einer Axe durch die Schnitte mit den entsprechenden Diagonalen an der anderen Axe zu definieren; der Punkt $(-n, 0)$ ist demnach z. B. gegeben als Schnitt der beiden Geraden

$$y = 0, \qquad y = x + n.$$

Da auf diese Weise jede Axenskala, ohne ihren Charakter zu ändern, nur rückwärts verlängert wird, eine nun mögliche rückwärtige projektive Verschiebung des Koordinatensystems, aber in jedem Falle der Einzelbetrachtung alle benötigten Koordinaten zu positiven gestalten lässt, so bleibt unser Hauptresultat, das die Linearität der Gleichung der Geraden festlegt, von der Einführung auch negativer Koordinaten unberührt, w. z. b. w.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, hierbei zu erwähnen, dass alle vorangegangenen Überlegungen und Konstruktionen mit ganz unwesentlichen (durch die Idealität der Grenzpunkte bedingten) Änderungen auch dann ausgeführt werden können, wenn für das fundamentale Viereck $OABI$ ein Euklidisches Quadrat genommen wird. Das gewonnene System ist dann mit dem zugehörigen rechtwinkligen Cartesischen identisch, während das hier durchgeführte System natürlich auch als Zentralprojektion eines solchen Cartesichen aufgefasst werden kann.

§ 3. Das allgemeine räumliche Netz.

Der Übergang zum Irrationalen erfolgt entweder durch axiomatische Festlegung der eindeutigen Existenz von Grenzpunkten zu allen konvergenten Prozessen im Bereiche der rationalen Zahlen (Klein), oder in der Festlegung der Existenz schlechtweg in Verbindung mit dem — hier projektiv verallgemeinerten — Archimedischen Prinzip (Hilbert). Man kann auch die Gesamtheit aller Punkte, die für einen solche im gewöhnlichen Sinne des Wortes konvergenten Prozess als Grenzen in Betracht kommen können und i. a. einen Nicht-Achimedischen Bereich bilden, als einen einzigen existenten „Vollpunkt" auffassen. In allen diesen Fällen wird nicht nur die Linearität der Gleichung der Geraden, sondern auch die Gültigkeit des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie eine notwendige Folge der gegebenen Axiome und Definitionen sein.

Der Übergang zum Raume vollzieht sich endlich in der Weise, dass eine beliebige räumlich gegebene Gerade von zwei Ecken eines festen Fundamentaltetraeders aus auf die gegenüberliegenden Koordinatenebenen projiziert wird, worauf sie in diesen Ebenen zwei lineare Gleichungen erhält. Aus der Linearität der Geraden—folgt dann leicht diejenige der Ebenen-gleichung.

ROMUALD WITWIŃSKI

Sur le problème de Ribaucour.

O zagadnieniu Ribaucoura.

---

1. Ribaucour proposa la question suivante: Etant donnée une surface du second degré et un plan quelconque, trouver, sur cette surface, un réseau conjugué se projetant, sur le plan donné, suivant un réseau orthogonal.[1]

Une solution de cette question fut publiée dans les Nouvelles Annales de 1872 (p. 177 et suiv.). Le plan donné étant pris pour plan horizontal Oxy, soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation, par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$ (Oz étant vertical), de la surface donnée (S); soient p, q, r, s, t les dérivées partielles des deux premiers ordres de la cote z, par rapport à x et à y; le réseau demandé (C) a pour équation

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq};$$

il se projette, par suite, horizontalement, suivant les courbes intégrales de l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{r-t}{s}\,\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Pour une quadrique à centre, cette équation différentielle n'est autre que celle des coniques homofocales; de même, pour un paraboloïde, l'équa-

[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques 1869, p. 563, n° 975.

tion est celle des paraboles homofocales; pour le cône, on obtient des cercles concentriques et les rayons émanant de leur centre commun. L'auteur de la solution publiée est amené à envisager le cas d'indétermination de l'équation différentielle: les deux équations aux dérivées partielles du second ordre

$$s = 0, \qquad r - t = 0,$$

sont alors simultanément vérifiées; leur intégrale commune est un paraboloïde de révolution d'axe vertical.

Tout ceci est parfaitement exact. Mais il n'en est pas de même de l'affirmation suivante concernant le cas du paraboloïde de révolution précédent: „le système conjugué demandé se compose des parallèles et des méridiens (ou des lignes de courbure) et se projette sur le plan donné suivant un système de cercles concentriques et de droites passant par le centre commun" (p. 180). Le réseau conjugué, formé par les lignes de courbure, est bien un réseau répondant à la question, puisque le paraboloïde de révolution est une surface moulure très particulière; mais il n'est pas le seul: tout réseau conjugué du paraboloïde de révolution se projette suivant un réseau orthogonal sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, ainsi que je vais l'établir.

