$$J=\frac{y_0}{R}.$$

Endlich ist die „Krümmung" einer euklidischen Geraden, welche den Winkel τ mit der Abszissenachse bildet:

$$J=\cos\tau.$$

Die zur x-Achse senkrechten Geraden haben die „Krümmung" $J=\cos\frac{\pi}{2}=0$; sie gehören auch zu den nicht-euklidischen „Geraden".

Durch Integration der Differentialgleichungen $J=0$, $J=\mathrm{const}$ komm man auf hyperbolische „Geraden" und „Zyklen". Man kann also mit Recht die Differentialinvariante J als „Krümmung" der Kurven in der hyperbolischen Ebene einführen, — und auf dieser Definiton die hyperbolische Differentialgeometrie aufbauen.

ROMUALD WITWIŃSKI.

O powierzchniach algebraicznych, zawierających dwa pęki krzywych wymiernych.

Sur les surfaces algébriques contenant deux faisceaux de courbes rationnelles.

W rozprawie [1] p. t. „Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques" matematyk francuski G. Koenigs po raz pierwszy postawił i rozwiązał zagadnienie o wyznaczeniu takich powierzchni przestrzeni trójwymiarowej, któreby zawierały dwa pęki stożkowych. Kilka lat temu L. Godeaux ogłosił rozprawę [2], w której znajduje powierzchnie przestrzeni r-wymiarowej, zawierające dwa pęki stożkowych.

Stawiam sobie za cel pracy niniejszej wyznaczyć takie powierzchnie algebraiczne przestrzeni r-wymiarowej S_r, które zawierają dwa pęki krzywych wymiernych.

Dowodzę mianowicie twierdzenia następującego:

I. Jeżeli powierzchnia algebraiczna przestrzeni S_r posiada dwa pęki krzywych wymiernych, wówczas ta powierzchnia jest wymierna i może być odwzorowana na płaszczyźnie w ten sposób, że krzywym pęku odpowiadają proste pęku, i że krzywym drugiego pęku odpowiadają krzywe wymierne pewnego rzędu μ, możliwie najmniejszego, przechodzące $\mu-\nu$ razy przez wierzchołek pęku prostych (ν jest to liczba punktów wspólnych krzywym pęków), przytem takie, że ich wielokrotności w dwóch punktach-podstawach, różnych od

[1]) Annales de l'École Normale Supérieure, 1888, 3-e s., t. V, p. 177.

[2]) Démonstration nouvelle et extension d'un théorème de M. G. Koenigs (l'Enseignement mathématique, 1912, n⁰ 4, p. 319).

wierzchołka pęku prostych, w sumie nie przewyższają ν. Po zatem niema punktów-podstaw ν-krotnych, i może znajdować się tylko jeden punkt-podstawa, którego wielokrotność przewyższa $\frac{\nu}{2}$ (jeżeli wyłączymy pęk prostych). Krzywe, przedstawiające przekroje nadpłaskie[1] powierzchni nigdy nie przechodzą przez dwa punkty-podstawy pęku krzywych rzędu μ, których suma wielokrotności jest ν, z wielokrotnościami, których suma przewyższa rząd krzywej wymiernej pęku, odpowiadającego pękowi prostych.

W twierdzeniu powyższem uważam powierzchnię wymierną, jako wyznaczoną w zupełności, jeżeli dane jest jedno z jej odwzorowań płaskich.

Jako przypadek szczególny, wyprowadzam twierdzenie Koenigsa, któremu nadaję postać następującą:

II. Jeżeli powierzchnia algebraiczna zawiera dwa pęki stożkowych, wówczas ta powierzchnia jest wymierna i jest to powierzchnia Veronesego przestrzeni S_4, albo powierzchnia rzędu ósmego z przekrojami nadpłaskiemi eliptycznemi, przedstawiającemi układ krzywych płaskich czwartego rzędu z dwoma punktami podwójnemi, albo jeden z rzutów tych dwóch powierzchni.

