:

$$B_s(x) = A_{n_s}(x), \tag{41}$$

przyczem n_s są to liczby ciągu (21).

Rzecz prosta, możemy się ograniczyć do dowodu rozbieżności ciągu $\{B_s(x)\}$.

Wykażemy w tym celu, że:

$$\lim_{s=\infty} |B_s(x) - T_s(x)| = 0 \qquad |x| = 1. \tag{42}$$

Mamy, dla $s>1$, oraz $|x|=1$:

$$B_s(x) - T_s(x) = B_s^{(1)}(x) + B_s^{(2)}(x) + B_s^{(3)}(x) \tag{43}$$

przyczem:

$$B_s^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{r_s+s-1} a_{n_s k}\sigma_k(x), \tag{44}$$

$$B_s^{(2)}(x) = \sum_{k=r_{s+1}}^{\infty} a_{n_s k}\sigma_k(x), \tag{45}$$

$$B_s^{(3)}(x) = -T_s(x) + \sum_{k=r_s+s}^{r_{s+1}-1} a_{n_s k}\sigma_k(x). \tag{46}$$

W sumie $B_s^{(1)}(x)$ jest $k < r_{s+1}$: stosując nierówności (38) oraz (25), otrzymujemy:

$$|B_s^{(1)}(x)| \leqq s^2 . S_{n_s r_s} \leqq \frac{s^2}{s^3} = \frac{1}{s}. \tag{47}$$

Dalej mamy:

$$B_s^{(2)}(x) = \sum_{m=s+1}^{\infty} C_s^{(m)}(x), \tag{48}$$

gdzie:

$$C_s^{(m)}(x) = \sum_{k=r_m}^{r_{m+1}-1} a_{n_s k}\sigma_k(x). \tag{49}$$

W sumie (49) jest $k < r_{m+1}$, a więc na mocy (38):

$$|\sigma_k(x)| < m^2, \tag{50}$$

$$|C_s^{(m)}(x)| < m^2 \sum_{k=r_m}^{r_{m+1}-1} |a_{n_s k}| \leqq m^2 R_{n_s r_m}. \tag{51}$$

Ponieważ $m > s$, więc można zastosować nierówności (23), co daje:

$$|C_s^{(m)}(x)| < \frac{m^2}{m^3} \cdot \frac{1}{2^{m-s}} < \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{2^{m-s}}, \tag{52}$$

$$|B_s^{(2)}(x)| < \frac{1}{s} \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-s}} = \frac{1}{s}. \tag{53}$$

Z kolei przystępujemy do $B_s^{(3)}(x)$. Mamy dla $B_s^{(3)}(x)$:

$$r_s + s \leqq k < r_{s+1}, \tag{54}$$

więc:

$$\sigma_k(x) = T_s(x), \tag{55}$$

$$B_s^{(3)}(x) = -T_s(x) + T_s(x) \sum_{r_s+s-1}^{r_{s+1}-1} a_{n_s k} =$$

$$= -T_s(x) + T_s(x) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_s k} - \sum_{k=1}^{r_s+s-1} a_{n_s k} - \sum_{k=r_{s+1}}^{\infty} a_{n_s k} \right\} \tag{56}$$

$$= -T_s(x) + T_s(x) + T_s(x) \left\{ \beta_{n_s} - \sum_{k=1}^{r_s+s-1} a_{n_s k} - \sum_{k=s_{r+1}}^{\infty} a_{n_s k} \right\},$$

a więc:

$$|B_s^{(3)}(x)| \leqq |T_s(x)| \left\{ |\beta_{n_s r_s}| + S_{n_s r_s+s} + R_{n_s r_{s+1}} \right\}. \tag{57}$$

stosując nierówności (23), (25), (26), (37), mamy:

$$|B_s^{(3)}(x)| \leqq s^2 \left\{ \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2(s+1)^3} \right\} < \frac{3}{s}. \tag{58}$$

Łącząc nierówności (47), (53), (58), otrzymujemy:

$$|B_s(x) - T_s(x)| \leqq \frac{5}{s}, \qquad s > 1, \qquad |x| = 1; \tag{59}$$

związek (42) jest udowodniony.

