ALFRED ROSENBLATT.

O pewnych całkach układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego w otoczeniu istotnie osobliwego miejsca układu.

Über gewisse Integrale eines Systems zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle des Systems.

Znane prace Briota i Bouqueta,[1] Poincarégo, Picarda, Bendixsona, Horna, Dulaca i wielu innych matematyków o naturze tych całek równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego i stopnia pierwszego. które czynią zadość warunkom początkowym $x=0$, $y=0$ i dla których pochodna $\frac{dy}{dx}$ staje się nieoznaczoną, wykazały, jak różną jest natura możliwych całek i jak różne nieoczekiwane zachodzić tu mogą okoliczności. Briot i Bouquet zupełnie naturalnie zapytywali przedewszystkiem o te całki równania różniczkowego

$$\left(\sum A' y^{\alpha'} x^{\beta'}\right)\frac{dy}{dx}=\sum A y^{\alpha} x^{\beta}, \tag{1}$$

— gdzie obie sumy są wielomianami, albo ogólniej szeregami potęgowemi zbieżnemi, znikającemi dla $x=0$, $y=0$ — które są oznaczonego rzędu wielkości względem zmiennej x. To znaczy: rozważali pytanie, dotyczące istnienia całek postaci

$$y=vx^{\mu}, \tag{2}$$

gdzie μ jest liczbą dodatnią, v funkcyą zmiennej x, zmierzającą wraz z x

---

[1]) Co do literatury, to odsyłamy do trzech znanych dzieł: Königsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Lipsk 1889, Picard, Cours d'Analyse, t. III. Forsyth, Theory of differential equations, t. II i III, oraz do artykułu Painlevégo w wydaniu francuskiem „Encyklopedyi matematycznej". T. II. Vol 3: „Existence de l'intégrale générale" etc.

do zera. Tęż samę metodę dowodzenia istnienia pewnych z góry przyjmowanych całek równania różniczkowego stosowali Königsberger[1]), Goursat[2]) i Forsyth[3]), aby pozyskać podstawy do badania analogicznej osobliwości układu pewnej liczby równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego i stopnia pierwszego, gdzie więc znowu funkcye niewiadome $y_1, y_2, \ldots, y_n$ przyjmować mają dla $x=0$ wartości $y_1=0$, $y_2=0, \ldots, y_n=0$ i dla tych to warunków początkowych pochodne $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ występują w postaci nieoznaczonej $\frac{0}{0}$.

W nocie, ogłoszonej przed kilkoma laty[4]), zastosowałem metodę Briota i Bouqueta do badania tych całek równania różniczkowego (1), które dają się przedstawić w postaci

$$y = v x^{\mu} (\log x)^{k}, \tag{3}$$

gdzie μ jest liczbą dodatnią, k liczbą stałą dowolną i gdzie funkcya v zmiennej x zdąża do wartości v_0 różnej od zera, gdy x zmierza do zera. Dowiodłem istnienia tych całek przy pewnych założeniach o spółczynnikach równania (1).

W pracy niniejszej zajmuję się analogicznem badaniem układu dwóch równań różniczkowych postaci

$$\begin{aligned} \left(\sum A y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} x^{\beta}\right) \frac{dy_1}{dx} &= \sum A^{(1)} y_1^{\alpha_1^{(1)}} y_2^{\alpha_2^{(1)}} x^{\beta^{(1)}}, \\ \left(\sum A y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} x^{\beta}\right) \frac{dy_2}{dx} &= \sum A^{(2)} y_1^{\alpha_1^{(2)}} y_2^{\alpha_2^{(2)}} x^{\beta^{(2)}} \end{aligned} \tag{4}$$

i, przy pewnych założeniach o spółczynnikach wyrazów sum tego układu, dowodzę istnienia następujących układów całek:

$$y_1 = v_1 x^{\mu_1} (\log x)^{k_1}, \qquad y_2 = v_2 x^{\mu_2} (\log x)^{k_2}, \tag{5}$$

gdzie μ_1, μ_2 oznaczają dwie liczby dodatnie, k_1, k_2 są dwie liczby dowolne, funkcye zaś v_1 i v_2 zmiennej x zmierzają do wartości różnych od zera, gdy x dąży do zera. Podaję przedstawienie analityczne tych całek przy pomocy

---

[1]) W książce wymienionej pod 1) na stronicy poprzedzającej

[2]) „Sur la théorie des solutions singulières des équations différentielles simultanées". American Journal of Math. t. XI, 1889.

[3]) W tomie III dzieła wymienionego pod 1) na stronicy poprzedzającej.