Dowodzę wreszcie następującego twierdzenia:

III. Jeżeli powierzchnia algebraiczna zawiera pęk stożkowych i pęk krzywych sześciennych wymiernych, wówczas ta powierzchnia jest powierzchnią wymierną rzędu 12 przestrzeni S_{11}, z przekrojami nadpłaskiemi rodzaju 2, albo powierzchnią rzędu 11 przestrzeni S_{10}, z przekrojami rodzaju 2, albo powierzchnią rzędu 8 przestrzeni S_8 z przekrojami eliptycznemi (przedstawiającemi układ krzywych płaskich rzędu trzeciego, mający jeden punkt-podstawę), albo powierzchnią liniową sześcienną przestrzeni S_4, albo kwadryką, albo rzutem jednej z tych powierzchni.

---

1. Niech będzie F powierzchnia algebraiczna rzędu n, położona w przestrzeni liniowej r-wymiarowej S_r, zawierająca dwa pęki krzywych wymiernych. Oznaczmy przez C_1 krzywą zbiorową jednego z tych pęków, przez

[1] Nadpłaskie : hyperplanes.

C_2 — krzywą zbiorową drugiego pęku. Niech będą n_1, n_2 odpowiednio rzędy krzywych C_1, C_2, ν — liczba punktów ($\geqq 1$), wspólnych krzywym C_1 i C_2.

Grupy punktów przecięcia krzywych C_1 z jedną z krzywych C_2, obraną zupełnie dowolnie, tworzą inwolucyę γ' na tej krzywej. Otóż, ponieważ ta krzywa C_2 jest wymierna, przeto, na mocy twierdzenia Lürotha, to samo ma miejsce dla inwolucyi, a więc i dla pęku krzywych C_1.

Zgodnie ze zwyczajem, pęk wymierny krzywych C_1 będę oznaczał symbolem $|C_1|$. Zupełnie tak samo dowiedziemy, że krzywe C_2 tworzą pęk wymierny (C_2).

Ale, na mocy twierdzenia Nöthera, powierzchnia algebraiczna, posiadająca pęk wymierny krzywych wymiernych, jest sama wymierna; wnosimy więc, że powierzchnia F jest wymierna.

Oznaczmy przez $|C|$ układ przekrojów płaskich albo nadpłaskich powierzchni F i załóżmy, że ta powierzchnia jest normalna, innemi słowy, że ta powierzchnia nie jest rzutem żadnej powierzchni tego samego rzędu n, należącej do przestrzeni liniowej o więcej niż r wymiarach.

2. Rozważmy odwzorowanie płaskie powierzchni, inaczej mówiąc, wykażmy istnienie odpowiedniości dwuwymiernej między powierzchnią F a jakąkolwiek płaszczyzną. Niech będą $|C^*|$ układ liniowy zwyczajny o wymiarze r, przedstawiający układ przekrojów nadpłaskich $|C|$, $|C^*_1|$ — pęk krzywych wymiernych, odpowiadających krzywym C_1, $|C^*_2|$ — pęk krzywych wymiernych, odpowiadających krzywym C_2.

Ale mamy nieskończoną liczbę odwzorowań płaskich powierzchni, ponieważ wiadomo, że można zamiast układu $|C^*|$ wziąć układ liniowy, przekształcony z układu $|C^*|$ zapomocą jakiegokolwiek przekształcenia dwuwymiernego. Należy skorzystać z tej nieoznaczoności, aby wybrać układ $|C^*|$ w sposób następujący:

1°. Krzywe C^*_1 niech będą prostemi pęku o wierzchołku P.

2°. Krzywe C^*_2 niech będą rzędu minimum μ.

3°. Krzywe C^* niech będą rzędu minimum m (przyczem m jest oczywiście wybrane tylko wtedy, gdy ustalone jest μ).

Jest zawsze możliwe zadośćuczynienie warunkowi 1°, ponieważ, jeżeli jest dany pęk krzywych wymiernych w płaszczyźnie, wówczas istnieje zawsze przekształcenie dwuwymierne, które zamienia ten pęk na pęk prostych (to wynika zresztą z zacytowanego wyżej twierdzenia Nöthera). Wracając więc do odwzorowania płaskiego powierzchni F, w którem krzywe C^*_1 nie są prostemi, powiemy, że jest rzeczą możliwą znaleść przekształcenie dwuwymierne (i wobec tego inne przekształcenie płaskie powierzchni F), zamieniające krzywe C^*_1 na proste.

