multiplicités dont la somme surpasse l'ordre d'une courbe rationnelle du faisceau correspondant au faisceau de droites.

Je considère, dans ce qui précède, une surface rationnelle comme complètement donnée lorsque l'on connaît une de ses représentations planes.

Comme cas particulier, je déduis le théorème de M. Koenigs[1], que j'énonce comme ceci:

II. Si une surface algébrique contient deux faisceaux de coniques, cette surface est rationnelle et c'est la surface de Veronese, de S_4, ou la surface d'ordre 8, à sections hyperplanes elliptiques, représentant le système des quartiques planes à deux points doubles, ou l'une des projections de ces deux surfaces.

Je déduis enfin le théorème:

III. Si une surface algébrique contient un faisceau de coniques et un faisceau de cubiques rationnelles, elle est rationnelle et c'est une surface d'ordre 12, de S_{11}, à sections hyperplanes de genre 2, ou une surface d'ordre 11, de S_{10}, à sections de genre 2, ou une surface d'ordre 8, de S_8, à sections elliptiques (représentant le système des courbes planes du troisième ordre ayant un point-base), ou une réglée cubique de S_4, ou une quadrique, ou une projection de l'une de ces surfaces.

[1]) Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques. Annales de l'Ecole Normale sup., 3-e s., t. V, p. 177.

J. RUDNICKI.

Badanie pewnego szczególnego typu wzrastania funkcyi.

Sur un mode de croissance différent de la croissance exponentielle.

WSTĘP.

W dziele pod tytułem „Théorie de la croissance" E. Borel zajmuje się badaniem zasadniczych typów funkcyj rosnących i wprowadza następnie pewne symbole dla oznaczenia odpowiedniego rzędu wzrastania. Takiemi funkcyami typowemi są funkcye x^n i e^x; rząd wzrastania funkcyj x^n oznacza Borel przez n, funkcyi zaś e^x przez w. Rząd wzrastania funkcyi e^{e^x} — oznacza się wtedy symbolem w^2, funkcyi symbolem $e^{e^{e^x}}$ — symbolem w^3 i t. d. Otrzymujemy w ten sposób przeliczalny ciąg funkcyi, których wzrastanie jest coraz szybsze i którym odpowiadają symbole rzędowe

$$w, \quad w^2, \quad w^3, \ldots, \quad w^n, \ldots.$$

Następnie, z twierdzenia P. du Bois-Reymonda, wyprowadza Borel wniosek, iż muszą istnieć funkcye, które wzrastają szybciej, aniżeli funkcye o rzędzie wzrastania w^n, jakkolwiek wielkie byłoby n.

„Funkcye te[1]— powiada Borel—pozostaną poza ramami naszego badania.... Funkcye te ograniczają pole naszych badań tak, jak w naukach, opartych na spostrzeżeniach, doświadczenie ogranicza się obecnie do zjawisk dostrzegalnych przy pomocy mikroskopu z jednej, teleskopu z drugiej strony... Ograniczenie naszego pola badań polegać będzie na tem, iż rozpatrywać będziemy tylko te funkcye, których rząd wzrastania jest mniejszy od w^n, gdzie n oznacza liczbę całkowitą skończoną".

[1]) E. Borel, „Leçons sur la théorie de la croissance" str. 25.

Przedmiotem niniejszej pracy jest właśnie zbadanie pewnej funkcyi całkowitej $E(x)$, której rząd wzrastania przewyższa każde w^n. Funkcyę tę będziemy mogli przyjąć przy badaniu rzędu wzrastania jako zasadniczą na równi z funkcyami x^n i e^x i określić w ten sposób odmienny typ wzrastania. Oznaczymy rząd wzrastania funkcyi $E(x)$ symbolem Ω. Przy pomocy funkcyi $E(x)$ będziemy mogli utworzyć funkcye, których rząd wzrastania wyraża się symbolami $w\Omega$, Ωw, Ω^2, Ω^3, i t. p.

Zbadać wzrastanie funkcyi $f(z)$, to znaczy porównać jej wzrastanie z wzrastaniem jednej z funkcyj (typowych) x^n, e^x. Lecz są funkcye, które się z pod takiego ujęcia usuwają. Jeśli to ma miejsce, „to zjawia się konieczność — pisze Borel[1] — zwrócenia się do nowych funkcyj rosnących. Chcieć rozszerzyć teoryę wzrastania bez uprzedniego zbadania natury tych nowych funkcyj... jest to to samo, co chcieć zmierzyć pewną wielkość zapomocą jednostki z nią niejednorodnej; jest to, oczywiście, rzecz niemożliwa". Zadanie polega więc na tem, by zapomocą prostych równań różniczkowych lub funkcyjnych określić funkcyę całkowitą o wzrastaniu odmiennego typu. „Określiwszy jakąkolwiek nową funkcyę całkowitą, pisze Borel, przedewszystkiem należy zbadać, czy wzrastanie tej funkcyi należy do typu znanego, czy też nie. Odpowiedź na to pytanie będzie najczęściej twierdząca. W przeciwnym razie otrzymamy typ wzrastania nowy, nastręczający się w sposób naturalny. Te typy wzrastania należałoby zbadać obok typu e^x; gdy to zrobimy, nie będziemy mogli nadal twierdzić, iż jedynie tylko typ wzrastania funkcyi wykładniczej posiada znaczenie w Matematyce; pomimo to typ ten pozostanie najważniejszym".

W cytowanym ustępie Borel zupełnie słusznie kładzie nacisk na tę okoliczność, iż funkcya, mająca być typem wzrastania, powinna być określona w sposób najbardziej naturalny. Zwróćmy uwagę na to, iż określenie funkcyi $y = ax$ dla x całkowitego sprowadza się do dodawania x składników, z których każdy równa się a, określenie zaś funkcyi $y = a^x$ dla x całkowitego sprowadza się do iloczynu x czynników równych a. Pierwszą funkcyę oznaczymy przez $\chi_1(x)$, drugą przez $\chi_2(x)$; funkcye te spełniają równania funkcyjne:

$$\chi_1(x+1) = \chi_1(x) + a$$

$$\chi_2(x+1) = a \cdot \chi_2(x).$$

W sposób naturalny, jako dalszy ciąg tego samego procesu, nastręcza się myśl zbadania funkcyi $\chi_3(x)$, określonej przez równanie funkcyjne:

$$\chi_3(x+1) = a^{\chi_3(x)}.$$

[1]) „Leçons sur les fonctions entières", note II, str. 116.

Dla dalszych rachunków dogodne będzie wprowadzenie innej zmiennej zapomocą podstawienia

$$x = \frac{1}{\rho} \log \xi,$$

skąd:

$$\xi = e^{\rho x} = \alpha^x,$$

gdzie

$$\alpha = e^{\rho}.$$

Wtedy:

$$e^{\rho(x+1)} = e^{\rho x} \cdot e^{\rho} = e^{\rho} \cdot \xi,$$

$$x + 1 = \frac{1}{\rho} \log(\xi \cdot e^{\rho}),$$

$$\chi(x+1) = \chi\left\{\frac{1}{\rho} \log(e^{\rho} \cdot \xi)\right\} = a^{\chi\left(\frac{\log \xi}{\rho}\right)}. \qquad (1')$$

Położmy:

$$\chi\left(\frac{\log \xi}{\rho}\right) = f(\xi).$$

Funkcya $f(\xi)$ na zasadzie równania (1′) spełnia równanie funkcyjne

$$f(\alpha \xi) = e^{m f(\xi)}, \qquad (1)$$

gdzie

$$m = \log a.$$

1. **Równanie funkcyjne** $f(ax) = e^{mf(x)}$. Niech $f(x)$ będzie funkcyą dowolną, spełniającą równanie funkcyjne (1). W takim razie i funkcya $f(kx)$, gdzie k jest liczbą dowolną, będzie spełniała równanie (1).

2. Zbadajmy, czy można określić kolejno wyrazy szeregu potęgowego w ten sposób, by formalnie uczynić zadość równaniu (1). Na zasadzie n° 1 możemy przyjąć, iż szereg potęgowy ma postać

$$d_0 + x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \ldots + d_n x^n + \ldots \qquad (2)$$

Podstawiając w równanie (1) i porównywując obie strony, otrzymamy przedewszystkiem:

$$d_0 = e^{m d_0}$$

następnie

$$\alpha = m d_0.$$

Z tych dwóch zależności wynika:

$$d_0 = e^{\alpha}, \qquad m = \alpha e^{-\alpha}.$$

3. Wnioskujemy stąd bezpośrednio, iż:

1) Gdy m jest dane, to α nie może być liczbą dowolną.

2) Liczba m nie może być większa od $\frac{1}{e}$, (o ile α ma wartość rzeczywistą).

Zależność pomiędzy m i α możemy unaocznić za pomocą wykresu.

Gdy $m < 0$, jest jedna tylko wartość na α, przyczem $\alpha < 0$;

„ $m = 0$ „ „ „ „ „ „ $\alpha = 0$;

„ $0 < m < \frac{1}{e}$, mamy dwie wartości na α, z których jedna jest większa od 1, a druga mniejsza od 1;

„ $m = \frac{1}{e}$, wtedy $\alpha = 1$;

„ $m > \frac{1}{e}$, wtedy niema wcale wartości odpowiadających na α.

Streścić to można przy pomocy następującej tabliczki:

m	$-\infty \to -e \to 0 \to \frac{1}{e} \to \infty$
α	$-\infty \to -1 \to 0 \begin{cases} 0 \to 1 \\ +\infty \to 1 \end{cases}$ Urojone

4. Obliczenie dalszych spółczynników. Dla obliczenia następnych spółczynników rozwinięcia $d_2, d_3, \ldots$ posługiwać się będziemy zależnością, wynikającą z równania funkcyjnego (1) przez różniczkowanie logarytmu obu stron równości.

