ALFRED DENIZOT.

O zagadnieniu de Saint-Venanta.

Sur le problème de Saint-Venant.

W badaniu odkształcenia ciał pod wpływem działania sił zewnętrznych (związku pomiędzy „stress“ a „strain“) byłoby najwłaściwsze postępowanie takie, że wyznacza się przesunięcia, jakie powstają wskutek przyjętych sił działających. Atoli przy takiem postawieniu kwestyi natrafia się już w stosunkowo prostych przypadkach na trudności rachunkowe nie do przezwyciężenia. De Saint-Venant[1] ominął te trudności, stosując metodę „semi-inverse“. Odwracając niejako to zagadnienie, przyjął pewien stan równowagi w prętach pryzmatycznych jako dany i wyznaczył potem siły, które potrzebne są do utrzymania tego stanu. Rozważania de Saint-Venanta uprościł następnie, jak wiadomo, A. Clebsch[2]. Odmienną drogę badania obrali inni badacze[3], podstawiając z góry pewne założenia co do zależności stanu natężenia od spółrzędnych.

Obok rozważań, dotyczących ogólnego zagadnienia de Saint-Venanta nie przestało być przedmiotem badań pewne zagadnienie szczególne, a mianowicie wyznaczenie „strain“ i „stress“ w pręcie, o położeniu poziomem, którego jeden koniec jest umocowany, a drugi, swobodny, obciążony pewnym ciężarem. Niech wystarczy w tym względzie przytoczyć dzieła Love'a[4] i H. Lorenza[5], którzy temu szczególnemu zagadnieniu poświęcają osobne

[1]) B. de Saint-Venant, Mém. prés. par div. sav. **14**, p. 233; 1855, Paris. Journ. de math. (2), **1**, p. 89; 1856.

[2]) A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862, pg. 74.

[3]) Zob. Encyklopädie d. math. Wissenschaften, IV, 4, p 170. Leipzig, 1907—1914.

[4]) A. E. H. Love, Elasticity, wyd. niem. (Timpe) B. G. Teubner 1907, pg. 379.

[5]) Hans Lorenz, Technische Elastizitätslehre, München-Berlin 1913, pg. 433.

rozdziały, oraz wskazać z ostatnich czasów pracę Z. Fuchsa[1], opierającą się na wzorach, podanych w dziełach przytoczonych.

Do tego zagadnienia nawiązuję badania w niniejszej rozprawie. Całkowanie zachodzących tu równań różniczkowych przeprowadzam w sposób odmienny aniżeli dotychczas, pozostając przytem w obrębie uproszczeń, względnie założeń, jakie poczynił de Saint-Venant co do natężeń stycznych. Co do natężenia normalnego w jakimkolwiek punkcie przekroju poprzecznego, opieram się na prostem założeniu Bernoulli'ego, a mianowicie, że natężenie normalne jest proporcyonalne do odległości od osi obojętnej; przyczem spółczynnik proporcyonalności, który w tym przypadku jest zmienny od przekroju do przekroju, wyraża się przez moment zginający. Jako wynik otrzymuje się zjawisko ugięcia drugiego rzędu oraz skręcenia.

Ten sam rachunek stosuję do zagadnień ugięcia pierwszego rzędu i wydłużenia; jedno i drugie jest połączone ze zjawiskiem skręcenia.

Nie twierdzę, że są to wyniki nowe; tylko ujęcie całego zagadnienia, a mianowicie sposób całkowania równań, który jest jednolity dla wszystkich w grę wchodzących tu zjawisk, jest inny, a—mojem zdaniem—przejrzystszy, aniżeli dotychczasowy. Występują wszędzie trzy funkcye, z których jedna we wszystkich tych zagadnieniach pojawia się w tej samej postaci i określa zjawisko skręcenia.

Na tych funkcyach opieram następnie rozważania, dotyczące warunków umocowania pręta, które są w ścisłym związku ze stałemi całkowania, zachodzącemi we wzorach na przesunięcia. Kwestya ta nie jest dotychczas wyjaśniona: zachodzi mianowicie pewna dowolność w wyznaczaniu wspomnianych stałych. A przecież jakiekolwiek zagadnienie, przytem natury konkretnej, jeśli ma być zupełnie określone, nie powinno pozostawiać żadnych nieuzasadnionych dowolności. Zdaje mi się, że definicya, ogólnie przyjęta na umocowanie pręta, jest sztuczna i nie określa przytem w zupełności zagadnienia. Podaję tedy inną definicyę, która wyłania się sama z rozpatrywanych zagadnień, a mianowicie z zastosowania podanego aparatu matematycznego do przypadku, w którym na pręt nie działają żadne siły. Jako wynik otrzymuje się zwykłe przesunięcie i obrót pręta około pewnej osi, który to stan wyznaczają stałe, w mowie będące. Te stałe nie odnoszą się do właściwego odkształcenia pręta, tylko charakteryzują go jako ciało zupełnie swobodne. Z tej to przyczyny, ponieważ bierzemy pod uwagę pręt umocowany, który zatem pozbawiony jest jakiejkolwiek swobody ruchu, przyrównywam stałe do zera.