3. Krzywe C^*_2 przecinają krzywą C^*_1 w ν punktach, mamy przeto $\mu \geqq \nu$, i punkt P jest punktem $(\mu-\nu)$-krotnym dla wszystkich krzywych C^*_2.

Tak samo, punkt P jest punktem $(m-n_1)$-krotnym dla krzywych C^*.

Oznaczmy, wyłączając punkt P, przez x_{ik} liczbę punktów stałych płaszczyzny i-krotnych dla krzywych C^*_2 i k-krotnych dla krzywych C^* $(i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ \nu;\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n_1)$.

Wyraźmy, że krzywe C^*_2 są wymierne; będziemy mieli:

$$(\mu-1)(\mu-2)=(\mu-\nu)(\mu-\nu-1)+\sum_k\sum_i i\,(i-1)\,x_{ik}.$$

Oprócz tego, dwie krzywe C^*_2 nie posiadają żadnego punktu zmiennego wspólnego, mamy więc:

$$\mu^2=(\mu-\nu)^2+\sum_k\sum_i i^2 x_{ik}.$$

Te dwa wzory, po wykonaniu niektórych redukcyj, możemy napisać w postaci:

$$\sum_k\sum_i i\,x_{ik}=2(\mu-1)+\nu, \tag{1}$$

$$\sum_k\sum_i i^2 x_{ik}=2\mu\nu-\nu^2. \tag{2}$$

Wyraźmy, że dwie krzywe C^* mają n punktów zmiennych wspólnych:

$$m^2=(m-n_1)^2+\sum_i\sum_k k^2 x_{ik}+n. \tag{3}$$

Krzywa C^* przecina krzywą C^*_2 w n_2 punktach, a więc mamy:

$$m\mu=\sum_i\sum_k ik\,.\,x_{ik}+(m-n_1)(\mu-\nu)+n_2. \tag{4}$$

4. Liczba μ, aby czyniła zadość warunkowi drugiemu, powinna być liczbą najmniejszą możliwą, innemi słowy, nie może być znalezione przekształcenie dwuwymierne, zamieniające krzywe C^*_2 na krzywe stopnia mniejszego, jeżeli prostym C^*_1 mają odpowiadać proste.

Przy tych warunkach, będziemy mieli $x_{\nu k}=0$ $(k=0,\ 1,\ldots,\ n_1)$, wyjąwszy przypadek, kiedy $\nu=1$. Istotnie, załóżmy $x_{\nu k}>0,\ \nu>1$. Wówczas nie może być $x_{ik}=0$ $(i=1,\ 2,\ldots,\ \nu-1)$, ponieważ wzory (1) i (2) dają

$$\nu x_{\nu k}=2(\mu-1)+\nu,\qquad \nu x_{\nu k}=2\mu-\nu,$$

skąd $\nu=1$. Muszą więc, po za punktem P i punktami-podstawami ν-krotnemi układu $|C^*_2|$, istnieć niektóre inne punkty-podstawy. Uważajmy ν-krotny punkt-podstawę P_1 i i-krotny punkt-podstawę P_2 układu $|C^*_2|$ $(i<\nu)$. Przekształcenie kwadratowe, mające za punkty podstawowe punkty $P,\ P_1,\ P_2$, zamienia krzywe C^*_1 na proste i krzywe C^*_2 na krzywe rzędu $2\mu-(\mu-\nu)-\nu-i=\mu-i<\mu$. Otóż, dochodzimy do wniosku, że to jest niemożliwe, o ile odwzorowanie płaskie było wybrane w ten sposób, aby czyniło zadość warunkowi 2°; a więc udowodniliśmy, że, z wyjątkiem $\nu=1$, musi być $x_{\nu k}=0$.

Naogół, nie może istnieć, po za punktem P, i-krotny punkt podstawa P_1 i j-krotny punkt-podstawa P_2 dla układu $|C_2|$, jeżeli $i+j>\nu$. W rzeczy samej, gdyby to istotnie było możliwe, wówczas przekształcenie kwadratowe, mające za punkty podstawowe punkty $P,\ P_1,\ P_2$, zamieniałoby krzywe C^*_1 na proste, i krzywe C^*_2 na krzywe rzędu

$$2\mu-(\mu-\nu)-i-j=\mu-(i+j-\nu)>\mu,$$

tak że odwzorowanie płaskie nie mogłoby czynić zadość warunkowi 2°.