Otrzymamy wtedy:

$$\alpha f'(\alpha x) = m(\alpha) \, . \, f'(x) \, . \, f(\alpha x),$$

gdzie

$$m(\alpha) = \alpha e^{-\alpha},$$

a przez utożsamienie spółczynników wzór zwrotny następujący:

$$(n+1)(\alpha^n - 1) d_{n+1} = m \{ n d_n + (n-1) \alpha d_{n-1} d_2 + \ldots$$
$$+ p \alpha^{n-p} d_p d_{n-p+1} + \ldots + 2 \alpha^{n-2} d_2 d_{n-1} + \alpha^{n-1} . d_n \}.$$

Skąd:

$$d_2 = \frac{m}{2(\alpha - 1)}, \quad d_3 = \frac{m^2(\alpha + 2)}{1.2.3(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)},$$

$$d_4 = \frac{m^3(\alpha^3 + 5\alpha^2 + 6\alpha + 6)}{1.2.3.4.(\alpha^3 - 1)(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)}$$

i t. d.

Prawo tworzenia się mianowników jest oczywiste; liczniki są wielomianami. Aby to sprawdzić w przypadku ogólnym, połóżmy:

$$d_p = \frac{m^{p-1} U_p}{p!(\alpha^{p-1} - 1)(\alpha^{p-2} - 1)\ldots(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)}. \tag{3'}$$

Widzimy, iż wielkości U_p określone są przy pomocy wzorów zwrotnych:

$$\begin{aligned} U_{n+1} = {} & n U_n + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha \frac{\alpha^{n-1} - 1}{\alpha - 1} U_{n-1} U_2 \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \alpha^2 \frac{(\alpha^{n-1} - 1)(\alpha^{n-2} - 1)}{(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)} U_{n-2} . U_3 \\ & + \ldots + \frac{n!}{(q-1)!(n-q-1)!} \alpha^q \frac{\Pi(\alpha^{n-1} - 1)}{\Pi(\alpha^2 - 1) . \Pi(\alpha^{n-q-1} - 1)} U_{n-n} U_{q+1} \\ & + \ldots + n \alpha^{n-2} \frac{\alpha^{n-1} - 1}{\alpha - 1} U_2 U_{n-1} + \alpha^{n-1} U_n. \end{aligned} \tag{3}$$

[gdzie $\Pi(\alpha^k - 1) = (\alpha^k - 1)(\alpha^{k-1} - 1)(\alpha^{k-2} - 1)\ldots(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)$].

Jeśli okażemy, iż $\frac{\Pi(\alpha^{n-1} - 1)}{\Pi(\alpha^q - 1)\Pi(\alpha^{n-q-1} - 1)}$ jest wielomianem, to tem samem będzie udowodnione, iż liczniki U_p są wielomianami. W rzeczy samej, wszystkie pierwiastki mianownika są zawarte pomiędzy pierwiastkami licznika. A to dlatego, iż wszystkie liczby $\frac{\alpha}{k}$, takie iż $1 \leqslant \alpha \leqslant k$, $1 \leqslant k \leqslant p$, zawarte są pomiędzy liczbami kształtu $\frac{\beta}{n+k}$, gdzie $1 \leqslant \beta \leqslant n+k$ i $1 \leqslant k \leqslant p$, z uwzględnieniem wielokrotności.

Utwórzmy z p kolejnych liczb następującą tablicę:

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & k \\ k+1, & k+2, & k+3, & \ldots, & 2k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E\left(\frac{p}{k}\right) k + 1, & & \ldots . & & p \end{array}$$

W każdym wierszu tej tablicy, z wyjątkiem ostatniego, znajduje się wielokrotna liczby k. Ułamek nieprzywiedlny $\frac{\alpha}{k}$ wchodzi do liczb pierwszej grupy $E\left(\frac{p}{n}\right)$ razy.

Utwórzmy drugą tablicę z następujących po sobie p kolejnych liczb:

$$
\begin{array}{lllll}
n+1, & n+2, & n+3, & \ldots, & n+k \\
n+k+1, & n+k+2, & n+k+3, & \ldots, & n+2k \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
n+\mathrm{E}\left(\frac{p}{k}\right).k+1, & \ldots, & n+p & &
\end{array}
$$

W każdym wierszu tej tablicy, z wyjątkiem może ostatniego, znajduje się wielokrotna liczby k.

Ułamek nieprzywiedlny $\frac{\alpha}{k}$ powtarza się więc śród liczb drugiej grupy $\mathrm{E}\left(\frac{p}{n}\right)$ lub $\mathrm{E}\left(\frac{p}{n}\right)+1$ razy. Ponieważ liczby pierwszej tablicy (grupy) odpowiadają pierwiastkom mianownika, a liczby drugiej tablicy,—pierwiastkom licznika, stąd wniosek, że

$$
\frac{(\alpha^{n+p}-1)(\alpha^{u+p-1}-1)\ \ldots.\ (\alpha^{n+1}-1)}{(\alpha^{p}-1)(\alpha^{p-1}-1)\ \ldots.\ (a-1)}
$$

jest w rzeczy samej wielomianem.

5. **Funkcye zwyższające**[1] **dla wielomianów** $U_p(\alpha)$. Zanim zbadamy zbieżność szeregu (2), postaramy się utworzyć funkcye zwyższające dla wielomianów $U_p(\alpha)$.

Zagadnienie to może być rozwiązane w rozmaity sposób; dla naszego celu najodpowiedniejsze będzie rozwiązanie następujące:

$$
\begin{aligned}
U_{n+1}(\alpha) \leqslant n!\ &(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\ldots+\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^{n-2}+\alpha^{n+3}+\ldots \\
&+\alpha+1)\ldots.(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1)
\end{aligned} \tag{4}
$$

dla $\alpha>0$; dla $\alpha<0$ należy zastąpić po prawej stronie równości liczbę α liczbą $|\alpha|$.

Wzór ten jest prawdziwy dla $n=2, 3, \ldots$; w rzeczy samej:

$$
U_3(\alpha)=(\alpha+2) \leqslant 2(\alpha+1)
$$

$$
U_4(\alpha)=\alpha^3+5\alpha^2+6\alpha+6 \leqslant 1.2.3(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1)=6\alpha^3+12\alpha^2+12\alpha+6.
$$

Należy jeszcze okazać, iż prawdziwość wzoru (4) dla wskaźnika $n \leqslant k$ pociąga za sobą prawdziwość i dla wskaźnika $n=k+1$.

---

[1]) Zwyższająca = majorante. Termin ten został mi zakomunikowany przez prof. Dicksteina.

W rzeczy samej, ze wzoru (3) wynika:

$$
\begin{aligned}
U_{k+1}(\alpha) \leqslant k!\ &\Pi(\alpha^{k-2}+\alpha^{k-3}+\ldots+\alpha+1) \\
&+\frac{k!}{2}\alpha\,\Pi(\alpha^{k-2}+\alpha^{k-3}+\ldots.+\alpha+1)+\ldots. \\
&+\frac{k!\,\alpha^q}{q+1}\Pi(\alpha^{k-2}+\alpha^{k-3}+\ldots+\alpha+1)+\ldots. \\
&+\frac{k!}{k-1}\alpha^{k-2}\,\Pi(\alpha^{k-2}+\alpha^{k-3}+\ldots+\alpha+1)+ \\
&+\frac{k!\,\alpha^{k-1}}{k}\Pi(\alpha^{k-2}+\alpha^{k-3}+\ldots+\alpha+1) \\
=k!\,\Pi(\alpha^{k-2}+\alpha^{k-3}+\ldots+\alpha+1)&\left\{1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{3}+\ldots+\frac{\alpha^{k-2}}{k-1}+\frac{\alpha^{k-1}}{k}\right\},
\end{aligned}
$$

ponieważ zakładamy, iż

$$
U_i(\alpha) \leqslant (i-1)!\,\Pi(\alpha^{i-2}+\alpha^{i-3}+\ldots+\alpha+1)
$$

dla

$$
i \leqslant k.
$$

Otrzymamy ostatecznie:

$$
U_{k+1}(\alpha) \leqslant k!\,\Pi(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}+\ldots+\alpha+1).
$$

A więc wzór (4) jest udowodniony.

6. **Zbieżność szeregu** (2). Przyjmując pod uwagę wzór (3′), można szereg (2) napisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
&e^{\alpha}+x+\frac{m x^2}{2(\alpha-1)}+\frac{m^2 x^3(\alpha+2)}{2.3(\alpha^2-1)(\alpha-1)}+\ldots+ \\
&\frac{m^{p-1}x^p U_p(\alpha)}{p!(\alpha^{p-1}-1)(\alpha^{p-2}-1)\ldots(\alpha^2-1)(\alpha-1)}+\ldots
\end{aligned} \tag{2}
$$

Należy zbadać zbieżność tego szeregu.

Wyraz ogólny może być przedstawiony w sposób następujący:

$$
\frac{m^{p-1}x^p U_p(\alpha)}{p!(\alpha-1)^{p-1}\,\Pi(\alpha^{p-2}+\alpha^{p-3}+\ldots+\alpha^2+\alpha+1)}.
$$

Ograniczymy się do przypadku, gdy $\alpha>0$.