2. Dans un memoire intitulé: Etude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan, inséré dans le Bulletin de la Société mathématique de France M. Turrière a fait une étude générale de ces réseaux, sur une surface quelconque; il s'est principalement placé au point de vue de la théorie de certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, dont la propriété caractéristique est d'admettre trois solutions telles que la troisième soit la somme des carrés de deux premières; ce mathématicien se proposait surtout de mettre en évidence l'analogie avec la théorie des lignes de courbure et de déterminer toutes les surfaces qui sont ainsi associées à un réseau orthogonal, donné dans le plan horizontal Oxy. Je vais dans cette Note développer des considérations d'un ordre plus élémentaire et plus géometrique.

Il s'agit donc de résoudre, pour une surface quelconque (S), le problème que Ribacour proposa pour les quadriques; je désignerai par (C) les courbes du réseau demandé.

Les deux courbes (C), projetées horizontalement, qui se croisent en un point m du plan Oxy ont nécessairement pour tangentes les axes de symétrie de la conique qui est la projection horizontale de l'indicatrice de la surface (S) au point M dont m est la projection. En d'autres termes, les courbes (C) projetées bissectent les lignes asymptotiques projetées. Ces propriétés sont analogues à celles des lignes de courbure. Elles permettent de former de nouveau l'équation différentielle des courbes (C) projetées: l'indicatrice, en projection horizontale, ayant pour équation

$$r\,(X-x)^2 + 2s\,(X-x)\,(Y-y) + t\,(Y-y)^2 = 1\,,$$

l'équation quadratique de ses axes de symétrie est:

$$s\,(Y-y)^2 - s\,(X-x)^2 + (r-t)\,(X-x)\,(Y-y) = 0\,;$$

de cette équation, découle immédiatement l'équation différentielle précédemment indiquée des projections des courbes (C).

Considérons une quadrique générale; soit (Γ) la conique qui est le contour apparent de cette quadrique sur le plan horizontal Oxy; les projections des asymptotiques sont alors les deux tangentes menées de m à la conique (Γ): les courbes (C) sont, par conséquent, les coniques homofocales à la conique (Γ).

Ceci a lieu lorsque le contour apparent est une véritable conique; celle-ci peut dégénérer tangentiellement en deux points autres que les points cycliques du plan Oxy; elle peut même dégénérer en un point double: c'est alors le cas du cône du second degré et, plus généralement d'ailleurs, d'un cône quelconque; pour un cône; le réseau projeté se compose de cercles concentriques et de droites émanant de leur centre commun.

Mais dans le cas singulier où le contour apparent se compose des deux points cycliques, il y a évidemment indétermination; la quadrique est alors un paraboloïde de révolution d'axe vertical. Toute section plane se projette suivant un cercle; l'indicatrice se projette donc suivant un cercle et tout réseau conjugué de ce paraboloïde se projette suivant un réseau orthogonal.

3. J'ai écrit plus haut que, dans le cas où la surface (S) est une surface moulure, attachée à un cylindre vertical, le réseau (C), conjugué sur elle et qui se projette horizontalement suivant un réseau orthogonal, est celui des lignes de courbure de la surface moulure.

La propriété réciproque est presque évidente: pour que le réseau (C) soit précisément le réseau des lignes de courbure de la surface (S), il faut que celle-ci soit une moulure quelconque associée à un cylindre vertical.

De même, pour que le réseau conjugué (C) contienne, soient les lignes de niveau, soient les lignes de plus grande pente de (S), il faut et il suffit qu'on se trouve dans le cas, qui précède, d'une surface moulure.

Ces considérations s'appliquent au cas particulier où la surface moulure est une surface de révolution autour d'un axe vertical; le cas du paraboloïde de révolution étant excepté, le réseau conjugué (C) est alors formé par les parallèles et les méridiens de la surface de révolution.

La notion de parallèles et de méridiens d'une surface de révolution fut généralisée par Minding et étendue à une surface quelconque: les parallèles sont les courbes le long desquelles les normales à la surface font un angle constant avec la direction Oz; les méridiens sont de même les lignes le long desquelles les normales à la surface se projettent sur Oxy suivant les droites parallèles. En d'autres termes, les parallèles de la surface se projettent suivant les courbes d'équations

$$p^2 + q^2 = \text{const.},$$

et les méridiens, suivant les courbes d'équations

$$\frac{p}{q} = \text{const.}$$

Si l'on impose aux parallèles et aux méridiens la condition d'être conjugués, la surface (S) est nécessairement une moulure. Montrons qu'il en est également ainsi lorsqu'on impose la condition, que le réseau (C) contienne soit les parallèles de la surface (S), soit les méridiens de cette même surface.

