CH. H. MÜNTZ.

Z Geometryi rzutowej analitycznej.

Zur projektiven analytischen Geometrie.

Ogólna Geometrya analityczna przestrzeni trójwymiarowej, w której równania prostych i płaszczyzn są równaniami liniowemi, daje się uzasadnić na podstawie samych tylko aksyomatów „rzutowych", bez jakiegokolwiek pośrednictwa pojęć równoległości, ciągłości i kongruencyi lub też ruchu. Uzasadnienie metryczne takiej Geometryi podali już byli Möbius, v. Staudt i Hesse; F. Klein[1] pierwszy zwrócił uwagę[2] na charakter graficzny tej teoryi, umożliwiający czysto rzutowe uzasadnienie jej metryki. Dotychczasowe wszakże przedstawienia tej teoryi nie posiadają, jak sądzimy, należytej przejrzystości elementarnej, i dlatego uważamy za pożądane uzasadnienie możliwie proste, dostosowane do klasycznej budowy czystej Arytmetyki.

Zakładamy przytem tylko aksiomaty przestrzeniowe połączenia i porządkowania i wynikającą z nich bezpośrednio teoryę punktów i promieni harmonicznych[3].

§ 1. Siatka płaska dodatnio-całkowito-liczbowa.

Niechaj na płaszczyźnie (ob. rysunek) będzie dany trójkąt elementarny OAB i tegoż punkt wewnętrzny I_1. Obierzmy O za punkt zerowy, OA i OB za osi X i Y, I_1 za punkt jednostkowy układu, który ustanowić mamy. Nazwijmy prostą AB prostą graniczną, prostą OI_1 zaś wraz z przedłużeniem do punktu I na prostej AB — przekątną główną.

Prowadzimy teraz kolejno: pierwszą linię x z punktu B przez punkt I_1 do punktu A_1 na osi X, oraz pierwszą linię y z punktu A

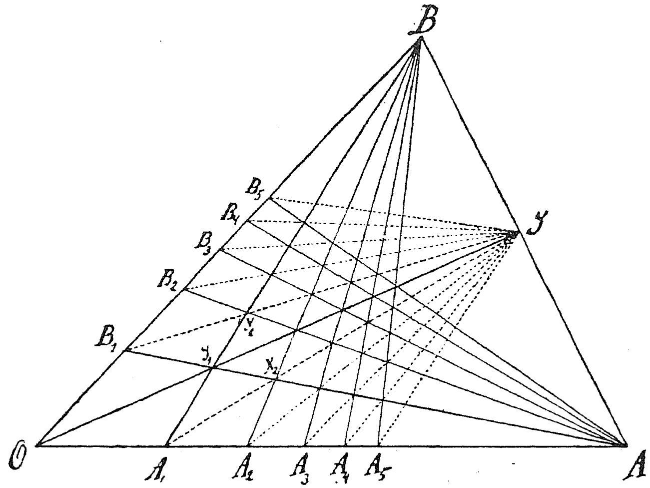
---

[1] Math. Annalen, tomy 4 i 6.

[2] F. Klein, Math. Annalen, t. 37; F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, T. 2, 1.

[3] Vgl. M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie.

przez I_1 do punktu B_1 na osi Y; (pierwszą) przekątną x, t. j. linię $A_1 I$ i pierwszą przekątną y, t. j. linię $B_1 I$, które niechaj przecinają linie spółrzędne AB_1 i BA_1 odpowiednio w punktach X_2, Y_2. Według teoryi



Rys. 1.

punktów harmonicznych druga linia x, t. j. linia BX_2, i druga linia y t. j. linia AY_2, przetną się w punkcie I_2 na przekątnej głównej, mianowicie w czwartym punkcie harmonicznym do punktu O względem punktów I_1 i I. Na obu osiach te drugie linie spółrzędne wycinają czwarte punkty harmoniczne do punktu O względem punktów A_1 i A (punkt A_2) i odpowiednio względem punktów B_1 i B (punkt B_2).

Tym sposobem podstawowe działanie arytmetyczne, mianowicie dodawanie, otrzymuje formę geometryczną. Niechaj p-ta linia y, t. j. linia AB_p, i przekątna x, t. j. linia $A_1 I$, spotykają się w punkcie X_{p+1}, p-ta linia t. j. linia BA_p, i przekątna y, t. j. linia $B_1 I$, w punkcie Y_{p+1}; wtedy linie spółrzędne BX_{p+1} i AY_{p+1} przecinają się w punkcie I_{p+1} przekątnej głównej, który jest czwartym punktem harmonicznym do punktu I_{p+1} względem punktów I_p i I; a na osiach spółrzędnych linie te wycinają odpowiednio punkty A_{p+1}, B_{p+1}, jako czwarte punkty harmoniczne do punktu A_{p-1} względem A_p i A, oraz odpowiednio do punktu B_{p-1} względem B i B. Tym sposobem powstaje cała, t. j. dowolnie daleko rozwinięta siatka płaska dodatnio-całkowito-liczbowa, czyli siatka główna z linij spółrzędnych BA_m i AB_n.

Teraz możemy m-tej linii x t. j. linii AB_m, przyporządkować równanie $x = m$, n-tej linii y, t. j. linii AB_n, równanie $y = n$; punktowi zaś przecięcia tych linij spółrzędne m, n. Widzimy, że w tych definicyach genetycznych nie odgrywają żadnej roli pojęcia metryczne ani jakiekolwiek wielkościowe inne (długości, dwustosunki i t. d.); liczby całkowite dodatnie, podobnie, jak w klasycznej budowie Arytmetyki, są tu pojęciami porządkowemi (ordynalnemi), nie zaś wielkościowemi (kardynalnemi).