[4]) Über singuläre Punkte der Differentialgleichungen erster Ordnung, Getynga 1908.

klasycznej metody kolejnych przybliżeń. Liczby μ i k są wszystkie liczbami wymiernemi, mianowicie μ_1 i μ_2 odpowiadają ścianie bocznej wielościanu Puiseux'go w przestrzeni, należącego do układu (4), nierównoległej do żadnej z osi spółrzędnych, k_1, k_2 zaś odpowiadają krawędzi tej ściany bocznej.

Badam następnie istnienie i przedstawialność za pomocą szeregów kolejnych przybliżeń pewnych całek, które można nazwać całkami podwójnie logarytmowemi, a które są postaci

$$y_1 = v_1 x^{\mu_1} (\log x)^{k_{11}} (\log_2 x)^{k_{12}}, \qquad y_2 = v_2 x^{\mu_2} (\log x)^{k_{21}} (\log_2 x)^{k_{22}}, \tag{6}$$

gdzie $\log_2 x$ oznacza logarytm logarytmu liczby x; μ_1, μ_2 są dwie liczby, odpowiadające ścianie bocznej, k_{11}, k_{21} są proporcyonalne do liczb k_1, k_2, odpowiadających jednej krawędzi, zaś k_{12}, k_{21} są liczby a priori dowolne i okazują się następnie liczbami wymiernemi.

Możnaby, podobnie jak to uczynił Dulac dla jednego równania (1), szukać tych całek układu dwóch równań (4), przy których μ_1, μ_2 odpowiadają krawędziom wielościanu Puiseux'go, albo nawet pojedyńczemu wierzchołkowi tego wielościanu. W pierwszym przypadku obie wielkości μ_1, μ_2 mogą być niewymierne, tak mianowicie, że pomiędzy niemi zachodzi związek liniowy ze spółczynnikami wymiernemi. W drugim przypadku mogą obie liczby być niewymierne i liniowo niezależne. Możnaby w dalszym ciągu badać całki, dla których liczby μ_1, μ_2 odpowiadają wprawdzie ścianie bocznej, lecz k_{12}, k_{21} odpowiadają wierzchołkowi wielościanu, lub też μ_1, μ_2 odpowiadają krawędzi, liczby zaś k_{11}, k_{21} wierzchołkowi i t. d. Przyszlibyśmy wtedy do całek z liczbami niewymiernemi k_{11}, k_{21}. Ale nie wchodzimy tu w rozbiór tych wszystkich pytań.

Poprzedzimy właściwy wykład naszych poszukiwań[1]) podaniem wyników noty poprzednio cytowanej.

I. Całki logarytmowe pojedyńczego równania różniczkowego zwyczajnego.

§ **1.** Rozpatrujemy równanie różniczkowe (1) i budujemy należący do niego diagram Puiseux'go, znacząc w układzie spółrzędnych punkty ze spółrzędnemi $\alpha'+1$, β', odpowiadające wyrazom sumy lewostronnej w (1) i wno-

---

[1]) Wyniki tej pracy były w części ogłoszone w nocie p. t. „Sur certaines intégrales d'un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre satisfaisant à des conditions initiales singulières" w „Comptes Rendus" Akademii Paryskiej z d. 23. II. 1914.

sząc odpowiednio do wyrazów sumy prawostronnej tego równania punkty ze spółrzędnemi α, $\beta+1$.

Weźmy pod uwagę dowolny bok tego wielokąta i odpowiadającą mu liczbę μ. Niechaj odcięte punktów diagramu, leżące na tym boku będą:

$$\alpha_h'+1,\quad h=1,\, 2 \ldots i; \qquad \alpha_h,\quad h=1,\, 2, \ldots j$$

i niechaj one będą uporządkowane według wartości rosnących.

Wstawmy do równania (1) funkcyę (3) i przekształćmy zmienną niezależną, kładąc $\log x = \frac{1}{u}$. Otrzymujemy wtedy równanie następujące:

$$u^2 \frac{dv}{du}\left[\sum A_h' v^{\alpha'_h} u^{k(\alpha'_i-\alpha'_h)} + e^{\frac{s'}{u'}} F'(e^{\frac{1}{u'}}, u, v)\right.$$

$$=(\mu+ku)\left[\sum_1^h A_h' v^{\alpha'_h+1} u^{k(\alpha'_i-\alpha'_h)} + e^{\frac{s'}{u'}} F'(e^{\frac{1}{u}}, u, v)\right. \tag{7}$$

$$-\left[\sum_1^j A_h v^{\alpha_h} u^{k(\alpha'_i+1-\alpha_h)} + e^{\frac{s}{u}} F(e^{\frac{1}{u}}, u, v)\right].$$

Tu $F(e^{\frac{1}{u}}, u, v)$, $F'(e^{\frac{1}{u}}, u, v)$ oznaczają szeregi potęgowe, postępujące według potęg całkowitych dodatnich wielkości v i według potęg ułamkowych dodatnich wielkości $e^{\frac{1}{u}}$, $e^{\frac{\mu}{u}}$, u^{-k}, pomnożone przez czynnik $u^{k\alpha'_i}$. Zakładamy, że k jest dodatnie; dla k ujemnego dość równanie (7) pomnożyć przez $u^{k(\alpha_1')-\alpha'_i)}$.

