W. GĄSIOROWSKI.

O niezmiennikach różniczkowych krzywych sferycznych i układów takich krzywych w grupie obrotów kuli w sobie.

Über die Differentialinvarianten der sphärischen Kurven und Kurvenscharen bei der Gruppe der Bewegungen der Kugel in sich selbst.

Jeżeli linie minimalne t. j. tworzące prostoliniowe kuli o promieniu 1 obierzemy jako krzywe parametrowe x, y, to równania

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y_1 = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \tag{1}$$

przedstawiać będą obroty kuli w sobie. W pracy niniejszej zamierzamy rozwinąć teoryę niezmienników dla grupy tych ruchów według metod Liego, skąd odrazu wynikną kryterya nakładalności dla krzywych sferycznych i dla układów takich krzywych. To rozwiązanie zagadnienia o równoważności dla krzywych sferycznych i układów takich krzywych jest prostsze i naturalniejsze od rozwiązania, zawartego w ogólnych kryteryach nakładalności dla krzywych w przestrzeni. Jest ono zwłaszcza interesujące dlatego, że daje się zastosować do grupy ruchów w płaszczyźnie nieeuklidesowej hyperbolicznej.

§ **1.** Jeżeli pomyślimy sobie grupę parametrową (1), rozszerzoną przez dołączenie przekształceń, jakich doznają pochodne y', y''... funkcyi y względem x w tej grupie, to można wziąć pod uwagę funkcye zmiennych x, y, y', y''..., pozostające niezmiennemi w grupie rozszerzonej. W tem to znaczeniu mówić będziemy o niezmiennikach różniczkowych grupy (1). Pomiędzy temi niezmiennikami różniczkowemi istnieje, jak wiadomo, w przypadku grupy trójparametrowej, jeden niezmiennik J_2 rzędu drugiego, jeden J_3 rzędu trzeciego i t. d., tak że najogólniejszy niezmiennik różniczkowy rzędu $(3+s)$-go jest funkcyą dowolną niezmienników J_2, $J_3 \dots J_{3+s}$. Można te niezmienniki wyznaczyć albo bezpośrednio z równań (1) przez różniczkowanie i eliminacyę stałych α, β, γ, δ, albo też rozszerzyć przekształcenia nieskończonostkowe grupy (1) za pomocą przekształceń pochodnych y', y''... funkcyi y względu x i znaleść rozwiązanie układów zupełnych, powstających przez przyrównanie do zera przekształceń nieskończonostkowych rozszerzonych.

Najdogodniej będzie przyjąć najprzód x i y jako funkcye zmiennej λ, o której zakładamy, że nie zmienia się w grupie, a odpowiednio do tego obliczyć przekształcenia nieskończonostkowe pochodnych $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{d^2x}{d\lambda^2}$, ...

Przekształcenia nieskończonostkowe grupy (1) brzmią:

$$(2)\quad \begin{cases} U_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\[2ex] U_2 f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\[2ex] U_3 f = x^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Przekształcenia nieskończonostkowe rozszerzone aż do rzędu trzeciego mają postać:

$$(3)\quad \begin{cases} U_1^{(3)} f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\[2ex] U_2^{(3)} f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + x'\dfrac{\partial f}{\partial x'} + y'\dfrac{\partial f}{\partial y'} + x''\dfrac{\partial f}{\partial x''} + y''\dfrac{\partial f}{\partial y''} \\[1ex] \qquad + x'''\dfrac{\partial f}{\partial x'''} + y'''\dfrac{\partial f}{\partial y'''}, \\[2ex] U_3^{(3)} f = x^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial f}{\partial y} + 2\left(xx'\dfrac{\partial f}{\partial x'} + yy'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) \\[1ex] \qquad + 2\left[(xx'' + x'^2)\dfrac{\partial f}{\partial x''} + (yy'' + y'^2)\dfrac{\partial f}{\partial y''}\right] \\[1ex] \qquad + 2\left[(xx''' + 3x'x'')\dfrac{\partial f}{\partial x'''} + (yy''' + 3y'y'')\dfrac{\partial f}{\partial y'''}\right]. \end{cases}$$

Jeżeli położymy:

$$(4)\qquad U_1^{(3)} f = 0, \quad U_2^{(3)} f = 0, \quad U_3^{(3)} f = 0$$

i uwzględnimy tylko pochodne pierwsze, to dostaniemy układ trójparametrowy zupełny z jednem rozwiązaniem

$$i_1 = \frac{x'y'}{(y-x)^2}.$$

Jeżeli dołączymy i drugie pochodne, otrzymamy układ trójparametrowy zupełny o sześciu zmiennych. Posiada on tedy trzy rozwiązania, a pomiędzy niemi rozwiązanie i_1. Dwa rozwiązania niezależne od i_1 są:

$$i_2 = \frac{x''}{x'} + 2\frac{x'}{y-x}; \qquad i_3 = \frac{y''}{y'} - 2\frac{y'}{y-x}.$$

Jeżeli dołączymy wreszcie i trzecie pochodne, otrzymamy układ trójparametrowy zupełny o ośmiu zmiennych, które prócz rozwiązań i_1, i_2, i_3 posiada dwa rozwiązania, od i_1, i_2, i_3 niezależne. Temi dwoma rozwiązaniami są:

$$i_4 = \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2; \qquad i_5 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2.$$

W ogólności liczba niezależnych od siebie niezmienników różniczkowych rzędu n-tego tego gatunku wynosi $2n-1$. Pomiędzy niemi zawiera się $2n-3$ niezmienników różniczkowych rzędu $(n-1)$-go. Dwa pozostałe, które z konieczności zawierać muszą pochodne $x^{(n)}$, $y^{(n)}$, mogą być otrzymane z tych niezmienników różniczkowych rzędu $(n-1)$-go, w których zachodzą $x^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}$.

Ponieważ chodzi tu o warunki nakładalności wzajemnej krzywych jednych na drugie, należy zważyć, że krzywa nie zmienia się, gdy zmienną λ zastąpimy przez funkcyę dowolną tej zmiennej. Należy więc stosować tylko takie niezmienniki różniczkowe, które nie zmieniają się, gdy λ doznaje pewnego przekształcenia, w szczególności zaś pewnego przekształcenia nieskończonostkowego

$$Uf = \alpha(\lambda)\frac{\partial f}{\partial \lambda},$$

gdzie $\alpha(\lambda)$ oznacza funkcyę dowolną zmiennej λ.

Z funkcyj i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 należy tedy utworzyć te funkcye, które pozostają niezmiennemi przy przekształceniu nieskończonostkowem:

$$Ux = 0, \qquad Uy = 0, \qquad U\lambda = \alpha(\lambda),$$

bez względu na wartość funkcyi $\alpha(\lambda)$. Wzór ogólny

$$Uf'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(Uf) - f'\frac{d}{d\lambda}(U\lambda)$$

daje:

$$Ux' = -x'\alpha'; \qquad Uy' = -y'\alpha',$$
$$Ux'' = -(x'\alpha'' + 2x''\alpha'); \qquad Uy'' = -(y'\alpha'' + 2y''\alpha'),$$
$$Ux''' = -(x'\alpha''' + 3x''\alpha'' + 3x'''\alpha'); \qquad Uy''' = -(y'x''' + 3y''\alpha'' + 3y'''\alpha').$$

Funkcye i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 przekształcają się w sposób następujący:

$$
(5) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} U i_1 = -2 i_1 \alpha', & \\ U i_2 = -(\alpha'' + i_2 \alpha'); & U i_3 = -(\alpha'' + i_3 \alpha'), \\ U i_4 = -(\alpha''' + 2 i_4 \alpha'); & U i_5 = -(\alpha''' + 2 i_5 \alpha'). \end{array} \right.
$$

Szukane niezmienniki $f(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ mają czynić zadość związkowi

$$
\sum_{k=1}^{5} \frac{\partial f}{\partial i_{i_k}} U i_k = 0
$$

dla wszystkich wartości funkcyi $\alpha(\lambda)$. Związek ten rozpada się na trzy następujące:

$$
(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2 i_1 \dfrac{\partial f}{\partial i_1} + i_2 \dfrac{\partial f}{\partial i_2} + i_3 \dfrac{\partial f}{\partial i_3} + 2 i_4 \dfrac{\partial f}{\partial i_4} + 2 i_5 \dfrac{\partial f}{\partial i_5} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial i_2} + \dfrac{\partial f}{\partial i_3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial i_4} + \dfrac{\partial f}{\partial i_5} = 0. \end{array} \right.
$$

Przez całkowanie równań różniczkowych (5), stanowiących układ trójparametrowy zupełny o pięciu zmiennych, dochodzimy do szukanych niezmienników. Jako takie można wybrać następujące:

$$
(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} J_2 = \dfrac{(y-x)^2}{x' y'} \left[\dfrac{x''}{x'} - \dfrac{y''}{y'} + 2 \left(\dfrac{x' + y'}{y - x} \right) \right]^2, \\ J_3 = \dfrac{(y-x)^2}{x' y'} \left\{ \dfrac{x'''}{x'} - \dfrac{y'''}{y'} - \dfrac{3}{2} \left[\left(\dfrac{x''}{x'} \right)^2 - \left(\dfrac{y''}{y'} \right)^2 \right] \right\}. \end{array} \right.
$$

Pomiędzy $2n-1$ niezmiennikami rzędu n-tego $i_1, i_2, \ldots i_{2n-1}$ jest $n-1$ takich, które pozostają niezmiennemi przy przekształceniu nieskończonostkowem Uf. Albowiem związek

$$
\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\partial f}{\partial i_k} U i_k = 0,
$$

którego spółczynniki są funkcyami jednorodnemi liniowemi wielkości $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^n$, rozpada się na n oddzielnych warunków. Warunki te tworzą układ zupełny i posiadają $2n-1-n=n-1$ rozwiązań. Istnieje przeto

$n-1$ niezależnych od siebie niezmienników różniczkowych, zawierających $x, y; x', y'; x'', y''; \ldots x^n, y^{(n)}$, niezależnych od wyboru parametru λ. Dla $n=3$ mamy oba wyżej znalezione niezmienniki J_2, J_3.