Wartość bezwzględna wyrazu ogólnego jest mniejsza od wartości, jaką otrzymamy, zastępując wielomian $U_p(\alpha)$ przez wielomian

$$(p-1)!\,\Pi\,(\alpha^{p-2}+\alpha^{p-3}+\ldots+\alpha^2+\alpha+1),$$

na zasadzie (4), t. j.

$$|d_p x^p| < \frac{m^{p-1}|x^p|}{p\,|\alpha-1)^{p-1}}.$$

Lecz szereg

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{m^{p-1}x^p}{p\,(\alpha-1)^{p-1}} \text{ jest zbieżny, gdy } \left|\frac{xm}{\alpha-1}\right| < 1,$$

t. j. dla

$$|x| < \frac{|\alpha-1|}{m}.$$

Wynika stąd, iż szereg (2) jest zbieżny, gdy $\alpha > 0$ i $\alpha \neq 1$, dla $|x| < \frac{|\alpha-1|}{m}$, t. j. wewnątrz koła o promieniu $R = \frac{|\alpha-1|}{m}$.

7. **Zbadanie przypadku szczególnego, gdy** $\alpha > 1$. W przypadku, gdy $\alpha > 1$, ze zbieżności szeregu (2) wewnątrz koła o promieniu $\frac{\alpha-1}{m}$ w otoczeniu punktu $x=0$, wynika bezpośrednio zbieżność tego szeregu (2) na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej. W rzeczy samej, szereg (2) określa w otoczeniu punktu $x=0$ pewną funkcyę analityczną $f(x)$ zmiennej zespolonej, która to funkcya spełnia równanie funkcyjne (1): $f(\alpha x) = e^{mf(x)}$. Z równania funkcyjnego (1) wyczytujemy bezpośrednio, że, jeśli funkcya $f(x)$ jest holomorficzna w otoczeniu punktu $x=0$ wewnątrz koła o promieniu R, to musi być holomorficzna i wewnątrz koła o promieniu αR. A więc i szereg potęgowy (2), jeśli jest zbieżny wewnątrz koła o promieniu R, musi być zbieżny i wewnątrz koła o promieniu αR, a więc i wewnątrz koła o promieniu αR, a więc i wewnątrz koła o promieniu $\alpha^2 R$, $\alpha^3 R, \ldots, \alpha^n R, \ldots$ i t. d. Ponieważ zakładamy, iż $\alpha > 1$, szereg (2) musi być zbieżny wewnątrz koła o dowolnie wielkim promieniu, a funkcya $f(x)$ musi być funkcyą całkowitą.

T a k w i ę c, g d y $\alpha > 1$, f u n k c y a $f(x)$, o k r e ś l o n a p r z e z s z e r e g p o t ę g o w y (2) i s p e ł n i a j ą c a r ó w n a n i e f u n k c y j n e (1), j e s t f u n k c y ą c a ł k o w i t ą, k t ó r ą o z n a c z a ć b ę d z i e m y p r z e z $\mathcal{E}(x)$.

8. **Funkcya** $\mathcal{E}(x)$ **w otoczeniu wartości zerowej** $x=0$. Przyjąwszy pod uwagę, iż (dla $\alpha > 1$) zachodzi nierówność

$$|d_p x^p| < \frac{m^{p-1}|x|^p}{p\,(\alpha-1)^{p-1}},$$

gdzie $d_p x^p$ jest wyrazem ogólnym szeregu (2), otrzymamy dla $\mathcal{E}(x)$ funkcyę zwyższającą

$$e^\alpha + R + \frac{mR}{2(\alpha-1)} + \frac{m^2R^3}{3(\alpha-1)^2} + \ldots + \frac{m^{p-1}R^p}{p\,(\alpha-1)^{p-1}} + \ldots$$

$$= e^\alpha + \frac{\alpha-1}{m}\log\frac{1}{1-\dfrac{mR}{\alpha-1}}$$

dla

$$R < \frac{\alpha-1}{m},$$

gdzie

$$R = |x|.$$

Tak więc, używając znakowania P o i n c a r é'go dla funkcyi zwyższającej, możemy napisać:

$$\mathcal{E}(x) \ll e^\alpha + \frac{\alpha-1}{\alpha}e^\alpha \log\frac{(\alpha-1)\,e^\alpha}{(\alpha-1)\,e^\alpha - \alpha R} \tag{5}$$

pomnąc, iż $m = \alpha e^{-\alpha}$, przyczem wzór (5) jest prawdziwy dla

$$R < \frac{\alpha-1}{\alpha}e^\alpha.$$

Przypuśćmy teraz, iż

$$R < \frac{(\alpha-1)e^\alpha}{\alpha^2}.$$

W takim razie z wzoru (5) wynika, iż

$$|\mathcal{E}(x)| < e^\alpha\left\{1+\frac{\alpha-1}{\alpha}\log\frac{\alpha}{\alpha-1}\right\} < e^\alpha\left(1+\frac{1}{e}\right), \tag{5'}$$

albo też

$$|\mathcal{E}(x)| < \frac{1+\alpha}{\alpha}e^\alpha < \frac{\alpha}{1+\alpha}e^\alpha \tag{5''}$$

dla

$$R < \frac{(\alpha-1)\,e^\alpha}{\alpha^2}.$$

Nierówności (5′) i (5″) stosują się do obszaru płaszczyzny zmiennej zespolonej wewnątrz koła o promieniu $R = \frac{(\alpha-1)}{\alpha^2}e^\alpha$. Lecz, dzięki równaniu funkcyjnemu, które spełnia funkcya $\mathcal{E}(x)$, zakres stosowalności tych nierówności możemy stopniowo rozszerzać.

W samej rzeczy

$$\mathcal{E}(\alpha x) = e^{m\mathcal{E}(x)} < e^{me^\alpha + me^\alpha\frac{\alpha-1}{\alpha}\log\frac{\alpha}{\alpha-1}} = e^\alpha \cdot e^{(\alpha-1)\log\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

na zasadzie wzoru (5″).

Lecz

$$\log \frac{\alpha}{\alpha - 1} < \frac{1}{\alpha - 1}$$

więc

$$\mathcal{E}(\alpha x) < e^{\alpha+1},$$

dla

$$|x| < \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} e^{\alpha}.$$

A więc

$$\mathcal{E}(x) < e^{\alpha+1},$$

dla

$$|x| < \frac{\alpha - 1}{\alpha} e^{\alpha+1}.$$

Ta ostatnia nierówność ma więc zastosowanie wewnątrz koła o promieniu α razy większym niż poprzednio.

Tak samo dalej:

$$\mathcal{E}(\alpha x) = e^{m \mathrm{E}(x)} < e^{m e^{\alpha+1}} = e^{\alpha e},$$

dla

$$|x| < \frac{\alpha - 1}{\alpha} e^{\alpha}.$$

A więc

$$\mathcal{E}(x) < e^{\alpha e},$$

dla

$$|x| < (\alpha - 1) e^{\alpha}.$$

Ta ostatnia nierówność zachodzi wewnątrz koła o promieniu znowu α razy większym niż poprzednio, czyli promień koła stosowalności jest α^2 razy większy niż dla nierówności (5″), z której wyszliśmy.

9. **Rozszerzenie nierówności badanych i wyprowadzenie wzorów prawdziwych dla całej płaszczyzny zmiennej zespolonej.** Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$a_1(z) = e^{mz}, \quad a_2(z) = e^{m \cdot a_1(z)}, \ldots, \quad a_{k+1}(z) = e^{m a_k(z)}, \ldots$$

W takim razie, na mocy równania funkcyjnego (1), mamy ogólnie

$$\mathcal{E}(\alpha^n z) = a_n \{\mathcal{E}(z)\}.$$

Albo inaczej

$$\mathcal{E}(z) = a_n \left\{ \mathcal{E}\left(\frac{z}{\alpha^n}\right) \right\}.$$

Stąd, na mocy wzory (5), otrzymujemy:

$$\mathcal{E}(z) \leqslant a_n \left\{ e^{\alpha} \left(\frac{(\alpha - 1) e^{\alpha} \alpha^n}{(\alpha - 1) \alpha^n e^{\alpha} - R} \right)^{\alpha - 1} \right\},$$

dla

$$R < (\alpha - 1) \alpha^n e^{\alpha},$$

gdzie

$$R = |z|.$$

W tym wzorze główną rolę odgrywa liczba n, związana z liczbą R; możemy jeszcze bardziej uwydatnić znaczenie liczby n, usuwając zupełnie wyraz, zawierający $|z|$ bezpośrednio.

Posługujemy się w tym celu nierównością (5″)

$$\mathcal{E}(x) = a_n \left\{ \mathcal{E}\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) \right\} < a_n \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} e^{\alpha} \right) \tag{6}$$

na mocy (5″), o ile

$$\frac{|x|}{\alpha^n} \leqslant \frac{(\alpha - 1) e^{\alpha}}{\alpha^2}.$$

Niech z oznacza dowolną liczbę w płaszczyźnie zmiennej zespolonej i niech $|z| = R$; oznaczmy przez n liczbę

$$n = \mathrm{E}\left\{ \log_{\alpha} \frac{R}{(\alpha - 1) e^{\alpha}} \right\} + 3, \tag{6'}$$

gdzie $\mathrm{E}(\xi)$ jest największą liczbą całkowitą mniejszą od ξ, lub samą liczbą ξ, jeśli ta ostatnia jest całkowita.

Ponieważ chodzi nam o punkty z zewnątrz koła o promieniu $(\alpha - 1) e^{\alpha}$, gdyż w przeciwnym razie zastosowalibyśmy wzory poprzedniego rozdziału, możemy przyjąć, iż

$$R \geqslant (\alpha - 1) e^{\alpha}.$$

Ze wzoru (6′) wynika, iż

$$\alpha^{n-3} \leqslant \frac{R}{(\alpha - 1) e^{\alpha}} < \alpha^{n-2},$$

czyli

$$\frac{R}{\alpha^n} < \frac{(\alpha - 1) e^{\alpha}}{\alpha}.$$

A więc, na mocy wzoru (6)

$$\mathcal{E}(z) < a_n \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} e^{\alpha} \right),$$

czyli ostatecznie:

$$\mathcal{E}(z) < a^{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} e^{\alpha}\right)}_{\mathrm{E}\left\{\log_{\alpha} \frac{R}{(\alpha-1) e^{\alpha}}\right\} + 3}, \tag{7}$$

gdzie $R = |z|$.