Z tej własności wynika, że związek $x_{ik}\geqslant 0$ może zachodzić jedynie tylko dla jednej wartości $i>\frac{\nu}{2}$, i że wówczas mamy $x_{ik}=1$.

Zastosujemy teraz te twierdzenia do wyznaczenia pęków $|C^*_2|$ dla wartości $\nu=1,\ 2$, albo 3.

5. $\nu=1$. Mamy $i\leqq\nu$ albo 1, a więc $i=0$ albo 1. Równania (1) i (2) przybierają postać:

$$x_{1k}=2\mu-1.$$

Otóż, jeżeli $x_{1k}>0$, ponieważ $\nu=1>\frac{\nu}{2}\ \frac{\nu}{1}$, albo $\frac{1}{2}$, przeto może być tylko $x_{1k}=1$, skąd $\mu=1$. Krzywe C^*_2 są to więc proste pęku.

To było oczywiste i a priori, ponieważ, jeżeli powierzchnia algebraiczna posiada dwa pęki krzywych wymiernych jednosiecznych, to jej odwzorowanie płaskie otrzymamy, ustalając pokrewieństwo rzutowe tych pęków odpowiednio z dwoma pękami prostych tej samej płaszczyzny.

6. $\nu=2$. Mamy $i\leqq 1$, skąd

$$x_{1k}=2\mu=4\mu-4,$$

czyli, że $\mu=2$. Krzywe C^*_2 są to więc stożkowe pęku.

7. $\nu=3$. Mamy $i\leqslant 2$ i, jeżeli i może być równe 2, mamy $x_{2k}=1$. Należy więc rozpatrzyć dwa przypadki:

1° i nie może przybierać wartości równej 2. Wówczas mamy:

$$x_{1k}=2\mu+1=6\mu-9,$$

czyli że $4\mu=10$, co przy μ całkowitem jest niemożliwe.

2^0 i może przybierać wartość równą 2. W tym przypadku mamy:

$$2 + x_{1k} = 2\mu + 1, \qquad 4 + x_{1k} = 6\mu - 9.$$

Stąd otrzymujemy $\mu = 3$, $x_{1k} = 5$.

Krzywe C^*_2 są to więc krzywe sześcienne płaskie, mające jeden punkt podwójny i pięć punktów pojedyńczych wspólnych.

8. Przechodzę teraz do wyrażenia warunku 3^0.

Krzywe C^* nie mogą mieć w dwóch punktach, różnych od P, i których wielokrotności dla krzywych C^*_2 stanowią w sumie ν, wielokrotności, których suma przewyższa n_1.

Aby tego dowieść, dość założyć, że mogą istnieć dwa punkty P_1, P_2 o wielokrotnościach odpowiednio równych i, $\nu - i$ dla krzywych C^*_2 i o wielokrotnościach k, k' $(k + k' > n_1)$ dla krzywych C^*.

Wówczas, przekształcenie kwadratowe, którego punktami podstawowemi są punkty P, P_1, P_2, zamienia krzywe C^*_1 na proste, krzywe C^*_2 na krzywe rzędu $2\mu - (\mu - \nu) - i - (\nu - 1) = \mu$, i krzywe C^* na krzywe rzędu $2m - (m - n_1) - k - k' = m\ (k + k' - n_1) < m$. Warunek 3^0 nie byłby więc spełniony przez układ $|C^*|$, co przeczy założeniu.

W ten sposób, twierdzenie I zostało udowodnione w całej rozciągłości.

9. Twierdzenie Koenigsa. Aby wyznaczyć powierzchnie F, posiadające dwa pęki stożkowych, należy przyjąć $n_1 = n_2 = 2$ i, jeżeli wyłączymy płaszczyznę $(n = 1)$, $\nu \leqslant 2$.

Przypadek 1-szy. $\nu = 1$. Wiemy z poprzedniego, że wówczas $|C^*_2|$ jest to pęk prostych, którego wierzchołek będziemy oznaczali przez P' $(\mu = 1)$.

