STEFAN MAZURKIEWICZ.

O pierwszej pochodnej uogólnionej.

Sur la dérivée première généralisée.

Nazywamy jak wiadomo pierwszą pochodną uogólnioną [1] granicę.

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \tag{1}$$

Oznaczmy tę granicę przez $f_a'(x)$.

Zadaniem noty niniejszej jest udowodnienie następującego twierdzenia:

Funkcya ciągła w przedziale (a, b) i mająca w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału pierwszą uogólnioną pochodną równą zeru, jest w uważanym przedziale stała.

Innemi słowy — jedynemi ciągłemi całkami równania:

$$f_a'(x) = 0 \qquad a < x < b \tag{2}$$

są funkcye $f(x) =$ constans.

Dowód. Połóżmy:

$$L(x) = \overline{\lim_{h=0}} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \tag{3}$$

przyczem oczywiście może być:

$$L(x) = +\infty. \tag{4}$$

Niech będzie λ dowolną liczbą dodatnią. Oznaczmy przez A_λ zbiór punktów w których:

$$L(x) > \lambda \tag{5}$$

[1] P. np. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, p. 5.

przez B_λ — zbiór $A_\lambda + A_\lambda'$, to znaczy zbiór punktów należących do A_λ, oraz ich punktów skupienia. Zbiór B_λ jest domknięty.

Udowodnimy przedewszystkiem, że będzie on nigdziegęsty.

Przedział J nazywać będziemy przyporządkowanym liczbie dodatniej k, jeżeli istnieje taka liczba h, dla której:

$$0 < |h| \leqq k \tag{6}$$

oraz:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right| > \lambda \tag{7}$$

jeżeli tylko punkt x należy do przedziału J.

Przypuśćmy, że B_λ nie jest zbiorem nigdziegęstym, ale zawiera przedziały, — powiadam, że skoro $k > 0$ zostało dane, wówczas każdy przedział J zawarty w B_λ — zawiera podprzedział przyporządkowany liczbie k.

Istotnie, wewnątrz J znajduje się napewno taki punkt x, który należy do A, a więc taki, dla którego

$$L(x_1) > \lambda. \tag{8}$$

Można wskutek tego znaleść takie g_1 dla którego:

$$0 < |g_1| \leqq k, \tag{9}$$

$$\left|\frac{f(x_1+g_1)-f(x_1)}{g_1}\right| > \lambda 1 \tag{10}$$

Połóżmy:

$$x_2 = x_1 + \frac{g_1}{2}, \qquad h_1 = \frac{g_1}{2}. \tag{11}$$

Będzie wtedy:

$$\left|\frac{f(x_2+h_1)-f(x_2-h_1)}{2h_1}\right| > \lambda. \tag{12}$$

Ponieważ x_1 leży wewnątrz J, więc, jeżeli tylko g_1 jest dostatecznie małe, punkt x_2 będzie również położony wewnątrz J. Wobec tego więc, że funkcya

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

jest, przy stałem h funkcyą ciągłą zmiennej x, można znaleść ε tak małe, że:

a) przedział $(x_2-\varepsilon,\ x_2+\varepsilon)$ będzie zawarty wewnątrz J;

b) Dla każdego punktu tego przedziału, będzie jeszcze zachodziła nierówność (12); to znaczy, będzie:

$$\left|\frac{f(x+h_1)-f(x-h_1)}{2h_1}\right| > \lambda, \quad \text{jeżeli} \quad x_2-\varepsilon < x < x_2+\varepsilon. \tag{13}$$

Ponieważ oczywiście

$$0 < |h_1| < k, \tag{14}$$

więc przedział $(x_2-\varepsilon,\ x_2+\varepsilon)$ jest przedziałem o własnościach żądanych a mianowicie jest zawarty w J i przyporządkowany liczbie k.

Możemy teraz utworzyć ciąg przedziałów $\{J_n\}$, utworzonych w następujący sposób:

J_0 — jest dowolnym przedziałem zawartym w B_λ;

J_{n+1} — jest dowolnym przedziałem zawartym w J_n i przyporządkowanym liczbie $\frac{1}{n+1}$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$; przedział taki na zasadzie rozważań poprzednich istnieje dla każdego n.