Na przekątnej głównej mamy teraz szereg punktowy

$$O\,(\equiv I_0),\quad I_1,\quad I_2 \ldots\quad I_{p-1},\quad I_p,\quad I_{p+1}, \ldots,\quad I\,(\equiv I_\infty)$$

tego rodzaju, że każdy z jej punktów jest czwartym punktem harmonicznym do ostatniego (I) względem dwóch sąsiednich. Każdy szereg punktowy tego rodzaju nazywać będziemy skalą harmoniczną.

Rzut skali harmonicznej z jakiegokolwiek punktu zewnętrznego na jakąkolwiek prostą, tego punktu nie zawierającą, daje znowu skalę harmoniczną. Na każdej przeto linii spółrzędnej punkty z drugiemi spółrzędnemi $p-1$, p, $p+1$, ∞ dają czwórkę harmoniczną. Spółrzędne punktów (p, p) przekątnej głównej OI — na razie mowa tylko o punktach naszej sieci dodatnio-całkowito-liczbowej — spełniają, oczywiście, równanie $x = y$, punkty $(p+1, p)$ przekątnej-x, t. j. linii $A_1 I$, równanie $x = y + 1$. Jak z powyższego wypływa, druga przekątna x, t. j. linia IA_2, jako czwarty promień harmoniczny do IO względem promieni IA_1 i IA, zawierać będzie wszystkie punkty ze spółrzędnemi $p+2$, p, a więc tej drugiej przekątnej x trzeba będzie przyporządkować równanie $x = y + 2$. Podobnież spółrzędne punktu pierwszego przekątnej y, t. j. linii IB_1, spełniają równanie $y = x + 1$, spółrzędne drugiej przekątnej y t. j. linii IB_2 równanie $y = x + 2$. I tu przejście od n do $n+1$ jest ogólnie możliwe, a więc i-tej przekątnej x, t. j. linii IA_1, lub odpowiednio k-tej przekątnej y, t. j. linii IB_k i odpowiadają równanie $x = y + i$, i odpowiednio $y = x + k$, i można zamiast prostych równania te wprowadzać do rozważania, skoro przez x i y rozumiemy liczby dodatnie i całkowite.

Przenosimy teraz punkt jednostkowy I_1 do I_p, a więc do innego punktu skali na przekątnej głównej, nie zmieniając zresztą elementów podstawowych (punktu zerowego, osi i prostej granicznej). Wtedy zamiast pierwszych linij spółrzędnych występują proste $x = p$, $y = p$, zamiast dwóch pierwszych przekątnych osiowych odpowiednio dalsze przekątne $x = y + p$, $y = x + p$. Jeżeli zbudujemy, podobnie jak poprzednio, nową siatkę główną — przyczem można się stale trzymać tak rysunku jak i uzyskanych równań, — to siatka ta będzie jakoby p-krotnie powiększoną siatkę pierwotną, albowiem należeć do niej będą wszystkie punkty ze spółrzędnemi podzielnemi przez p i tylko takie punkty. Wynika stąd, że szereg punktowy

$$O(\equiv I_0),\quad I_p,\quad I_{2p},\ldots\quad I_{np},\quad I(\equiv I_\infty)$$

da nam skalę harmoniczną, podobnież jak i jego rzuty na obie osi $O\ldots A_{np}\ldots A$, lub odpowiednio $O\ldots B_{np}\ldots B$; dalej, że na każdej linii spółrzędnych dają takąż skalę punkty z uzupełniającemi spółrzędnemi $0,\ p,\ 2p\ldots\ np\ldots\infty$.

Obierzmy jakikolwiek punkt $(i,\ k)$ siatki pierwotnej jako nowy punkt zerowy, punkt bezpośrednio po nim następujący $(i+1,\ k+1)$ na odpowiedniej przekątnej $(x+k=y+i)$ jako nowy punkt jednostkowy, przyczem prosta graniczna ze swojemi punktami A, B na osi ma pozostać bez zmiany. W tem przesunięciu rzutowem zmienia się sieć głównie tylko o tyle, o ile odpadają punkty ze spółrzędnemi $i'<i$ lub odpowiednie $k'<k$, w każdym jednak razie mogą one być skonstruowane wstecz jako punkty harmoniczne do punktów danych. Ponieważ do nowej sieci zastosować można tężsame rozumowania jak do poprzedniej, widzimy przeto, że na każdej linii spółrzędnej punkty ze spółrzędnemi uzupełniającemi

$$p,\quad p+q,\quad p+2q\ldots,\ p+nq\ldots,\ \infty$$

tworzą skalę harmoniczną.

Wybieramy jakikolwiek punkt sieci $(p,\ 0)$ na osi x i do należącej do niego przekątnej $x=y+p$ szukamy czwartego promienia harmonicznego względem osi x $(y=0)$ i odpowiedniej linii x $(x=p)$. Te trzy promienie wycinają na jakiejkolwiek linii y $(y=q)$ trzy punkty ze spółrzędnemi $p+q$, ∞, p, i według tego, co wyżej udowodniono, szukany czwarty punkt harmoniczny ma spółrzędną x równą $p-q$. Na szukanym przeto promieniu leżą wszystkie punkty siatkowe o spółrzędnych $p-q$, q, które zatem ogólnie czynią zadość równaniu $x+y=p$. Równanie to możemy przeto poczytać wprost za równanie rozważanego promienia, p-tej przyprzekątnej.