Jeżeli x zmierza w jakimkolwiek kierunku do zera, wtedy i u zdąża do tego punktu w ten sposób, że część rzeczywista pozostaje ujemną, iloraz zaś części rzeczywistej i urojonej zmierza do ∞. Jeżeli równanie (7) napiszemy w postaci

$$u^2 \frac{dv}{du}\left[A_i' v^{\alpha'_i} + A'_{i-1} v^{\alpha'_i-1} u^{k(\alpha'_i-\alpha'_{i-1})} + \ldots\right]$$

$$=(\mu+ku)\left[A_i' v^{\alpha'_i+1} + A'_{i-1} v^{\alpha'_{i-1}+1} u^{k(\alpha'_i-\alpha'_{i-1})} + \ldots\right] \tag{8}$$

$$-\left[A_j v^{\alpha_j} u^{k(\alpha'_i+1-\alpha_j)} + A_{j-1} v^{\alpha_{j-1}} u^{k(\alpha'+1-\alpha_j-1)} + \ldots\right],$$

wtedy widać, że v dąży do $v_0 \neq 0$ tylko wtedy, gdy punkt końcowy boku

wielokąta, odpowiadający większej odciętej, jest punktem podwójnym i mamy wtedy

$$\mu A_i - A_j = 0.$$

Należy atoli rozróżnić trzy przypadki stosownie do tego, czy punktem najbliższym punktu końcowego naszego boku jest punkt $\alpha'_{i-1}+1$, czy punkt α_{j-1}, czy wreszcie punkt podwójny.

Zbadamy szczegółowo przypadek pierwszy, ponieważ w pozostałych dwu przypadkach rzeczy mutatis mutandis mają się podobnież. Jeżeli całki nasze mają istnieć, to jak łatwo widzieć, muszą dwie liczby k_1, v_0 czynić zadość warunkom

$$k(\alpha'_i - \alpha'_{i-1}) = 1, \qquad k A'_i v_0^{\frac{1}{k}} + \mu A'_{i-1} = 0. \tag{9}$$

Widać to odrazu, jeżeli podzielimy nasze równanie przez wyrażenie w nawiasie stojące po stronie lewej, a następnie zcałkujemy. Jeżeli mają istnieć całki żądanej natury, to pewne wyrazy po stronie prawej równania (8) muszą znieść się wzajemnie, to zaś jest możliwe wtedy, kiedy spełnione są warunki (9).

Połóżmy teraz $v - v_0 = \zeta$, podzielmy obie strony równania przez wyrażenie w nawiasie po stronie lewej, wtedy funkcya ζ, zmierzająca do zera, musi czynić zadość następującemu równaniu:

$$u\frac{d\zeta}{du}\left[1+\varphi'(e^{\frac{1}{u}}, u, \zeta)\right] = \zeta + \varphi(e^{\frac{1}{u}} u, \zeta). \tag{10}$$

W tem równaniu funkcye φ, φ' oznaczają szeregi potęgowe, postępujące według potęg całkowitych dodatnich wielkości ζ, według potęg dodatnich ułamkowych wielkości $e^{\frac{1}{u}}$, u oraz potęg całkowitych dodatnich wielkości $e^{\frac{\mu}{u}} u^{-k}$. Dla wartości zerowych tych argumentów znikają te szeregi potęgowe i prócz tego znika w funkcyi φ wyraz, zawierający samo ζ. Równanie (10) posiada nieskończenie wiele całek, zdążających wraz z x do zera. W samej rzeczy, rozpatrzmy równanie ogólniejsze

$$u\frac{d\zeta}{du} = A\zeta + \varphi(u) + \zeta\psi(\zeta, u), \tag{11}$$

gdzie spółczynnik A przy ζ jest liczbą dodatnią, przyczem funkcya φ jest regularna w pewnym obszarze B, na którego obwodzie leży punkt zerowy i czyni zadość nierówności

$$|\varphi(u)| < |u|^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Funkcya $\psi(\zeta, u)$ jest szeregiem potęgowym wielkości ζ, której wszystkie spółczynniki φ_i są funkcyami wielkości u, holomorficznemi wewnątrz rozważanego obszaru B i czyniącemi zadość nierównościom postaci:

$$|\varphi_i(u)| < (u)^\alpha,$$

gdzie α jest liczbą dodatnią, jednakową dla wszystkich spółczynników. Jeżeli obszar jest dostatecznie mały, u_0 zaś jest jakimkolwiek punktem wewnątrz niego, wtedy całka ζ równania różniczkowego (11), która dla $u = u_0$ przyjmuje wartość ζ_0, dąży do zera wraz z u w ten sposób, że obraz jej pozostaje zawsze wewnątrz obszaru.