Do obliczenia niezmienników różniczkowych rzędu wyższego służy parametr różniczkowy, t. j. działanie niezmiennicze. Najprostszy parametr różniczkowy dla grupy (1) ma postać:

$$
(8) \qquad \Delta \varphi = \frac{(y-x)^2}{x' y'} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2.
$$

Gdy więc φ jest niezmiennikiem, to i $\Delta\varphi$ jest niezmiennikiem. Jeżeli położymy $x = \lambda$, wtedy znalezione niezmienniki różniczkowe J_2, J_3 i parametr różniczkowy $\Delta\varphi$ przyjmują dla krzywej $y = f(x)$ postać:

$$
J_2 = \frac{[y''(y-x) - 2y'(y'+1)]^2}{y'^3},
$$

$$
J_3 = \frac{(y-x)^2}{y'} \left(\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \frac{y''^2}{y'^2} \right),
$$

$$
\Delta \varphi = \frac{(y-x)^2}{y'} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2.
$$

Jeżeli krzywa dana jest przez równanie $f(x, y) = 0$, otrzymujemy wzory:

$$
J_2 = \frac{[(f_{xx} f_y^2 - 2 f_x f_y f_{xy} + f_{yy} f_x^2)(y-x) - 2 f_x f_y (f_y - f_x)]^2}{(f_x f_y)^3}
$$

$$
\Delta \varphi = \frac{(\varphi_x f_y - \varphi_y f_x)^2 (y-x)^2}{f_x f_y}.
$$

Aby poznać znaczenie geometryczne znalezionych niezmienników różniczkowych, oznaczmy przez α, β, γ spółrzędne prostokątne w przestrzeni, przez x, y spółrzędne minimalne punktów na kuli o promieniu 1, której środek znajduje się w początku spółrzędnych. Wtedy zachodzą związki:

$$
\alpha = \frac{1 - xy}{x - y}, \qquad \beta = i \frac{1 + xy}{x - y}, \qquad \gamma = \frac{x + y}{x - y}.
$$

Kwadrat krzywizny krzywej sferycznej

$$
x = \varphi(\lambda), \qquad y = \psi(\lambda)
$$

wyrazi się wzorem:

$$
K^2 = \frac{\Sigma (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma')^2}{(\Sigma \alpha'^2)^3} = 1 - \frac{(x-y)^2}{16 x'^3 y'^3} \left[(x'' y' - x' y'') - 2 x' y' \frac{x' + y'}{x - y} \right]^2
$$

lub

$$K^2 = 1 - \frac{1}{16} J_2 .$$

Jeżeli dalej oznaczymy przez s długość łuku rozważanej krzywej sferycznej, dostaniemy:

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \frac{4x'y'}{(x-y)^2}.$$

Stąd można poznać znaczenie geometryczne parametru różniczkowego $\Delta\varphi$; jest mianowicie:

$$\Delta\varphi = 4\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 .$$

Ciąg

$$J_2, \quad \Delta J_2, \ldots$$

zawiera wszystkie parametry niezależne krzywej sferycznej i pozwala odrazu na podanie kryteryów nakładalności dla krzywych sferycznych w spółrzędnych minimalnych.

Jeżeli przez T oznaczymy skręcenie krzywej sferycznej, równanie

$$J_2 = 8iK^2T$$

przedstawiać będzie związek pomiędzy krzywizną skręcenia a wyżej znalezionym niezmiennikiem różniczkowym J_3 rzędu trzeciego. Kładąc $T=0$, otrzymamy z wzóru na J_3:

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3y''^2}{2y'^2} = 0,$$

a całkowanie daje nam:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

jako równanie koła na kuli w spółrzędnych minimalnych x, y.

§ **2.** Niechaj na kuli jednostkowej dany będzie w spółrzędnych minimalnych układ krzywych, określony przez równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y). \tag{1}$$

Jeżeli oznaczymy przez s_1 długość łuku krzywych tego układu, to ze związku

$$ds_1{}^2 = \frac{4\,dx\,dy}{(x-y)^2} \tag{2}$$

otrzymamy wzory:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds_1} = \frac{x-y}{2\sqrt{\varphi}}, \qquad \frac{dy}{ds_1} = \frac{(x-y)\sqrt{\varphi}}{2} \\ &\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{x-y}{2\sqrt{\varphi}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Układ trajektoryj ortogonalnych układu krzywych (1) określa się przez równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi(x, y). \tag{4}$$

Jeżeli przez s_2 oznaczymy długość łuku tych trajektoryj ortogonalnych, otrzymamy wzory:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds_2} = \frac{x-y}{2i\sqrt{\varphi}}, \qquad \frac{dy}{ds_2} = \frac{(x-y)i\sqrt{\varphi}}{2} \\ &\frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{x-y}{2i\sqrt{\varphi}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Wszystkie wzory, odnoszące się do danego układu krzywych, przechodzą na odpowiednie wzory dla trajektoryj ortogonalnych, jeżeli zastąpimy φ przez $-\varphi$.

Niezmienniki różniczkowe rzędu 2-go krzywych danego układu i ich trajektoryj oryginalnych wyrażają się, jak następuje:

$$\left\{\begin{aligned} &J_2 = \frac{4}{\varphi}\left[1+\varphi+\frac{x-y}{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]^2, \\ &\overline{J}_2 = \frac{4}{-\varphi}\left[1-\varphi+\frac{x-y}{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]^2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Z wzorów (3) i (5) dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right) = \frac{x-y}{2i}&\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(1+\frac{x-y}{2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right. \\ &\left.+\frac{\partial f}{\partial y}\left(1+\frac{x-y}{2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

co przy pomocy wzorów (6) i tak napisać można:

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right) = \frac{1}{4i}\left(\sqrt{J_2}\,\frac{\partial f}{\partial s_1} + \sqrt{\overline{J}_2}\,.\,\frac{\partial f}{\partial s_2}\right). \tag{8}$$

Rozwiązanie równań (6) względem $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ daje nam:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{(\sqrt{J_2}+i\sqrt{\overline{J}_2})\,\varphi\sqrt{\varphi} - 4\varphi}{2(x-y)}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{(\sqrt{J_2}-i\sqrt{\overline{J}_2})\sqrt{\varphi} - 4\varphi}{2(x-y)}.$$

skąd, stosując warunek całkowalności, otrzymujemy związek:

(9) $$\frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial s_2} - \frac{\partial \sqrt{\bar{J}_2}}{\partial s_1} = \frac{1}{4i}(J_2 + \bar{J}_2) + 4i.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

(10) $$N_1 = \frac{1}{4i}\sqrt{J_2}, \qquad N_2 = \frac{1}{4i}\sqrt{\bar{J}_2},$$

nadamy związkowi (9) postać:

(11) $$\frac{\partial N_1}{\partial s_2} - \frac{\partial N_2}{\partial s_1} = N_1^2 + N_2^2 + 1,$$

a związek (8) przybierze postać:

(12) $$\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right) = N_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} + N_2 \frac{\partial f}{\partial s_2}.$$

Funkcye N_1, N_2 są niezmiennikami różniczkowemi rzędu 2-go danego układu krzywych względem obrotów kuli w sobie. Są one równocześnie jedynemi niezależnemi niezmiennikami różniczkowemi rzędu 2-go. Niezmienniki różniczkowe rzędów wyższych dostaniemy przez różniczkowanie funkcyj N_1, N_2 względem s_1, s_2. Liczba niezależnych niezmienników rzędu n-tego ($n > 2$) jest równa liczbie niezależnych pochodnych rzędu $n-2$ funkcyj N_1, N_2 względem s_1, s_2. Liczba niezależnych pochodnych rzędu $n-2$ dwóch funkcyj dwóch zmiennych wynosi $2n-2$. Przez różniczkowanie związku (11), przy uwzględnieniu tożsamości (12), dostajemy $n-2$ równań; pozostaje zatem n niezależnych pochodnych rzędu $n-2$, a więc i n niezależnych niezmienników rzędu n-tego danego układu krzywych.

Po tych przygotowaniach łatwo już ustanowić kryterya kongruencyi dla układów krzywych sferycznych. Zagadnienie to nie różni się zasadniczo od odpowiedniego zagadnienia dla układu krzywych na płaszczyźnie, rozwiązanego przez prof. Żorawskiego w rozprawie: „Notizen aus den Gebiete der Differentialgeometrie, IV: Über Kongruenzkriterien ebener Kurvenscharen" (Prace matematyczno-fizyczne t. XVIII, 1907).

Idzie tu przedewszystkiem o ustanowienie takiego układu równań różniczkowych, któremu czynią zadość wszystkie funkcye $\varphi(x, y)$, odpowiadające układom krzywych, które powstają z danego układu krzywych przez obroty kuli około jej środka. Ten układ równań różniczkowych, wyznaczający wszystkie układy krzywych nakładalne na układ dany; musi następnie składać się ze związków pomiędzy niezmiennikami różniczkowemi danego układu krzywych. Należy odróżnić tu przypadki następujące:

I. Założmy najprzód, że niezmienniki N_1, N_2 danego układu krzywych są od siebie niezależne, t. j. że wyznacznik funkcyjny

$$\frac{\partial(N_1, N_2)}{\partial(s_1, s_2)} = \frac{\partial N_1}{\partial s_1}\frac{\partial N_2}{\partial s_2} - \frac{\partial N_1}{\partial s_2}\frac{\partial N_2}{\partial s_1}$$

nie znika tożsamościowo. W tym przypadku równania

$$N_1 = N_1(x, y), \qquad N_2 = N_2(x, y)$$

dają się rozwiązać względem x, y przynajmniej w pewnym obszarze tych zmiennych, i można wtedy wszystkie pochodne rzędów wyższych wyrazić jako funkcye wielkości N_1 i N_2. W szczególności można wtedy napisać:

(13) $$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial s_1} = F_{11}(N_1, N_2), & \dfrac{\partial N_1}{\partial s_2} = F_{12}(N_1, N_2), \\[2ex] \dfrac{\partial N_2}{\partial s_1} = F_{21}(N_1, N_2), & \dfrac{\partial N_2}{\partial s_2} = F_{22}(N_1, N_2). \end{cases}$$

Związek (11) daje nam tożsamość

(14) $$F_{12} - F_{21} = N_1^2 + N_2^2 + 1;$$

to znaczy, że pomiędzy równaniami (13) są tylko trzy od siebie niezależne. W podobny sposób można otrzymać związki pomiędzy niezmiennikami różniczkowemi rzędów wyższych, i tym wszystkim związkom muszą czynić zadość układy krzywych nakładalne na układ dany. Ale wszystkie te związki powinny wynikać z równań (13) przez różniczkowanie; równania różniczkowe (13) obok związku (14) tworzą tedy żądany układ równań, któremu muszą czynić zadość wszystkie układy krzywych, nakładalne na dany układ krzywych. Jeżeli dwa układy krzywych sferycznych, z których każdy ma tę własność, iż wyznacznik $\frac{\partial(N_1, N_2)}{\partial(s_1, s_2)}$ nie znika nietożsamościowo, mają być nakładalne, to funkcye $\varphi(x, y)$, występujące w równaniach różniczkowych $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$ tych układów krzywych, muszą czynić zadość temu samemu układowi (13) równań różniczkowych.