[1]) Zygmunt Fuchs, Zeitschr. Dtsch. Ver. d. Ingen. **58**, pg. 1330, 1914.

Ugięcie z powodu siły poprzecznej.

§ **1.** W badaniu niniejszem posługiwać się będziemy układem spółrzędnych $Oxyz$ tego rodzaju, że płaszczyzna xOy stanowi pierwszy przekrój poprzeczny pręta, którym tenże przylega do ściany stałej. Początek O schodzi się ze środkiem ciężkości tego przekroju, oś z z linią środkową pręta w stanie jego pierwotnym, przed odkształceniem. Przytem nadajemy prętowi położenie poziome, ponadto kształt pryzmatyczny i zakończenie płaskie, prostopadłe do osi z. Osi x i y, ze względu na jakikolwiek przekrój poprzeczny, mają takie położenie, że oś y przechodzi przez środek ciężkości przekroju i wpada w jego oś obojętną, oś zaś x przyjmuje położenie pionowe, z kierunkiem w górę.

Do tego układu, nie przyjmując żadnych sił działających na masę pręta, odnosimy równania, znane z teoryi sprężystości:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}&=0,\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}&=0,\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}&=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Obok równań (1) uwzględnić jeszcze trzeba warunki powierzchniowe, które przy założeniu, że na powierzchnię pręta działają siły X_n, Y_n, Z_n, mają kształt ogólny:

$$\begin{aligned}X_x\cos(nx)+X_y\cos(ny)+X_z\cos(nz)&=X_n,\\ Y_x\cos(nx)+Y_y\cos(ny)+Y_z\cos(nz)&=Y_n,\\ Z_x\cos(nx)+Z_y\cos(ny)+Z_z\cos(nz)&=Z_n,\end{aligned}\tag{2}$$

gdzie n oznacza normalną poprowadzoną do powierzchni:

Oprócz powyższego założenia, że na punkty wewnątrz pręta nie działają żadne siły, przyjmujemy, odnośnie do powierzchni pręta, że na jego pobocznicę również nie działają żadne siły; jedynie powierzchnie końcowe podlegają z zewnątrz działaniu sił, względnie momentów.

Biorąc następnie pod uwagę jakikolwiek przekrój pręta w odległości z od jego końca przytwierdzonego, przyjmujemy, zgodnie z założeniami de Saint-Venanta, że natężenia

$$X_x=Y_y=X_y=0.\tag{3}$$

§ **2.** Oprócz tych założeń ogólnych, których wymaga zagadnienie de Saint-Venanta, wprowadzamy do naszego badania jeszcze założenie co do natężenia Z_z. Przyjmujemy prawo Bernoulliego i podstawiamy

$$Z_z = -cx. \tag{4}$$

Spółczynnik proporcyonalności c jest w związku z momentem zginającym, który równoważy się z momentem statycznym pary sił, do jakiej składają się natężenia działające w przekroju. Ze względu na oś obojętną, która w przekroju schodzi się z osią y, będzie tenże moment równy

$$M = -\int Z_z x\,dx\,dy = c\int x^2\,dx\,dy = cJ, \tag{5}$$

gdzie $J = \int x^2\,dx\,dy$ oznacza moment bezwładności przekroju ze względu na oś obojętną.

§ **3.** Przyjmujemy, że w środku ciężkości wolnej powierzchni końcowej zaczepia ciężar Q. Natenczas moment ugięcia ze względu na oś obojętną w odległości z od przytwierdzonego końca pręta, którego długość oznaczamy przez l, równa się

$$M = Q(l-z). \tag{6}$$

Będzie zatem

$$c = \frac{Q(l-z)}{J},$$
$$Z_z = -\frac{Q}{J}(l-z)\,x. \tag{7}$$

§ **4.** Naszem zadaniem będzie wyznaczyć natężenia styczne X_z i Y_z, tudzież przesunięcia uvw punktu xyz w kierunkach osi spółrzędnych. Na podstawie powyższych założeń równania (1) i (2), ostatnie z uwagi, że $\cos(nz) = 0$, przyjmą kształt następujący:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \tag{1'}$$
$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{Q}{J}x = 0,$$

$$X_z \cos(nx) + Y_z \cos(ny) = 0. \tag{2'}$$

Nadto opierać się będziemy na znanych związkach, jakie zachodzą pomiędzy natężeniami a przesunięciami, a które, z uwzględnieniem tych samych poprzednio wprowadzonych założeń, będą:

$$X_x = \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
$$Y_y = \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{8}$$
$$Z_z = \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$Y_z = \nu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$
$$X_z = \nu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \tag{9}$$
$$X_y = \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