Równania (3) i (4) przybierają postać ($k \leqslant n_1$, albo 2):

$$m^2 = (m - n)^2 + x_{11} + 4x_{12} + n,$$

$$m = x_{11} + 2x_{12} + 2.$$

Ponieważ układ $|C^*_2|$ ma tylko jeden punkt-podstawę, przeto $x_{11} + x_{12} \leqslant 1$.

Z tych trzech równań wyprowadzamy z łatwością trzy rozwiązania:

a) $m = 2$, $x_{11} = x_{12} = 0$.

Układ $|C^*|$ jest to układ stożkowych płaszczyzny, i powierzchnia F jest wobec tego powierzchnią Veronesego w przestrzeni S_5.

b) $m = 3$, $x_{11} = 1$, $x_{12} = 0$.

Układ $|C^*|$ jest układem krzywych sześciennych płaskich, mającym

dwa punkty-podstawy pojedyńcze, i powierzchnia F jest powierzchnią rzędu 7, przestrzeni S_7 z przekrojami nadpłaskiemi eliptycznemi.

c) $m = 4$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$.

Układ $|C^*|$ jest układem krzywych eliptycznych rzędu czwartego (dwa punkty-podstawy podwójne P, P'), i powierzchnia F jest powierzchnią rzędu 8 przestrzeni S_8, z przekrojami nadpłaskiemi eliptycznemi. Zauważę jeszcze, że powierzchnia rzędu siódmego (przyp. b) otrzymuje się jako rzut jednego ze swych punktów tej powierzchni ósmego rzędu.

Przypadek 2-gi. $\nu = 2$. W tym przypadku układ $|C^*_2|$ jest pękiem stożkowych $(\mu = 2)$. Będę oznaczał przez P_1, P_2, P_3, P_4 cztery punkty-podstawy tego pęku.

Na mocy wyżej poczynionego spostrzeżenia ogólnego (n^0 8), suma wielokrotności krzywych C^* w dwóch z punktów P_1, P_2, P_3, P_4 nie przewyższa $n_1 = 2$, — równania (3) i (4) przybierają postać:

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= (m - 2)^2 + x_{11} + n, \\ 2m &= x_{11} + 2. \end{aligned}\right\} \qquad (x_{11} \leqslant 4)$$

Z drugiego z tych równań wnosimy, że x_{11} jest parzyste. Jeżeli $x_{11} = 4$, mamy $m = 3$, $n = 4$, i układ $|C^*|$ jest to układ krzywych sześciennych płaskich, mający pięć punktów pojedyńczych P, P_1, P_2, P_3, P_4. Powierzchnia F jest więc powierzchnią rzędu 4, z przekrojami eliptycznemi, przestrzeni S_4.

Jeżeli $x_{11} = 2$, mamy $m = 2$, $n = 2$, i powierzchnia F jest kwadryką, przyczem $|C^*|$ jest to układ stożkowych, przechodzących przez dwa z punktów $P_1, \ldots, P_4$.

Założenie $x_{11} = 0$ prowadzi do $m = 1$, i nie jest do przyjęcia.

W ten sposób twierdzenie Koenigsa zostało udowodnione.

10. Powierzchnie, mające pęk stożkowych i pęk krzywych sześciennych jednobieżnych. Połóżmy $n_1 = 3$, $n_2 = 2$; będziemy mieli do zbadania trzy przypadki: $\nu = 1$, 2, 3 (ostatni, odpowiadający krzywym sześciennym skośnym).

Przypadek 1-y. $\nu = 1$. Jak to poprzednio widzieliśmy, mamy $\mu = 1$, i układ $|C^*_2|$ jest to pęk prostych o wierzchołku P'. Równania (3) i (4) możemy napisać w postaci:

$$m^2 = (m - 3)^2 + k^2 + n, \qquad m = k + 2,$$

zakładając, że punkt P' jest punktem k-krotnym dla krzywych C^*. Otóż mamy $k \leqslant n_1$, innemi słowy $k \leqslant 3$.

Należy zatem roztrząsnąć cztery hypotezy:

a) $k=3$, $m=5$, $n=12$.