Dowód tego twierdzenia przeprowadzamy za pomocą metody kolejnych przybliżeń. Całkujemy równanie

$$u\frac{d\zeta_1}{du} = A\zeta_1 + \varphi(u),$$

którego całka

$$\zeta_1 = u^A\left[\int_{u_0}^{u}\frac{\varphi(u)}{u^{1+A}}\,du + \frac{\zeta_0}{{u_0}^A}\right]$$

dia $u = u_0$ przyjmuje wartość ζ_0 i dąży do zera wraz z u. Tworzymy następnie układ równań następujących:

$$u\frac{d\zeta_i}{du} = A\zeta_i + \varphi(u) + \zeta_{i-1}\psi(\zeta_{i-1}, u) \qquad (i = 2, 3\ldots)$$

i wyznaczamy te ich całki, które dla $u = u_0$ przyjmują wartość ζ_0. Wszystkie te funkcye aproksymacyjne pozostają, jak to łatwo widzieć, w całym naszym obszarze poniżej pewnej wielkości dodatniej, czyniąc wszystkie zadość nierówności

$$|\zeta_i| < K\,|u|^\alpha.$$

Dalej szereg

$$\zeta = \zeta_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(\zeta_i - \zeta_{i-1})$$

jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w tymże obszarze B dla $|u| < |u_0|$ i suma jego dąży wraz z u do zera. Po trzecie, i suma pochodnych wyrazów naszego szeregu jest zbieżna bezwzględnie i jednostajnie w każdym obszarze $\varepsilon < |u| < |u_0|$, gdzie ε jest liczbą dodatnią dowolnie małą. Po czwarte, funkcya ζ czyni zadość naszemu równaniu różniczkowemu (11) i wreszcie znanym sposobem można wykazać, że jest ona jedyną funkcyą, zmierzającą do zera i przyjmującą wartość ζ_0 dla $u = u_0$.

Wyniki powyższe podaliśmy zbyt może treściwie; uczyniliśmy to dlatego, że przy rozpatrywaniu analogicznego pytania dla układu dwu równań różniczkowych, do którego się obecnie zwracamy, przedstawimy szczegółowiej ten dowód, przez co dowód dla pojedyńczego równania stanie się odrazu zrozumiałym

II. Całki pojedyńczo-logarytmowe układu dwóch równań różniczkowych.

§ **2.** Aby układ dwóch równań (4) sprowadzić do form kanonicznych, stosujemy t. zw. wielościan Puiseux'go w przestrzeni. Zamiast y_1, y_2 kładziemy funkcye

$$y_1 = v_1 x^{\mu_1}, \qquad y_2 = v_2 x^{\mu_2}$$

i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(\Sigma A {v_1}^{\alpha_1} {v_2}^{\alpha_2} x^{\mu_1(\alpha_1+1)+\mu_2\alpha_2+\beta})\frac{dv_1}{dx} &= -\mu_1 v_1(\Sigma A {v_1}^{\alpha_1}{v_2}^{\alpha_2}x^{\mu_1(\alpha_1+1)+\mu_2\alpha_2+\beta-1}) \\ &\quad + \Sigma A^{(1)} {v_1}^{{\alpha_1}^{(1)}} {v_2}^{{\alpha_2}^{(1)}} x^{\mu_1{\alpha_1}^{(1)}+\mu_2{\alpha_2}^{(1)}+\beta^{(1)}}, \\ (\Sigma A {v_1}^{\alpha_1}{v_2}^{\alpha_2}x^{\mu_1\alpha_1+\mu_2(\alpha_2+1)+\beta})\frac{dv_2}{dx} &= -\mu_2 v_2(\Sigma A {v_1}^{\alpha_1}{v_2}^{\alpha_2}x^{\mu_1\alpha_1+\mu_2(\alpha_2+1)+\beta-1}) \\ &\quad + \Sigma A^{(2)} {v_1}^{{\alpha_1}^{(2)}} {v_2}^{{\alpha_2}^{(2)}} x^{\mu_1{\alpha_1}^{(2)}+\mu_2{\alpha_2}^{(2)}+\beta^{(2)}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Zbudujmy układ osi prostokątnych, które oznaczmy przez $\overline{\alpha}^{(1)}$, $\overline{\alpha}^{(2)}$, $\overline{\beta}$, i umieśćmy w nich odpowiednio do trzech sum występujących w (12) trzy gatunki punktów, a mianowicie:

a) każdemu wyrazowi sum po stronie lewej przyporządkujmy punkt o spółrzędnych α_1+1, α_2+1, β i oznaczmy te punkty jako punkty lewe.