W tych równaniach oznaczają λ i ν spółczynniki sprężystości dla ciał równokierunkowych, σ wydłużenie objętościowe, przyczem

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{10}$$

§ **5.** Moduł E Younga będzie tu:

$$E = \frac{\nu(3\lambda + 2\nu)}{\lambda + \nu}.$$

Stała Poissona jest:

$$\mu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\nu)}.$$

Między niemi zachodzi związek

$$\frac{E}{\mu} = \frac{2\nu(3\lambda+2\nu)}{\lambda}$$

oraz

$$\nu = \frac{E}{2(\mu+1)}.$$

§ **6.** Dodajemy związki (8) i, przy uwzględnieniu równania (10), mamy:

$$\sigma = -\frac{1}{3\lambda+2\nu}\,\frac{Q}{J}(l-z)\,x, \tag{10'}$$

a następnie, po wprowadzeniu równocześnie równania (10'), z tych samych związków (8) dostaniemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mu Q}{EJ}(l-z)\,x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\mu Q}{EJ}(l-z)\,x, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{Q}{EJ}(l-z)\,x.$$

Całkowanie równań (11) prowadzi do wzorów:

$$u=\frac{\mu Q}{2EJ}(l-z)\,x^2+\varphi(y,\,z),$$

$$v=\frac{\mu Q}{EJ}(l-z)\,xy+\chi(x,\,z), \tag{12}$$

$$w=-\frac{Q}{EJ}(lz-\tfrac{1}{2}z^2)+\psi(x,\,y).$$

§ **7.** W celu wyznaczenia występujących tu funkcyj $\varphi(y,\,z)$, $\chi(x,\,z)$, $\psi(x,\,y)$ posługujemy się równaniami (9). Podstawiając wyrażenia (12) w równania (9), otrzymujemy:

$$\frac{1}{\nu}Y_z=-\frac{\mu Q}{EJ}xy+\frac{\partial\chi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\frac{1}{\nu}X_z=-\frac{Q}{EJ}(lz-\tfrac{1}{2}z^2)-\frac{\mu Q}{2EJ}x^2+\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{9'}$$

$$\frac{1}{\nu}X_y=\frac{\mu Q}{EJ}(l-z)\,y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial x}=0.$$

§ **8. Wyznaczenie funkcyi** $\chi(x,\,z)$. Prócz $X=0$ jest i $\frac{\partial X_y}{\partial x}=0$, który to wyraz opuściliśmy w drugiem równaniu wzorów (1′). Na tej podstawie, biorąc pochodną względem x trzeciego równania (9′), będziemy mieli

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}=0,$$

a przez uwzględnienie równania $\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0$ otrzymamy z pierwszego wzoru (9′)

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}=0.$$

Obydwa równania różniczkowe dla χ prowadzą do wzoru:

$$\chi=\tau xz+\gamma x-\alpha z+\beta'. \tag{13}$$

Stała τ wyraża t. zw. „skręt“ („twist“); stałe γ, α, β', jak się później okaże, znikną.

§ **9. Wyznaczenie funkcyi** $\varphi(y,\,z)$. Bierzemy pochodną względem z wielkości X_z w równaniach (9′) i przyrównywając ją na podstawie równań (1′) do zera, otrzymamy:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{Q}{EJ}(l-z)=0. \tag{14}$$

Następnie wynikające z wzoru (13) wyrażenie

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=\tau z+\gamma$$

podstawiamy w trzecie równanie (9′); będzie:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\mu Q}{EJ}(l-z)\,y+\tau z+\gamma=0,$$

a stąd:

$$\varphi=-\tau yz-\left(\frac{\mu Q}{2EJ}\right)(l-z)\,y^2-\gamma y+F(z). \tag{15}$$

Aby wyznaczyć $F(z)$, bierzemy pierwszą i drugą pochodną względem z i będzie:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\tau y+\frac{\mu Q}{EJ}y^2+\frac{dF(z)}{dz}$$

tudzież, przy uwzględnieniu jeszcze równania (14),

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{d^2F}{dz^2}=\frac{Q}{EJ}(l-z).$$

Stąd:

$$F=\frac{Q}{EJ}(\tfrac{1}{2}lz^2-\tfrac{1}{6}z^3)+\beta z+\alpha',$$

a zatem równanie (15) przybiera postać:

$$\varphi=-\tau yz+\frac{Q}{EJ}\left[-\frac{\mu}{2}(l-z)\,y^2+\tfrac{1}{2}lz^2-\tfrac{1}{6}z^3\right]-\gamma y+\beta z+\alpha'. \tag{16}$$

