Mamy zatem:

$$u = \varphi = \alpha' - \gamma y + \beta z,$$

$$v = \chi = \beta' - \alpha z + \gamma x,$$

$$w = \psi = \gamma' - \beta x + \alpha y'.$$

W tych wzorach określają α', β', γ' przesunięcie całego pręta, a α, β, γ jego obrót około osi, której położenie wyznacza stosunek $\alpha : \beta : \gamma$. Przytem nadmienić trzeba, że pręt przez tę zmianę położenia swojego nie doznaje żadnego odkształcenia. Wspomniane stałe charakteryzują ciało zupełnie swobodne. Atoli stan początkowy pręta jest ten, że pręt, wskutek utwierdzenia, nie może się przesunąć ani obrócić, a z tego wynika, że zachodzące stałe przyrównać trzeba do zera.

Do tej okoliczności sprowadziłbym warunki umocowania pręta. W tem oświetleniu stałe w mowie będące i zawarte we wzorach (22) i (22a) nabierają innego znaczenia. Stosując zasadę superpozycyi zjawisk, interpretujemy przemianę pręta, wyrażoną wzorami (22) i (22a), w sposób następujący: Te wzory zawierają 1°) Ugięcie pierwszego rzędu, 2°) Ugięcie drugiego rzędu, 3°) Skręcenie, 4°) Wydłużenie, 5°) Przesunięcie całego pręta ($\alpha' \beta' \gamma'$), 6°) Obrót pręta około osi, której położenie wyznacza stosunek $\alpha : \beta : \gamma$. Ponieważ dwa ostatnie zjawiska, 5° i 6°, wskutek umocowania pręta nie zachodzą, przeto stałe α', β', γ', α, β, γ, znikają.

We Lwowie, w grudniu 1916.

AL. RAJCHMAN.

O różniczkowalności szeregów Fouriera wyraz za wyrazem.

Sur la possibilité de différentier une série de Fourier terme-à-terme.

I. Szeregi trygonometryczne zbieżne[1], jak wykazał Riemann, dadzą się w pewnem znaczeniu całkować wyraz za wyrazem. Wynikiem takiego całkowania jest zawsze szereg Fouriera.

W notatce niniejszej zajmuję się zagadnieniem odwrotnem: rozważam dowolną funkcyę $F(x)$, całkowalną i różniczkowalną „w sposób uogólniony", t. zn. zakładam istnienie granicy

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

dla pewnej wartości $x = x_0$ (jakiejkolwiek); rozwijam funkcyę $F(x)$ na szereg Fouriera, różniczkuję ten szereg formalnie wyraz za wyrazem. Udowadniam, że szereg trygonometryczny, przez to różniczkowanie otrzymany, jest sumowalny dla $x = x_0$ podług drugiej średniej arytmetycznej i posiada granicę

$$\lim_{h=0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0-h)}{2h}.$$

(„k-tą średnią arytmetyczną Cesaro'ego wielkości s_1, s_2 ..., s_n nazywa się wyrażenie

$$\frac{s_n^{(k)}}{\dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}},$$

gdzie $s_n^{(k)}$ określa się przez wzory zwrotne:

[1]) Własność tę posiadają pewne kategorye szeregów trygonometrycznych rozbieżnych. (Fejer, Math. Ann. t. **58**; por. moją notatkę w t. **26** czasopisma „Monatshefte für Mathematik und Physik").

$$s_m^{(1)} = \sum_{i=1}^{i=m} s_i, \qquad s_m^{(j+1)} = \sum_{i=1}^{i=m} s_i^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1).$$

Mówi się, że szereg

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

jest sumowalny podług k-tej średniej arytmetycznej i ma granicę s, jeżeli k-ta średnia arytmetyczna jego sum cząstkowych

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

dąży do s dla $n = \infty$).

Kwestyę analogiczną do poruszanej tu omawiał P. Fatou w pracy p. t. „Séries trigonométriques et séries de Taylor" (Acta mat. t. **30**), ale wynik poniżej udowodniony idzie dalej od analogicznego wyniku P. Fatou.