II. Założmy powtóre, że wyznacznik $\frac{\partial(N_1, N_2)}{\partial(s_1, s_2)}$ znika tożsamościowo, t. j. że

(15) $$N_2 = F(N_1)$$

lecz że funkcya N_2 nie redukuje się do stałej. Przyjmijmy dalej, że dla danego układu krzywych funkcye: N_1,

$$M_1 = \frac{\partial N_1}{\partial s_1} \tag{16}$$

są od siebie niezależne.

W tym przypadku można równania

$$N_1 = N_1(x, y), \qquad M_1 = M_1(x, y)$$

rozwiązać względem x, y i przedstawić wszystkie pozostałe niezmienniki jako funkcye wielkości N_1, M_1. W ten sposób dochodzimy do związków, którym muszą czynić zadość wszystkie układy krzywych, nakładalne na dany układ krzywych. Idzie tedy o to, aby z pomiędzy tych związków wyszukać te, z których wszystkie inne mogą być wyprowadzone zapomocą różniczkowania i eliminacyi. Przez różniczkowanie związku (15) dostajemy:

$$\frac{\partial N_2}{\partial s_1} = F' M_1, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial s_2} = F' . \frac{\partial N_1}{\partial s_2}. \tag{17}$$

Przy pomocy równania (11) można te równania tak napisać:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial N_2}{\partial s_1} = F' M_1, \\ &\frac{\partial N_2}{\partial s_2} = F'(F' M_1 + N_1^2 + F^2 + 1). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

W rozważanym przypadku dają się przeto wszystkie niezmienniki różniczkowe rzędu 3-go wyrazić przez dwa niezmienniki niezależne N_1 i M_1. Pomiędzy pochodnemi rzędu 2-go funkcyi N_1 i N_2:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial s_1^2}, \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial s_1 \partial s_2}, \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial s_2^2}, \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2}, \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_1 \partial s_2}, \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_2^2}$$

tylko cztery są od siebie niezależne. Przez różniczkowanie związku (11) otrzymujemy mianowicie dwa związki postaci:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_2}\right) - \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2} = 2\left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial s_1} + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial s_1}\right), \\ &\frac{\partial^2 N_1}{\partial s_2^2} - \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) = 2\left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial s_2} + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial s_2}\right). \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Wszystkie tedy niezmienniki różniczkowe rzędu 4-go dają się wyrazić przez

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial s_1^2}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_2}\right), \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_2^2}$$

oraz przez niezmienniki rzędu 2-go i 3-go. Ze związków (11), (12) i (15) do (19) wypływają mianowicie wzory:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_2}\right) = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) - [N_1 M_1 + F'(F' M_1 + N_1^2 + F^2 + 1)], \\ &\frac{\partial^2 N_1}{\partial s_2^2} = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) + 2(N_1 + F F')(F' M_1 + N_1^2 + F^2 + 1), \\ &\frac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2} = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) - 3(N_1 M_1 + F F' M_1) - F(N_1^2 + F^2 + 1), \\ &\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_2}\right) = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) - F'[N_1 M_1 + F.(F' M_1 + N_1^2 + F^2 + 1)]. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Związki (20) mają postać następującą:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_2}\right) = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) + \alpha, \\ &\frac{\partial^2 N_1}{\partial s_2^2} = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) + \beta, \\ &\frac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2} = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) + \gamma, \\ &\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_2}\right) = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) + \delta, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

gdzie α, β, γ, δ są funkcyami niezmienników N_1 i M_1.

Liczba niezależnych niezmienników rzędu n-tego wynosi n. Przez $(n-2)$-krotne różniczkowanie związku (15) otrzymujemy tylko $n-1$ niezależnych związków pomiędzy niezmiennikami rzędu n-tego; powstający w ten sposób układ równań różniczkowych nie wystarcza tedy do wyznaczenia układów krzywych, nakładalnych na dany układ. Tak np. przez dwukrotne różniczkowanie równania (15) otrzymujemy trzy niezależne związki pomiędzy pochodnemi rzędu 2-go funkcyj N_1, N_2 względem s_1 i s_2, mianowicie trzy związki, wyrażające niezmienniki różniczkowe rzędu czwartego, jako funkcye niezmienników rzędu 2-go i 3-go. Lecz istnieją cztery niezależne niezmienniki różniczkowe rzędu 4-go; jeżeli te niezmienniki wyrazimy przez niezmienniki rzędu 2-go i 3-go, otrzymamy cztery związki rzędu 4-go.

Związki, wynikające z równania (15) przez dwukrotne różniczkowanie, można przy pomocy równań (18) i (21) napisać tak:

$$
(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 N_2}{\partial {s_1}^2} = F' \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial {s_1}^2} + u, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) = F'^2 \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial {s_1}^2} + v, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 N_2}{\partial {s_2}^2} = F'^3 \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial {s_1}^2} + w, \end{cases}
$$

gdzie u, v, w oznaczają pewne funkcye wielkości N_1 i M_1. Pochodne

$$
\frac{\partial^2 N_1}{\partial {s_1}^2}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}\right), \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial {s_1}^2}, \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial {s_2}^2}
$$

można uważać jako cztery niezależne pochodne rzędu 2-ego funkcyj N_1 i N_2 względem s_1 i s_2. Ze związków (22) wynika tedy, że można wszystkie niezmienniki różniczkowe rzędu 4-go wyrazić przez N_1 i M_1; wystarczy wyeliminować tylko zmienne x, y z równań

$$
N_1 = N_1(x, y), \qquad M_1 = M_1(x, y), \qquad \frac{\partial^2 N_1}{\partial {s_1}^2} = P_1(x, y) = \frac{\partial M_1}{\partial s_1},
$$

przez co otrzymamy:

$$
(23) \qquad N_2 = F(N_1), \qquad \frac{\partial M_1}{\partial s_1} = \Phi(N_1, M_1).
$$

Tym sposobem okazaliśmy, że i wszystkie niezmienniki różniczkowe rzędów wyższych dają się wyrazić przez N_1 i M_1. Związki tedy (23) tworzą żądany układ równań różniczkowych i dają w rozważanym przypadku kryterya kongruencyi dla układów krzywych sferycznych.

III. Może dalej zachodzić przypadek, że niezmiennik N_1 nie redukuje się wprawdzie do stałej, lecz jest zależny od M_1, t. j. że można przyjąć:

$$
(24) \qquad N_2 = F(N_1), \qquad M_1 = \Phi(N_1).
$$

W tym przypadku mogą być wszystkie niezmienniki różniczkowe wyrażone przez samo N_1. Aby dwa układy krzywych sferycznych były wtedy nakładalne, jest konieczne i dostateczne, by ich niezmienniki różniczkowe czyniły zadość temu samemu układowi związków (24).

IV. Załóżmy wreszcie $N_1 = \text{const.}$, N_2 zaś nie redukuje się do stałej. Przypadek ten zawiera się w przypadku ogólniejszym, w którym wyznacznik $\dfrac{\partial(N_1, N_2)}{\partial(s_1, s_2)}$ znika tożsamościowo, N zaś nie jest stałe.

Otóż jeżeli niezmienniki N_2 i $M_2 = \dfrac{\partial N_2}{\partial s_2}$ są od siebie niezależne, to szukany układ związków można napisać w postaci:

$$
N_1 = \text{const.}, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial s_2} = \Phi(N_2, M_2)
$$

Gdy zaś, przeciwnie, N_2 i M_2 są wzajemnie zależne, to za ten układ można przyjąć następujący:

$$
N_1 = \text{const.}, \qquad M_2 = F(N_2).
$$

V. Przypadek $N_1 = \text{const.}$, $N_2 = \text{const.}$ prowadzi tylko do urojonych tworzących prostoliniowych kuli. Jest mianowicie:

$$
\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{4i\varphi^{3/2}}\left[\varphi(\varphi_x + \varphi_y) + (x-y)(\varphi_{xx} + \varphi\varphi_{xy}) - \frac{x-y}{2\varphi}(3\varphi_x + \varphi\varphi_y)\cdot\varphi_x\right],
$$

$$
\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{1}{4i\varphi^{3/2}}\left[-(\varphi_x + \varphi_y) + (x-y)(\varphi_{xy} + \varphi\varphi_{yy}) - \frac{x-y}{2\varphi}(3\varphi_x + \varphi\varphi_y)\varphi_y\right],
$$

$$
\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{4\varphi^{3/2}}\left[\varphi(\varphi_x + \varphi_y) - (x-y)(\varphi_{xx} - \varphi\varphi_{xy}) + \frac{x-y}{2\varphi}(3\varphi_x - \varphi\varphi_y)\varphi_x\right],
$$

$$
\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{1}{4\varphi^{3/2}}\left[-(\varphi_x + \varphi_y) - (x-y)(\varphi_{xy} - \varphi\varphi_{yy}) + \frac{x-y}{2\varphi}(3\varphi_y - \varphi\varphi_y)\varphi_y\right].
$$

Kładąc więc $N_1 = \text{const}$, a zatem $\dfrac{\partial N_1}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial N_1}{\partial y} = 0$, otrzymamy:

$$
2\varphi(\varphi_{xx} + 2\varphi\varphi_{xy} + \varphi^2\varphi_{yy}) = (\varphi_x + \varphi\varphi_y)(3\varphi_x + \varphi\varphi_y),
$$

$$
\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{y-x}{2\sqrt{\varphi}}\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)^2\right],
$$

$$
\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{y-x}{2\sqrt{\varphi}}\left[\frac{\varphi_{xy}}{\varphi} - \frac{3}{2}\,\frac{\varphi_x\varphi_y}{\varphi^2}\right].
$$

Jeżeli ma być też $N_2 = \text{const.}$, to, po wyłączeniu przypadku $y - x = 0$, dostaniemy przez całkowanie:

$$
\varphi(x, y) = \frac{\Phi(y)}{(x-y)^2}.
$$

Warunki $\dfrac{\partial N_1}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial N_1}{\partial y} = 0$ dają wtedy:

$$
\Phi(y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad y = \text{const.}
$$

Przypadek $\varphi(x, y) = 0$ odpowiada tworzącym prostoliniowym kuli. Każdy z dwóch układów tych tworzących $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ zlewa się z układem ich trayektoryj ortogonalnych.