Wiadomo, że wszystkie przedziały ciągu $\{J_n\}$ mają conajmniej jeden punkt wspólny x_0 [1]. Wobec określenia tych przedziałów będzie dla każdego naturalnego n istniała liczba h_n, spełniająca warunki:

$$0 < |h_n| < \frac{1}{n}, \tag{15}$$

$$\left|\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0-h_n)}{2h_n}\right| > \lambda. \tag{16}$$

Z warunku (15) wynika:

$$\lim_{n=\infty} h_n = 0, \tag{17}$$

z warunku zaś (16) wynika:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left|\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0-h_n)}{2h_n}\right| \geqq \lambda; \tag{18}$$

wobec więc związku (17) będzie:

$$\overline{\lim_{h=0}} \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\right| \geqq \lambda, \tag{19}$$

co jest oczywiście sprzeczne z założeniem, że warunek (2) ma być spełniony dla punktu x_0.

---

[1]) Schoenflies-Hahn, Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen I p. 253—254.

Niech teraz będą x_1, x_2 dwa dowolne punkty naszego przedziału, nie należące do B_λ. Oznaczmy przez C_λ tę część zbioru B_λ, która leży w przedziale (x_1, x_2). Udowodnimy przedewszystkiem, że istnieje skończona liczba przedziałów $\{(\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa)\} - k = 1, 2 \ldots n$ — o własnościach następujących:

1) przedziały $(\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa)$ — leżą wewnątrz (x_1, x_2), przyczem końce ich nie należą do B_λ;

2) przedziały $(\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa)$ leżą nazewnątrz siebie, przyczem oczywiście założyć możemy, że jest:

$$\alpha_\varkappa < \beta_\varkappa < \alpha_{\varkappa+1} \qquad k = 1, 2 \ldots n-1;$$

3) zbiór C_λ jest całkowicie zawarty wewnątrz tych przedziałów;

4) zachodzi nierówność:

$$|f(\beta_\varkappa) - f(\alpha_\varkappa)| \leqq \lambda(\beta_\varkappa - \alpha_k). \tag{20}$$

Jeżeli y jest punktem dowolnym zbioru C_λ, wówczas przez $C_\lambda(y)$ oznaczymy część tego zbioru, zawartą w przedziale:

$$x_1 < x \leqq y.$$

Możemy teraz wszystkie punkty zbioru C_λ podzielić na dwie kategorye: $C_\lambda^{(1)}$ i $C_\lambda^{(2)}$ według zasady następującej:

y należy do $C_\lambda^{(1)}$, jeżeli istnieje ciąg przedziałów $\{\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa\}$, $k=1, 2 \ldots n$, spełniających warunki 1), 2), 4), oraz warunek:

3a) zbiór $C_\lambda(y)$ jest całkowicie zawarty wewnątrz tych przedziałów; w przeciwnym razie zaliczamy y do $C_\lambda^{(2)}$.

Udowodnimy teraz, że:

$$C_\lambda^{(2)} \equiv 0. \tag{20}$$

Zauważymy przedewszystkiem, że jeżeli:

$$y_1 < y_2,$$

$$y_2 \text{ należy do } C_\lambda^{(1)}$$

wówczas:

$$y_1 \text{ należy do } C_\lambda^{(1)},$$

co z łatwością wynika ze związku:

$$C_\lambda(y_1) < C_\lambda(y_2). \tag{21}$$

Gdyby związek (20) nie zachodził, wówczas musiałaby zachodzić jedna z następujących alternatyw:

α) $C_\lambda^{(2)}$ nie posiada najmniejszego elementu, — a więc zbiór $C_\lambda^{(1)}$ posiada największy element: y_1,

β) $C_\lambda^{(2)}$ posiada najmniejszy element y_1.

Pierwsza alternatywa prowadzi natychmiast do sprzeczności. Istnieje mianowicie wtedy ciąg przedziałów o własnościach 1), 2), 4), wewnątrz których leży $C_\lambda(y_1)$, a zatem $C_\lambda(y+h)$, o ile $y+h$ należy do C_λ, a h jest dostatecznie małe. Tym sposobem y_1 nie może być punktem skupienia punktów zbioru $C_\lambda^{(2)}$; ten ostatni zbiór musi być domknięty zawiera zatem element najmniejszy, — w sprzeczności z założeniem.

Rozpatrzmy teraz drugą alternatywę. Mogą być trzy możliwości:

Popierwsze: $C_\lambda^{(1)}$ posiada element największy y_2. Istnieje wtedy ciąg przedziałów $\{\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa\}$ $\varkappa = 1, 2 \ldots n$, o własnościach 1), 2), 4) — wewnątrz których leży $C_\lambda(y_2)$; y_1 nie może leżeć wewnątrz tych przedziałów, w przeciwnym bowiem razie należałoby do $C_\lambda^{(1)}$.