W konstrukcyi sieci głównej wyszliśmy z trójkąta podstawowego OAB z punktem jednostkowym I_1; wtedy punkty siatkowe $(p,\ p)$ przekątnej głównej wystąpiły jako przecięcia odpowiednich linij spółrzędnych. Niechaj teraz punkt siatkowy $(i,\ k)$ o spółrzędnych, które przyjmujemy na razie za niespółdzielne, będzie nowym punktem jednostkowym. Powiększona nowa skala osi x obejmuje punkty ze spółrzędnemi $0,\ i,\ 2i,\ldots\ ni,\ldots\ \infty$; punkty odpowiedniej skali na osi y mają jako spółrzędne y: $0,\ k,\ 2k,\ldots\ nk,\ldots\infty$ a punkty $(0,\ 0)$, $(i,\ k)$, $(2i,\ 2k\ldots\ (ni,\ nk),\ldots\ (\infty\, i,\ \infty k)$, leżące na nowej przekątnej głównej, odpowiadają, oczywiście, równaniu $kx=iy$. Jeżeli spółrzędne nowego punktu jednostkowego nie są niespółdzielne; lecz jak np. pi, pk mają największy wspólny dzielnik p, to wyjdźmy znów z punktu $(i,\ k)$: przekątna główna, idąca do tego punktu, obejmuje też punkt dany $(pi,\ pk)$ i uzyskane poprzednio równanie jest prawdziwe i w tym przypadku. Jeżeli więc dokonamy jakiegokolwiek przesunięcia rzutowego (patrz wyżej) układu spółrzędnych, to uzyskane wyniki można będzie przenieść na nowy układ. Będzie zatem ogólnie:

$$k\,(x-p)=i\,(y-q)$$

równaniem prostej, przeprowadzonej od punktu $(p,\ q)$ do innego punktu $(p+i,\ q+k)$, przyczem na razie wszystkie dane wielkości mają oznaczać liczby całkowite dodatnie.

Niechaj będą teraz dwa dowolne punkty siatkowe. Przesuwając odpowiednio układ, możemy, bez zmiejszenia ogólności, przyjąć, że jeden z tych punktów znajduje się na osi x; niechaj nim będzie punkt $(p,\ q)$; punkt drugi ma wtedy położenie $(r,\ k)$. Jeżeli $r=p$, to oczywiście $x=p$ jest równaniem prostej łączącej, jeżeli $r>p$, to mamy do czynienia z przypadkiem, poprzednio omówionym. Niechaj będzie zatem $r=p-i$ w założeniu: $0<i<p$. Rozważamy przytem punkt $(p+i,\ k)$ i prostą łączącą ten punkt z punktem $(p,\ 0)$, t. j. prostą $k\,(x-p)=iy$. Szukamy do tej prostej czwartego promienia harmonicznego względem osi x $(y=0)$ i linii x $(x=p)$. Każda linia spółrzędna $y=nk$ zostaje przecięta przez te trzy proste w punktach o spółrzędnych x: $p+ni$, ∞, p, do których czwartym punktem harmonicznym (p. w.) jest punkt $(p-ni,\ nk)$. Ogół uzyskanych w ten sposób punktów daje nam następujące równanie szukanego promienia, zawierającego także punkty dane $(p,\ 0)$, $(p-i,\ k)$:

$$k\,(p-x)=i\,y\,.$$

I tu można przyjąć najprzód i i k jako niespółdzielne, aby następnie przejść do przypadku ogólnego dla wykazania, że istotnie wszystkie punkty siatkowe szukanej prostej dają się odtworzyć przez uzyskane równanie. Wracając do układu pierwotnego, widzimy, że prosta, łącząca punkty $(p,\ q)$, $(p-i,\ q+k)$, jest dana przez równanie:

$$k\,(p-x)=i\,(y-q)\,.$$

Wnosimy stąd z łatwością, że we wszystkich możliwych przypadkach równanie linii prostej siatki głównej jest liniowe względem spółrzędnych tej siatki.

§ 2. Sieć wymierna płaska.

Łączymy punkt zerowy z punktem $(n,\ 1)$ sieci dodatnio-całkowitoliczbowej i otrzymujemy tym sposobem prostą $ny=x$. Na tej prostej spółrzędne $x=0,\ 1,\ldots\ p\ldots\infty$ dają skalę harmoniczną, którą z punktu A osi X rzućmy na przekątną główną $y=x$. Powstanie wtedy na tej przekątnej głównej — a przez rzut z punktów A i B także i na obu osiach — nowa skala harmoniczna taka, że każdy przedział $p\ldots\ p+1$ skali pierwotnej obejmuje n

przedziałów skali nowej; dla każdego n skala ta jest jednoznacznie oznaczona. Jeżeli oznaczymy przez (ξ, η) spółrzędne dodatnio-całkowito-liczbowe względem nowej skali, to powrót do układu pierwotnego uskutecznia się przy pomocy wzorów:

$$x=\frac{\xi}{n}, \qquad y=\frac{\eta}{n}.$$

W spółrzędnych tej nowej, niejako n-krotnie zgęszczonej sieci głównej, równanie każdej prostej tej sieci będzie, według powyższego, liniowe; otrzymujemy równania trzech typów:

$$i\eta=k\xi; \quad i(\eta-q)=k(\xi-p; \quad i(\eta-q)=k(p-\xi).$$

W spółrzędnych pierwotnych należy położyć $\xi=nx$, $\eta=ny$, rozważane równania pozostają przeto we wszystkich przypadkach liniowemi. Lecz ponieważ na n można przyjąć każdą dowolną liczbę dodatnią całkowitą, przeto po pierwsze: określamy przez to sieć płaską dodatnio-wymierną, i po drugie: utrzymuje się liniowość równania każdej prostej i w tej rozszerzonej sieci.