3. Niezmienniki różniczkowe, znalezione w § 1, zastosujemy do tej grupy przekształceń w płaszczyźnie, odpowiadającej grupie obrotów kuli w sobie na mocy ruchu stereograficznego.

Jeżeli przez x, y oznaczymy spółrzędne prostokątne punktu płaszczyzny, przez ξ, η spółrzędne minimalne tego punktu na powierzchni kuli, który odpowiada punktowi (x, y) na mocy rzutu stereograficznego z biegunem $(0, 0, 1)$, to zachodzić będą związki:

$$x + iy = \xi, \qquad x - iy = -\frac{1}{\eta}. \tag{1}$$

Obroty kuli w sobie określają się w spółrzędnych minimalnych ξ, η przez równania:

$$\xi_1 = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \qquad \eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \tag{2}$$

w spółrzędnych zaś prostokątnych x, y, z przez równania:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ y_1 &= b_1 x + b_1 x + b_3 x, \\ z_1 &= c_2 x + c_2 y + c_3 z, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

w których spółczynniki a_1, b_1, c_1 są dostawami kierunkowemi trzech wzajemnie do siebie prostopadłych kierunków. Pomiędzy spółczynnikami w równaniach (2) i (3) zachodzą znane związki E u l e r a i O l i n d e R o d r i g u e s a[1]:

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha^2+\delta^2-(\beta^2+\gamma^2)}{2\Delta}, & a_2 &= i\,\frac{\alpha^2+\beta^2-(\gamma^2+\delta^2)}{2\Delta}, & a_3 &= \frac{\gamma\delta-\alpha\beta}{\Delta}, \\ b_1 &= \frac{i}{2\Delta}\,[\beta^2+\delta^2-(\alpha^2+\gamma^2)], & b_2 &= \frac{1}{2\Delta}\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2), & b_3 &= \frac{i}{\Delta}\,(\alpha\beta+\gamma\delta), \\ c_1 &= \frac{\beta\delta-\alpha\gamma}{\Delta}, & c_2 &= -i\,\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\Delta}, & c_3 &= \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\Delta}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

gdzie $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Grupie przekształcenia (2) na powierzchni kuli odpowiada w płaszczyźnie x, y, na mocy rzutu stereograficznego, grupa przekształcenia, określona przez równania:

$$x_1 + iy_1 = \xi_1 = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha(x+iy)+\beta}{\gamma(\alpha+iy)+\delta},$$

$$x_1 - iy_1 = -\frac{1}{\eta_1} = -\frac{\gamma\eta+\delta}{\alpha\eta+\beta} = \frac{-\gamma+\delta(x-iy)}{\alpha-\beta(x-iy)}$$

[1]) D a r b o u x, Théorie des surfaces, T. I, str. 34.

Rozwiązanie tych równań daje nam przy pomocy wzorów (4):

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2(a_1x+a_2y)+a_3(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)-[2(c_1x+c_2y)+c_3(x^2+y^2-1)]}, \\ y_1 &= \frac{2(b_1x+b_2y)+b_3(a^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1)\quad 2[(c_1x+c_2y)+c_3(x^2+y^2-1)]}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

gdzie spółczynniki a_i, b_i, c_i mają to samo znaczenie, co w równaniu (3).

Grupa przekształceń, określona przez równania (5), zawiera dwa od siebie niezależne przekształcenia nieskończonostkowe:

$$\left\{\begin{aligned} U_1 f &= y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_2 f &= 2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (y^2 - x^2 + 1)\frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_3 f &= (x^2 - y^2 + 1)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Przekształcenie nieskończonostkowe $U_1 f$ odpowiada obrotom kuli około osi z, $U_2 f$ — obrotom kuli około osi x, jego tory tworzą pęk kół

$$x^2 + y^2 + 1 - x\,.\,\mathrm{const} = 0.$$

Przekształcenie nieskończonostkowe $U_3 f$ odpowiada obrotom kuli około osi y, jego tory tworzą pęk kół

$$x^2 + y^2 + 1 - y\,.\,\mathrm{const} = 0.$$

Niezmiennik różniczkowy rzędu 2-go krzywej płaskiej i parametr różniczkowy dla grupy (5) brzmią:

$$J_2 = \frac{x^2+y^2+1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\left[\frac{x'y''-x''y'}{x'^2+y'^2} - \frac{2}{x^2+y^2+1}(xy'-x'y)\right],$$

$$\Delta\varphi = \frac{x^3+y^2+1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\cdot\varphi'.$$

Jeżeli przez s oznaczymy długość łuku krzywej danej, przez K jej krzywiznę, przez r promień wodzący punktu tej krzywej, przez τ kąt, który tworzy promień wodzący z osią x, będzie można napisać:

$$J_2 = (r^2+1)K - 2r^2\frac{d\tau}{ds},$$

$$\Delta\varphi = (r^2+1)\frac{d\varphi}{ds}.$$

§ 4. Jako ostatnie zastosowanie zbadajmy niezmienniki różniczkowe krzywej względem grupy ruchów w płaszczyźnie nieeuklidesowej hyperbolicznej.

Jeżeli przyjmiemy za podstawę odwzorowanie Poincarégo[1]) płaszczyzny nieeuklidesowej (hyperbolicznej), to równanie

(1) $$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

gdzie z jest zmienną zespoloną, α, β, γ, δ oznaczają spółczynniki rzeczywiste, określa grupę „ruchów" w tej płaszczyźnie. Przytem założyć należy $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ np. równe 1. Jeżeli położymy:

(2) $$\begin{cases} x + iy = \xi, & x - iy = \eta, \\ x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), & y = \frac{i}{2}(\eta - \xi) \end{cases}$$

i będziemy uważali ξ, η za spółrzędne minimalne punktu kuli jednostkowej, to grupę (1), na mocy równań (2), możemy traktować jako grupę ruchów kul, w sobie. Grupa ruchów nieeuklidesowych określa się w spółrzędnych prostokątnych za pomocą równań:

(3) $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) + \alpha\gamma y^2}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2} \\[2ex] y_1 = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2} \end{cases}$$

Zawiera ona trzy przekształcenia nieskończonostkowe:

(4) $$\begin{cases} U_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x}, \\[2ex] U_2 f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\[2ex] U_3 f = (x^2 - y^2)\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

które pozostawiają bez zmiany oś x („prosta nieskończenie odległa") i układ „prostych"

(5) $$(x - \lambda)^2 + y^2 = R^2 \qquad (y \geqq 0).$$

Każdą grupę jednoparametrową grupy (3), która daną „prostą" (λ, R) pozostawia niezmienną, można nazwać grupą przesunięć „wzdłuż tej prostej". Taka „grupa przesunięć" wytworzona zostaje przez przekształcenie nieskończonostkowe

[1]) Acta mathematica I.

$$Uf = e_1 U_1 f + e_1 U_2 f + e_3 U_3 f,$$

gdzie

$$e_1 : e_2 : e_3 = (R^2 - \lambda^2) : 2\lambda : (-1).$$

To przekształcenie nieskończonostkowe można tedy przedstawić za pomocą wzoru:

$$Uf = [(x - \lambda)^2 - (y^2 + R^2)]\frac{\partial f}{\partial x} + 2y(x - \lambda)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Niezmiennik różniczkowy J_2 przyjmuje postać:

$$J_2 = \frac{16 y^2}{x'^2 + y'^2}\left(\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'}{y}\right)^2.$$

Połóżmy:

(6) $$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{J_2} = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\left(\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'}{y}\right).$$

Ten niezmiennik różniczkowy odgrywa rolę krzywizny dla „prostej" $x + \lambda R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$: jest mianowicie $J = 0$. Jeżeli oznaczymy przez s „długość łuku" krzywej w płaszczyznie $x_1 y$, przez σ długość łuku odpowiadającej jej krzywej na kuli jednostkowej, to zachodzić będzie związek:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{-4\,d\xi^2\,d\eta^2}{(\eta - \xi)^2} = -d\sigma^2.$$

Jeżeli oznaczymy dalej przez τ kąt, który tworzy styczna do krzywej w płaszczyznie x, y z osią x, można będzie napisać:

(7) $$J = \frac{d\tau}{ds} + \cos\tau = yK + \cos\tau.$$

Tu K oznacza krzywiznę euklidesową krzywej danej w punkcie (x, y). Parametr różniczkowy oznacza różniczkowanie względem „długości łuku".

Dla „prostych" (λ, R) jest:

$$y = -R\cos\tau, \quad yK + \cos\tau = 0, \quad J = 0.$$

„Krzywizna" koła euklidesowego o promieniu R i spółrzędnej y_0 środka jest:

$$J = \frac{y_0}{R}.$$

Nakoniec „krzywizna" prostej euklidesowej, która tworzy kąt τ z osią odciętych, jest:

$$J = \cos\tau.$$

Proste prostopadłe do osi x mają „krzywiznę" $J = \cos\frac{\pi}{2} = 0$; należą one także do „prostych" nieeuklidesowych.

Przez całkowanie równań różniczkowych $J = 0$, $J = \text{const.}$ dochodzimy do „prostych" i „cyklów" hyperbolicznych. Można więc zasadnie wprowadzić niezmiennik różniczkowy J jako „krzywiznę" krzywych w płaszczyźnie hyperbolicznej i na tej definicyi zbudować Geometryę różniczkową hyperboliczną.

Zusammenfassung.

Wählt man die Minimallinien d. h. die geradlinigen Erzeugenden der Kugel vom Radius 1 als Parameterkurven x, y, so stellen die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y_1 = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \tag{1}$$

die Bewegungen der Kugel in sich selbst dar. In der vorliegenden Arbeit soll die Invariantentheorie für die Gruppe dieser Bewegungen nach Lie'schen Methoden entwickelt werden, woraus sich sofort die Kongruenzkriterien für sphärische Kurven und Kurvenscharen ergeben werden. Diese Lösung des Äquivalenzproblems für sphärische Kurven und Kurvenscharen erscheint einfacher und naturgemässer, als diejenige, welche in den allgemeinen Kongruenzkriterien für Raumkurven enthalten ist. Besonderes Interesse bietet sie auch deshalb, weil sie sich auf die Gruppe der Bewegungen in der nicht-euklidischen Ebene anwenden lässt.