Układ $|C^*|$ jest to układ krzywych rzędu piątego, mający dwa punkty-podstawy odpowiednio podwójne i potrójne. Te krzywe więc są rodzaju 2, i powierzchnia F jest powierzchnią rzędu 12-go, z przekrojami rodzaju 2, przestrzeni S_{11} (ponieważ tych krzywych piątego rzędu jest ∞^{20}, i istnienie punktów potrójnych lub podwójnych jest odpowiednio równoznaczne sześciu albo trzem warunkom.

b) $k=2$, $m=4$, $n=11$.

Układ $|C^*|$ jest to układ krzywych czwartego rzędu rodzaju 2, mający jeden podwójny punkt-podstawę i jeden pojedyńczy punkt-podstawę. Powierzchnia zatem F jest powierzchnią rzędu 11, z przekrojami rodzaju 2, przestrzeni S_{10}.

c) $k=1$, $m=3$, $n=8$.

Układ $|C^*|$ jest układem krzywych sześciennych płaskich z jednym punktem-podstawą P', a zatem powierzchnia F jest powierzchnią rzędu 8, z przekrojami eliptycznemi, przestrzeni S_8.

d) $k=0$, $m=2$ (niemożliwe).

Przypadek 2-gi. $\nu=2$. Układ $|C^*_2|$ jest to pęk stożkowych, którego punkty-podstawy są to punkty P_1, P_2, P_3, P_4. ($\mu=2$). Mamy $k \leqslant 3$ i, wobec tego,

$$x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13} \leqslant 4.$$

Równania (3) i (4) przybierają postać:

$$m^2=(m-3)^2+x_{11}+4x_{12}+9x_{13}+n,$$

$$2m=x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+2.$$

Pierwsze z tych równań może być napisane prościej, mianowicie:

$$x_{11}+4x_{12}+9x_{13}+n=6m-9.$$

Zmiennym x_{11}, x_{12}, x_{13} nadawać teraz będziemy różne wartości, zgodne z powyższą nierównością, skąd wyprowadzimy wartości odpowiednie na n i m.

Z uwagi że liczby $x_{11}+2x_{12}+3x_{13}$ i, zatem $x_{11}+3x_{13}$ są koniecznie parzyste, możemy w ten sposób utworzyć następującą tablicę:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	m	n
a)	4	0	0	3	5
b)	3	0	1	4	3
c)	2	2	0	4	5
d)	2	1	0	3	3
e)	2	0	2	5	+1
f)	1	0	3	6	—1
g)	0	4	0	5	5
h)	0	3	0	4	3
i)	0	2	2	6	1
j)	0	2	0	3	1
k)	0	1	0	2	—1
l)	0	0	4	7	—3
m)	0	0	2	4	—3
n)	0	0	0	1	—3

Przypadki a), b), c), d), g), h) są to oczywiście jedyne przypadki, które należy rozpatrzeć.

W przypadku a), układ $|C^*|$ jest układem krzywych sześciennych płaskich, mającym cztery pojedyńcze punkty-podstawy P_1, P_2, P_3, P_4, powierzchnia zatem F jest powierzchnią rzędu 5, przestrzeni S_5, z przekrojami nadpłaskiemi eliptycznemi.

W przypadku b), układ $|C^*|$ jest układem krzywych wymiernych czwartego rzędu, mającym jeden potrójny punkt-podstawę P_1 i cztery punkty-podstawy pojedyńcze P, P_2, P_3, P_4; powierzchnia F jest tedy krzywą sześcienną liniową przestrzeni S_4.

W przypadku c), układ $|C^*|$ jest układem krzywych eliptycznych czwartego rzędu, mającym dwa podwójne punkty-podstawy P_1, P_2 i trzy pojedyńcze P, P_3, P_4. Powierzchnia F jest powierzchnią rzędu 5 przestrzeni S_5 z przekrojami nadpłaskiemi eliptycznemi.

W przypadku d), układ $|C^*|$ jest układem krzywych sześciennych, mającym trzy punkty-podstawy, jeden podwójny P_1 i dwa pojedyńcze P_3, P_4. Powierzchnia F jest powierzchnią sześcienną liniową przestrzeni S_4.

W przypadku g), układ $|C^*|$ jest układem krzywych eliptycznych rzędu piątego, mającym pięć punktów podwójnych. Powierzchnia F jest powierzchnią rzędu piątego przestrzeni S_5, z przekrojami eliptycznemi.