Pozostaje jeszcze uwzględnić punkty idealne, które ewentualnie istnieją zewnątrz obranego trójkąta podstawowego. Przy pomocy uzyskanych spółrzędnych dodatnich można te punkty idealne wprost zdefiniować (Klein); lecz można też, wyszedłszy z faktu geometrycznego, że punkty idealne pod względem rzutowym zachowują się jak punkty realne (Pasch), zupełnie usunąć z pod rozważania pytanie o istnieniu tych punktów, i rozważanie dalsze prowadzić w ten sposób, jak gdyby wszystkie dokonywane konstrukcye prowadziły do punktów rzeczywiście istniejących. Będziemy trzymali się tego ostatniego prostszego poglądu. Wystarczy wtedy określić spółrzędne ujemne dla sieci całkowito-liczbowej, gdyż przez to załatwi się zarazem sprawa sieci wymiernej przez możliwość dowolnie daleko idącego zgęszczania sieci.

Obok linij spółrzędnych sieci głównej uzyskaliśmy przedewszystkiem pęk całkowito-liczbowy przekątnych

$$x=y+n, \quad y=x+n; \quad n=0, 1, \ldots p \ldots \infty.$$

Każda linia spółrzędna zostaje przecięta przez ten pęk według skali harmoniczne; nie zmieni się to, gdy promienie pęku występują dowolnie daleko poza trójkąt podstawowy. Daje to możność zdefiniowania punktów ze spółrzędnemi $-n$ na jednej osi za pomocą przecięć z odpowiedniemi przekątnemi na drugiej. Punkt $(-n, 0)$ jest np. dany jako przecięcie dwu prostych

$$y=0, \qquad y=x+n.$$

Ponieważ tym sposobem każda skala na osi, nie zmieniając swego charakteru, zostaje przedłużona wstecz, możliwe zaś przesunięcie wsteczne układu spółrzędnych pozwala w każdym przypadku pojedyńczego rozważania zamienić potrzebne spółrzędne na dodatnie, to nasz wynik główny, stwierdzający liniowość prostej, pozostaje nietkniętym przy wprowadzeniu spółrzędnych ujemnych c. b. d. o.

Może nie będzie zbytecznem nadmienić przytem, że wszystkie powyższe rozważania i konstrukcye przy bardzo nieistotnych modyfikacyach (spowodowanych idealnością punktów granicznych) dają się przeprowadzić i wtedy, jeżeli jako czworokąt podstawowy $OABI$ przyjmiemy kwadrat euklidesowy. Układ, jaki wtedy otrzymamy, będzie identyczny z układem prostokątnym dekartowskim, gdy układ powyżej przeprowadzony może być naturalnie uważamy za rzut środkwy takiego układu dekartowskiego.

§ 3. Ogólna sieć przestrzeniowa.

Przejście do niewymierności uskutecznia się albo przez ustanowienie aksyomatyczne istnienia jednoznacznego punktów granicznych dla wszystkich procesów zbieżnych w obszarze liczb wymiernych (Klein), albo przez ustanowienie istnienia tego wprost w połączeniu—z uogólnioną tu rzutowo—zasadą Archimedesa (Hilbert). Można też ogół wszystkich punktów, które mogą tu być rozważane jako granice w zwykłem znaczeniu tego wyrazu procesów zbieżnych i w ogólności tworzą obszar niearchimedesowy, uważać za jedyny istniejący „punkt pełny". We wszystkich tych przypadkach nietylko liniowość równania prostej, lecz i stosowalność twierdzenia podstawowego Geometryi rzutowej, jest wynikiem konieczym danych aksiomatów i definicyj.

Przejście do przestrzeni uskutecznia się ostatecznie w ten sposób, że prostą dowolną daną w przestrzeni, rzucamy z dwóch wierzchołków stałego czworościanu podstawowego na przeciwległe płaszczyzny spółrzędne, przez co otrzymujemy w tych płaszczyznach dwa równania liniowe. Z liniowości równania prostej wynika wtedy łatwo liniowość równania płaszczyzny.

Es ist für den Aufbau der Geometrie von prinzipieller Bedeutung, dass auf Grund der „projektiven" Axiome allein, ohne jegliche Vermittlung von Parallelitäts-Stetigkeits-und Kongruenz bzw. Bewegungsbegriffen, bereits eine allgemeine analytische Geometrie des dreidimensionalen Raumes durchgeführt werden kann, in der die Gleichungen der Geraden und Ebenen linear ausfallen. Die metrische Begründung einer solchen Geometrie geht auf Möbius, v. Staudt und Hesse zurück; F. Klein betonte zuerst[1]) den

[1]) Math. Annalen, Bdd. 4 u. 6.

graphischen Charakter dieser Theorie und deren Tragweite, die letzten Endes eine rein projektive Begründung der Metrik ermöglicht.