Dans le premier cas, on déduit des deux équations

$$p\,dp + q\,dq = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy},$$

la condition

$$p\,dx + q\,dy = dz = 0;$$

celle-ci exprime que les parallèles sont confondues avec les lignes de niveau de la surface (S). Dans le second cas, de même, on déduit de l'équation différentielle des méridiens

$$p\,dq - q\,dp = 0,$$

la relation

$$p\,dy - q\,dx = 0,$$

qui exprime l'identité de ces méridiens et des lignes de plus grande pente de la surface. Dans l'un ou l'autre cas, la surface est donc une surface moulure.

4. Dans le cas d'une surface (S) intégrale de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = r + t = 0,$$

les lignes asymptotiques de cette surface (S) se projettent sur le plan horizontal Oxy suivant un réseau orthogonal. La détermination des lignes conjuguées (C) d'une telle surface est donc identique à la révolution d'un pro-

blème de trajectoires obliques, sous l'angle de 45°, dans le plan Oxy. En se reportant alors à la page 92 des Nouvelles Annales de février 1909, on voit que, l'équation des asymptotiques pouvant être ramenée à la forme

$$\int\sqrt{U''}\,du \pm \int\sqrt{V''}\,dv = \text{const.},$$

celle des courbes (C) est alors

$$\int\sqrt{U''}\,du \pm i\int\sqrt{V''}\,dv = \text{const.};$$

les quadratures à effectuer sont les mêmes dans les deux cas.

Plus particulièrement, dans le cas des surfaces d'équations

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = r^K \sin(\omega - \omega_0),$$

considérées aux pages 95 et 396 du Tome cité, les projections des courbes (C) sont des spirales sinusoïdes.

5. Le cas particulier où la surface intégrale de l'équation de Laplace est de révolution, c'est-à-dire celui de la surface engendrée par la courbe logarithmique

$$z = \log r,$$

est à signaler: les asymptotiques sont alors, en projection, les spirales logarithmiques

$$r\,d\omega = \pm\,dr,$$

trajectoires, sous l'angle de 45°, des droites qui émanent de l'origine O ou des cercles de centre O; les courbes (C) sont ces droites et ces cercles puisque la surface est de révolution.

Considérons de même le cas où la surface est un hélicoïde gauche à plan directeur horizontal; soit

$$z = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$$

l'équation de cet hélicoïde (S); c'est une surface intégrale de l'équation de Laplace; ses asymptotiques se projettent sur Oxy suivant les droites émanant de O et suivant les cercles de centre O. Les courbes (C) projetées horizontalement sont nécessairement les spirales logarithmiques

$$r\,d\omega = \pm\,dr.$$

Il y a donc un certain rapprochement à faire entre la surface de révolution précédente et l'hélicoïde gauche à plan directeur. Plus généralement, il y a lieu d'associer deux à deux les surfaces intégrales de l'équation de Laplace. Pour la surface (S_1) d'équation

$$z = U - V,$$

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = i\,\frac{v-u}{2};$$

les asymptotiques et les courbes (C) ont, en projection horizontale, pour équations différentielles respectives,

$$U''\,du^2 - V''\,dv^2 = 0,$$

$$U''\,du^2 + V''\,dv^2 = 0;$$

si l'on associe donc à (S_1) la surface (S_2) d'équation

$$z = U + V,$$

les projections des asymptotiques de l'une des surfaces (S_1) et (S_2) sont les projections des courbes (C) de l'autre surface, et inversement.

6. Au paragraphe 5, j'ai été amené à considérer le réseau formé par les cercles concentriques et leurs rayons, et le réseau formé par les spirales logarithmiques

$$r\,d\omega = \pm\,dr.$$

Dans le mémoire inséré dans le Bulletin de la Société mathématique, M. Turrière a déterminé et défini géométriquement, comme surface diamétrale d'un cône et d'une surface de révolution, la surface la plus générale qui peut être associée au premier de ces réseaux (§ VII du mémoire cité). Je vais consacrer la fin du présent article à la détermination de la surface (S) la plus générale, dont le réseau projeté (C) est celui des spirales logarithmiques

$$r\,d\omega = \pm\,dr.$$

En coordonnées ordinaires, cette surface (S) est l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qu'on obtient en posant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y},$$

dans l'équation différentielle des courbes (C) projetées; cette équation prend la forme:

$$\frac{r-t}{s} + \frac{4xy}{x^2-y^2} = 0.$$

Il faut donc intégrer ou transformer cette équation.