b) każdemu wyrazowi sumy po stronie prawej równania pierwszego przyporządkujmy punkt o spółrzędnych ${\alpha_1}^{(1)}$, ${\alpha_2}^{(1)}+1$, $\beta^{(1)}+1$ i oznaczmy te punkty jako punkty prawe pierwsze.

c) wreszcie każdemu wyrazowi sumy po prawej stronie drugiego z równań (12) przyporządkujmy punkt o spółrzędnych ${\alpha_1}^{(2)}+1$, ${\alpha_2}^{(2)}$, $\beta^{(2)}+1$ i nazwijmy te punkty punktami prawemi drugiemi.

Jeżeli teraz w ósemce przestrzeni, odpowiadającej półosiom dodatnim, weźmiemy punkt M tak utworzonego agregatu punktów o spółrzędnych $\overline{\alpha}_0{}^{(1)}$, $\overline{\alpha}_0{}^{(2)}$, $\overline{\beta}_0$; jeżeli przez θ, φ oznaczymy kąty, jakie kierunek OM tworzy z osią $\overline{\alpha}^{(1)}$, i rzut tego kierunku na płaszczyznę $\overline{\alpha}^{(1)}\overline{\alpha}^{(2)}$ z osią $\overline{\alpha}^{(1)}$; jeżeli dalej oznaczymy przez μ_1, μ_2 stosunki

$$\mu_1 = \frac{\overline{\alpha}_0{}^{(1)}}{\overline{\beta}_0}, \qquad \mu_2 = \frac{\overline{\alpha}_0{}^{(2)}}{\overline{\beta}_0},$$

wtedy

$$\mu_1 = \operatorname{tg}\theta \cos\varphi, \quad \mu_2 = \operatorname{tg}\theta \sin\varphi.$$

Wynika stąd, że odległość p początku spółrzędnych od płaszczyzny E przechodzącej przez M i prostopadłej do OM,

$$(x - \overline{\alpha}^{(1)}) \cos(px) + (y - \overline{\alpha}^2) \cos(py) + (z - \overline{\beta}) \cos(pz) = 0,$$

$$\cos(px) = \cos\varphi \sin\theta, \quad \cos(py) = \sin\varphi \sin\theta, \quad \cos(pz) = \cos\theta,$$

posiada wartość

$$p = \overline{\alpha}^{(1)} \cos(px) + \overline{\alpha}^{(2)} \cos(py) + \overline{\beta} \cos(pz)$$

$$= \cos\theta\, (\mu_1 \overline{\alpha}_0{}^1 + \mu_2 \overline{\alpha}^{(2)} + \overline{\beta}_0).$$

Lecz, ponieważ

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1{}^2 + \mu_2{}^2}},$$

przeto

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1{}^2 + \mu_2{}^2}} \quad (\mu_1 \overline{\alpha}_0{}^{(1)} + \mu_2 \overline{\alpha}_0{}^{(2)} + \overline{\beta}_0).$$

Dla wszystkich punktów trzech gatunków, leżących w płaszczyźnie E, t. j. dla punktów lewych, prawych pierwszych i prawych drugich mamy wtedy:

$$\mu_1 (\alpha_1 + 1) + \mu_2 (\alpha_2 + 1) + \beta = \mu_1 \alpha_1{}^{(1)} + \mu_2 (\alpha_2{}^{(1)} + 1) + \beta^{(1)} + 1$$

$$= \mu_1 (\alpha_1{}^{(2)} + 1) + \mu_2 \alpha_2{}^{(2)} + \beta^{(2)} + 1,$$

a odpowiadające tym punktom wykładniki w obu równaniach (12) są na lewo

$$e_l^{(1)} = p\sqrt{1 + \mu_1{}^2 + \mu_2{}^2} - \mu_2,$$

$$e_l^{(2)} = p\sqrt{1 + \mu_1{}^2 + \mu_2{}^2} - \mu_1;$$

na prawo zaś

$$e_r^{(1)} = p\sqrt{1 + \mu_1{}^2 + \mu_2{}^2} - (\mu_2 + 1),$$

$$e_r^{(2)} = p\sqrt{1 + \mu_1{}^2 + \mu_7{}^2} - (\mu_1 + 1).$$

Tym sposobem odpowiadają równym wykładnikom w pierwszem równaniu (12) po prawej punkty lewe i prawe pierwsze w tej samej płaszczyźnie E, i podobnież równym wykładnikom w drugiem równaniu (12) odpowiadają po prawej punkty lewe i prawe drugie w tej samej płaszczyźnie. Istnieją cztery gatunki punktów w układzie spółrzędnych, mianowicie punkty, położone zewnątrz płaszczyzn spółrzędnych i na samych płaszczyznach spółrzędnych.