Indessen glauben wir, dass die bisher gegebenen Darstellungen der Theorie[1] nicht den nötigen Grad von elementarer Durchsichtigkeit besitzen. Wir halten es daher für erwünscht, eine möglichst einfache Begründung zu geben, deren Sinn im folgerichtigen Anschluss an den klassischen Aufbau der reinen Arithmetik besteht.

Vorausgesetzt werden dabei nur die räumlichen Axiome der Verknüpfung und Anordnung, sowie die aus ihnen unmittelbar folgende[2] Theorie der harmonischen Punkte und Strahlen.

§ 1. Das positiv-ganzzahlige ebene Gitter.

In der Ebene der Betrachtung (vgl. Figur) mögen das Fundamentaldreieck OAB und ein innerer Punkt desselben I_1 gegeben sein. Wir wählen O als Nullpunkt, OA und OB als X-bzw. Y-Axe, I_1 als Einheitspunkt des festzulegenden Systems; AB möge dabei die Grenzgerade heissen, OI_1 mit der Verlängerung bis zu einem Punkte I auf AB — die Hauptdiagonale.

Wir ziehen jetzt nacheinander: die erste x-Linie von B über I_1 nach einem Punkte A_1 auf der X-Axe, ebenso die erste y-Linie von A über I_1 nach dem Punkte B_1 der Y-Axe; die (erste) x-Diagonale $A_1 I$ und die (erste) y-Diagonale $B_1 I$, welchs die Koordinatenlinien AB_1 und BA_1 beziehungsweise in den Punkten X_2, Y_2 schneiden mögen. Nun werden sich nach der Lehre von den harmonischen Punkten die zweite x-Linie BX_2 und die zweite y-Linie AY_2 in einem Punkte I_2 auf der Hauptdiagonale schneiden, dem vierten harmonischen zu O inbezug auf I_1 und I; auf den beiden Axen schneiden diese zweiten Koordinatenlinien ferner die vierten harmonischen Punkte zu O inbezug auf A_1 und A (Punkt A_2) bzw. B_1 und B (Punkt B_2) aus.

Auf diese Weise ist die fundamentalste arithmetische Operation, die Addition der Eins, in geometrische Form gebracht. Die p-te y-Linie AB_p und die x-Diagonale $A_1 I$ mögen sich im Punkte X_{p+1}, die p-te x-Linie BA_p und die y-Diagonale $B_1 I$ im Punkte Y_{p+1} treffen: es schneiden sich dann die Koordinatenlinien BX_{p+1} und AY_{p+1} in einem Punkte I_{p+1} der Hauptdiagonale, dem vierten harmonischen zu I_{p-1} inbezug auf I_p und I, und es schneiden diese Koordinatenlinien auf den Axen die Punkte A_{p+1} bzw.

[1]) Vgl. F. Klein, Math. Ann., Bd. **37**. F. Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. **11**, 1.

[2]) Vgl. M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie.

die B_{p+1} aus, als vierten harmonischen zu A_{p-1} inbezug auf A_p und A bzw. zu B_{p-1} inbezug auf B_p u. B. Das gesamte, d. h. beliebig weit zu führende positiv ganzzahlige ebene Gitter, das Hauptnetz aus den Koordinatenlinien BA_m, AB_n ist somit festgelegt. Der m-ten x-Linie BA_m können wir jetzt

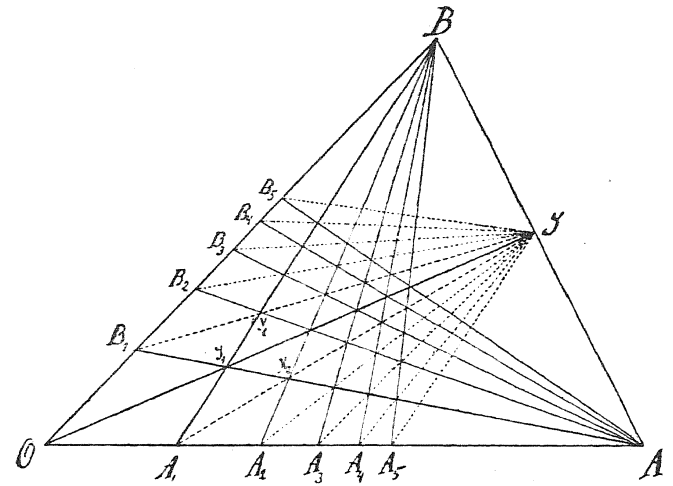


Fig. 1.

die Gleichung $x = m$, der n-ten y-Linie AB_n — die Gleichung $y = n$ zuordnen; ebenso ordnen wir dem Schnittpunkte dieser beiden Linien die Koordinaten m, n zu. Man sieht, dass bei diesen genetischen Definitionen weder metrische noch sonstige Grössenbegriffe (Längen, Doppelverhältnisse etc.) irgendeine Rolle spielen; die ganzen positiven Zahlen bedeuten hier, wie im klassischen Aufbau der Arithmetik, zunächst Ordnungs— (Ordinal), nicht Grössen — (Kardinal)-begriffe.

Auf der Hauntdiagonale haben wir jetzt eine Punktreihe

$$O(\equiv I_0),\ I_1,\ I_2 \ldots\ I_{p-1},\ I_p,\ I_{p+1} \ldots\ I(\equiv I_\infty)$$

von der Art, dass jeder bezeichnete Punkt der vierte harmonische zum letzten (I) inbezug auf die beiden benachbarten ist; jede Punktreihe dieser Art möge eine harmonische Skala heissen.