W przypadku h), układ $|C^*|$ jest układem krzywych wymiernych rzędu czwartego z trzema podwójnemi punktami-podstawami i jednym pojedyńczym. Powierzchnia F jest powierzchnią sześcienną liniową przestrzeni S_4.

Przypadek 3-ci. $\nu=3$. W tym przypadku wiemy, że układ $|C^*_2|$ jest pękiem krzywych sześciennych płaskich, mającym jeden podwójny punkt-podstawę P_1 i pięć punktów-podstaw pojedyńczych P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 $(\mu = 3)$.

Na mocy tego, co powiedziano wyżej (n^0 8), suma wielokrotności punktu P_1 i jednego z punktów $P_2, \ldots, P_6$ dla układu $|C^*|$ jest co najwyżej równa 3. Niech k_i będzie wielokrotnością punktu P_i dla układu $|C^*|$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

Przedstawiają się cztery możliwe hypotezy:

α) $k_1 = 3$. W tym przypadku $k_2 = \ldots = k_6 = 0$. Równania (3) i (4) przybierają postać

$$m^2 = (m-3)^2 + 9 + n, \qquad 3m = 6 + 2;$$

rozwiązanie ich w liczbach całkowitych jest w tym przypadku niemożliwe.

β) $k_1 = 2$. W tym przypadku $k \leqslant 1$ $(i = 2, 3, \ldots, 6)$. Oznaczając przez x_{11} liczbę punktów $P_2, \ldots, P_6$, pojedyńczych dla krzywych C^*, możemy napisać

$$m^2 = (m-3)^2 + 4 + x_{11} + n,$$

$$3m = 4 + x_{11} + 2 = x_{11} + 6.$$

x_{11} musi być wielokrotnością liczby 3 z jednej strony, $x_{11} \leqslant 5$ z drugiej strony, a zatem:

a) $x_{11} = 3, \quad m = 3, \quad n = 2$.

Powierzchnia F jest wówczas kwadryką, przyczem układ $|C^*|$ jest układem krzywych sześciennych płaskich z podwójnym punktem-podstawą i trzema punktami pojedyńczemi.

b) $x_{11} = 0, \quad m = 2$, co jest niemożliwe.

γ) $k_1 = 1$. Niech, w tym przypadku, x_{11} będzie liczbą punktów $P_2, \ldots, P_6$, pojedyńczych dla krzywych C^*, x_{12} — liczbą tych punktów, podwójnych dla krzywych C^*. Mamy:

$$m^2 = (m-3)^2 + 1 + x_{11} + 4x_{12} + n,$$

$$3m = 2 + x_{11} + 2x_{12} + 2 = x_{11} + 2x_{12} + 4.$$

Możemy ułożyć tabelkę, analogiczną do poprzedniej, pomijając zapisywanie przypadków, które nie są do przyjęcia.

	x_{11}	x_{12}	m	n
a)	5	0	3	3.

Układ $|C^*|$ jest układem krzywych sześciennych płaskich z sześcioma pojedyńczemi punktami-podstawami, a zatem powierzchnia F jest powierzchnią ogólną sześcienną przestrzeni S_3.

δ) $k_1 = 0$. Przyjmując nasze oznaczenia zwykłe, będziemy mieli:

$$n + x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} = 6m - 9,$$

$$3m = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2.$$

Wyprowadzamy stąd:

$$n + 3x_{13} + 3 = x_{11}.$$

Otóż, $x_{11} \leqslant 5$, zatem $n + 3x_{13} \leqslant 2$, wobec czego $x_{13} = 0$, $n = 2$, $x_{11} = 5$, $x_{12} = 0$, $3m = 7$, co jest niemożliwe. A więc hypoteza δ jest do odrzucenia.

W ten sposób, twierdzenie III, podane na początku tej pracy, zostało dowiedzione.

RÉSUMÉ.