Funkcyę φ otrzymamy również, posługując się związkiem $\frac{\partial X_y}{\partial y}=0$, który przy uwzględnieniu równań (9′) prowadzi do równania

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{\mu Q}{EJ}(l-z),$$

w zgodzie z wzorami wyżej otrzymanemi:

§ **10.** Nim zajmiemy się funkcyą $\psi(x, y)$, obliczmy najprzód natężenia styczne X_z i Y_z. Jeżeli pochodne funkcyj φ i ψ względem z, t. j.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\tau y + \left(\frac{\mu Q}{2EJ} y^2\right) + \frac{Q}{EJ}\left(lz - \tfrac{1}{2} z^2\right) + \beta$$

oraz

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \tau x - \alpha,$$

podstawimy w równania (9′), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} X_z &= \frac{\partial \psi}{\partial x} - \tau y - \frac{\mu Q}{2EJ}(x^2 - y^2) + \beta, \\ \frac{1}{\nu} Y_z &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + \tau x - \frac{\mu Q}{EJ} xy - \alpha. \end{aligned} \tag{17}$$

§ **11.** Podstawiając wyrażenia (17) w trzecie równanie (1′) i pisząc $\frac{1}{\nu} = \frac{2(\mu+1)}{E}$, otrzymamy równanie różniczkowe na ψ:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2Q}{EJ} x = 0. \tag{18}$$

Obok tego równania uwzględniamy jeszcze warunek obwodowy (2′), który przybiera kształt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(ny) &= \tau\,(y \cos(nx) - \cos(ny)) \\ &+ \frac{\mu Q}{EJ}\left[\frac{x^2 - y^2}{2} \cos(nx) + xy \cos(ny)\right] \\ &- \beta \cos(nx) + \alpha \cos(ny). \end{aligned} \tag{19}$$

Zamiast funkcyi ψ wprowadzamy dwie inne funkcye Φ i Ψ, które z ψ tworzą związek

$$\psi = \tau \Phi - \frac{Q}{EJ}(\Psi + xy^2) - \beta x + \alpha y + \gamma'. \tag{20}$$

Z wzorów (18) i (19) wynikają tedy równania:

$$\tau\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) - \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{18′}$$

$$\begin{aligned} &\tau\left(\frac{d\Phi}{dn} - y \cos(nx) + x \cos(ny)\right) \\ &- \frac{Q}{EJ}\left[\frac{d\Psi}{dn} + \left(\frac{\mu}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) y^2\right) \cos(nx) + (2+\mu)\, xy \cos(ny)\right] = 0, \end{aligned} \tag{19′}$$

przyczem:
$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(ny);$$

odpowiedni związek mamy dla funkcyi Ψ.

Równania (18′) i (19′) istnieją dla jakichkolwiek τ i $\frac{Q}{EJ}$, z którego to powodu rozpadają się na następujące:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{d\Phi}{dn} = y \cos(nx) - x \cos(ny), \\ \frac{d\Psi}{dn} = -\left[\frac{\mu}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) y^2\right] \cos(nx) - (2+\mu)\, xy \cos(ny). \end{gathered} \tag{21}$$

Wiadomo, że Φ jest funkcyą skręcenia, Ψ funkcyą ugięcia, a obie zależą od figury przekroju.

§ **12.** Wprowadzając wyrażenia (16), (14), (20) do wzorów (12) i (17), otrzymujemy dla przesunięć i natężeń następujące znane wzory, do których dołączamy jeszcze wzory na φ, χ i ψ:

$$\begin{aligned} u &= -\tau yz + \frac{Q}{EJ}\left[\frac{\mu}{2}(l - z)(x^2 - y^2) + \frac{1}{2} l z^2 - \frac{1}{6} z^3\right] - \gamma y + \beta z + \alpha', \\ v &= \tau xz + \frac{\mu Q}{EJ}(l - z)\, xy + \gamma x - \alpha z + \beta', \\ w &= \tau \Phi + \frac{Q}{EJ}\left[\Psi + xy^2 + \left(lz - \frac{1}{2} z^2\right) x\right] - \beta x + \alpha y + \gamma', \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} X_z &= \nu\tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) - \frac{Q}{2(1+\mu) J}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\mu}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) y^2\right], \\ Y_z &= \nu\tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right) - \frac{Q}{2(1+\mu) J}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} + (2+\mu)\, xy\right], \\ Z_z &= -\frac{Q}{J}(l - z)\, x. \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{EJ}\left[-\frac{\mu}{2}(l - z)\, y^2 + \frac{1}{2} l z^2 - \frac{1}{6} z^3\right] - \tau yz - \gamma y + \beta z + \alpha', \\ \chi &= \tau xz - \alpha z + \gamma x + \beta', \\ \psi &= \tau \Phi - \frac{Q}{EJ}(\Psi + xy^2) - \beta x + \alpha y + \gamma'. \end{aligned} \tag{24}$$

Ugięcie z powodu pary sił. Wydłużenie. Skręcenie.