Mamy dalej dla $|x| = 1$:

$$T_s(x) - T_{s-1}(x) = x^{r_s} P_s(x), \tag{60}$$

$$|T_s(x) - T_{s-1}(x)| = |x^{r_s}|\,|P_s(x)| = |P_s(x)|. \tag{61}$$

Dla każdego punktu na kole zbieżności zachodzi dla nieskończenie wielu wskaźników s nierówność (13), a więc i nierówność:

$$|T_s(x) - T_{s-1}(x)| \geqq \frac{\sqrt{s}}{2}.$$

Wynika stąd, że ciąg $\{T_s(x)\}$, a więc, na mocy (42) i ciąg $\{B_s(x)\}$ jest rozbieżny w każdym punkcie koła $|x| = 1$. Szereg zatem (27) nie może być sumowalny metodą $(\mathfrak{A})$ w żadnym punkcie tego koła c. b. d. o.

Rozumiejąc teraz przez α_k spółczynniki szeregu (27) i przypuszczając że elementy macierzy $(\mathfrak{A})$ są rzeczywiste, kładziemy:

$$\alpha_k = \gamma_k + i\,\delta_k, \tag{63}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{k\varphi i} = U(\varphi) + i\,V(\varphi), \tag{64}$$

gdzie:

$$U(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_i \cos k\varphi - \delta_k \sin k\varphi), \tag{65}$$

$$V(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k \cos k\varphi + \gamma_k \sin k\varphi). \tag{66}$$

Weźmy pod uwagę szereg trygonometryczny

$$S(c, \varphi) = U(\varphi) + c\,V(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [(\gamma_k + c\,\delta_k) \cos k\varphi + (c\,\gamma_k - \delta_k) \sin k\varphi], \tag{67}$$

przyczem c jest stałą rzeczywistą, czyniącą zadość nierówności:

$$\frac{1}{2} \leqq c \leqq 1. \tag{68}$$

Oznaczmy przez $\mathcal{E}_c$ zbiór punktów φ przedziału $(0, 2\pi)$ w których szereg (67) jest sumowalny metodą $(\mathfrak{A})$. Jeżeli $c_1 \neq c_2$, wówczas $\mathcal{E}_{c_1}$ i $\mathcal{E}_{c_2}$ nie mają punktów wspólnych; istotnie w punkcie takim sumowalne byłyby szeregi

$$\frac{c_2 S(c_1, \varphi) - c_1 S(c_2, \varphi)}{c_2 - c_1} = U(\varphi),$$

oraz

$$\frac{S(c_2, \varphi) - S(c_1, \varphi)}{c_2 - c_1} = V(\varphi),$$

a więc i szereg (27), co jest niemożliwe.

Istnieje conajmniej przeliczalny zbiór mnogości zawartych w $(0, 2\pi)$, mających miarę dodatnią i nie mających parami żadnych punktów wspólnych. Z pośród więc wartości $\frac{1}{2} \leqq c \leqq 1$ można wybrać taką, dla której miara zbioru $\mathcal{E}_c$ równa się zeru. Między więc szeregami $S(c, \varphi)$ istnieją takie, które są sumowalne według metody $(\mathfrak{A})$ conajwyżej dla punktów pewnej mnogości o mierze 0.

Warszawa 5/VII 1916.

RÉSUMÉ.

On sait qu'une matrice infinie

$$(\mathfrak{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

assujetie aux trois conditions indiquées par M. Toeplitz[1]), definit un procédé de sommation linéaire, que nous appellerons „procédé $(\mathfrak{A})$".

Je démontre le resultat suivant:

Il existe une série de puissances à coefficients tendant vers zéro non summable par le procédé $(\mathfrak{A})$ dans aucun point situé sur le cercle de convergence.