---

§ **1.** Denkt man sich die dreigliedrige Gruppe (1) durch Hinzunahme der Transformationen, welche die Differentialquotienten y', y'', ... von y nach x bei der Gruppe erfahren, erweitert, so kann man die Funktionen von x, y, y', y'', ... ins Auge fassen, die bei der erweiterten Gruppe invariant bleiben. In diesem Sinne soll von den Differentialinvarianten der Gruppe (1) gesprochen werden. Unter diesen Differentialinvarianten gibt es bekanntlich im Falle einer dreigliedrigen Gruppe eine von der zweiten Ordnung J_2, eine von der dritten Ordnung J_3 u. s. w., so dass die allgemeinste Differentialinvariante $(3+s)$-ter Ordnung eine beliebige Funktion von $J_2, J_3, \ldots, J_{3+s}$ ist. Man kann diese Differentialinvarianten entweder unmittelbar aus den Gleichungen (1) durch Differentiation und Elimination der Konstanten α, β, γ, δ bestimmen, oder die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (1) um die Inkremente der Differentialquotienten y', y'', ... von y nach x erweitern, und die Lösungen der vollständigen Systeme finden, die durch Nullsetzen der erweiterten infinitesimalen Transformationen hervorgehen.

Es ist am übersichtlichsten, x, y zunächst als Funktionen einer Veränderlichen λ aufzufassen, von der vorausgesetzt wird, dass sie sich bei der Gruppe nicht ändert, und dementsprechend die Inkremente von $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{d^2x}{d\lambda^2}$, ... zu berechnen.

Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (1) lauten:

$$\left\{\begin{aligned} U_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_2 f &= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_3 f &= x^2\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die bis zur dritten Ordnung erweiterten infinitesimalen Transformationen haben die Form:

$$\left\{\begin{aligned} U_1^{(3)} f &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_2^{(3)} f &= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + x'\frac{\partial f}{\partial x'} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + x''\frac{\partial f}{\partial x''} + y''\frac{\partial f}{\partial y''} \\ &\quad + x'''\frac{\partial f}{\partial x'''} + y'''\frac{\partial f}{\partial y'''}, \\ U_3^{(3)} f &= x^2\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + 2\left(xx'\frac{\partial f}{\partial x'} + yy'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\ &\quad + 2\left[(xx'' + x'^2)\frac{\partial f}{\partial x''} + (yy'' + y'^2)\frac{\partial f}{\partial y''}\right] \\ &\quad + 2\left[(xx''' + 3x'x'')\frac{\partial f}{\partial x'''} + (yy''' + 3y'y'')\frac{\partial f}{\partial y'''}\right]. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Setzt man nun:

$$U_1^{(3)} f = 0, \qquad U_2^{(3)} f = 0, \qquad U_3^{(3)} f = 0 \tag{4}$$

und berücksichtigt nur die ersten Differentialquotienten, so hat man ein dreigliedriges vollständiges System vor sich mit der einen Lösung:

$$i_1 = \frac{x'y'}{(y-x)^2}.$$

Nimmt man auch die zweiten Differentialquotienten hinzu, so erhält man ein dreigliedriges vollständiges System in sechs Veränderlichen. Es besitzt also drei Lösungen, darunter i_1. Zwei von i_1 unabhängige sind:

$$i_2 = \frac{x''}{x'} + 2\,\frac{x'}{y-x}; \qquad i_3 = \frac{y''}{y'} - 2\,\frac{y'}{y-x}.$$

Nimmt man endlich auch die dritten Differentialquotienten hinzu, so erhält man ein dreigliedriges vollständiges System in acht Veränderlichen, welches ausser i_1, i_2, i_3 zwei von ihnen unabhängige Lösungen besitzt. Es sind:

$$i_4 = \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2; \qquad i_5 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$

zwei solche Lösungen.

Allgemein beträgt die Anzahl voneinander unabhängiger Differentialinvarianten n-ter Ordnung dieser Art $2n-1$. Unter ihnen sind die $2n-3$ Differentialinvarianten $(n-1)$-ter Ordnung enthalten. Die zwei übrigen, die notwendigerweise $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ enthalten müssen, können aus denjenigen beiden Differentialinvarianten von der $(n-1)$-ten Ordnung durch Differentiation erhalten werden, in welchen $x^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}$ vorkommen.

Da es sich um die Bedingungen für die Überführbarkeit von Kurven ineinander handelt, muss man bedenken, dass sich eine Kurve nicht ändert, wenn man die Veränderliche λ durch eine beliebige Funktion von λ ersetzt. Man darf daher nur solche Differentialinvarianten benutzen, die sich nicht ändern, wenn λ irgend eine Transformation, also auch insbesondere irgend eine infinitesimale Transformation

$$Uf = \alpha(\lambda)\,\frac{\partial f}{\partial \lambda},$$

erfährt, wobei $\alpha(\lambda)$ eine beliebige Funktion von λ bedeutet.

Aus den Funktionen i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 sind also diejenigen Funktionen zu bilden, die bei der infinitesimalen Transformation:

$$Ux = 0, \qquad Uy = 0, \qquad U\lambda = \alpha(\lambda)$$

ungeändert bleiben, welchen Wert auch die Funktion $\alpha(\lambda)$ haben mag. Die allgemeine Formel:

$$Uf'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(Uf) - f'\,\frac{d}{d\lambda}(U\lambda)$$

ergibt:

$$Ux' = -x'\alpha'; \qquad Uy' = -y'\alpha',$$

$$Ux'' = -(x'\alpha'' + 2x''\alpha'); \qquad Uy'' = -(y'\alpha'' + 2y''\alpha'),$$

$$Ux''' = -(x'\alpha''' + 3x''\alpha'' + 3x'''\alpha'); \quad Uy''' = -(y'x''' + 3y''\alpha'' + 3y'''\alpha').$$

Die Funktionen i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 werden durch Uf folgendermassen transformiert:

$$(5)\quad \begin{cases} Ui_1 = -2i_1\alpha', \\ Ui_2 = -(\alpha'' + i_2\alpha'); \qquad Ui_3 = -(\alpha'' + i_3\alpha'), \\ Ui_4 = -(\alpha''' + 2i_4\alpha'); \quad Ui_5 = -(\alpha''' + 2i_5\alpha'). \end{cases}$$

Die gesuchten Invarianten $f(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ sollen nun die Relation:

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{\partial f}{\partial i_{i_k}}\, Ui_k = 0$$

für alle Werte der Funktion $\alpha(\lambda)$ erfüllen. Sie zerfällt daher in die drei einzelnen Forderungen:

$$(6)\quad \begin{cases} 2i_1\frac{\partial f}{\partial i_1} + i_2\frac{\partial f}{\partial i_2} + i_3\frac{\partial f}{\partial i_3} + 2i_4\frac{\partial f}{\partial i_4} + 2i_5\frac{\partial f}{\partial i_5} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial i_2} + \frac{\partial f}{\partial i_3} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial i_4} + \frac{\partial f}{\partial i_5} = 0. \end{cases}$$

Durch Integration der Differentialgleichungen (6), welche ein dreigliedriges vollständiges System in fünf Veränderlichen bilden, kommt man zu den gesuchten Invarianten. Man kann als solche folgende wählen:

$$(7)\quad \begin{cases} J_2 = \frac{(y-x)^2}{x'y'}\left[\frac{x''}{x'} - \frac{y''}{y'} + 2\left(\frac{x'+y'}{y-x}\right)\right]^2, \\ J_3 = \frac{(y-x)^2}{x'y'}\left\{\frac{x'''}{x'} - \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left[\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 - \left(\frac{y''}{y'}\right)^2\right]\right\}. \end{cases}$$

Unter den $2n-1$ Invarianten n-ter Ordnung $i_1, i_2, \ldots, i_{2n-1}$ gibt es $(n-1)$ solche, die bei der infinitesimalen Transformation Uf ungeändert bleiben. Denn die Relation:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\partial f}{\partial i_k}\, Ui_k = 0,$$

deren Koeffizienten lineare homogene Funktionen von $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n)}$ sind, zerfällt in n einzelne Forderungen. Diese Forderungen müssen ein vollständiges System bilden und besitzen $2n-1-n=n-1$ Lösungen. Es gibt also gerade $n-1$ voneinander unabhängige Differentialinvarianten in x, y; x', y'; x'', y''; ...; $x^{(n)}$, $y^{(n)}$, die von der Wahl des Parameters λ unabhängig sind. Für $n=3$ hat man zwei, nämlich die oben gefundenen J_2, J_3.

Zur Berechnung der Differentialinvarianten höherer Ordnung dient der Differentialparameter d. h. die invariante Operation. Der einfachste Differentialparameter für die Gruppe (1) hat die Form:

$$\Delta\varphi = \frac{(y-x)^2}{x'y'}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2. \tag{8}$$

Ist also φ eine Invariante, so ist auch $\Delta\varphi$ eine Invariante.

Setzt man $x=\lambda$, so nehmen die gefundenen Differentialinvarianten J_2, J_3 und der Differentialparameter $\Delta\varphi$ für eine Kurve $y=f(x)$ die Form:

$$J_2 = \frac{[y''(y-x)-2y'(y'+1)]^2}{y'^3},$$

$$J_3 = \frac{(y-x)^2}{y'}\left(\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^2}\right),$$

$$\Delta\varphi = \frac{(y-x)^2}{y'}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2.$$

an. Ist die Kurve durch die Gleichung $f(x,y)=0$ gegeben, so bekommt man die Formeln:

$$J_2 = \frac{[(f_{xx}f_y^2-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}f_x^2)(y-x)-2f_xf_y(f_y-f_x)]^2}{(f_xf_y)^3}$$

$$\Delta\varphi = \frac{(\varphi_xf_y-\varphi_yf_x)^2(y-x)^2}{f_xf_y}.$$

Um die geometrische Bedeutung der gefundenen Differentialinvarianten zu erkennen, bezeichne man mit α, β, γ die rechtwinkeligen Raumkoordinaten, mit x, y die Minimalkoordinaten eines Punktes der Einheitskugel, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt liegt. Dann bestehen die Relationen:

$$\alpha = \frac{1-xy}{x-y}, \quad \beta = i\,\frac{1+xy}{x-y}, \quad \gamma = \frac{x+y}{x-y}.$$

Für das Quadrat der Krümmung einer sphärischen Kurve:

$$x=\varphi(\lambda), \quad y=\psi(\lambda)$$

bekommt man die Formel:

$$K^2 = \frac{\Sigma(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2}{(\Sigma\alpha'^2)^3} = 1-\frac{(x-y)^2}{16x'^3y'^3}\left[(x''y'-x'y'')-2x'y'\frac{x'+y'}{x-y}\right]^2$$

oder:

$$K^2 = 1-\frac{1}{16}J_2.$$

Bezeichnet man ferner mit s die Bogenlänge der betrachteten sphärischen Kurve, so ergibt sich:

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \frac{4x'y'}{(x-y)^2}.$$

Daraus lässt sich die geometrische Bedeutung des Differentialparameters $\Delta\varphi$ erkennen; es ist nämlich:

$$\Delta\varphi = 4\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2.$$

Die Reihe:

$$J_2, \quad \Delta J_2, \ldots$$

enthält alle unabhängigen Differentialinvarianten einer sphärischen Kurve und erlaubt sofort, die Kongruenzkriterien für sphärische Kurven in Minimalkoordinaten anzugeben

Bezeichnet man mit T die Torsion der sphärischen Kurve, so stellt die Relation:

$$J_2 = 8iK^2T$$

den Zusammenhang zwischen der Krümmung, der Torsion und der oben gefundenen Differentialinvariante dritter Ordnung J_3 dar. Setzt man $T=0$, so ergibt die Formel für J_3:

$$\frac{y'''}{y'}-\frac{3y''^2}{2y'^2}=0,$$

und durch Integration folgt dann:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$

als Gleichung des Kreises auf der Kugel in den Minimalkoordinaten x, y.