§ 13. W zagadnieniu poprzednio przeprowadzonem spółczynnik proporcyonalności, zachodzący w prawie Bernoulliego, jest w związku liniowym ze spółrzędną z. Jeśli spółczynnikowi c nadamy wartość stałą, wtedy rachunek, przeprowadzony w sposób analogiczny, wykazuje skręcenie i ugięcie pierwszego rzędu. Jeśli przyjmiemy, że natężenie normalne zachowuje wartość stałą, $Z_z = C$, wtedy obok skręcenia występuje jeszcze wydłużenie pręta. Nie chcąc jednak dla tych szczególnych zagadnień przeprowadzać oddzielnych rachunków, podstawiamy

$$Z_z = -cx + C, \tag{4a}$$

przytem opieramy się na prawie nakładalności (superpozycyi) zjawisk, jakie tu zachodzi. W tym względzie moglibyśmy i poprzednio przeprowadzone zagadnienie włączyć do wspólnego rozpatrywania, dołączając po drugiej stronie wzoru (4a) jeszcze $\frac{Q}{J}(l-z)\,x$.

Przy uwzględnieniu założenia (4a), równania (1) i (8) otrzymują kształt:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = 0 \tag{1a}$$

$$\begin{aligned} X_x &= \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ Y_y &= \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ Z_z &= \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial w}{\partial z} = -cx + C. \end{aligned} \tag{8a}$$

Z równań (8a) wynika:

$$\sigma = \frac{-cx + C}{3\lambda + 2\nu}. \tag{10a}$$

Z podstawienia wyrażenia (10a) w równania (8a) i po uwzględnieniu § 5 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu}{E}(-cx + C), \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{E}(-cx + C). \end{aligned} \tag{11a}$$

Całkowanie tych równań prowadzi do wyników:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\mu}{E}\left(-\tfrac{1}{2}cx^2 + Cx\right) + \varphi(y, z), \\ v &= -\frac{\mu}{E}(-cxy + Cy) + \chi(x, z), \\ w &= \frac{1}{E}(-cxz + Cz) + \psi(x, y). \end{aligned} \tag{12a}$$

Po wprowadzeniu zatem wyrażeń (12a) w (9) będzie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} Y_z &= \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{1}{\nu} X_z &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c}{E} z, \\ \frac{1}{\nu} X_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\mu c}{E} y = 0. \end{aligned} \tag{9a}$$

Na tej samej podstawie jak w § 7 otrzymamy te same równania różniczkowe dla χ, zatem i wzór (13).

W celu wyznaczenia funkcyi φ opieramy się na związku $\frac{\partial X_z}{E} = 0$ i otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{c}{E}. \tag{14a}$$

Następnie podstawiamy $\frac{\partial \chi}{\partial x} = \tau z + \gamma$ w trzecie równanie (9a); będzie:

$$\frac{1}{\nu} X_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\mu}{E} cy + \tau z + \gamma = 0,$$

a stąd:

$$\varphi = -\tau yz - \frac{\mu}{2E} cy^2 - \gamma y + F(z). \tag{15a}$$

Aby wyznaczyć funkcyę $F(z)$, tworzymy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\tau y + \frac{dF}{dz},$$

a dalej, ze względu na równanie (14a), będzie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{d^2 F}{dz^2} = \frac{c}{E},$$

skąd:

$$F(z) = \frac{c}{2E} z^2 + \beta z + \alpha'.$$

Zatem równanie (15a) przybiera postać:

$$\varphi = -\frac{\mu}{2E} c y^2 + \frac{c}{2E} z^2 - \tau y z - \gamma y + \beta z + \alpha'. \tag{16a}$$

Przesunięcia (12a) będą:

$$\begin{aligned} u &= \frac{c}{2E}(\mu x^2 - \mu y^2 + z^2) - \frac{\mu C}{E} x - \tau y z - \gamma y + \beta z + \alpha', \\ v &= \frac{\mu c}{E} x y \qquad\qquad - \frac{\mu C}{E} y + \tau x z + \gamma x - \alpha z + \beta', \\ w &= -\frac{c}{E} x z \qquad\qquad + \frac{C}{E} z + \psi(xy). \end{aligned} \tag{22a}$$

W dalszym rachunku pominiemy stałe α, β, γ, α', β', γ', przyrównywając je do zera na zasadzie warunków umocowania pręta, o których dopiero przy końcu będzie mowa. Również funkcya $\psi(x, y)$ dla $x = y = 0$ będzie $\psi_0 = 0$.