Die Projektion einer harmonischen Skala von irgendeinem äusseren Punkte auf irgendeine jenen Punkt nicht enthaltende Gerade liefert wieder eine ebensolche Skala. Auf jeder Koordinatenlinie liefern daher die Punkte mit den zweiten Koordinaten $p-1$, p, $p+1$, ∞ ein harmonisches Quadrupel. Die Koordinaten der Punkte (p, p) der Hauptdiagonale OI — vorläufig ist hierbei nur von den Punkten unseres positiv-ganzzahligen Netzes die Rede — erfüllen offenbar die Gleichung $x=y$, die Punkte $(p+1, p)$ der x-Diagonale $A_1 I$ die Gleichung $x=y+1$; wie aus dem obigen hervorgeht, wird nun die zweite x-Diagonale IA_2 als vierter harmonischer Strahl zu IO inbezug auf IA_1 und IA alle Punkte mit den Koordinaten $p+2$, p enthalten, man wird daher dieser zweiten x-Diagonale die Gleichung $x=y+2$ zuordnen müssen, und ebenso erfüllen die Koordinaten der Punkte der ersten y-Diagonale IB_1 die Gleichnng $y=x+1$, diejenigen der zweiten y-Diagonale IB_2 — die Gleichung $y=x+2$. Auch hier ist der Schritt von n zu $n+1$ allgemein möglich, es entsprechen also der i-ten x-Diagonale IA_i bzw. der k-ten y-Diagonale IB_k die Gleichungen $x=y+i$ bzw. $y=x+k$, und es dürfen diese Gleichungen anstelle der Geraden selbst in die Betrachtung gezogen werden, solange unter x und y zunächst positiv ganzzahlige Werte verstanden werden.

Wir verlegen jetzt den Einheitspunkt von I_1 nad I_p, also nach einem anderen Skalenpunkte der Hauptdiagonale, ohne weitere Änderung der sonstigen fundamentalen Elemente (Nullpunkt, Axen und Grenzgerade). Anstelle der ersten Koordinatenlinien treten dann die Geraden $x=p$, $y=p$, anstelle der beiden ersten Axendiagonalen die entsprechend weiteren $x=y+p$, $y=x+p$. Konstruiert man nun in gleicher Weise wie ursprünglich ein neues Hauptnetz, wobei man sich beständig ebenso an die Figur wie an die gewonnenen Gleichungen halten kann, so erscheint dieses Hauptnetz gewissermassen als p-fache Vergrösserung des ursprünglichen, indem sich alle Punkte mit durch p teilbaren Koordinaten, und nur diese, in das neue Netz einordnen. Es folgt daraus, dass die Punktreihe

$$O(\equiv I_0),\quad I_p,\quad I_{2p}\ldots\quad I_{np},\ldots,\quad I(\equiv I_\infty)$$

eine harmonische Skala liefert, ebenso wie deren Projektionen auf beide Axen: $O\ldots A_{np}\ldots A$ bzw. $O\ldots B_{np}\ldots B$; ferner, dass auf jeden Koordinatenlinie überhaupt die Punkte mit den ergänzenden Koordinaten 0, p, $2p\ldots np\ldots,\infty$ eine solche Skala ergeben.

Man wähle nun irgendeinen Punkt (i, k) des ursprünglichen Netzes als neuen Nullpunkt, den ihm auf der zugehörigen Diagonale $(x+k=y+i)$ nächstfolgenden Punkt $(i+1, k+1)$ als neuen Eindeitspunkt, während die Grenzgerade mit ihren Axenpunkten A, B unverändert bleiben möge. Bei dieser projektiven Verschiebung ändert sich das Hauptnetz nur insofern, als die Punkte mit den Koordinaten $i'<i$ bzw. $k'<k$ zum Fortfall

kommen — allerdings können sie dann als harmonische Elemente zu den gegebenen auch rückwärts konstruiert werden. Da im neuen Netz die gleichen Betrachtungen wie vorhin angestellt werden können, so ersieht man, dass auf jeder Koordinatenlinie die Punkte mit den ergänzenden Koordinaten

$$p,\quad p+q,\quad p+2q\ldots,\; p+nq,\ldots,\;\infty$$

eine harmonische Skala liefern.

Wir greifen irgend einen Netzpunkt auf der x-Axe heraus $(p, 0)$ und suchen zu der zugehörigen Diagonale $x=y+p$ den vierten harmonischen Strahl inbezug auf die x-Axe $(y=0)$ und die zugehörige x-Linie $(x=p)$. Auf irgendeiner y-Linie $(y=q)$ schneiden diese drei Strahlen die Punkte mit den x-Koordinaten $p+q$, ∞, p aus, und nach dem soeben bewiesenen hat dann der gesuchte vierte harmonische Punkt die x-Koordinate $p-q$. Auf dem gesuchten Strahl liegen also sämtliche Netzpunkte mit den Koordinaten $p-q$, q, die somit allgemein der Gleichung

$$x=y=p$$

genügen. Letztere Gleichung können wir daher direkt als die des betrachteten Strahles, der p-ten Nebendiagonale, ansehen.