§ **3.** Tworzymy teraz sposobem znanym wielościan P u i s e u x'go, kreśląc najprzód w płaszczyźnie $\overline{\alpha}^1\overline{\alpha}^2$ odpowiadający jej wielokąt P u i s e u x'-go, następnie poruszamy płaszczyznę równolegle z płaszczyzną $\overline{\alpha}^{(1)}\,\overline{\alpha}^{(2)}$ w kierunku dodatniej osi $\overline{\beta}$, póki nie napotkamy nowego punktu. Potem ponawiamy w nowej płaszczyźnie konstrukcyę wielokąta P u i s e u x'go. Gdy już otrzymano we wszystkich płaszczyznach te wielokąty, wtedy przy ich pomocy, przez obrót płaszczyzny ruchomej około krawędzi tych wielokątów—przez co nowe punkty zostają wyeliminowane tworzymy wielościan otwarty wypukły względem początku spółrzędnych i rozciągający się do nieskończoności.

Wielościan ten posiada trzy gatunki ścian bocznych, mianowicie: ściany S, nierównoległe do żadnej osi, ściany S_1, równoległe do jednej osi, ściany S_2, równoległe do dwóch osi. Krawędzie są albo nierównoległe do żadnej osi—nazwijmy je krawędziami K—albo są krawędziami K_1, równoległemi do jednej osi. Wierzchołki wielościanu są albo punktami pojedyńczemi E, albo punktami podwójnemi E_1, albo wreszcie punktami potrójnemi E_2. Cała krawędź może być zajęta punktami podwójnemi albo potrójnemi. Wszystkim tym przypadkom odpowiadają pewne całki układu, które dotąd jeszcze nie były badane, prócz najogólniejszych całek, odpowiadających ogólnym ścianom bocznym.

Wartości liczb μ_1, μ_2 dla płaszczyzn S_1 są

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 \neq 0 \neq \infty; \quad \mu_1 \neq 0 \neq \infty, \quad \mu_2 = 0; \quad \mu_1 = \infty, \quad \mu_2 = \infty,$$

a dla płaszczyzn S_2 są:

$$\mu_1 = 0. \quad \mu_2 = 0; \quad \mu_1 = \tfrac{0}{0}, \quad \mu_2 = \infty; \quad \mu_1 = \infty, \quad \mu_2 = \tfrac{0}{0},$$

§ **4.** Rozpatrzmy ogólną płaszczyznę S z liczbami μ_1, μ_2. Punktom, znajdującym się na płaszczyźnie S, odpowiadają te wyrazy w równaniu (12), które mają najmniejsze wykładniki przy x. Jeżeli podzielimy równanie (12) przez $x^{e_r^{(1)}}$ lub odpowiednio przez $x^{e_r^{(2)}}$ i wprowadzimy oznaczenia:

$$\Sigma A\, v_1{}^{\alpha_1} v_2{}^{\alpha_2} = F(v_1, v_2). \quad \Sigma A^{(1)}\, v_1{}^{\alpha_1^{(1)}} v_2{}^{\alpha_2^{(1)}} = F^{(1)}(v_1, v_2),$$

$$\Sigma A^{(2)}\, v_1{}^{\alpha_1^{(2)}} v_2{}^{\alpha_2^{(2)}} = F^{(2)}(v_1, v_2),$$

gdzie sumy rozciągnięte być mają na wszystkie punkty płaszczyzny S, wtedy równania (12) otrzymują postać:

$$\left.\begin{aligned} [F(v_1, v_2) + x^\sigma F(v_1, v_2, x)]\, x \frac{dv_1}{dx} &= -\mu_1 v_1 F(v_1, v_2) + F^{(1)}(v_1, v_2) \\ &\quad + x^{\sigma^{(1)}} F^{(1)}(v_1, v_2, x), \\ [F(v_1, v_2) + x^\sigma F(v_1, v_2, x)]\, x \frac{dv_2}{dx} &= -\mu_2 v_2 F(v_1, v_2) + F^{(2)}(v_1, v_2) \\ &\quad + x^{\sigma^{(2)}} F^{(2)}(v_1, v_2, x). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Tu σ, $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ są liczbami dodatniemi wymiernemi, których wspólny mianownik jest dzielnikiem liczby β_0, funkcye zaś $F(v_1, v_2, x)$, $F^{(1)}(v_1, v_2, x)$, $F^{(2)}(v_1, v_2, x)$ są szeregami potęgowemi, postępującemi według potęg wielkości v_1, v_2, $x^{\frac{1}{\beta_0}}$. Jeżeli tedy istnieją całki tych równań, zmierzające do oznaczonych wartości $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$, gdy x dąży do zera, to wartości te czynią zadość równaniom