10. **Funkcya całkowita $\mathcal{E}(x)$ nigdzie nie przyjmuje wartości zerowej.** Dowodzimy tego przez sprowadzenie do sprzeczności.

Przypuśćmy, iż $x = x_0$ jest miejscem zerowem funkcyi $E(x)$; wtedy $E(x) = (x - x_0)^p \cdot G(x)$, gdzie $G(x)$ jest funkcyą całkowitą, taką iż $G(x_0) \neq 0$. Z drugiej strony na mocy wzoru (2):

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{m} \log \mathcal{E}(\alpha x) = \frac{1}{m} \log \alpha^p (x - x_0)^p \, G(\alpha x)$$

$$= \frac{p}{m} \log \alpha + \frac{p}{m} \log (x - x_0) + \log G(\alpha x).$$

Otóż $\log G(\alpha x)$ jest funkcyą regularną w otoczeniu punktu $x = x_0$; w takim razie $\mathcal{E}(x) = \frac{p}{m} \log (x - x_0) +$ funkcya regularna w otoczeniu punktu $x = x_0$; punkt $x = x_0$ byłby punktem osobliwym (logarytmicznym) dla funkcyi $\mathcal{E}(x)$, co niema miejsca. Dochodzimy więc do sprzeczności, co dowodzi, iż funkcya $\mathcal{E}(x)$ nie posiada miejsc zerowych.

11. Niech $M(R)$ oznacza maximum bezwzględnej wartości funkcyi $\mathcal{E}(x)$ na kole o promieniu R. To maximum $M(R)$ ma, oczywiście, miejsce dla punktów po stronie dodatniej na osi liczb rzeczywistych, ponieważ wszystkie spółczynniki d_p rozwinięcia funkcyi $\mathcal{E}(x)$ na szereg potęgowy są > 0. Z tego powodu zachodzi też zależność

$$M(R) = a_n \left\{ M\left(\frac{R}{a^n}\right) \right\}.$$

12. Połóżmy, podobnie jak poprzednio,

$$e_1(z) = e^z, \quad e_2(z) = e^{e_1(z)}, \ldots, \quad e_{k+1}(z) = e^{e_k(z)}, \ldots$$

i porównajmy pod względem rzędu wielkości $a_n(z)$ i $e_n(z)$. Porównanie to jest dla nas konieczne, gdyż w a_n liczba a jest dowolna w pewnym zakresie, a nam potrzebny jest stały wzorzec, służący do mierzenia wzrastania funkcyi $a_n(z)$ dla różnych wartości liczby a.

13. Twierdzenie 1. Jeśli $0 < m \leqslant \frac{1}{e} \log e$, to $\lim_{n=\infty} a_n(x)$ istnieje lub nie istnieje, zależnie od tego, czy x jest mniejsze lub większe od liczby e^α, (przyczem spełniony jest warunek $m = \alpha e^{-\alpha}$). Jeśli $m > \frac{1}{e} \log e$, to granica nie istnieje nigdy.

Gdy granica istnieje, równa się ona liczbie e^β; gdy granicy niema, $a_n(x)$ wzrasta nieograniczenie. Przez β oznaczyliśmy liczbę $\leqslant 1$, taką iż $\beta e^{-\beta} = \alpha e^{-\alpha} = m$; że liczba β istnieje, wynika to z rozdziału 3-go. Słowem,

gdy $0 < m \leqslant \frac{1}{e} \log e$ to dla $x < e^\alpha$, $\lim_{n=\infty} a_n(x) = e^\beta$, dla $x > e^\alpha$, $a_n(x)$ rośnie nieograniczenie, wreszcie dla $x = e^\alpha$, $\lim_{n=\infty} a_n(x) = e^\alpha$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$k = e^\alpha, \quad k_1 = e^\beta.$$

W takim razie $k = a^k$ i $k_1 = a^{k_1}$, lub $k = e^{mk}$ i $k_1 = e^{mk_1}$, ponieważ $a = e^m$. Ponieważ $\alpha > 1$, $\beta < 1$, to $k > e$, $k_1 < e$; lecz $k_1 = a^{k_1}$ i $k_1 > 1$, więc $k_1 > 1$.

Dowodzenie. Połóżmy $u = e^{mv}$ i wykreślmy[1] krzywe $u = e^{mv}$ i $u = v$. Jeśli $m < \frac{1}{e} \log e$, to prosta $u = v$ przecina krzywą $u = e^{mv}$ w dwóch punktach, których spółrzędne są $u = v = k_1 = e^\beta$ i $u = v = k = e^\alpha$. Jeśli $m = \frac{1}{e} \log e$, to prosta $u = v$ jest styczna do krzywej $u = e^{mv}$ w punkcie o spółrzędnych $u = v = k = k_1 = e$.

Stąd wnioski następujące:

1) jeśli $v > k$, to $e^{mv} > v$;

2) „ $v = k$, „ $e^{mv} = v$,

3) „ $k_1 < v < k$, „ $e^{mv} < v$,

4) „ $v = k_1$, „ $e^{mv} = v$,

5) „ $v < k_1$, „ $e^{mv} > v$.

Zauważmy, że $a_{n+1}(x) = e^{m a_n(x)}$.

I. Więc, jeżeli $a_n(x) < e^\beta = k_1$, to $a_{n+1}(x) > a_n(x)$.

Lecz

$$k_1 = e^{mk_1},$$

$$a_{n+1} = e^{m a_n}.$$

Z tego, iż $a_n(x) < k_1$, wynika także, że $a_{n+1}(x) < k_1$; otrzymujemy, więc ciąg rosnący ograniczony od góry

$$a_n(x) < a_{n+1}(x) < a_{n+2}(x) < \ldots\ldots \leqslant e^\beta = k_1.$$

Wynika stąd, iż $\lim_{n=\infty} a_n(x)$ istnieje:

II. Jeżeli $k_1 < a_n(x) < k$, to $a_{n+1}(x) < a_n(x)$.

[1]) Czytelnik zechce wykreślić sam odpowiedni rysunek.

Lecz

$$a_{n+1} = e^{m a_n},$$

$$k_1 = e^{m k_1},$$

więc, z tego iż $a_n(x) > k_1$, wynika, iż także $a_{n+1}(x) > k_1$.

Otrzymujemy ciąg malejący ograniczony od dołu:

$$a_n(x) > a_{n+1}(x) > a_{n+2}(x) > \dots \geqslant e^{\beta} = k_1.$$

Wynika stąd, iż $\lim\limits_{n=\infty} a_n(x)$ istnieje.

Pozostaje udowodnić, że $\lim\limits_{n=\infty} a_n(x) = e^{\beta} = k_1$. Ponieważ $a_{n+1} = e^{m a_n(x)}$, łatwo udowodnić, opierając się na ciągłości, iż $\lim\limits_{n=\infty} a_n(x)$ czyni zadość równaniu przestępnemu $z = e^{mz}$. To ostatnie równanie posiada tylko dwa pierwiastki rzeczywiste k i k_1. Wynika stąd, iż $\lim\limits_{n=\infty} a_n(x) = k_1 = e^{\beta}$, ponieważ granica ta nie może być równa liczbie $k = e^{\alpha}$. Ta ostatnia uwaga nie odnosi się do przypadku $m = \frac{1}{e}\log e$, gdyż wtedy $k = k_1$.

III. Jeżeli $x = e^{\alpha}$, to $a_n(x) = e^{\alpha} = k$ dla każdego n i $\lim\limits_{n=\infty} a_n(x) = k = e^{\alpha}$. Jeżeli $x = e^{\beta} = k$, to $a_n(x) = e^{\beta} = k_1$ i $\lim\limits_{n=\infty} a_n(x) = k_1 = e^{\beta}$.

IV. Jeżeli $x > k = e^{\alpha}$, to i $a_1(x) > k$, wogóle $a_n(x) > k$ pociąga za sobą $a_{n+1}(x) > a_n(x)$. Mamy więc ciąg rosnący:

$$e < x < a_1(x) < a_2(x) \dots < a_n(x) < a_{n+1}(x) < \dots$$

Funkcya $u = e^{mv} - v$ jest funkcyą rosnącą zmiennej v dla $v \geqslant \lambda > e^{\alpha}$ i pozostaje stale > 0. Czyli dla

$$v \geqslant \lambda > e^{\alpha}$$

jest:

$$k e^{mv} - v \geqslant e^{m\lambda} - \lambda = h > 0,$$

t. j.

$$e^{mv} > v + h.$$

Wynika stąd, iż

$$e^{m a_n(x)} > a_n(x) + h,$$

czyli

$$a_{n+1}(x) > a_n(x) + h$$

$$a_{n+2}(x) > a_n(x) + 2h$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{n+p}(x) > a_n + ph.$$

Tak, np.,

$$a_{n+1}(x) > a_1(x) + nh.$$

Stąd wniosek, iż liczby $a_n(x)$ rosną nieograniczenie wraz z liczbą n.