In der Konstruktion des Hauptnetzes sind wir vom Fundamentaldreieck OAB und dem Einheitspunkte I_1 ausgegangen; dabei kamen die Netzpunkte (p, p) der Hauptdiagonale als Schnitte der entsprechenden Koordinatenlinien zum Vorschein. Es sei jetzt (i, k) irgendein Netzpunkt, dessen Koordinaten zunächst als teilerfremd vorausgesetzt seien, und der als neuer Einheitspunkt gewählt werden möge. Die vergrösserte neue Skala der x-Axe umfasst die Punkte mit den x-Koordinaten 0, i, $2i\ldots$, $ni\ldots$, ∞; die Punkte der entsprechenden Skala der y-Axe haben ebenso die y-Koordinaten 0, k, $2k\ldots$, $nk\ldots$, ∞ und die auf der neuen Hauptdiagonale liegenden Punkte $(0, 0)$, (i, k) $(2i, 2k),\ldots$, $(ni, nk),\ldots$, $(\infty i, \infty k)$ entsprechen offenbar der Gleichung

$$kx=iy.$$

Wenn der neue Einheitspunkt nicht teilerfremde Koordinaten besitzt, sondern etwa (pi, pk) mit dem grössten gemeinschaftlichen Divisor p, so gehe man wieder vom Punkte (i, k) aus: die nach dem letzteren gehende Hauptdiagonale umfasst dann auch den gegebenen Punkt (pi, pk) und die gewonnene Gleichung ist daher auch für diesen Fall richtig. Wenn nun eine beliebige projektive Verschiebung (v. o.) des Koordinatensystems vorgenommen wird, so lassen sich die gewonnenen Resultate auf das neue System übertragen: es ist daher allgemein

$$k(x-p)=i(y-q)$$

die Gleichung einer Geraden, die von einem Punkte (p, q) nach einem anderen $(p+i, q+k)$ gelegt wird, wobei zunächst wieder alle gegebenen Grössen positive ganze Zahlen bedeuten müssen.

Nun mögen zwei beliebige Netzpunkte gegeben werden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir, indem wir das System entsprechend verschieben, annehmen, dass der eine dieser Punkte sich auf der x-Axe befindet: es sei dies etwa der Punkt $(p, 0)$; der zweite Punkt habe dann die Lage (r, k). Ist $r=p$, so ist offenbar $x=p$ die Gleichung der verbindenden Geraden; ist $r>p$, so hat man es mit dem vorhin erledigten Fall zu tun. Es sei daher $r=p-i$ vorausgesetzt: $0<i<p$; wir betrachten daneben den Punkt $(p+i, k)$ und die Verbindungsgerade des letzteren mit $(p, 0)$, d. h. die Gerade

$$k(x-p)=iy.$$

Zu dieser Geraden suchen wir den vierten harmonischen Strahl inbezug auf die x-Axe $(y=p)$ und die festgelegte x-Linie $(x=p)$. Jede Koordinatenlinie $y=nk$ wird von den drei betrachteten Geraden in den Punkten mit den x-Koordinaten $p+ni$, ∞, p geschnitten, zu denen der vierte harmonische (v. o.) der Punkt $(p-ni, nk)$ ist. Die Gesamtheit der so gewonnenen Punkte liefert für den gesuchten Strahl, der auch die gegebenen Punkte $(p, 0)$, $(p-i, k)$ enthält, die Gleichung

$$k(p-x)=iy.$$

Auch hier kann man zuerst i und k als teilerfremd voraussetzen und dann zum allgemeinen Fall übergehen, um zu zeigen, dass tatsächlich sämtliche Netzpunkte der gesuchten Geraden durch die gewonnene Gleichung wiedergegeben werden. Kehrt man zum ursprünglichen System zurück, so sieht man, dass die Verbindungsgerade zweier Punkte (p, q), $(p-i, q+k)$ gegeben ist durch die Gleichung

$$k(p-x)=i(y-q).$$

Man schliesst jetzt leicht, dass in allen möglichen Fällen die Gleichung einer geraden Linie des Hauptnetzes in den Koordinaten dieses Netzes linear ausfällt.

§ 2. Das rationale ebene Netz.

Wir verbinden den Nullpunkt mit dem Punkte $(n, 1)$ des positivganzzahligen Netzes und erhalten so die Gerade $ny=x$; auf dieser Geraden liefern die Koordinatenlinien $x=0, 1\ldots, p\ldots, \infty$ eine harmonische Skala, die wir dann vom Grenzpunkte A der X-Axe auf die Hauptdiagonale $y=x$

projizieren wollen. Es entsteht so auf dieser Hauptdiagonale — und durch Projektion von A und B aus auch auf den beiden Axen — eine neue harmonische Skala von der Beschaffenheit, dass jedes Intervall $p\ldots p+1$ der ursprünglichen Hauptskala n Intervalle jener neuen umfasst; für jedes n ist überdies diese Skala eindeutig bestimmt. Bezeichnen wir die positiv ganzzahligen Koordinaten inbezug auf die neue Skala mit (ξ, η), so ist nun die Rückkehr zum ursprünglichen System zu bewerkstelligen durch die Formeln

$$x=\frac{\xi}{n}, \qquad y=\frac{\eta}{n}.$$

In den Koordinaten des neuen, gewissermassen n-fach verdichteten, Hauptnetzes wird die Gleichung einer jeden Geraden dieses Netzes nach dem Vorangegangenen linear; man erhält Gleichungen von den drei Typen:

$$i\eta=k\xi; \quad i(\eta-q)=k(\xi-p); \quad i(\eta-q)=k(p-\xi).$$

In den ursprünglichen Koordinaten ist $\xi=nx$, $\eta=ny$ zu setzen, und die betrachteten Gleichungen bleiben demnach in allen Fällen wieder linear. Da aber für die Teilungszahl n jede beliebige positive ganze Zahl genommen werden kann, so ist damit erstens das positiv-rationale ebene Netz definiert, zweitens die Linearität der Gleichung einer jeden Geraden auch in diesem erweiterten Netz gesichert.