---

§ **2.** Es sei nun durch die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y). \tag{1}$$

eine Schar von Kurven auf der Einheitskugel in Minimalkoordinaten gegeben. Bezeichnet man mit s_1 die Bogenlänge der Kurven dieser Schar, so ergeben sich aus der Relation:

$$ds_1^2 = \frac{4\,dx\,dy}{(x-y)^2} \tag{2}$$

die Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds_1} = \frac{x-y}{2\sqrt{\varphi}}, \qquad \frac{dy}{ds_1} = \frac{(x-y)\sqrt{\varphi}}{2} \\ &\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{x-y}{2\sqrt{\varphi}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Die Schar der orthogonalen Trajektorien die Kurvenschar (1) ist durch die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi(x,\, y) \tag{4}$$

bestimmt. Bezeichnet man mit s_2 die Bogenlänge dieser orthogonalen Trajektorien, so ergeben sich die Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds_2} = \frac{x-y}{2i\sqrt{\varphi}}, \qquad \frac{dy}{ds_2} = \frac{(x-y)i\sqrt{\varphi}}{2} \\ &\frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{x-y}{2i\sqrt{\varphi}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Alle Formeln, die sich auf die gegebene Kurvenschar beziehen, gehen in die entsprechenden Formeln für die orthogonalen Trajektorien über, wenn man φ durch $-\varphi$ ersetzt.

Die Differentialinvarianten zweiter Ordnung der Kurven der gegëbenen Schar und ihrer orthogonalen Trajektorien lauten:

$$\left\{\begin{aligned} &J_2 = \frac{4}{\varphi}\left[1+\varphi+\frac{x-y}{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]^2, \\ &\overline{J}_2 = \frac{4}{-\varphi}\left[1-\varphi+\frac{x-y}{2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]^2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Aus den Formeln (3) und (5) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right) = \frac{x-y}{2i}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(1+\frac{x-y}{2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial y}\left(1+\frac{x-y}{2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

was sich mit Hilfe der Formeln (6) auch folgendermassen schreiben lässt:

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right) = \frac{1}{4i}\left(\sqrt{J_2}\,\frac{\partial f}{\partial s_1} + \sqrt{\overline{J}_2}\,.\,\frac{\partial f}{\partial s_2}\right). \tag{8}$$

Die Auflösung der Gleichungen (6) nach $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ergibt ferner:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{(\sqrt{J_2}+i\sqrt{\overline{J}_2})\,\varphi\sqrt{\varphi} - 4\varphi}{2(x-y)}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{(\sqrt{J_2}-i\sqrt{\overline{J}_2})\sqrt{\varphi} - 4\varphi}{2(x-y)}.$$

Daraus folgt durch Anwendung der Integrabilitätsbedingung die Relation:

$$\frac{\partial\sqrt{J_2}}{\partial s_2} - \frac{\partial\sqrt{\overline{J}_2}}{\partial s_1} = \frac{1}{4i}(J_2+\overline{J}_2) + 4i. \tag{9}$$

Führt man die Bezeichnungen:

$$N_1 = \frac{1}{4i}\sqrt{J_2}, \qquad N_2 = \frac{1}{4i}\sqrt{\overline{J}_2} \tag{10}$$

ein, so nimmt die Relation (9) die Gestalt:

$$\frac{\partial N_1}{\partial s_2} - \frac{\partial N_2}{\partial s_1} = N_1^2 + N_2^2 + 1, \tag{11}$$

und die Relation (8) die Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial f}{\partial s_2}\right) = N_1\,\frac{\partial f}{\partial s_1} + N_2\,\frac{\partial f}{\partial s_2}. \tag{12}$$

an.

Die Funktionen N_1, N_2 bilden die Differentialinvarianten zweiter Ordnung der gegebenen Kurvenschar gegenüber den Bewegungen der Kugel in sich selbst. Sie sind gleichzeitig die einzigen unabhängigen Differentialinvarianten zweiter Ordnung. Die Differentialinvarianten höherer Ordnungen ergeben sich durch Differentiation von N_1, N_2 nach s_1, s_2. Die Anzahl der unabhängigen Invarianten n-ter Ordnung $(n>2)$ ist gleich der Anzahl der unabhängigen Differentialquotienten $(n-2)$-ter Ordnung der Funktionen N_1, N_2 inbezug auf s_1, s_2. Die Anzahl der unabhängigen Differentialquotienten $(n-2)$-ter Ordnung von zwei Funktionen zweier Veränderlicher beträgt $2n-2$; durch Differentiation der Relation (11) bei Berücksichtigung der Identität (12) ergeben sich aber $n-2$ Gleichungen, es bleiben also nur n unabhängige Differentialquotienten $(n-2)$-ter Ordnung und daher auch n unabhängige Invarianten n-ter Ordnung der gegebenen Kurvenschar übrig.

Nach diesen Vorbereitungen kann man leicht die Kongruenzkriterien für sphärische Kurvenscharen aufstellen. Dieses Problem ist nicht wesentlich von dem entsprechenden Problem für Kurvenscharen in der Ebene verschieden; dieses letztere ist von Prof. Żorawski in Krakau in seiner Abhandlung: „Notizen aus dem Gebiete der Differentialgeometrie", IV: Über Kongruenzkriterien ebener Kurvenscharen (Prace mat.-fiz Bd. XVIII, 1907) gelöst worden.

Es handelt sich vor allem um die Aufstellung eines Systems von Differentialgleichungen, das von allen denjenigen Funktionen $\varphi(x, y)$ befriedigt werden muss, die den aus der gegebenen Kurvenschar durch Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt hervorgehenden Kurvenscharen entsprechen. Dieses System von Differentialgleichungen bestimmt alle mit der gegebenen Kurvenschar kongruenten Kurvenscharen; es muss aus den Relationen zwischen den Differentialinvarianten der gegebenen Kurvenschar bestehen. Bei ihrer Bestimmung muss man verschiedene Fälle unterscheiden:

I. Es möge zunächst vorausgesetzt werden, dass die Invarianten N_1, N_2 der gegebenen Kurvenschar voneinander unabhängig sind, d. h. dass die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(N_1, N_2)}{\partial(s_1, s_2)} = \frac{\partial N_1}{\partial s_1}\frac{\partial N_2}{\partial s_2} - \frac{\partial N_1}{\partial s_2}\frac{\partial N_2}{\partial s_1}$$

nicht identisch verschwindet.

In diesem Falle lassen sich die Gleichungen:

$$N_1 = N_1(x, y), \qquad N_2 = N_2(x, y)$$

wenigstens in einem begrenzten Bereiche der Veränderlichen x, y nach x, y auflösen und man kann dann alle Differentialinvarianten höherer Ordnungen als Funktionen von N_1 und N_2 ausdrücken. Insbesondere kann man dann schreiben:

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} &= F_{11}(N_1, N_2), & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} &= F_{12}(N_1, N_2), \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} &= F_{21}(N_1, N_2), & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} &= F_{22}(N_1, N_2). \end{aligned} \right.$$

Die Relation (11) liefert die Identität:

$$(14) \qquad F_{12} - F_{21} = N_1^2 + N_2^2 + 1.$$

d. h. unter den Gleichungen (13) sind nur drei voneinander unabhängig. In ähnlicher Weise lassen sich die Relationen zwischen den Differentialinvarianten höherer Ordnungen aufstellen und allen diesen Relationen müssen die zu der gegebenen Kurvenschar kongruenten Kurvenscharen genügen. Alle diese Relationen müssen sich aber aus den Gleichungen (13) durch Differentiation ergeben; die Differentialgleichungen (13) nebst der Relation (14) bilden also das gewünschte System von Gleichungen, dem alle zu der gegebenen Kurvenschar kongruenten Kurvenscharen genügen müssen. Sollen zwei Scharen von sphärischen Kurven, deren jede die Eigenschaft besitzt, dass die Determinante $\frac{\partial(N_1, N_2)}{\partial(s_1, s_2)}$ nicht identisch verschwindet, kongruent sein, so müssen die Funktionen $\varphi(x, y)$, welche in den Differentialgleichungen $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$ dieser Kurvenscharen auftreten, demselben System (13) von Differentialgleichungen genügen.

II. Es möge zweitens vorausgesetzt werden, dass die Determinante $\frac{\partial(N_1, N_2)}{\partial(s_1, s_2)}$ identisch verschwindet, d. h.

$$(15) \qquad N_2 = F(N_1)$$

ist, dass sich aber die Funktion N_1 nicht auf eine Konstante reduziert. Ferner möge angenommen werden, dass für die gegebene Kurvenschar die Funktionen N_1 und

$$(16) \qquad M_1 = \frac{\partial N_1}{\partial s_1}$$

voneinander unabhängig sind.