Définition de la sèrie:

On pose:

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_{s+1} = \varphi_s + \frac{\pi}{3s} + \frac{\pi}{3(s+1)}$$

$$P_s(x) = \sum_{m=0}^{s-1} \frac{e^{-m\varphi_s i} x^m}{\sqrt{s}}.$$

Nous formons ensuite deux suites d'entiers croissants:

$$\{r_s\} \quad \text{et} \quad \{n_s\}$$

de manière suivante:

1) $r_1 = n_1 = 1$,

2) $r_1 \ldots r_{s-1}$, $n_1 \ldots n_{s-1}$ étant défini, r_s est le premier nombre entier remplissant les conditions:

---

[1]) Prace matematyczno-fizyczne t. **22**, p. 113—117.

$$r_s \geqq r_{s-1} + s; \quad \sum_{k=r_s}^{\infty} |a_{n_i k}| \leqq \frac{1}{s^3 2^{s-1}}, \quad i = 1, 2 \ldots s-1$$

n_s est le premier entier remplissant les conditions:

$$n_s > n_{s-1}; \quad \sum_{k=1}^{r_s+s-1} |a_{n_s k}| \leqq \frac{1}{s^3}; \quad \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_s k} - 1 \right| < \frac{1}{s^3}.$$

Il existe toujours de nombres assujetis aux conditions indiquées en vertu de conditions de M. Toeplitz.

La série de puissances:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{s=1}^{\infty} x^{r_s} P_s(x)$$

est la série cherchée. La démonstration est basée sur les remarques suivantes:

a) Posons $\sum_{m=1}^{s} x^{r_m} P_m(x) = T_s(x)$

pour tout point $x = e^{i\varphi}$, il existe une infinité d'indices s pour lesquels:

$$|T_s(x) - T_{s-1}(x)| = |P_s(x)| \geqq \frac{\sqrt{s}}{2},$$

b) On a pour $|x| = 1$, en posant:

$$\sigma_k(x) = \sum_{m=1}^{k} a_m x^m$$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sigma_j(x)$$

a relation:

$$\lim_{s=\infty} |A_{n_s}(x) - T_s(x)| = 0.$$

Je remarque ensuite, qu'en posant:

$$\sum_{s=1}^{\infty} e^{r_s \varphi i} P(e^{\varphi i}) = U(\varphi) + i V(\varphi),$$

$$S(c, \varphi) = U(\varphi) + c V(\varphi)$$

et en supposant réels les a_{ik} et c, il y a, parmi les séries trigonométriques $S(c, \varphi)$, de séries non sommables par le procédé ($\mathfrak{A}$) dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ sauf peut être dans un ensemble de points de mesure nulle.

ROMUALD WITWIŃSKI.

Badanie z teoryi odkształceń nieskończenie małych powierzchni prostoliniowych.

Étude sur la théorie de la déformation infiniment petite des surfaces réglées.

W „Sprawozdaniach Akademii Paryskiej" z roku 1909 matematyk francuski J. Haag ogłosił dwie noty, zawierające nader interesujące rezultaty z teoryi odkształcenia nieskończenie małego powierzchni prostoliniowych. Wyniki badań Haaga są podane tylko w streszczeniu i nie wyświetlają wcale samej metody poszukiwań autora.

W rozprawie niniejszej zamierzam rozwinąć i uzupełnić wyniki badań Haaga, szerzej przedstawić niektóre rezultaty poszczególne, nawiązując swe poszukiwania do pięknych badań Darboux'a.

I.

1. Równania każdej powierzchni nierozwijalnej (S), odniesionej do linij asymptotycznych, możemy napisać w postaci [1])

$$\begin{aligned}
x &= \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta, \\
y &= \int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta, \qquad \text{(A)} \\
z &= \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta,
\end{aligned}$$

[1]) G. Darboux, Théorie des surfaces, t. VI, p. 24.