II. Wypadnie mi się posługiwać następującem twierdzeniem arytmetycznem:

„Jeśli szereg

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \tag{1}$$

jest sumowalny podług k-tej średniej arytmetycznej, to szereg

$$v_1 - v_2 + 2(v_2 - v_3) + \dots + n(v_n - v_{n+1}) + \dots \tag{2}$$

jest sumowalny podług $(k+1)$-ej średniej arytmetycznej i posiada tę samą sumę uogólnioną, co szereg (1)".

Dowód. Mamy:

$$\sum_{n=1}^{n=p} n(v_n - v_{n+1}) = \sum_{n=1}^{n=p} n v_n - \sum_{n=1}^{n=p+1} (n-1) v_n = \sum_{n=1}^{n=p} v_n - p v_{p+1}. \tag{3}$$

Kładziemy:

$$s_n = \sum_{m=1}^{m=n} v_n; \tag{4}$$

będziemy mieli oczywiście:

$$-v_{n+1} = s_n - s_{n+1}. \tag{4 bis}$$

Podobnie oznaczamy:

$$t_n = \sum_{m=1}^{m=n} m(v_m - v_{m+1}); \tag{5}$$

kładziemy wreszcie:

$$s_n^{(i+1)} = \sum_{m=1}^{m=n} s_m^{(i)}; \qquad t_n^{(i+1)} = \sum_{m=1}^{m=n} t_m^{(i)}, \tag{6}$$

przyczem:

$$s_n^{(0)} = s_n; \qquad t_n^{(0)} = t_n.$$

Oczywiście będzie:

$$-s_{n+1}^{(i)} = s_n^{(i+1)} - s_{n+1}^{(i+1)}. \tag{6 bis}$$

Przy powyższych oznaczeniach i z uwagi na (4 bis), tożsamość (3) przybiera postać

$$t_p = s_p + p(s_p - s_{p+1}). \tag{7}$$

Z uwagi na tożsamość (3), mamy przy oznaczeniach (6):

$$\sum_{p=1}^{p=n} p(s_p - s_{p+1}) = s_n^{(1)} - n s_{n+1}. \tag{8}$$

Wzory (7) i (8) dają:

$$t_n^{(1)} = 2 s_n^{(1)} - n s_{n+1}, \tag{9}$$

albo, ze względu na wzór (6 bis),

$$t_n^{(1)} = 2 s_n^{(1)} + n\left(s_n^{(1)} - s_{n+1}^{(1)}\right). \tag{10}$$

Stosując znowu wzór (3), mamy:

$$\sum_{n=1}^{n=p} n\left(s_n^{(1)} - s_{n+1}^{(1)}\right) = s_p^{(3)} - p s_{p+1}^{(1)},$$

co w związku z wzorem (10) daje:

$$t_p^{(2)} = 3 s_p^{(2)} - p s_{p+1}^{(1)}, \tag{11}$$

albo, przy uwzględnieniu wzoru (6 bis),

$$t_p^{(2)} = 3 s_p^{(2)} + p\left(s_p^{(2)} - s_{p+1}^{(2)}\right). \tag{12}$$

Powtarzając to samo rozumowanie k razy, mamy w końcu;

$$t_p^{(k+1)} = (k+2) s_p^{(k+1)} - p s_{p+1}^{(k)}. \tag{13}$$

Z założenia granica

$$s = \lim_{p=\infty} \frac{s_{p+1}^{(k)}}{\dfrac{(p+1)(p+2)\dots(p+k)}{k!}}.$$

istnieje.

Mamy oczywiście również:

$$\lim_{p=\infty} \frac{s_p^{(k+1)}}{\dfrac{p(p+1)\dots(p+k)}{(k+1)!}} = s,$$

przeto:

$$\lim_{p=\infty} \frac{\dfrac{(k+2)\,s_p^{(k+1)} - p\,s_{p+1}^{(k)}}{p\,(p+1)\dots(p+k)}}{(k+1)!} = (k+2)\,s - (k+1)\,s = s\,.$$

Dieląc więc obie strony tożsamości (13) przez

$$\frac{p\,(p+1)\,(p+2)\dots(p+k)}{(k+1)!}$$

i przechodząc do granicy dla $p=\infty$, będziemy mieli:

$$\lim_{p=\infty} \frac{t_p^{(k+1)}}{\dfrac{p\,(p+1)\,(p+2)\dots(p+k)}{(k+1)!}} = s$$

c. b. d. d.