In diesem Falle kann man die Gleichungen:

$$N_1 = N_1(x, y), \qquad M_1 = M_1(x, y)$$

nach x, y auflösen und alle übrigen Invarianten als Funktionen von N_1, M_1 darstellen. Auf diese Weise bekommt man die Relationen, denen alle mit der gegebenen Kurvenschar kongruenten Kurvenscharen genügen müssen. Es handelt sich nur darum, unter diesen Relationen diejenigen auszusuchen, aus denen alle anderen durch Differentiation und Elimination abgeleitet werden können. Durch Differentiation der Relation (15) ergibt sich.

$$(17) \qquad \frac{\partial N_2}{\partial s_1} = F' M_1, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial s_2} = F' . \frac{\partial N_1}{\partial s_2} .$$

Mit Hilfe der Gleichung (11) kann man die obigen Gleichungen folgendermassen schreiben:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N_2}{\partial s_1} = F' M_1, \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial s_2} = F'(F' M_1 + N_1^2 + F^2 + 1). \end{cases}$$

In dem betrachteten Falle können also alle Differentialinvarianten dritter Ordnung durch die beiden unabhängigen N_1 und M_1 ausgedrückt werden. Unter den 6 Differentialquotienten zweiter Ordnung der Funktionen N_1 und N_2:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial s_1^2},\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial s_1 \partial s_2},\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial s_2^2},\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2},\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_1 \partial s_2},\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_2^2}$$

sind nur 4 voneinander unabhängig. Durch Differentiation der Relation (11) ergeben sich nämlich zwei Relationen von der Form:

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) - \dfrac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2} = 2\left(N_1 \dfrac{\partial N_1}{\partial s_1} + N_2 \dfrac{\partial N_2}{\partial s_1}\right), \\ \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial s_2^2} - \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) = 2\left(N_1 \dfrac{\partial N_1}{\partial s_2} + N_2 \dfrac{\partial N_2}{\partial s_2}\right). \end{cases}$$

Alle Differentialinvarianten vierter Ordnung lassen sich also durch

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial s_1^2},\ \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}\right),\ \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial N_2}{\partial s_2}\right),\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_2^2}$$

und durch die Invarianten zweiter und dritter Ordnung ausdrücken. Aus den Relationen (11), (12) und (15) bis (19) folgen nämlich die Formeln:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) - [N_1 M_1 + F'(F' M_1 + N_1^2 + F^2 + 1)], \\ \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial s_2^2} = \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) + 2(N_1 + FF')(F' M_1 + N_1^2 + F^2 + 1), \\ \dfrac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2} = \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) - 3(N_1 M_1 + FF' M_1) - F(N_1^2 + F^2 + 1), \\ \dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{\partial N_2}{\partial s_2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) - F'[N_1 M_1 + F.(F' M_1 + N_1^2 + F^2 + 1)]. \end{cases}$$

Die Relationen (20) haben folgende Gestalt:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) + \alpha, \\ \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial s_2^2} = \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) + \beta, \\ \dfrac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2} = \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) + \gamma, \\ \dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{\partial N_2}{\partial s_2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_2}{\partial s_1}\right) + \delta, \end{cases}$$

wobei α, β, γ, δ Funktionen der Invarianten N_1 und M_1 sind.

Die Anzahl der unabhängigen Invarianten n-ter Ordnung beträgt n. Durch $(n-2)$-malige Differentiation der Relation (15) erhält man nur $(n-1)$ unabhängige Relationen zwischen den Invarianten n-ter Ordnung; das auf diese Weise entstehende System von Differentialgleichungen genügt also nicht zur Bestimmung der Kurvenscharen, die mit der gegebenen kongruent sind. Beispielsweise erhält man durch zweimalige Differentiation der Gleichung (15) drei unabhängige Relationen zwischen den Differentialquotienten zweiter Ordnung der Funktionen N_1 und N_2 inbezug auf s_1 und s_2, nämlich 3 Relationen, welche die Differentialinvarianten vierter Ordnung als Funktionen der Invarianten zweiter und dritter Ordnung ausdrücken. Es gibt aber vier unabhängige Differentialinvarianten vierter Ordnung; indem man diese Invarianten durch diejenigen zweiter und dritter Ordnung ausdrückt, bekommt man vier Relationen vierter Ordnung.

Die Relationen, welche sich aus (15) durch zweimalige Differentiation ergeben, kann man mit Hilfe der Gleichungen (18) und (21) folgendermassen schreiben

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2} = F' \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial s_1^2} + u, \\ \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial s_1}\right) = F'^2 \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial s_1^2} + v, \\ \dfrac{\partial^2 N_2}{\partial s_2^2} = F'^3 \dfrac{\partial^2 N_1}{\partial s_1^2} + w, \end{cases}$$

wobei u, v, w gewisse Funktionen von N_1 und M_1 bezeichnen sollen. Die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial s_1^2},\ \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial N_1}{\partial s_1}\right),\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_1^2},\ \frac{\partial^2 N_2}{\partial s_2^2}$$

können als vier unabhängige Ableitungen zweiter Ordnung der Funktionen N_1 und N_2 inbezug auf s_1 und s_2 betrachtet werden. Aus den Relationen (22) folgt daher, dass man alle Differentialinvarianten 4-ter Ordnung durch N_1 und M_1 ausdrücken kann; man braucht nur die Veränderlichen x, y aus den Gleichungen:

$$N_1 = N_1(x, y), \quad M_1 = M_1(x, y), \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial {s_1}^2} = P_1(x, y),$$

zu eliminieren, wodurch sich ergibt:

$$N_2 = F(N_1), \quad \frac{\partial M_1}{\partial s_1} = \Phi(N_1, M_1). \tag{23}$$

Damit ist gezeigt, dass auch alle Differentialinvarianten höherer Ordnungen durch N_1 und M_1 ausgedrückt werden können. Die Relationen (23) bilden also das gewünschte System von Differentialgleichungen und liefern im betrachteten Falle die Kongruenzkriterien für sphärische Kurvenscharen.

III. Es kann ferner der Fall eintreten, dass die Invariante N_1 sich zwar nicht auf eine Konstante reduziert, aber von M_1 abhängig ist, d. h. dass man voraussetzen kann:

$$N_2 = F(N_1), \quad M_1 = \Phi(N_1). \tag{24}$$

In diesem Falle können alle Differentialinvarianten durch N_1 allein ausgedrückt werden. Damit zwei Scharen von sphärischen Kurven kongruent seien, ist dann notwendig und hinreichend, dass ihre Differentialinvarianten dasselbe System (24) von Relationen befriedigen.

IV. Es möge endlich $N_1 = \text{const}$ vorausgesetzt werden; N_2 soll sich aber nicht auf eine Konstante reduzieren. Dieser Fall ist in dem allgemeineren Fall enthalten, wo die Determinante $\dfrac{\partial(N_1, N_2)}{\partial(s_1, s_2)}$ identisch verschwindet, aber N_2 nicht konstant ist.

Sind nun die Invarianten N_2 und $M_2 = \dfrac{\partial N_2}{\partial s_2}$ voneinander unabhängig, so kann man das fragliche System von Relationen in der Form:

$$N_1 = \text{const.}, \quad \frac{\partial M_2}{\partial s_2} = \Phi(N_2, M_2)$$

ansetzen.

Sind dagegen N_2 und M_2 voneinander abhängig, so kann als dieses System folgendes angenommen werden:

$$N_1 = \text{const.}, \quad M_2 = F(N_2).$$

V. Der Fall $N_1 = \text{const}$, $N_2 = \text{const}$ führt nur auf imaginäre Erzeugende der Kugel. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{4 i \varphi^{3/2}} \left[\varphi(\varphi_x + \varphi_y) + (x-y)(\varphi_{xx} + \varphi\varphi_{xy}) - \frac{x-y}{2\varphi}(3\varphi_x + \varphi\varphi_y)\cdot\varphi_x\right],$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{1}{4 i \varphi^{3/2}} \left[-(\varphi_x + \varphi_y) + (x-y)(\varphi_{xy} + \varphi\varphi_{yy}) - \frac{x-y}{2\varphi}(3\varphi_x + \varphi\varphi_y)\varphi_y\right],$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{4 \varphi^{2/3}} \left[\varphi(\varphi_x + \varphi_y) - (x-y)(\varphi_{xx} - \varphi\varphi_{xy}) + \frac{x-y}{2\varphi}(3\varphi_x - \varphi\varphi_y)\varphi_x\right],$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{1}{4 \varphi^{3/2}} \left[-(\varphi_x + \varphi_y) - (x-y)(\varphi_{xy} - \varphi\varphi_{yy}) + \frac{x-y}{2\varphi}(3\varphi_y - \varphi\varphi_y)\varphi_y\right].$$

Setzt man $N_1 = \text{const}$, also $\dfrac{\partial N_1}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial N_1}{\partial y} = 0$, so ergibt sich:

$$2\varphi(\varphi_{xx} + 2\varphi\varphi_{xy} + \varphi^2\varphi_{yy}) = (\varphi_x + \varphi\varphi_y)(3\varphi_x + \varphi\varphi_y),$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{y-x}{2\sqrt{\varphi}}\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{y-x}{2\sqrt{\varphi}}\left[\frac{\varphi_{xy}}{\varphi} - \frac{3}{2}\,\frac{\varphi_x\varphi_y}{\varphi^2}\right].$$

Soll nun $N_2 = \text{const.}$ sein, so folgt nach Ausschluss des Falles $y - x = 0$ durch Integration:

$$\varphi(x, y) = \frac{\Phi(y)}{(x-y)^2}.$$

Die Bedingungen $\dfrac{\partial N_1}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial N_1}{\partial y} = 0$ ergeben dann:

$$\Phi(y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0, \quad y = \text{const.}$$

Der Fall $\varphi = 0$ entspricht den geradlinigen Erzeugenden der Kugel. Jede der beiden Scharen dieser Erzeugenden $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ fällt mit der Schar ihrer orthogonalen Trajektorien zusammen.

§ **3.** Die im § 1 gefundenen Differentialinvarianten sollen nun auf diejenige Transformationsgruppe in der Ebene angewendet werden, welche mit der Gruppe der Bewegungen der Kugel in sich vermöge der stereographischen Projektion ähnlich ist.