Il est préférable de procéder de la façon suivante:

Partons des équations

$$r\,e^{-\omega} = e^{2u},$$

$$r\,e^{\omega} = e^{2v},$$

des deux familles de spirales logarithmiques; ce réseau orthogonal et isothermique donne à l'élément linéaire du plan la forme

$$ds^2 = 2\,e^{2(u+v)}\,(du^2 + dv^2);$$

l'équation linéaire qu'il convient de lui associer est donc

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial v} = 0;$$

c'est une équation à invariants égaux, puisque le réseau de spirales est isothermique; on a

$$h = k = 1;$$

l'équation est donc réductible à la forme canonique

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial v} = \theta_1.$$

On reconnaît l'une des formes qu'il est possible de donner à l'équation des télégraphistes. Ainsi donc la détermination des surfaces telles que le réseau (C) projeté soit celui de l'hélicoïde gauche à plan directeur est réductible à l'intégration de l'équation des télégraphistes.

En cherchant une solution particulière de la forme

$$\theta = U + V,$$

on obtient l'hélicoïde lui-même. En cherchant une solution particulière de la forme

$$\theta = U \,.\, V,$$

on trouve

$$\theta = e^{Au+Bv}\,\text{const.};$$

A et B étant deux constantes liées par la relation

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 1;$$

on posera donc

$$A = \frac{2}{1+C}, \qquad B = \frac{2}{1-C},$$

C étant une constante arbitraire.

Les surfaces (S) qui correspondent à la solution particulière ainsi déterminée, ont pour équation générale

$$\frac{1-C^2}{2}\log z = \log r + Cw;$$

elles rentrent dans la famille des surfaces spirales qui ont été signalées par M. A. Buhl dans son mémoire: Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures (Nouvelles Annales, octobre 1908, § 7); en appliquant les formules de M. Buhl, on trouve pour projections des asymptotiques deux familles de spirales logarithmiques

$$\frac{dr^2}{r^2} + 2C\,d\omega\,\frac{dr}{r} + d\omega^2 = 0$$

(en écartant le cas singulier $C = i$, pour lequel la surface dégénérerait en un plan imaginaire).

STRESZCZENIE.

W pracy niniejszej, którą obszernie podaję w języku francuskim, zajmuję się zagadnieniem, postawionem po raz pierwszy przez Ribaucoura, które brzmi tak: Dana jest powierzchnia drugiego stopnia i dowolna płaszczyzna; wyznaczyć na tej powierzchni sieć sprzężoną tak, aby ta sieć rzutowała się na płaszczyźnie danej według sieci ortogonalnej.

Rozwiązanie tego zagadnienia było ogłoszone w czasopiśmie Nouvelles Annales de Mathématiques (1872 r., str. 177), a niedawno matematyk francuski E. Turrière w rozprawie p. t.: Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan, ogłoszonej w Bulletin de la Société mathématique de France, uogólnił zagadnienie Ribaucoura, zastępując kwadrykę powierzchnią algebraiczną ogólną. Matematyk ten staje na punkcie widzenia teoryi pewnych równań liniowych o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, posiadających trzy rozwiązania, z których trzecie jest sumą kwadratów dwóch pierwszych. Rozwiązuję w tej pracy uogólnione zagadnienie Ribaucoura na drodze zupełnie odmiennej od tej, którą obiera E. Turrière, stosując rozważania przeważnie czysto-geometryczne.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

O niesumowalnych szeregach potęgowych i trygonometrycznych.

Sur les séries de puissances et les séries trigonométriques non sommables.

Lusin zbudował szereg potęgowy o spółczynnikach dążących do zera, rozbieżny w każdym punkcie koła zbieżności [1]. Zadaniem niniejszej noty jest uogólnienie powyższego wyniku, przez udowodnienie następującego twierdzenia:

Do każdej liniowej metody sumowania szeregów dobrać można szereg potęgowy o spółczynnikach, dążących do zera, niesumowalny według tej metody w żadnym punkcie koła zbieżności, oraz szereg trygonometryczny również o spółczynnikach, dążących do zera, niesumowalny według powyższej metody w żadnym punkcie przedziału $(0, 2\pi)$, prócz może punktów pewnego zbioru o mierze zero.

Wyjaśnimy przedewszystkiem, co rozumieć będziemy przez metodę liniową sumowania [2].

Macierz nieskończona

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{1}$$

określa metodę liniową sumowania (którą nazwiemy „metodą $(\mathfrak{A})$"), jeżeli zbieżność ciągu $\{u_n\}$ pociąga za sobą zbieżność ciągu $\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}u_k\right\}$ sumo-

[1] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 32, str. 386—390.

[2] Steinhaus, O pewnem uogólnieniu pojęcia granicy. Prace mat.-fizyczne, t. 22 str. 121—134.