III. Możemy teraz udowodnić nasze twierdzenie, tyczącą się jednokrotnego różniczkowania szeregów Fouriera, a mianowicie:

„Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \psi(x_0), \tag{14}$$

to szereg

$$\sum n\,(b_n \cos n x_0 - a_n \sin n x_0)\,, \tag{15}$$

gdzie:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos n x\, dx; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin n x\, dx, \tag{16}$$

jest sumowalny podług drugiej średniej arytmetycznej i posiada sumę uogólnioną $\psi(x_0)$.

Dowód. Łatwo jest sprawdzić prawdziwość elementarnej tożsamości

$$\sum_{m=1}^{m=n} \sin m t = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \cos n t - \frac{1}{2} \sin n t\,. \tag{17}$$

Z założenia istnienia granicy (14) wynika istnienie również i granicy

$$\lim_{t=0}\,[f(x_0+t) - f(x_0-t)]\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,,$$

a więc i całkowalność funkcyi

$$[f(x_0+t) - f(x_0-t)]\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\,.$$

Mnożąc przez $f(x_0+t) - f(x_0-t)$ obie strony tożsamości (17), całkując otrzymany wynik względem t w granicach $t=0$, $t=\pi$, przechodząc następnie do granicy dla $n=\infty$, mając przy tem na uwadze, że wyrażenia

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [f(x_0+t) - f(x_0-t)] \operatorname{cotg}\frac{t}{2} \cos n t\, dt,$$

i

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [f(x_0+t) - f(x_0-t)] \sin n t\, dt$$

dążą do zera dla $n=\infty$, jako spółczynniki Fouriera funkcyj całkowalnych, możemy stwierdzić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (b_n \cos n x_0 - a_n \sin n x_0) \tag{18}$$

a nawet obliczyć wartość jego sumy

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (b_n \cos n x_0 - a_n \sin n x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0+t) - f(x_0-t)] \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\, dt. \tag{18bis}$$

Kładziemy:

$$v_n = \sum_{m=n}^{m=\infty} (b_m \cos m x_0 - a_m \sin m x_0)\,. \tag{19}$$

Przy tem oznaczeniu szereg (15) przybierze postać:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} n\,(v_n - v_{n+1})\,. \tag{19 bis}$$

W myśl więc twierdzenia § II można wyprowadzić sumowalność szeregu (15) (albo identycznego z nim (15 bis)) podług drugiej średniej arytmetycznej z granicą $\psi(x_0)$ z sumowalności granicy podług pierwszej średniej arytmetycznej, z tąż granicą, szeregu

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} v_n\,. \tag{20}$$

IV. Oto dowód sumowalności szeregu (20) podług pierwszej średniej arytmetycznej z sumą uogólnioną $\psi(x_0)$.

Z uwagi na (16) i (19) mamy:

$$v_n - v_{n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{2} \sin n t \, dt. \tag{21}$$

Z tożsamości powyższej wynika dla wszelkiego całkowitego p:

$$v_n - v_{p+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{2} \left[\sum_{m=n}^{m=p} \sin m t\right] dt, \tag{22}$$

ponieważ zaś:

$$\sum_{m=n}^{m=p} \sin m t = -\frac{\cos(2p+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} + \frac{\cos(2n-1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}},$$

przeto wzór (22) przybiera postać:

$$\begin{aligned} v_n - v_{p+1} = & \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{4\sin\frac{t}{2}} \cos(2n-1)\frac{t}{2}\, dt \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{4\sin\frac{t}{2}} \cos(2p+1)\frac{t}{2}\, dt. \end{aligned} \tag{23}$$