Rozważania poprzednie wyczerpują przypadek, gdy

$$0 < m \leqslant \frac{1}{e}\log e.$$

Pozostaje udowodnić, iż $\lim\limits_{n=\infty} a_n(x)$ nie istnieje, gdy $m > \frac{1}{e}\log e$. W tym przypadku krzywa $u = e^{mv}$ nie przecina się wcale z prostą $u = v$, a więc $e^{mv} > v$, czyli $a_{n+1} > a_n(x)$. Dowodzenie niczem się nie różni od poprzedniego w przypadku gdy $x > k$, w którym to razie rozumowanie opierało się na istnieniu pewnej liczby h, takiej iż $e^{mv} > v + h$. Otóż w rozważanym przypadku różnica $e^{mv} - v$ dla żadnej wartości zmiennej v nie staje się równą zeru; na zasadzie ciągłości wnioskujemy, iż istnieje liczba h taka, iż $e^{mv} - v \geqslant h$, dla każdej wartości zmiennej v. A więc tak jak poprzednio wnioskujemy, iż

$$a_{n+1}(x) \geqslant a_1(x) + nh,$$

czyli $\lim\limits_{n=\infty} a_n(x)$ nie isfnieje.

14. **Twierdzenie 2.** Gdy $x \geqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} e^{\alpha}$, to $e_n(x)$ i $a_n(x)$ przedstawiają ten sam rząd wielkości, czyli, wyrażając się dokładnie:

$$e_n(mx - \alpha + \log\alpha) > a_n(x) > e_n(mx - \alpha).$$

Uwaga. $e_1(x) = e^x$, $e_2(x) = e^{e_1(x)}, \dots, e_k(x) = e^{e_{k-1}(x)}$.

Dla dowodu połóżmy $e_n(y) = a_n(x)$ i szukajmy zależności pomiędzy y i x.

Z równości $e_n(y) = a_n(x)$ wynika, iż

$$y = \log_n a_n(x) = \log_{n-1}\log e^{m a_{n-1}} = \log_{n-1}(m a_{n-1}) = \log_{n-2}\log(m a_{n-1})$$

$$= \log_{n-2}\{\log m + \log a_{n-1}\} = \log_{n-2}\left\{m a_{n-2} - \log\frac{1}{m}\right\}$$

$$= \log_{n-3}\log m a_{n-2}\left(1 - \frac{1}{m a_{n-2}}\log\frac{1}{m}\right) = \log_{n-3}\left\{\log m + \log a_{n-2} + \log u_{n-2}\right\},$$

gdzie:

$$u_{n-2} = 1 - \frac{1}{m a_{n-2}}\log\frac{1}{m} = 1 - \frac{\alpha - \log\alpha}{\alpha}\cdot\frac{e^{\alpha}}{a_{n-2}};$$

$$y = \log_{n-4}.\log m a_{n-3}\left(1 - \frac{1}{m a_{n-3}}\log\frac{1}{m} + \frac{1}{m a_{n-3}}\log u_{n-2}\right)$$

$$= \log_{u-4}\left\{\log_{u-3} - \log\frac{1}{m} + \log u_{n-3}\right\},$$

gdzie

$$u_{n-3}=1-\frac{1}{m\,a_{n-3}}\log\frac{1}{m}+\frac{1}{m\,a_{n-3}}\log u_{n-2}$$

$$=1-\frac{\alpha-\log\alpha}{\alpha}\cdot\frac{e^{\alpha}}{a_{n-3}}+\frac{e^{\alpha}}{a_{n-3}}\cdot\frac{\log u_{n-2}}{\alpha}.$$

Wogóle:

$$y=\log_k\left\{m\,a_k-\log\frac{1}{m}+\log u_{k+1}\right\}$$

$$=\log_{k-1}\log m\,a_k\left\{1-\frac{1}{m\,a_k}\log\frac{1}{m}+\frac{1}{m\,a_k}\log u_{k+1}\right\}$$

$$=\log_{k-1}\left\{\log a_k-\log\frac{1}{m}+\log\left(1-\frac{1}{m\,a_k}\log\frac{1}{m}+\frac{1}{m\,a_k}\log u_{k+1}\right)\right\}$$

$$=\log_{k-1}\left\{m\,a_{k-1}-\log\frac{1}{m}+\log u_k\right\},$$

gdzie:

$$u_k=1-\frac{1}{m\,a_k}\log\frac{1}{m}+\frac{1}{m\,a_k}\log u_{k+1}=1-\frac{\alpha-\log\alpha}{\alpha}\,\frac{e^{\alpha}}{a_k}+\frac{e^{\alpha}}{a_k}\cdot\frac{\log u_{k+1}}{\alpha}.\quad(8)$$

Wreszcie:

$$y=\log\left(m\,a_1-\log\frac{1}{m}\log u_2\right),$$

gdzie:

$$u_2=1-\frac{\alpha-\log\alpha}{\alpha}\cdot\frac{e^{\alpha}}{a_2}+\frac{e^{\alpha}}{a_2}\,\frac{\log u_3}{\alpha},$$

$$y=\log\alpha_1-\log\frac{1}{m}+\log u_1,$$

gdzie:

$$u_1=1-\frac{1}{m\,a_1}\log\frac{1}{m}+\frac{1}{m\,a_1}\log u_2.$$

Ostatecznie:

$$y=mx-\log\frac{1}{m}+\log u_1.$$

Pomiędzy a_{p+1} i a_p zachodzi związek zwrotny $a_{p+1}=e^{m a_p}$, a pomiędzy u_k i u_{k+1} wzór zwrotny $u_k=1-\frac{\alpha-\log\alpha}{\alpha}\,\frac{e^{\alpha}}{a_k}+\frac{e^{\alpha}}{a_k}\cdot\frac{\log u_{k+1}}{\alpha}$.

Dowód twierdzenia oparty jest na tem, iż wszystkie u_k są zawarte pomiędzy liczbami 1 i $\frac{1}{\alpha}$, tak iż $\frac{1}{\alpha}<u_k<1$.

W rzeczy samej:

$$u_{n-2}=1-\frac{\alpha-\log\alpha}{\alpha}\,\frac{e^{\alpha}}{a_{n-2}},$$

gdyż

$$\frac{e^{\alpha}}{a_{n-2}}<\frac{\alpha-1}{\alpha},$$

a więc:

$$1>u_{n-2}>1-\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha},$$

$$0>\log u_{n-2}>-\log\alpha,$$

$$u_{n-3}=1-\frac{\alpha-\log\alpha}{\alpha}\,\frac{e^{\alpha}}{a_{n-3}}+\frac{e^{\alpha}}{a_{n-3}}\,\frac{\log u_{n-2}}{\alpha},$$

$$1>u_{n-3}>1-\frac{e^{\alpha}}{a_{n-3}},$$

a więc:

$$1>u_{n-3}>1-\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha},$$

$$0>\log u_{n-3}>-\log\alpha.$$

W dalszym ciągu używamy metody indukcyi.

Jeśli bowiem $1>u_{k+1}>\frac{1}{\alpha}$, to i u_k spełnia taką samą nierówność. Dla dowodu opieramy się na wzorze zwrotnym (8).

$$1>u_k>1-\frac{e^{\alpha}}{a_k},$$

czyli

$$1>u_k>\frac{1}{\alpha},$$

gdyż

$$\frac{e^{\alpha}}{a_k}<\frac{\alpha-1}{\alpha}.$$

Dochodzimy w ten sposób aż do u_1.

$$u_1=1-\frac{e^{\alpha}}{a_1}\left\{\frac{\alpha-\log\alpha}{\alpha}-\frac{\log u_2}{\alpha}\right\},$$

więc

$$1>u_1>1-\frac{e^{\alpha}}{a_1},$$

$$1>u_1>\frac{1}{\alpha},$$

gdyż

$$0 > \log u_2 > -\log \alpha .$$

Wreszcie:

$$y = mx - (\alpha - \log \alpha) + \log u_1 ;$$

lecz

$$0 > \log u_1 > -\log \alpha ,$$

więc

$$mx - (\alpha - \log \alpha) > y > mx - (\alpha - \log \alpha) - \log \alpha .$$

Ostatecznie:

$$mx - \alpha + \log \alpha > y > mx - \alpha .$$

Teraz już możemy napisać:

$$e_n\{mx - \alpha + \log \alpha\} > e_n(y) > e_n(mx - \alpha).$$

Ponieważ jednak

$$e_n(y) = a_n(x) ,$$

mamy więc ostatecznie:

$$e_n\{mx - \alpha + \log \alpha\} > a_n(x) > e_n(mx - \alpha) , \tag{9}$$

co trzeba było udowodnić.

15. Wzory normujące wzrastanie funkcyi $\mathcal{E}(x)$. W nr. 9 podany został wzór (7)

$$\mathcal{E}(z) < a_n\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\, e^{\alpha}\right),$$

gdzie

$$n = \mathrm{E}\left\{\log_{\alpha} \frac{R}{(\alpha - 1)\, e^{\alpha}}\right\} + 3 ,$$

a R oznacza $|z|$.

Oznaczmy przez $M(R)$ maximum funkcyi $\mathcal{E}(z)$ na kole o promieniu R. Ponieważ maximum funkcyi $\mathcal{E}(z)$ ma miejsce na osi liczb rzeczywistych po stronie dodatniej, więc

$$M(R) < a_n\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\, e^{\alpha}\right).$$

Na mocy wzoru (8) możemy napisać:

$$M(R) < e_n\left\{\frac{m\alpha\, e^{\alpha}}{\alpha - 1} - \alpha + \log \alpha\right\},$$

czyli

$$M(R) < e_n\left\{\frac{\alpha^2}{\alpha - 1} - \alpha + \log \alpha\right\} < e_n\left\{\frac{\alpha^2}{\alpha - 1} - 1\right\}.$$

Albo też (5'')

$$M(R) < a_{n+3}\left\{\frac{1+\alpha}{\alpha}\, e^{\alpha}\right\} < e_{n+3}(1 + \log \alpha) < e_{n+3}(\alpha) ,$$

gdzie

$$n = \mathrm{E}\left\{\log_{\alpha} \frac{R}{(\alpha - 1)\, e^{\alpha}}\right\}.$$

Z drugiej strony:

$$M(R) > a_N\left(e^{\alpha} + \frac{R}{\alpha^N}\right) > e_N\left(\frac{R}{e^{\alpha}\,\alpha^{N-1}}\right) \geqslant e_N(\alpha) ,$$

gdzie

$$N = \mathrm{E}\left\{\log_{\alpha} \frac{\lambda R}{e^{\alpha}}\right\} ;$$

$$\lambda = 1 \qquad \text{dla} \qquad \alpha > 2$$

$$\lambda = \alpha - 1 \qquad \text{dla} \qquad \alpha < 2$$

A więc ostatecznie:

$$e_N(\alpha) < M(R) < e_{n+3}(\alpha) . \tag{10}$$

Jeśli $\alpha = 2$, to $N = n$; jeśli $\alpha > 2$, to $n < N < n + 1$. W tym przypadku wzór (10) daje zupełnie dostateczną miarę przybliżonej wartości $M(R)$. Natomiast, jeśli $1 < \alpha < 2$, to różnica $n - N$ rośnie jak $\frac{2}{\alpha - 1} \log \frac{1}{\alpha - 1}$ w otoczeniu wartości $\alpha = 1$ i wzór (10) tem mniej jest korzystny, im $\alpha - 1$ jest mniejsze, t. j. bliższe zera.