Jest zatem:

$$\beta_n < y_1. \tag{21}$$

Na mocy założenia (2) istnieje liczba $\delta > 0$, spełniająca warunki następujące:

$$\delta < y_1 - \beta_n; \qquad \delta < x_2 - y_1, \tag{22}$$

$$\left| \frac{f(y_1+h) - f(y_1-h)}{2h} \right| < \lambda, \tag{23}$$

jeżeli

$$|h| \leqq \delta.$$

Z pomiędzy liczb dodatnich h niewiększych od δ wybrać można taką, aby punkty $y_1 - h$, $y_1 + h$ — nie należały do B_λ; wynika to stąd, że ten ostatni zbiór jest nigdziegęsty.

Ciąg przedziałów:

$$\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \{\alpha_2 \beta_2\} \ldots \quad \{\alpha_n, \beta_n\}. \{y_1 - h_1, y_1 + h\}$$

spełnia warunki (1), (2), (4) i zawiera zbiór $C_\lambda(y)$, a zatem y_1 należy do $C_\lambda^{(1)}$, wbrew założeniu.

Podrugie: $C_\lambda^{(1)}$ — nie zawiera żadnego elementu. Dochodzimy wtedy do sprzeczności, rozumując zupełnie taksamo, jak w przypadku poprzedzającym.

Potrzecie: $C_\lambda^{(1)} \neq 0$, ale nie zawiera ostatniego elementu. Można wtedy znaleść liczbę $\delta > 0$, taką, że:

$$\left| \frac{f(y_1+h) - f(y_1-h)}{2h} \right| > \lambda, \tag{24}$$

jeżeli

$$0 < h < \delta.$$

Ponieważ przytem y_1 musi być punktem skupienia (oczywiście lewostronnym) zbioru $C_\lambda^{(1)}$, więc istnieje punkt y_2, należący do tego zbioru i leżący w przedziale $(y_1 - \delta, y)$.

Można znaleść zatem ciąg przedziałów:

$$(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$$

spełniający warunki 1), 2), 4) i obejmujący zbiór $C_\lambda(y_2)$, przyczem będzie, jak poprzednio:

$$\beta_n < y_1. \tag{25}$$

Oznaczmy przez y_3 najmniejszą liczbę zbioru C_λ, zawartą w przedziale (β_n, y_1). Ponieważ punkty $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ nie należą do C_λ, więc:

$$\beta_n < y_3 < y_1. \tag{26}$$

Ponieważ zbiór B_λ jest nigdziegęsty, więc istnieje liczba h, spełniająca nierówności:

$$y_1 - y_3 < h < y_1 - \beta_n; \quad h < x_2 - y_1 \tag{27}$$

i taka, że punkty $y_1 - h$, $y_1 + h$ nie należą do B_λ.

Ciąg przedziałów:

$$\{(\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa)\}, \quad \varkappa = 1, 2 \ldots n, \quad (y_1 - h, y_1 + h) \tag{28}$$

zawiera $C_\lambda(y_1)$ i spełnia warunki 1), 2), 4). Tym sposobem y_1 należeć musi do $C_\lambda^{(1)}$, wbrew założeniu. Udowodniwszy tedy, że zachodzić musi związek (20), a więc, że istnieje zawsze ciąg przedziałów spełniających warunki 1) — 4).

W każdym przedziałów: (x_1, α_1), $(\beta_1, \alpha_2) \ldots (\beta_{n-1}, \alpha_n)$ (β_n, x_2) jest $L(x) \leqq \lambda$, skąd wynika [1])

$$\begin{aligned} &|f(x_1) - f(\alpha_1)| \leqq \lambda(\alpha_1 - x) \\ &|f(\beta_\varkappa) - f(\alpha_{\varkappa+1})| \leqq \lambda(\alpha_{\varkappa+1} - \beta_\varkappa), \quad \varkappa = 2, 3 \ldots n-1 \\ &|f(x_2) - f(\beta_n)| \leqq \lambda(x_2 - \beta_n), \end{aligned} \tag{29}$$

z warunku zaś (4) wynika:

$$|f(\beta_\varkappa) - f(\alpha_\varkappa)| \leqq \lambda(\beta_\varkappa - \alpha_\varkappa) \quad \varkappa = 1, 1 \ldots n. \tag{30}$$

Sumując nierówności (29) i (30), otrzymamy:

[1]) Por. Lebesgue, Leçons sur l'intégration p. 70.

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \lambda(x_2 - x_1) \leqq \lambda(b - a). \tag{31}$$

Ponieważ λ jest dowolną liczbą dodatnią, więc:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = 0, \tag{32}$$

a zatem:

$$f(x) = \text{constans}$$

c. b. d. o.

Warszawa 4/I 1916.

RÉSUMÉ.

Je démontre dans cette note le résultat suivant:

Une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) et remplissant la condition:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 0 \qquad a < x < b$$

se réduit dans cet intervalle à une constante.