Dans ce mémoire je détermine les surfaces algébriques de l'espace linéaire à r dimensions S_r contenant deux faisceaux de courbes rationnelles. La méthode que j'emploie est fondée sur la représentation plane des surfaces. Précisément, j'établis le théorème suivant:

I. Si une surface algébrique de S_r possède deux faisceaux de courbes rationnelles, cette surface est rationnelle et peut être représentée sur le plan de manière qu'aux courbes d'un faisceau correspondent les droites d'un faisceau et qu'aux courbes de l'autre faisceau correspondent des courbes rationnelles d'un certain ordre μ, le plus petit possible, passant $\mu - \nu$ fois par le sommet du faisceau de droites (ν étant le nombre de points communs aux courbes des faisceaux) et telles que leurs multiplicités en deux points-bases, divers du sommet du faisceau de droites, n'aient jamais une somme excédant ν. De plus, il n'y a pas de points-bases ν-tuples et il en peut exister qu' un seul point-base dont la multiciplité surpasse $\frac{\nu}{2}$ (en dehors du faisceau de droites). Les courbes représentant les sections hyperplanes de la surface ne passent jamais, par deux points-bases du faisceau de courbes d'ordre μ dont la somme des multiplicités est ν, avec des

multiplicités dont la somme surpasse l'ordre d'une courbe rationnelle du faisceau correspondant au faisceau de droites.

Je considère, dans ce qui précède, une surface rationnelle comme complètement donnée lorsque l'on connaît une de ses représentations planes.

Comme cas particulier, je déduis le théorème de M. Koenigs[1], que j'énonce comme ceci:

II. Si une surface algébrique contient deux faisceaux de coniques, cette surface est rationnelle et c'est la surface de Veronese, de S_4, ou la surface d'ordre 8, à sections hyperplanes elliptiques, représentant le système des quartiques planes à deux points doubles, ou l'une des projections de ces deux surfaces.

Je déduis enfin le théorème:

III. Si une surface algébrique contient un faisceau de coniques et un faisceau de cubiques rationnelles, elle est rationnelle et c'est une surface d'ordre 12, de S_{11}, à sections hyperplanes de genre 2, ou une surface d'ordre 11, de S_{10}, à sections de genre 2, ou une surface d'ordre 8, de S_8, à sections elliptiques (représentant le système des courbes planes du troisième ordre ayant un point-base), ou une réglée cubique de S_4, ou une quadrique, ou une projection de l'une de ces surfaces.

[1]) Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques. Annales de l'Ecole Normale sup., 3-e s., t. V, p. 177.

J. RUDNICKI.

Badanie pewnego szczególnego typu wzrastania funkcyi.

Sur un mode de croissance différent de la croissance exponentielle.

WSTĘP.

W dziele pod tytułem „Théorie de la croissance" E. Borel zajmuje się badaniem zasadniczych typów funkcyj rosnących i wprowadza następnie pewne symbole dla oznaczenia odpowiedniego rzędu wzrastania. Takiemi funkcyami typowemi są funkcye x^n i e^x; rząd wzrastania funkcyj x^n oznacza Borel przez n, funkcyi zaś e^x przez w. Rząd wzrastania funkcyi e^{e^x} — oznacza się wtedy symbolem w^2, funkcyi symbolem $e^{e^{e^x}}$ — symbolem w^3 i t. d. Otrzymujemy w ten sposób przeliczalny ciąg funkcyi, których wzrastanie jest coraz szybsze i którym odpowiadają symbole rzędowe

$$w,\quad w^2,\quad w^3, \ldots,\quad w^n, \ldots.$$

Następnie, z twierdzenia P. du Bois-Reymonda, wyprowadza Borel wniosek, iż muszą istnieć funkcye, które wzrastają szybciej, aniżeli funkcye o rzędzie wzrastania w^n, jakkolwiek wielkie byłoby n.

„Funkcye te[1] — powiada Borel — pozostaną poza ramami naszego badania.... Funkcye te ograniczają pole naszych badań tak, jak w naukach, opartych na spostrzeżeniach, doświadczenie ogranicza się obecnie do zjawisk dostrzegalnych przy pomocy mikroskopu z jednej, teleskopu z drugiej strony... Ograniczenie naszego pola badań polegać będzie na tem, iż rozpatrywać będziemy tylko te funkcye, których rząd wzrastania jest mniejszy od w^n, gdzie n oznacza liczbę całkowitą skończoną".

[1]) E. Borel, „Leçons sur la théorie de la croissance" str. 25.