Na tej podstawie otrzymamy dla natężeń (9a):

$$\begin{aligned} X_z &= \nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \tau y\right), \\ Y_z &= \nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \tau x\right), \end{aligned} \tag{17a}$$

Funkcya ψ ze względu na związki (1a) i (2a') czyni zadość równaniom

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \tag{18a}$$

$$\frac{d\psi}{dn} = \tau\,(y \cos(nx) - x \cos(ny)). \tag{19a}$$

§ **14.** Rozpatrujemy następujące przypadki:

a) $\tau = 0$, $C = 0$.

Jeżeli $\tau = 0$, będzie, jak to wynika z równania (19a), równocześnie:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

a ponieważ $\psi_0 = 0$, będzie zatem i $\psi = 0$.

Otrzymujemy wzory na u g i ę c i e rzędu pierwszego:

$$u = \frac{c}{2E}(z^2 + \mu x^2 - \mu y^2),$$

$$v = \frac{\mu c}{E} x y,$$

$$w = -\frac{c}{E} x z,$$

$$X_z = Y_z = 0, \quad Z_z = -c x.$$

b) $\tau = 0$, $c = 0$. W y d ł u ż e n i e:

$$u = -\frac{\mu C}{E} x,$$

$$v = -\frac{\mu C}{E} y,$$

$$w = \frac{C}{E} z,$$

$$X_z = Y_z = 0, \quad Z_z = C.$$

c) $c = 0$, $C = 0$. S k r ę c e n i e.

$$u = -\tau y z,$$

$$v = \tau x z,$$

$$w = \psi,$$

$$X_z = \nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \tau y\right),$$

$$Y_z = \nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \tau x\right),$$

$$Z_z = 0;$$

ψ jest funkcyą skręcenia i czyni zadość warunkom (18a) i (19a).

Natężenia w jakimkolwiek przekroju, pod względem statycznym, równoważne są z parą sił, której moment równa się

$$M_z = \int (x Y_z - y X_z)\, dx\, dy = \nu\tau \int \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\psi}{\partial y} + y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx\, dy.$$

§ **15.** Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia sprawa stałych $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, których wyznaczenie łączy się z warunkiem, że jeden koniec pręta jest umocowany. Podług przyjętych zapatrywań [1]) rzecz przedstawia się w sposób następujący:

Utwierdzenie pręta zupełnie jest zdefiniowane, jeżeli: 1) jakikolwiek punkt pręta jest punktem stałym, nie doznającym żadnego przesunięcia; 2) jakikolwiek element liniowy, przechodzący przez ten punkt i 3) jakikolwiek element powierzchniowy, zawierający wspomniany element liniowy, zachowują swoje pierwotne położenia.

Stosując się do tej definicyi, przyjmujemy jako punkt stały początek spółrzędnych, który się schodzi ze środkiem ciężkości przekroju z płaszczyzną xOy, otrzymamy zatem warunek, że we wzorach (22) względnie (22a) dla $x=y=z=0$ również przesunięcia $u_0=v_0=w_0=0$, a temsamem i $\varphi_0=\chi_0=\psi_0=0$.

Nawiązując rzecz do warunków umocowania, wymienionych pod 2) i 3), weźmy pod uwagę punkt w bezpośredniem sąsiedztwie początku; wtedy składowe przesunięcia tego punktu, ze względu na związki (12) i (12a), będą:

$$\begin{aligned} du_0 &= \qquad\qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 dz, \\ dv_0 &= \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right) dx \qquad\qquad + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right) dz \\ dw_0 &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 dy, \end{aligned}$$

czyli, jeżeli uwzględnimy wyrażenia na φ, χ, ψ, zachodzące w rozpatrywanych zagadnieniach, będzie

$$\begin{aligned} du_0 &= -\gamma\, dy + \beta\, dz, \\ dv_0 &= \gamma\, dx - \alpha\, dz, \\ dw_0 &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy, \end{aligned} \tag{25}$$

przyczem dla zagadnienia ugięcia drugiego rzędu, jak z równania (20) wynika, będzie

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 &= \tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 - \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_0 - \beta \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 &= \tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 - \frac{Q}{JE}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_0 + \alpha. \end{aligned} \tag{25'}$$

[1]) Clebsch, l. c. pg. 70.

Następne wywody łączyć będziemy w szczególności z zagadnieniem ugięcia drugiego rzędu, lecz ich wynik będzie ogólny, dotyczący wszystkich w tej pracy rozpatrywanych zagadnień.

Zachodzić mogą następujące możliwości co do warunków 2) i 3), odnoszących się do utwierdzenia pręta:

a) Element liniowy, wychodzący z stałego początku O, schodzi się z osią Ox, a element powierzchniowy, zawierający tenże element liniowy, leży w płaszczyźnie xOy.