16. Funkcya pochodna $\mathcal{E}'(x)$ nie ma miejsc zerowych. Funkcya pochodna $\mathcal{E}'(x)$ jest funkcyą całkowitą, określoną zapomocą szeregu

$$\mathcal{E}'(x) = 1 + \frac{mx}{\alpha - 1} + \frac{m^2 x^2 (\alpha + 2)}{2(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)} + \ldots$$

$$+ \frac{m^k x^k\, U_{k+1}^{(\alpha)}}{k!\,(\alpha^k - 1)(\alpha^{k-1} - 1)\ldots(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)} + \ldots$$

Spełnia ona równanie funkcyjne

$$e^{\alpha} \,.\, \mathcal{E}'(\alpha x) = \mathcal{E}'(x) \,.\, \mathcal{E}(\alpha x) .$$

Jak wiadomo (n^0 10), $\mathcal{E}(\alpha x) \neq 0$ dla każdej wartości x.

Wynika stąd, iż warunek

$$\mathcal{E}'(\alpha x) = 0$$

pociąga za sobą

$$\mathcal{E}'(x) = 0,$$

i odwrotnie warunek

$$\mathcal{E}'(x) = 0$$

pociąga za sobą

$$\mathcal{E}'(\alpha x) = 0 .$$

Tak więc, jeśliby $x = \xi_0$ było miejscem zerowem funkcyi $\mathcal{E}'(x)$, to $\frac{\xi_0}{\alpha}$, $\frac{\xi_0}{\alpha^2}$, $\frac{\xi_0}{\alpha^3}$, ... i t. d. byłyby zerami tejże funkcyi; czyli, innemi słowy, funkcya $\mathcal{E}'(x)$ miałaby nieskończoną liczbę zer w otoczeniu punktu $x = 0$; lecz to jest niemożliwe, gdyż $\mathcal{E}'(x)$ jest funkcyą całkowitą, a więc regularną w otoczeniu wartości $x = 0$.

17. Funkcya $\mathcal{E}(x)$ jest funkcyą rosnącą na osi liczb rzeczywistych. Ponieważ $\mathcal{E}'(x) > 0$ na osi liczb rzeczywistych, więc stąd wynika, iż $\mathcal{E}(x)$ jest funkcyą rosnącą dla wartości rzeczywistych zmiennej x. Gdy x rośnie do $+\infty$, funkcya $\mathcal{E}(x)$ rośnie nieograniczenie i wzrastanie to jest unormowane wzorami n⁰ 15. Ponieważ $\mathcal{E}(0) = e^\alpha$, to dla wartości $x < 0$, $\mathcal{E}(x) < e^\alpha$.

Łatwo teraz obliczyć $\lim\limits_{x=-\infty} \mathcal{E}(x)$. W rzeczy samej:

$$\mathcal{E}(\alpha^n x) = a_n \{\mathcal{E}(x)\}.$$

Przypuśćmy, iż x ma dowolnie ustaloną wartość ujemną; wtedy:

$$\mathcal{E}(x) < e^\alpha.$$

Ciąg

$$a_1\{\mathcal{E}(x)\},\quad a_2\{\mathcal{E}(x)\},\quad a_3\{\mathcal{E}(x)\},\ldots,\quad a_n\{\mathcal{E}(x)\}$$

jest malejący

i $$\lim_{n=\infty} \mathcal{E}(\alpha^n x) = \lim_{n=\infty} a_n\{\mathcal{E}(x)\} = e^\beta,$$

na zasadzie twierdzenia I, n⁰ 13.

Łatwo otrzymać wykres funkcyi $y = \mathcal{E}(x)$. Prosta $y = e^\beta$ jest asymptotą do krzywej $y = \mathcal{E}(x)$. W punkcie $(x = 0,\ y = e^\alpha)$, gdzie krzywa przecina oś rzędnych, styczna do krzywej tworzy z osią odciętych kąt równy 45⁰.

18. Funkcya odwrotna. Funkcya odwrotna jest funkcyą wielowartościową, posiadającą nieskończoną liczbę gałęzi. Oznaczać ją będziemy przez $T(x)$. Funkcya $T(x)$ spełnia równanie funkcyjne:

$$T(a^x) = \alpha \,.\, T(x).$$

Na razie zajmiemy się tylko wartościami rzeczywistemi funkcyi $T(x)$; należą one do pewnej ściśle określonej gałęzi funkcyi $T(x)$, jak to wynika z własności funkcyi $\mathcal{E}(x)$, o których mowa była w n⁰n⁰ 16 i 17. Ponieważ $\mathcal{E}(x)$ dla wartości rzeczywistych zmiennej x jest funkcyą rosnącą, więc odwrócenie musi być jednoznaczne i otrzymujemy w ten sposób funkcyę $T(x)$, określoną tylko dla wartości $x > e^\beta$. Mianowicie, gdy x rośnie od e^β do e^α, to w ten sposób określona funkcya $T(x)$ rośnie od $-\infty$ do 0; gdy x rośnie od e^α do $+\infty$, to $T(x)$ rośnie od 0 do $+\infty$.

Tak określona funkcya $T(x)$ przedstawia pewien szczególny typ wzrastania funkcyi. Mianowicie $T(x)$ rośnie wolniej od funkcyi $\log_n x$, gdzie $\log_n x = \log\log\ldots\log x$, n zaś oznacza dowolnie wielką liczbę całkowitą stałą.

W rzeczy samej, zauważmy naprzód, iż przy n stałem istnieje taka liczba $R_0(n)$, iż nierówność

$$R > R_0(n)$$

pociąga za sobą nierówność

$$M(R) > e_n(R).$$

Albowiem

$$M(R) = a_n\left\{M\left(\frac{R}{\alpha^n}\right)\right\} > e_n\left\{m\, M\left(\frac{R}{\alpha^n}\right) - \alpha\right\}$$

na mocy równania funkcyjnego i wzoru (9). Lecz przy n stałem istnieje taka liczba $R_0(n)$, iż nierówność $R > R_0(n)$ pociąga za sobą nierówność

$$m \,.\, M\left(\frac{R}{\alpha^n}\right) - \alpha > R.$$

Przekonać się o tem łatwo, kładąc $R = \alpha^n \rho$ i pamiętając, iż dla każdej funkcyi całkowitej przestępnej istnieje liczba $\rho_0 > 1$ taka, iż nierówność $\rho > \rho_0$ pociąga za sobą nierówność $M(\rho) > k\rho$. W danym razie możemy wziąć $k = e^\alpha (1 + \alpha^{n-1})$.

Przejdźmy teraz do funkcyi odwrotnej. Połóżmy

$$T(x) = R > 0,$$

w takim razie

$$M\{T(x)\} = x > e^\alpha.$$

Otrzymamy wtedy, iż nierówność $T(x) > R_0(n)$ pociąga za sobą nierówność $x > e_n\{T(x)\}$, czyli $\log_n x > T(x)$.

Niech x_0 oznacza liczbę taką, iż $T(x_0) > R_0(n)$. Ponieważ funkcya $T(x)$ jest funkcyą rosnącą, więc nierówność $x > x_0$ pociąga za sobą nierówność $T(x) > T(x_0)$.

Ostatecznie otrzymujemy twierdzenie następujące: Dla każdego n istnieje taka liczba $x_0(n)$, iż nierówność

$$x > x_0(n)$$

pociąga za sobą nierówność $T(x) < \log_n x$.

Tym samem twierdzenie o szczególnym typie wzrastania funkcyi $T(x)$ jest udowodnione.