$$\begin{aligned} \mu_1 v_1 F(v_1, v_2) - F^{(1)}(v_1, v_2) &= 0, \\ \mu_2 v_2 F(v_1, v_2) - F^{(2)}(v_1, v_2) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Jeżeli lewe strony równań (14) ze zmiennemi v_1, v_2, oznaczymy przez

$$G^{(1)}(v_1, v_2), \quad G^{(2)}(v_1, v_2),$$

wtedy odróżnić trzeba będzie dwa przypadki:

I. Punkt $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ jest punktem zwyczajnym obu krzywych (15) i nie jest punktem styczności tych krzywych, wielkości zaś $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ nie są pierwiastkami równania $F(v_1, v_2) = 0$.

II. Przynajmniej jedno z tych założeń nie zachodzi.

Przypadek pierwszy był badany przez Goursata i Forsytha, którzy dla wszystkich możliwych podprzypadków podali rozwinięcia szeregowe całek; w dziedzinie rzeczywistej przypadek ten badany już był przez Poincare'go. Przypadek II nie był dotąd badany. W dziedzinie rzeczywistej dla przypadku szczególnego podał Bendixson[1] rozwinięcia szeregowe całek przy pomocy metody kolejnych przybliżeń. Przy pomocy tej samej metody można też badać przypadki zawilsze, jak to okazaliśmy dawniej[2] dla pojedyńczego równania i jak to uczynimy w pracy niniejszej dla udowodnienia istnienia naszych całek.

§ **5.** Aby teraz otrzymać całki pojedyńczo-logarytmowe, połóżmy w równaniu (13) zamiast v_1, v_2 wyrażenia $v_1(\log x)^{k_1}$, $v_2(\log x)^{k_2}$ i zastąpmy jeszcze $\log x$ przez $\frac{1}{u}$; będzie wtedy:

$$x\frac{d(v_1 u^{-k_1})}{dx} = k_1 v_1 u^{-k_1+1} - \frac{dv_1}{du} u^{-k_1+2},$$

$$x\frac{d(v_2 u^{-k_2})}{dx} = k_2 v_2 u^{-k_2+1} - \frac{dv_2}{du} u^{-k_2+2}.$$

[1]) Sur les points singuliers des systèmes d'équations différentielles. Arkiv für Matematik, Astronomi och Fysik **5**, 1909, Dwie noty.

[2]) Über Reihenentwicklungen der Integrale der Differentialgleichungnn erster Ordnung in der Umgebuug einer wesentlich singulären Stelle „Prace matematyczno-fizyczne" **20**, 1909.

Otrzymujemy tedy równania:

$$[\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k_1(\alpha_1+1)-h_2\alpha_2} + e^{\frac{\sigma}{u}} F(v_1, v_2, u)]\, u^2 \frac{dv_1}{du}$$

$$= k_1 v_1 u [\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k(\alpha_1+1)-k_2\alpha_2} + e^{\frac{\sigma}{u}} F(v_1, v_2, u)]$$

$$+ \mu_1 v_1 \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k_1(\alpha+1)-k_2\alpha_2}$$

$$- \Sigma A^{(1)} v_1^{\alpha_1^{(1)}} v_2^{\alpha_2^{(1)}} u^{-k_1\alpha_1^{(1)}-k_2\alpha_2^{(1)}} - e^{\frac{\sigma^{(1)}}{u}} F^{(1)}(v_1 v_2, u), \tag{15}$$

$$[\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k_1\alpha_1-k_2(\alpha_2+1)} + e^{\frac{\sigma}{u}} F(v_1, v_2, u)]\, u^2 \frac{dv_2}{du}$$

$$= k_2 v_2 u [\Sigma A v_1^{\alpha_2} v_2^{\alpha_2} u^{-k_1\alpha_1-k_2(\alpha_2+1)} + e^{\frac{\sigma}{u}} F(v_1, v_2, u)]$$

$$+ \mu_2 v_2 \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k_1\alpha_2-k_2(\alpha_1+1)}$$

$$- \Sigma A^{(2)} v_1^{\alpha_1^{(2)}} v_2^{\alpha_2^{(2)}} u^{-k_1\alpha_1^{(2)}-k_2\alpha_2^{(2)}} - e^{\frac{\sigma^{(2)}}{u}} F^{(2)}(v_1, v_2, u).$$

Tu σ, $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ są liczby wymierne dodatnie, funkcye F, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ są to szeregi, postępujące według potęg całkowitych dodatnich wielkości v_1, v_2, $e^{\frac{1}{\beta_0 u}}$, u^{-k_1}, u^{-k_2} i pozostające skończonemi, gdy u zdąża do zera.