Podstawiamy zatem w równaniach (25) $dz=0$. Nadto, ponieważ punkt dx, dy i w odkształconym pręcie ma pozostać w płaszczyźnie xOy, przesunięcie w kierunku osi z będzie równe zeru, przeto:

$$dw_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

a zatem z równań (25′) wynika:

$$\beta = \tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 - \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_0.$$

$$\alpha = -\tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 + \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_0.$$

Następnie z uwagi, że element liniowy, schodzący się z kierunkiem osi Ox, nie ma uledz żadnemu obrotowi około punktu O, czyli że żaden punkt tego elementu nie ma doznać żadnego przesunięcia w kierunku osi y, wynika, że $dv_0=0$, przy $dy=0$, zatem $\gamma=0$.

b) Element liniowy schodzi się z Oy, element powierzchniowy z płaszczyzną xOy.

Będzie: $$dz=0; \quad dw_0=0; \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0,$$

β i α jak pod a);

$$du_0 = 0 \;\; (dx=0); \quad \gamma = 0$$

c) Element liniowy Ox, element powierzchniowy xOz:

$$dy=0; \quad dv_0=0; \quad \gamma=\alpha=0;$$

$$dw_0 = 0 \;\; (dz=0); \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = 0; \quad \beta = \tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 - \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_0.$$

d) Element liniowy Oy, element powierzchniowy yOz:

$$dx=0; \quad du_0=0; \quad \gamma=\beta=0;$$

$$dw_0 = 0 \;\; (dz=0); \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 = 0; \quad \alpha = -\tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 + \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_0.$$

e) Element liniowy Oz, element powierzchniowy yOz:

$$dx = 0; \quad du_0 = 0; \quad \gamma = \beta = 0;$$

$$dv_0 = 0 \; (dy = 0); \qquad \alpha = 0.$$

f) Element liniowy Oz, element powierzchniowy xOz:

$$dy = 0; \quad dv_0 = 0; \quad \gamma = \alpha = 0;$$

$$du_0 = 0 \; (dx = 0); \quad \beta = 0.$$

Z powyższego zestawienia wynika, że w każdym razie $\gamma = 0$. Wątpliwości mogą jednak zachodzić co do wartości na α i β. W tym względzie możnaby rozumować w sposób następujący: W dwóch przypadkach, a) i b) α i β mają te same, różniące się od zera wartości, a w dwóch innych, e) i f), równają się zeru. Zatem, z pominięciem przypadków c) i d), w których na α i β otrzymuje się różne wartości, wybór ściślejszy pada na:

I) $$\alpha = -\tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 + \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right), \qquad \beta = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 - \frac{Q}{EJ}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_0$$

II) $$\alpha = 0; \quad \beta = 0.$$

W przypadku I) jako stałe występują dwa elementy liniowe, które schodzą się z kierunkami osi x i y i wyznaczają stały element powierzchniowy. W przypadku II) jako stałe zachodzą dwa elementy powierzchniowe, które leżą w płaszczyznach obojętnej i ugięcia i które wyznaczają element liniowy, schodzący się z linią środkową pręta. Za którą z tych dwu możliwości się oświadczyć, rozstrzygnąć mogłoby jedynie doświadczenie.

Przyrównywając w równaniach (25) α, β, γ do zera, pozostawiamy punktowi $dx\,dy\,dz$ jeszcze swobodę przesunięcia się równolegle do osi z, co jest o tyle w zgodzie z doświadczeniem, że zauważyć można, iż pierwszy przekrój pręta, w miejscu jego umocowania, doznaje największego wygięcia i zakrzywienia.[1] Oświadczając się zaś za możliwością I, gdzie $dw_0 = 0$, usuwamy równocześnie wspomnianą swobodę. Ale doświadczenie[1] równocześnie wykazuje, że pierwszy przekrój pochyla się do pierwotnej osi pręta najwięcej, co znowu nie zgadza się z założeniem, że element powierzchniowy płaszczyzny obojętnej pozostaje w położeniu poziomem[2]. A i trudno jest sobie wyobrazić, że przy skręceniu pręta jakikolwiek element powierzchniowy wzdłuż osi pręta pozostaje w swojem położeniu pierwotnem.

---

[1]) A. Witkowski, Zasady Fizyki, t. I. Wyd. 3, str. 307. W. Voigt, Wied. Annalen 162, 83; 1882.

[2]) Zob C. Bach, Elastizität und Festigkeit. 5. Aufl. Berlin 1905, pg. 473.

§ **16**. W następnych rozważaniach dochodzę do wyniku, że stałe, o których jest mowa, znikają, lecz sprowadzam ten wynik do innej okoliczności.