19. Wynik otrzymany w n⁰ 18 możemy teraz uzupełnić.

Przedewszystkiem zauważmy, iż liczba R_0, o której była mowa poprzednio, może być wyznaczona rozmaicie. Naprzykład, możemy przyjąć

$$R_0(n) = 2e^{2\alpha}\alpha^{2n-1}.$$

W rzeczy samej, nierówność

$$R > 2e^{2\alpha}\alpha^{2n-1}$$

pociąga za sobą nierówność

$$M(R) > e_n(R).$$

Albowiem

$$M(R) > e_n\left\{mM\left(\frac{R}{\alpha^n}\right) - \alpha\right\} > e_n\left\{\frac{m\alpha e^{-\alpha}R^2}{2(\alpha-1)\alpha^{2n}}\right\},$$

zważywszy, iż

$$M(\rho) > e^{\alpha} + \frac{\alpha e^{-\alpha}\rho^2}{2(\alpha-1)},$$

dla

$$\rho > 0.$$

Tak więc

$$M(R) > e_n\left\{\frac{m\alpha e^{-\alpha}R}{2(\alpha-1)^{\alpha^{2n}}}R\right\} > e_n\left\{\frac{\alpha}{\alpha-1}R\right\} > e_n(R),$$

uwzględniając, iż

$$R > 2e^{2\alpha}\alpha^{2n-1}.$$

Dla funkcyi odwrotnej otrzymujemy:

$$T(x) < \log_n x$$

jeśli

$$n < \tfrac{1}{2}\{\log_\alpha T(x) - \log_\alpha 2 - 2\alpha\log_\alpha e + 1\}.$$

Albo też inaczej:

nierówność

$$x > M\{2e^{2\alpha}\alpha^{2n-1}\},$$

pociąga za sobą nierówność

$$T(x) < \log_n x.$$

Ponieważ

$$e_{2n-1}(2\alpha e^{\alpha}) > M\{2e^{2\alpha}\alpha^{2n-1}\},$$

więc nierówność

$$x > e_{2n-1}(2\alpha e^{\alpha})$$

pociąga za sobą nierówność

$$T(x) < \log_n x.$$

20. Przy pomocy funkcyi $e_n(R)$ pod warunkiem, że wskaźnik n nie jest stały, lecz wzrasta wraz z R, możemy utworzyć funkcyę rosnącą prędzej aniżeli $M(R)$.

W rzeczy samej udowodnimy, iż

$$M(R) < e_{\mathrm{E}(\log_\alpha R)}(R),$$

o ile

$$R > \alpha e^{-\alpha}M(\alpha).$$

Albowiem

$$M(R) = a_n\left\{M\left(\frac{R}{\alpha^n}\right)\right\} < e_n\left\{mM\left(\frac{R}{\alpha^n}\right) - \alpha + \log\alpha\right\}.$$

Przypuśćmy teraz, iż

$$n = \mathrm{E}(\log_\alpha R),$$

czyli że

$$1 \leqslant \frac{R}{\alpha^n} < \alpha.$$

W takim razie

$$M(R) < e_n\{mM(\alpha) - \alpha + \log\alpha) < e_n\{mM(\alpha)\} < e_n(R),$$

co trzeba było udowodnić.

Jeśli $\alpha > 2$, to warunek $R > \alpha e^{-\alpha}M(\alpha)$ można zastąpić warunkiem

$$R > \alpha\left\{1 + \log\frac{e^2}{e^2-4}\right\}.$$

Jeżeli zaś $\alpha < 2$, to warunek $R > \alpha e^{-\alpha}M(\alpha)$ zastąpić można warunkiem

$$R > \alpha e^{-\alpha}e_{n+3}(\alpha),$$

gdzie

$$n = \mathrm{E}\{1 - \log_\alpha(\alpha-1) - \alpha\}.$$

Nierówności powyższe możemy zastosować do funkcyi odwrotnej. Znajdziemy wtedy, iż nierówność

$$x > M\{\alpha e^{-\alpha}M(\alpha)\}$$

pociąga za sobą nierówność

$$T(x) > \log_{\mathrm{E}\{\log_\alpha T(x)\}} x.$$

Mamy więc przy wielkich wartościach zmiennej x nierówności:

$$e_n(x) < \mathcal{E}(x) < e_{\mathrm{E}\{\log_\alpha x\}}(x) \qquad \text{i} \qquad \log_{\mathrm{E}\{\log_\alpha T(x)\}} x < T(x) < \log_n(x).$$

21. Niech X i x oznaczają dwie liczby dowolne większe od e^{α} i także że $X > x$ i niech k oznacza liczbę całkowitą dodatnią taką, że

$$\log_k X \geqslant x > \log_{k+1} X.$$

Liczba k jest blizko związana z funkcyą odwrotną $T(z)$. W rzeczy samej:

$$T(X) > \alpha^k T(x), \quad \text{a} \quad T(X) > \alpha^{k+1}T(x),$$

stąd

$$k \leqslant \log_\alpha\frac{T(X)}{T(x)} < k + 1,$$

przyczem

$$\frac{T(X)}{T(x)} > 0,$$

czyli

$$k = \mathrm{E}\left\{\log_\alpha \frac{T(X)}{T(x)}\right\}.$$

22. Ze sposobu wzrastania funkcyi $\mathcal{E}(x)$ i $T(x)$ łatwo wyprowadzić, w jaki sposób zachowują się funkcye pochodne $\mathcal{E}'(x)$ i $T'(x)$, gdy x rośnie nieograniczenie.

Pochodna $\mathcal{E}'(x)$ czyni zadość równaniu funkcyjnemu:

$$\mathcal{E}'(x) = e^{-\alpha} . \mathcal{E}(x) . \mathcal{E}'\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Stąd wynika, iż

$$\mathcal{E}'(x) = e^{-(p+1)\alpha}\, \mathcal{E}(x) . \mathcal{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) . \mathcal{E}\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) \dots \mathcal{E}\left(\frac{x}{\alpha^p}\right) . \mathcal{E}'\left(\frac{x}{\alpha^{p+1}}\right)$$

Liczbę całkowitą p obieramy w ten sposób, by było

$$\alpha^p \leqslant |x| < \alpha^{p+1}.$$

Wtedy

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant \frac{|x|}{\alpha^{p+1}} < 1.$$

Wzór poprzedni na $\mathcal{E}'(x)$ możemy napisać tak

$$\mathcal{E}'(x) = e^{-\{\mathrm{E}(\log_\alpha |x| + 1)\}\alpha}\, \mathcal{E}(x) . \mathcal{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) . \mathcal{E}\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) \dots \mathcal{E}\left(\frac{x}{\alpha^p}\right) . \mathcal{E}'(\theta),$$

gdzie

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant \theta < 1 \quad \text{dla} \quad x > 0,$$

$$-\frac{1}{\alpha} \leqslant \theta < -1, \qquad x < 0.$$

Stąd wynika, iż

$$\lim_{x=-\infty} \mathcal{E}'(x) = 0.$$

Ponieważ $\mathcal{E}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \operatorname{Log} \mathcal{E}(x)$, gdzie przez Log oznaczać będziemy logarytm przy zasadzie α dla odróżnienia od logarytmów naturalnych, otrzymamy dla $x > 0$

$$\mathcal{E}'(x) = A . x^{-\alpha \log_\alpha e}\, \mathcal{E}(x) . \operatorname{Log} \mathcal{E}(x) . \operatorname{Log}_2 \mathcal{E}(x) \dots \operatorname{Log}_{\mathrm{E}(\log_\alpha x)} \mathcal{E}(x),$$

gdzie

$$A < \mathcal{E}'(1)$$

i jednocześnie

$$A > e^{-\alpha}\, \mathcal{E}'\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Ten ostatni wzór rozwiązuje zagadnienie o wzrastaniu funkcyi $\mathcal{E}'(x)$ dla wielkich wartości dodatnich zmiennej x, gdyż sprowadza to zagadnienie do rozwiązanego już poprzednio o wzrastaniu funkcyi $\mathcal{E}(x)$.

23. Twierdzenie pomocnicze. Jeżeli $x > e^\beta$, to $\lim\limits_{p=\infty} \operatorname{Log}_p x = e^\alpha$.

Rozróżniamy trzy przypadki:

1° $e^\beta < x < e^\alpha$. W tym przypadku $\operatorname{Log}_p x < \operatorname{Log}_{p+1} < e^\alpha$ i $\lim\limits_{p=\infty} \operatorname{Log}_p x$ istnieje. Granica ta ξ spełnia równanie $\operatorname{Log} \xi = \xi$, jak łatwo widzieć; a więc ξ może być tylko e^α lub e^β. Ponieważ nie może być e^β, więc $\lim\limits_{p=\infty} \operatorname{Log} x = e^\alpha$.

2° $x = e^\alpha$; wtedy $\operatorname{Log}_{p+1} x = \operatorname{Log}_p x = e^\alpha$ i $\lim\limits_{p=\infty} \operatorname{Log}_p x = e^\alpha$.

3° $x > e^\alpha$; w takim razie $\operatorname{Log}_p x > \operatorname{Log}_{p+1} x > e^\alpha$ i $\lim\limits_{p=\infty} \operatorname{Log}_p x$ istnieje; ponieważ spełnia równanie $\operatorname{Log} \xi = \xi$, więc granica ta równa się e^α.

24. Funkcya pochodna $T'(x)$, określona dla $x > e^\beta$, przez

$$T'(x) = \frac{1}{\mathcal{E}'\{T(x)\}}$$

spełnia równanie funkcyjne

$$x\, T'(x) = e^\alpha . T'(\operatorname{Log} x) = e^\alpha T'(x_1),$$

gdzie

$$x_1 = \operatorname{Log} x.$$

Z równania tego wynika, iż $x < x_1$ pociąga za sobą $T'(x) > T'(x_1)$, gdyż wtedy $x < e^\alpha$; nierówność zaś $x > x_1$, co ma miejsce, gdy $x < e^\alpha$; pociąga za sobą nierówność $T'(x) < T'(x_1)$.

Ponieważ chodzi nam o wielkie wartości argumentu x, możemy przyjąć, iż nierówność $x > e^\alpha$ jest spełniona. Wtedy $T'(x)$ jest oczywiście funkcyą malejącą zmiennej x; w rzeczy samej, gdy x rośnie od e^α do ∞, to $T(x)$ rośnie od 0 do nieskończoności, $\mathcal{E}'\{T(x)\}$ rośnie od 1 do ∞, a więc $T'(x)$ maleje od 1 do 0.