Es bleibt nur noch übrig, die für uns zunächst ideal gebliebenen, vielleicht aber existenten Punkte ausserhalb des gewählten Fundamentaldreiecks zu berücksichtigen. Man kann mit Hilfe der gewonnenen positiven Koordinaten diese idealen Punkte direkt definieren (Klein); man kann aber auch, von der geometrischen Tatsache ausgehend, dass ideale Punkte sich in projektiver Hinsicht genau wie reale verhalten (Pasch), die Frage nach der Existenz jener Punkte gänzlich ausschalten und die weiteren Betrachtungen so führen, als ergäben alle vorzunehmenden Konstruktionen wirklich existente Punkte: wir werden uns an diese letztere einfachste Auffassung halten. Es wird nun genügen, die negativen Koordinaten für das ganzzahlige Hauptnetz zu definieren, da das rationale Netz durch die Möglichkeit beliebig weitgehender Verdichtung desselben damit ebenfalls erledigt sein wird.

Wir haben neben den Koordinatenlinien des Hauptnetzes an erster Stelle das ganzzahlige Büschel der Diagonalen

$$x=y+n, \quad y=x+n; \quad n=0, \quad 1\ldots, p\ldots, \infty$$

gewonnen. Jede Koordinatenlinie wird von diesem Büschel in einer harmonischen Skala geschnitten: dies wird sich also nicht ändern, wenn die Strahlen des Büschels aus dem Fundamentaldreieck beliebig weit heraustreten. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die Punkte mit den Koordinaten $-n$ auf einer Axe durch die Schnitte mit den entsprechenden Diagonalen an der anderen Axe zu definieren; der Punkt $(-n, 0)$ ist demnach z. B. gegeben als Schnitt der beiden Geraden

$$y=0, \qquad y=x+n.$$

Da auf diese Weise jede Axenskala, ohne ihren Charakter zu ändern, nur rückwärts verlängert wird, eine nun mögliche rückwärtige projektive Verschiebung des Koordinatensystems, aber in jedem Falle der Einzelbetrachtung alle benötigten Koordinaten zu positiven gestalten lässt, so bleibt unser Hauptresultat, das die Linearität der Gleichung der Geraden festlegt, von der Einführung auch negativer Koordinaten unberührt, w. z. b. w.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, hierbei zu erwähnen, dass alle vorangegangenen Überlegungen und Konstruktionen mit ganz unwesentlichen (durch die Idealität der Grenzpunkte bedingten) Änderungen auch dann ausgeführt werden können, wenn für das fundamentale Viereck $OABI$ ein Euklidisches Quadrat genommen wird. Das gewonnene System ist dann mit dem zugehörigen rechtwinkligen Cartesischen identisch, während das hier durchgeführte System natürlich auch als Zentralprojektion eines solchen Cartesichen aufgefasst werden kann.

§ 3. Das allgemeine räumliche Netz.

Der Übergang zum Irrationalen erfolgt entweder durch axiomatische Festlegung der eindeutigen Existenz von Grenzpunkten zu allen konvergenten Prozessen im Bereiche der rationalen Zahlen (Klein), oder in der Festlegung der Existenz schlechtweg in Verbindung mit dem — hier projektiv verallgemeinerten — Archimedischen Prinzip (Hilbert). Man kann auch die Gesamtheit aller Punkte, die für einen solche im gewöhnlichen Sinne des Wortes konvergenten Prozess als Grenzen in Betracht kommen können und i. a. einen Nicht-Achimedischen Bereich bilden, als einen einzigen existenten „Vollpunkt“ auffassen. In allen diesen Fällen wird nicht nur die Linearität der Gleichung der Geraden, sondern auch die Gültigkeit des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie eine notwendige Folge der gegebenen Axiome und Definitionen sein.

Der Übergang zum Raume vollzieht sich endlich in der Weise, dass eine beliebige räumlich gegebene Gerade von zwei Ecken eines festen Fundamentaltetraeders aus auf die gegenüberliegenden Koordinatenebenen projiziert wird, worauf sie in diesen Ebenen zwei lineare Gleichungen erhält. Aus der Linearität der Geraden—folgt dann leicht diejenige der Ebenen-gleichung.

ROMUALD WITWIŃSKI

Sur le problème de Ribaucour.

O zagadnieniu Ribaucoura.

1. Ribaucour proposa la question suivante: Etant donnée une surface du second degré et un plan quelconque, trouver, sur cette surface, un réseau conjugué se projetant, sur le plan donné, suivant un réseau orthogonal.[1]

Une solution de cette question fut publiée dans les Nouvelles Annales de 1872 (p. 177 et suiv.). Le plan donné étant pris pour plan horizontal Oxy, soit

$$z=f(x, y)$$

l'équation, par rapport à des axes rectangulaires $Oxyz$ (Oz étant vertical), de la surface donnée (S); soient p, q, r, s, t les dérivées partielles des deux premiers ordres de la cote z, par rapport à x et à y; le réseau demandé (C) a pour équation

$$\frac{dx}{dp}=\frac{dy}{dq};$$

il se projette, par suite, horizontalement, suivant les courbes intégrales de l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx}-1=0.$$

Pour une quadrique à centre, cette équation différentielle n'est autre que celle des coniques homofocales; de même, pour un paraboloïde, l'équa-

[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques 1869, p. 563, n° 975.