Bezeichnet man mit x, y die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes der Ebene, mit ξ, η die Minimalkoordinaten desjenigen Punktes auf der Oberfläche der Kugel, welcher dem Punkte (x, y) vermöge der stereographischen Projektion mit dem Pol $(0, 0, 1)$ entspricht, so bestehen die Beziehungen:

$$x + iy = \xi, \qquad x - iy = -\frac{1}{\eta}. \tag{1}$$

Die Bewegungen der Kugel in sich sind in den Minimalkoordinaten ξ, η durch die Gleichungen:

$$\xi_1 = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \qquad \eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \tag{2}$$

in den rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ y_1 &= b_1 x + b_1 x + b_3 x, \\ z_1 &= c_2 x + c_2 y + c_3 z, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

in denen die Koeffizienten a_i, b_i, c_i die Richtungscosinus dreier aufeinander senkrechter Richtungen bezeichnen, bestimmt. Zwischen den Koeffizienten in den Gleichungen (2) und (3) bestehen die bekannten Relationen von Euler und Olinde Rodrigues:

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha^2+\delta^2-(\beta^2+\gamma^2)}{2\Delta}, & a_2 &= i\,\frac{\alpha^2+\beta^2-(\gamma^2+\delta^2)}{2\Delta}, & a_3 &= \frac{\gamma\delta-\alpha\beta}{\Delta}, \\ b_1 &= \frac{i}{2\Delta}\,[\beta^2+\delta^2-(\alpha^2+\gamma^2)], & b_2 &= \frac{1}{2\Delta}\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2), & b_3 &= \frac{i}{\Delta}\,(\alpha\beta+\gamma\delta), \\ c_1 &= \frac{\beta\delta-\alpha\gamma}{\Delta}, & c_2 &= -i\,\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\Delta}, & c_3 &= \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\Delta}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

wobei $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Der Transformationsgruppe (2) auf der Oberfläche der Kugel entspricht in der Ebene x, y vermöge der stereographischen Projektion die durch die Gleichungen:

$$x_1 + iy_1 = \xi_1 = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha(x+iy)+\beta}{\gamma(\alpha+iy)+\delta},$$

$$x_1 - iy_1 = -\frac{1}{\eta_1} = -\frac{\gamma\eta+\delta}{\alpha\eta+\beta} = \frac{-\gamma+\delta(x-iy)}{\alpha-\beta(x-iy)}$$

bestimmte Transformationsgruppe. Durch Auflösung dieser Gleichungen bekommt man mit Hilfe der Formeln (4):

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2(a_1 x + a_2 y) + a_3(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1) - [2(c_1 x + c_2 y) + c_3(x^2+y^2-1)]}, \\ y_1 &= \frac{2(b_1 x + b_2 y) + b_3(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2+1) - 2[(c_1 x + c_2 y) + c_3(x^2+y^2-1)]}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

wobei die Koeffizienten a_i, b_i, c_i dieselbe Bedeutung, wie in den Gleichungen (3) haben.

Die durch die Gleichungen (5) bestimmte Transformationsgruppe enthält drei folgende voneinander unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$\left\{\begin{aligned} U_1 f &= y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_2 f &= 2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (y^2 - x^2 + 1)\frac{\partial f}{\partial y}, \\ U_3 f &= (x^2 - y^2 + 1)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die infinitesimale Transformation $U_1 f$ entspricht den Drehungen der Kugel um die z-Achse; $U_2 f$ entspricht den Drehungen der Kugel um die x-Achse, ihre Bahnkurven bilden das Kreisbüschel

$$x^2 + y^2 + 1 - x\,.\,\mathrm{const} = 0.$$

Die infinitesimale Transformation $U_3 f$ entspricht den Drehungen der Kugel um die y-Achse; ihre Bahnkurven bilden das Kreisbüschel:

$$x^2 + y^2 + 1 - y\,.\,\mathrm{const} = 0.$$

Die Differentialinvariante zweiter Ordnung einer ebenen Kurve und der Differentialparameter für die Gruppe (5) lauten:

$$J_2 = \frac{x^2+y^2+1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\left[\frac{x'y''-x''y'}{x'^2+y'^2} - \frac{2}{x^2+y^2+1}(xy'-x'y)\right],$$

$$\Delta\varphi = \frac{x^3+y^2+1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,.\,\varphi'.$$

Bezeichnet man mit s die Bogenlänge der gegebenen Kurve, mit K ihre Krümmung, mit r den Leitstrahl eines Punktes dieser Kurve und mit φ den Winkel, den der Leitstrahl mit der x-Achse bildet, so kann man schreiben:

$$J_2 = (r^2+1)K - 2r^2\frac{d\varphi}{ds},$$

$$\Delta\varphi = (r^2+1)\frac{d\varphi}{ds}.$$

§ **4.** Als letzte Anwendung mögen die Differentialinvarianten einer Kurve inbezug auf die Gruppe der Bewegungen in der nicht-euklidischen Ebene untersucht werden.

Nimmt man die Poincaré'sche Abbildung der nicht-euklidischen (hyperbolischen) Ebene zu Grunde, so ist durch die Gleichung

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

wobei z die komplexe Veränderliche, α, β, γ, δ reelle Koeffizienten bedeuten, die Gruppe der „Bewegungen" in dieser Ebene bestimmt. Dabei muss $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ vorausgesetzt werden. Setzt man nun:

$$\left\{\begin{array}{ll} x + iy = \xi, & x - iy = \eta, \\ x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), & y = \frac{i}{2}(\eta - \xi) \end{array}\right. \tag{2}$$

und betrachtett ξ, η als Minimalkoordinaten eines Punktes der Einheitskugel, so ist die Gruppe (1) vermöge der Gleichungen (2) mit der Gruppe der Bewegungen der Kugel in sich ähnlich. Die Gruppe der nicht-euklidischen Bewegungen ist in den rechtwinkeligen Koordinaten x, y durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) + \alpha\gamma y^2}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2} \\[2ex] y_1 = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2} \end{array}\right. \tag{3}$$

bestimmt. Sie enthält drei infinitesimale Transformationen:

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x}, \\[2ex] U_2 f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\[2ex] U_3 f = (x^2 - y^2)\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial f}{\partial y}, \end{array}\right. \tag{4}$$

welche die x-Achse („unendlich ferne Gerade") und die Schar der „Geraden":

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = R^2 \qquad (y \geqq 0) \tag{5}$$

in sich überführen. Jede eingliedrige „Untergruppe der Gruppe (3), die eine gegebene „Gerade" (λ, R) unverändert lässt, kann man als „Gruppe von Translationen" längs dieser „Geraden" bezeichnen. Eine solche „Translationsgruppe" wird durch die infinitesimale Transformation:

$$Uf = e_1 U_1 f + e_1 U_2 f + e_3 U_3 f,$$

erzeugt, wobei:

$$e_1 : e_2 : e_3 = (R^2 - \lambda^2) : 2\lambda : (-1)$$

ist. Diese infinitesimale Transformation kann also durch die Formel:

$$Uf = [(x - \lambda)^2 - (y^2 + R^2)]\frac{\partial f}{\partial x} + 2y(x - \lambda)\frac{\partial f}{\partial y}$$

dargestellt werden.

Die Differentialinvariante J_2 nimmt die Form:

$$J_2 = \frac{16 y^2}{x'^2 + y'^2}\left(\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'}{y}\right)^2$$

an. Es möge gesetzt werden:

$$J = \tfrac{1}{4}\sqrt{J_2} = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\left(\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'}{y}\right). \tag{6}$$

Diese Differentialinvariante spielt die Rolle der Krümmung; für die „Geraden": $x = \lambda + R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ ist nämlich $J = 0$. Bezeichnet man mit s die „Bogenlänge" der Kurve in der x, y — Ebene, mit σ die Bogenlänge der entsprechenden Kurve auf der Einheitskugel, so besteht die Relation:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{-4\,d\xi^2\,d\eta^2}{(\eta - \xi)^2} = -\,d\sigma^2.$$

Bezeichnet man ferner mit τ den Winkel, den die Tangente an die Kurve in der x, y — Ebene mit der x-Achse bildet, so kann man schreiben:

$$J = \frac{d\tau}{ds} + \cos\tau = yK + \cos\tau. \tag{7}$$

Dabei bedeutet K die euklidische Krümmung der gegebenen Kurve im Punkte (x, y). Der Differentialparameter bedeutet die Differentiation nach der „Bogenlänge".

Für die „Geraden" (λ, R) ist:

$$y = -R\cos\tau, \quad yK + \cos\tau = 0, \quad J = 0.$$

Die „Krümmung" eines euklidischen Kreises mit dem Radius R und der Ordinate y_0 des Mittelpunktes ist:

$$J = \frac{y_0}{R}.$$

Endlich ist die „Krümmung“ einer euklidischen Geraden, welche den Winkel τ mit der Abszissenachse bildet:

$$J = \cos \tau.$$

Die zur x-Achse senkrechten Geraden haben die „Krümmung“ $J = \cos \frac{\pi}{2} = 0$; sie gehören auch zu den nicht-euklidischen „Geraden“.

Durch Integration der Differentialgleichungen $J = 0$, $J = \text{const}$ komm man auf hyperbolische „Geraden“ und „Zyklen“. Man kann also mit Recht die Differentialinvariante J als „Krümmung“ der Kurven in der hyperbolischen Ebene einführen, — und auf dieser Definiton die hyperbolische Differentialgeometrie aufbauen.

ROMUALD WITWIŃSKI.

O powierzchniach algebraicznych, zawierających dwa pęki krzywych wymiernych.

Sur les surfaces algébriques contenant deux faisceaux de courbes rationnelles.

W rozprawie [1] p. t. „Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques“ matematyk francuski G. Koenigs po raz pierwszy postawił i rozwiązał zagadnienie o wyznaczeniu takich powierzchni przestrzeni trójwymiarowej, któreby zawierały dwa pęki stożkowych. Kilka lat temu L. Godeaux ogłosił rozprawę [2], w której znajduje powierzchnie przestrzeni r-wymiarowej, zawierające dwa pęki stożkowych.

Stawiam sobie za cel pracy niniejszej wyznaczyć takie powierzchnie algebraiczne przestrzeni r-wymiarowej S_r, które zawierają dwa pęki krzywych wymiernych.

Dowodzę mianowicie twierdzenia następującego:

I. Jeżeli powierzchnia algebraiczna przestrzeni S_r posiada dwa pęki krzywych wymiernych, wówczas ta powierzchnia jest wymierna i może być odwzorowana na płaszczyźnie w ten sposób, że krzywym pęku odpowiadają proste pęku, i że krzywym drugiego pęku odpowiadają krzywe wymierne pewnego rzędu μ, możliwie najmniejszego, przechodzące $\mu - \nu$ razy przez wierzchołek pęku prostych (ν jest to liczba punktów wspólnych krzywym pęków), przytem takie, że ich wielokrotności w dwóch punktach-podstawach, różnych od

[1]) Annales de l'École Normale Supérieure, 1888, 3-e s., t. V, p. 177.

[2]) Démonstration nouvelle et extension d'un théorème de M. G. Koenigs (l'Enseignement mathématique, 1912, nº 4, p. 319).