Z równania funkcyjnego

$$T'(x) = \frac{e^\alpha}{x}\, T'(\log \alpha)$$

wynika

$$T'(x) = \frac{e^{(p+1)\alpha}\, T'(\operatorname{Log}_{p+1} x)}{x \operatorname{Log} x \operatorname{Log}_2 x \dots \operatorname{Log}_p x}.$$

Ponieważ założyliśmy, iż $x > e^{\alpha}$, to ciąg $\mathrm{Log}\, x$, $\mathrm{Log}_2\, x$, $\mathrm{Log}_3\, x, \ldots$ jest malejący, a $\lim\limits_{p=\infty} \mathrm{Log}_p\, x = e^{\alpha}$.

Liczbę całkowitą p określimy w ten sposób, by było:

$$\mathrm{Log}_{p+1}\, x < (1+\varepsilon)\, e^{\alpha} < \mathrm{Log}_p\, x, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon > 0.$$

Dla skrócenia niech $1+\varepsilon = \lambda$.

Wtedy otrzymamy:

$$T'(x) = B \frac{\{T(x)\}^{\alpha \log_\alpha e}}{x . \mathrm{Log}\, x . \mathrm{Log}_2\, x . \mathrm{Log}_3\, x \ldots \mathrm{Log}_{E\left\{\log_\alpha \frac{T(x)}{T(\lambda e^{\alpha})}\right\}}},$$

gdzie B czyni zadość nierówności

$$\frac{T'(\lambda e^{\alpha})}{T(\lambda e^{\alpha})} < B < \frac{e^{\alpha}}{T(\lambda e^{\alpha})}.$$

25. Zbadajmy jeszcze jak rośnie wraz z R liczba zer funkcyi $\mathcal{E}(x) - C$ wewnątrz koła o promieniu R na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Niech $N(R, C)$ oznacza tę liczbę.

W takim razie

$$N(R, C) = \int\limits_{\Sigma} \frac{\mathcal{E}'(z)\, dz}{\mathcal{E}(z) - C},$$

przyczem $|z| = R$, a Σ oznacza koło o promieniu R ze środkiem w punkcie początkowym układu spółrzędnych.

Będzie tedy

$$N(\alpha R, C) = \int\limits_{\Sigma} \frac{\alpha \mathcal{E}'(\alpha z)\, dz}{\mathcal{E}(\alpha z) - C} = \int\limits_{\Sigma} \frac{m \mathcal{E}'(z)\, \mathcal{E}(\alpha z)\, dz}{e^{m \mathcal{E}(z)} - C}\, dz,$$

a więc liczba zer $N(\alpha R, C)$ równa się liczba zer funkcyi $e^{m\mathcal{E}(z)} - C$ wewnątrz koła Σ, t. j. liczbie zer funkcyi $\mathcal{E}(z) - \dfrac{\log C}{m}$ wewnątrz koła Σ. Lecz $\dfrac{\log C}{m} = l \pm \dfrac{2k\pi i}{m}$, gdzie $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Możemy więc napisać:

$$N(\alpha R, C) = \sum_{k=1}^{k=K} N\left(R, l + \frac{2k\pi i}{m}\right) + N(R, l) + \sum_{k=1}^{k=K} N\left(R, l - \frac{2k\pi i}{m}\right),$$

gdzie K oznacza liczbę taką, iż dla $k > K$ funkcya

$$\mathcal{E}(z) - l \pm \frac{2k\pi i}{m}$$

nie posiada ani jednego zera wewnątrz koła o promieniu R. Liczba K jest mniejsza od liczby $\dfrac{M(R)\, m}{2\pi}$, lub co najwyżej liczbie tej równa, gdyż

$$\mathcal{E}(z) = l + M(R)\, i$$

nie posiada pierwiastków wewnątrz koła Σ.

Oznaczmy przez $\mathfrak{N}(R)$ liczbę taką, że

$$\mathfrak{N}(R) \geqslant N(R, C)$$

przy danem R dla każdego C.

W takim razie

$$N(\alpha R, C) \leqslant \left[\frac{M(R)}{\pi} m + 1\right] . \mathfrak{N}(R).$$

Ponieważ ta nierówność zachodzi dla każdej wartości liczby C, więc

$$\mathfrak{N}(\alpha R) < M(R) . \mathfrak{N}(R).$$

Stąd

$$\mathfrak{N}(R) < \mathrm{Log}\, M(R) . \mathrm{Log}_2\, M(R) \ldots . \mathrm{Log}_p\, M(R) . \mathfrak{N}\left(\frac{R}{\alpha^p}\right).$$

Ponieważ

$$\mathcal{E}'(o) \neq 0,$$

więc

$$\lim_{R=0} \mathfrak{N}(R) = 1,$$

a zatem istnieje taka liczba p_0, iż dla

$$p \geqslant p_0, \quad \text{jest} \quad \mathfrak{N}\left(\frac{R}{\alpha^p}\right) = 1.$$

Na tej zasadzie możemy napisać wzór

$$\mathfrak{N}(R) < \mathrm{Log}\, M(R) . \mathrm{Log}_2\, M(R) \ldots . \mathrm{Log}_{p_0}\, M(R).$$

Uwzględniając wyniki osiągnięte w n° 20, możemy, np., otrzymać nierówność, normującą liczbę miejsc zerowych wewnątrz koła o promieniu R, w postaci następującej:

$$\mathfrak{N}(R) < \left[e_{E\{\log_\alpha R\}-1}(R)\right]^{1+\varepsilon},$$

gdzie ε jest liczba dodatnia dowolnie mała.

26. Zajmijmy się jeszcze spółczynnikami d_p rozwinięcia funkcyi

$$\mathcal{E}(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \ldots + d_p x^p + \ldots$$

gdzie

$$\frac{m^{p-1}\, U_p(\alpha)}{p!\, \Pi\, (\alpha^{p-1} - 1)} = d_p.$$

Jak wiadomo,

$$2\pi i \, d_p = \int_C \frac{\mathcal{E}(x)}{x^{p+1}} \, dx ,$$

skąd

$$d_p < \frac{M(R)}{R^p} .$$

Nierówność ta zachodzi przy danem p dla każdej wartości R. Otrzymamy dogodną granicę przybliżenia, kładąc $R = T(e^p)$. W takim razie, istotnie,

$$d_p < \left\{ \frac{e}{T(e^p)} \right\}^p ,$$

czyli

$$\frac{1}{\sqrt[p]{d_p}} > \frac{1}{e} \cdot T(e^p) .$$

27. Zakończenie. W artykule niniejszym ograniczaliśmy się prawie wyłącznie do wartości rzeczywistych zmiennej, pozostawiając na uboczu badanie zmienności funkcyi $\mathcal{E}(x)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, gdyż celem naszym było poznanie sposobu wrastania modułu funkcyi dla wielkich wartości zmiennej, a maximum tego modułu na kole o promieniu R ma miejsce właśnie na osi liczb rzeczywistych. Lecz dla osiągnięcia na tej drodze dalszych wyników konieczne jest uprzednie zbadanie funkcyi $\mathcal{E}(x)$ i funkcyi odwrotnej $T(x)$ na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej, co stanowić będzie przedmiot innego artykułu.

RÉSUMÉ.

Je définis une certaine fonction

$$\mathcal{E}(x) = d_0 + d_1 x + \ldots + d_p x^p + \ldots$$

avec

$$d_0 = e^\alpha, \quad d_1 = 1, \ldots, \quad d_p = \frac{m^{p-1} U_p(\alpha)}{p! \prod_{k=1}^{p-1} (\alpha^k - 1)}$$

où les $U_p(\alpha)$ désignent des polynômes liés par une formule de récurrence et α désigne un nombre arbitraire > 1.

Je démontre: 1) que cette fonction $\mathcal{E}(x)$ est une fonction entière qui ne s'annulle ainsi que sa dérivée $\mathcal{E}'(x)$ pour aucune valeur de la variable;

2) que cette fonction $\mathcal{E}(x)$ satisfait à l'équation fonctionnelle $\mathcal{E}(\alpha x) = e^{m\mathcal{E}(x)}$, où $m = \frac{\alpha}{e^\alpha}$, 3) Si $M(R)$ désigne le maximum du module de $\mathcal{E}(x)$ sur le cercle de rayon R, je démontre que $M(R)$ croit plus vite que la fonction $e_n(R)$, où

$$e_1(R) = e^R, \quad e_2(R) = e^{e^R}, \ldots\ldots\ldots, \quad e_n(R) = e^{e_{n-1}^{(R)}} ;$$

en précisant, je dis que quelque soit l'entier n, il existe un nombre $R_0(n)$ tel que l'inégalité $R > R_0(n)$ entraine l'inégalité $M(R) > e_n(R)$. Pour completer ce résultat, je démontre une inégalité de sens contraire, à savoir que

$$M(R) < e_{\mathrm{E}(\log_\alpha R)}(R)$$

pour toutes les valeurs de R supérieures à une constante, qui ne dépend que de α. J'étudie ensuité du même point de vue la fonction inverse $T(x)$; cette fonction étant multiforme, je définis pour les valeurs réelles de la variable, supérieures à e^β, une branche de cette fonction. Je démontre ensuite, que pour les grandes valeurs de x la fonction $T(x)$ croît plus lentement que $\log_n x$; ou, en s'exprimant d'une façon plus précise, que pour une valeur donnée, du reste quelconque, de l'entier n, il existe un nombre $x_0(n)$ tel que l'inégalité $x > x_0(n)$ entraine l'inégalité $T(x) < \log_n x$. Je complète ce résultat, comme pour la fonction $\mathcal{E}(x)$, par une inégalité de sens contraire.

J'étudie ensuite les fonctions derivées $\mathcal{E}'(x)$ et $T'(x)$ du même point de vue et j'obtiens des formules analogues concernant la façon dont ces fonctions se comportent quand la variable augmente indéfiniment.

J'étudie enfin les coefficients d_p du developpement de $\mathcal{E}(x)$ en série pour les grandes valeurs de l'indice p.