W tym celu, aby wyjaśnić tę kwestyę, zastosujmy poprzednio podaną metodę rachunkową do przypadku, w którym na pręt żadne siły ani momenty z zewnątrz nie działają, a temsamem w pręcie żadne natężenia nie zachodzą.

Będziemy mieli zatem następujące wzory:

$$X_x = \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$Y_y = \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{8b}$$

$$Z_z = \lambda\sigma + 2\nu\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

z których wynika, że $\sigma = 0$, oraz:

$$u = \varphi(y, z), \quad v = \chi(x, z), \quad w = \psi(x, y).$$

Zatem według równań (9) będzie:

$$\frac{1}{\nu} Y_z = \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{\nu} X_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{9b}$$

$$\frac{1}{\nu} X_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0.$$

Otrzymamy stąd te same równania różniczkowe na χ, co poprzednio, a więc i na χ wzór (13). Stałą τ, zawartą w tym wzorze, przyrównać jednak trzeba do zera, albowiem τ tylko wtenczas zachodzi, jeśli istnieje moment, który obliczyliśmy w § 14 pod c), a który w tym przypadku, dla $X_z = Y_z = 0$, znika. Zatem:

$$\chi = \gamma x - \alpha z + \beta'. \tag{13b}$$

Następnie będzie:

$$\frac{1}{\nu} X_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma = 0,$$

stąd

$$\varphi = -\gamma y + F(z),$$

a ponieważ:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{14b}$$

będzie przeto:

$$F(z) = \beta z + \alpha'.$$

Mamy zatem:

$$u=\varphi=\alpha'-\gamma y+\beta z,$$
$$v=\chi=\beta'-\alpha z+\gamma x,$$
$$w=\psi=\gamma'-\beta x+\alpha y'.$$

W tych wzorach określają α', β', γ' przesunięcie całego pręta, a α, β, γ jego obrót około osi, której położenie wyznacza stosunek $\alpha:\beta:\gamma$. Przytem nadmienić trzeba, że pręt przez tę zmianę położenia swojego nie doznaje żadnego odkształcenia. Wspomniane stałe charakteryzują ciało zupełnie swobodne. Atoli stan początkowy pręta jest ten, że pręt, wskutek utwierdzenia, nie może się przesunąć ani obrócić, a z tego wynika, że zachodzące stałe przyrównać trzeba do zera.

Do tej okoliczności sprowadziłbym warunki umocowania pręta. W tem oświetleniu stałe w mowie będące i zawarte we wzorach (22) i (22a) nabierają innego znaczenia. Stosując zasadę superpozycyi zjawisk, interpretujemy przemianę pręta, wyrażoną wzorami (22) i (22a), w sposób następujący: Te wzory zawierają 1°) Ugięcie pierwszego rzędu, 2°) Ugięcie drugiego rzędu, 3°) Skręcenie, 4°) Wydłużenie, 5°) Przesunięcie całego pręta $(\alpha'\beta'\gamma')$, 6°) Obrót pręta około osi, której położenie wyznacza stosunek $\alpha:\beta:\gamma$. Ponieważ dwa ostatnie zjawiska, 5° i 6°, wskutek umocowania pręta nie zachodzą, przeto stałe α', β', γ', α, β, γ, znikają.

We Lwowie, w grudniu 1916.

AL. RAJCHMAN.

O różniczkowalności szeregów Fouriera wyraz za wyrazem.

Sur la possibilité de différentier une série de Fourier terme-à-terme.

I. Szeregi trygonometryczne zbieżne[1], jak wykazał Riemann, dadzą się w pewnem znaczeniu całkować wyraz za wyrazem. Wynikiem takiego całkowania jest zawsze szereg Fouriera.

W notatce niniejszej zajmuję się zagadnieniem odwrotnem: rozważam dowolną funkcyę $F(x)$, całkowalną i różniczkowalną „w sposób uogólniony", t. zn. zakładam istnienie granicy

$$\lim_{h=0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$$

dla pewnej wartości $x=x_0$ (jakiejkolwiek); rozwijam funkcyę $F(x)$ na szereg Fouriera, różniczkuję ten szereg formalnie wyraz za wyrazem. Udowadniam, że szereg trygonometryczny, przez to różniczkowanie otrzymany, jest sumowalny dla $x=x_0$ podług drugiej średniej arytmetycznej i posiada granicę

$$\lim_{h=0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}.$$

(„k-tą średnią arytmetyczną Cesaro'ego wielkości s_1, s_2 ..., s_n nazywa się wyrażenie

$$\frac{s_n^{(k)}}{\dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}},$$

gdzie $s_n^{(k)}$ określa się przez wzory zwrotne:

[1]) Własność tę posiadają pewne kategorye szeregów trygonometrycznych rozbieżnych. (Fejer, Math. Ann. t. **58**; por. moją notatkę w t. **26** czasopisma „Monatshefte für Mathematik und Physik").