Ze względu na zbieżność szeregu (18), mamy

$$\lim_{p=\infty} v_{p+1} = 0. \tag{24}$$

Łatwo również wykazać, że

$$\lim_{p=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0 \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{4\sin\frac{t}{2}} \cos(2p+1)\frac{t}{2}\, dt = 0. \tag{25}$$

(W rzeczy samej mamy

$$\cos(2p+1)\frac{t}{2} = \cos p t \cos\frac{t}{2} - \sin p t \sin\frac{t}{2},$$

przeto wyrażenie, znajdujące się pod znakiem lim po lewej stronie równania (25), jest różnicą spółczynników Fouriera funkcyj

$$\frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{4} \operatorname{cotg}\frac{t}{2} \quad \text{i} \quad \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{4};$$

na skutek istnienia granicy (14) obie te funkcye są całkowalne, przeto ich p-te spółczynniki Fouriera dążą do zera dla $p = \infty$, skąd prawdziwość wzoru (25)).

Wzory (23), (24) i (25) dają:

$$v_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{4\sin\frac{t}{2}} \cos(2n-1)\frac{t}{2}\, dt. \tag{26}$$

Rozwijając $\cos(2n-1)\frac{t}{2}$ podług wzoru

$$\cos(2n-1)\frac{t}{2} = \sin n t \sin\frac{t}{2} + \cos n t \cos\frac{t}{2},$$

i kładąc

$$k_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{4} \sin n t\, dt, \tag{27}$$

$$w_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{4} \operatorname{cotg}\frac{t}{2} \cos n t\, dt, \tag{28}$$

mamy oczywiście

$$v_n = k_n + w_n. \tag{29}$$

Zestawiając oznaczenia (27) i (16), widzimy, że k_n jest identyczne z połową n-tego wyrazu szeregu zbieżnego (18). Nadto, z uwagi na (18 bis), mamy

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} k_m = \int_0^\pi [f(x_0+t) - f(x_0-t)] \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\, dt. \tag{30}$$

Okazuje się więc, że szereg (20) jest identyczny z rozwinięciem na szereg Fouriera w przedziale od 0 do π funkcyi ciągłej

$$[f(x_0+t) - f(x_0-t)] \operatorname{cotg}\frac{t}{2} \tag{31}$$

dla $t = 0$. W myśl znanego twierdzenia Fejera (szereg Fouriera wszelkiej funkcyi ciągłej jest sumowalny podług pierwszej średniej arytmetycznej i ma sumę uogólnioną równą wartości tej funkcyi) (Mathematische Annalen, tom 58), szereg ten jest sumowalny podług pierwszej średniej arytmetycznej i przyjmuje wartość, jaką przybiera funkcya ciągła (31) dla $t = 0$, t. j.

$$\lim_{t=0} [f(x_0+t) - f(x_0-t)] \operatorname{cotg}\frac{t}{2} = \lim_{h=0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

W myśl § III ten sam wynik daje sumowanie podług 2-ej średniej szeregu (15). C. b. d. d.

RÉSUMÉ.

La note présente contient la démonstration du theorème que voici:

„Soit $F(x)$ une fonction intégrable (au sens de M. H. Lebesgue) admettant pour $x=x_0$ une dérivée généralisée

$$p(x_0)=\lim_{h=0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h};$$

soient a_n et b_n les coefficients de Fourier de la fonction $F(x)$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos nx\,dx; \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin nx\,dx;$$

dans ces conditions on peut affirmer, que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} n(b_n\cos nx_0-a_n\sin nx_0)$$

est sommable vers la dérivée généralisée de $F(x)$ pour $x=x_0$, la sommation étant effectuée au sens de la seconde moyenne arithmétique de Cesaro. En d'autres termes: de l'existence de la limite $p(x_0)$ on peut déduire celle de

$$\lim_{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=n} n(b_n\cos nx_0-a_n\sin nx_0)\left(1-\frac{m}{n}\right)^2$$

et cette limite est nécessairement égale à $p(x_0)$".