Jeżeli założymy, że zmienna x zmierza do zera po oznaczonej stycznej, wtedy

$$\log x = \log r + i\varphi = \frac{u' - iu''}{u'^2 + u''^2}, \qquad \lim_{u=0} \frac{u'}{u''} = \infty, \qquad \lim_{u=0} u' = 0,$$

a zatem i zmienna u zmierza do punktu zerowego po oznaczonej stycznej, przyczem jest także

$$\lim_{u=0} \frac{du'}{du''} = \infty.$$

Rozpatrzmy teraz rzut wielokąta, leżącego na ścianie bocznej S i utworzonego z krawędzi wielościanu, na płaszczyznę $\overline{\alpha^{(1)}}\,\overline{\alpha^{(2)}}$. Odległość $d = OM$ krawędzi PQ wielościanu od początku O jest

$$d = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi,$$

jeżeli $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ są funkcyami kierunku prostej OM, gdyż

$$(x-\alpha_0)\cos\varphi+(y-y_0)\sin\varphi=0$$

jest równaniem prostej PQ. Dla ustalenia myśli, przyjmijmy, że tak $\cos\varphi$, jak i $\sin\varphi$, jest dodatnie oraz że wierzchołkowi P odpowiada większa odcięta. Dla punktów lewych, prawych pierwszych i prawych drugich, leżących na PQ mamy przeto:

$$(\alpha_1+1)\cos\varphi+(\alpha_2+1)\sin\varphi=\alpha_1^{(1)}\cos\varphi+(\alpha_2^{(1)}+1)\sin\varphi$$
$$=(\alpha_1^{(2)}+1)\cos\varphi+\alpha_2^{(2)}\sin\varphi.$$

Obierzmy liczby k_1, k_2, proporcyonalnie odpowiednio do $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, mianowicie

$$\rho\cos\varphi=-k_1,\qquad \rho\sin\varphi=-k_2.$$

Niechaj te wyrazy w równaniach (15), które odpowiadają punktom leżącym na boku PQ, najwolniej wraz z u zmierzają do zera. Wynika stąd, że

$$-k_1(\alpha_1+1)-k_2(\alpha_2+1),\quad -k_1\alpha_1^{(1)}-k_2(\alpha_2^{(1)}+1),\quad -k_1(\alpha_1^{(2)}+1)-k_2\alpha_2^{(2)}$$

mają mieć dla boku PQ wartość najmniejszą, musi tedy ρ być dodatnie; a zatem wykładniki k_1, k_2 są ujemne. Jest przeto:

$$\rho d=-(\alpha_1+1)k_1-(\alpha_2+1)k_2=-\alpha_1^{(1)}k_1-(\alpha_2^{(1)}+1)k_2$$
$$=-(\alpha_1^{(1)}+1)k_1-\alpha_2^{(2)}k_2$$

przyczem PQ leży najbliżej początku w kierunku OM.

Teraz poprowadźmy przez punkty rzutu rozważanej ściany bocznej proste równoległe do boku PQ w odległościach d', d'',... Do kąta φ może należeć i drugi bok naszego wielokąta. Jeżeli chcemy rozważać całki, należące do tego boku, wtedy k_1, k_2 są dodatnie, ρ ujemne. Stosunek

$$\frac{k_1}{k_2}=\operatorname{cotg}\varphi$$

jest przeto dany, lecz ρ jest niewiadome. Jeżeli ψ jest kątem, który tworzy bok o kierunku od P do Q z kierunkiem ujemnym osi $\alpha^{(1)}$, będzie

$$\cos\varphi=\sin\psi,\qquad \sin\varphi=\cos\psi,$$

ponieważ kąt prostej PQ z kierunkiem OM jest równy $+\frac{\pi}{2}$. Jest $\operatorname{tg}\psi$

liczbą wymierną, równą $\frac{l}{k}$. Mamy więc w postaci nieprzywiedlnej:

$$k_1=-\frac{\rho l}{\sqrt{l^2+k^2}},\qquad k_2=-\frac{\rho k}{\sqrt{l^2+k^2}},\qquad lk_2-kk_1=0.$$

Pozostaje jeszcze wyznaczenie liczby ρ. Równania (15), jeżeli obie strony pomnożymy przez $\rho d+k_2$ lub odpowiednio przez $\rho d+k_1$, można napisać w postaci:

$$\begin{aligned}
&[\Sigma A v_1^{\alpha_1}v^{\alpha_2}+u^{\rho(d'-d)}\Sigma A' v_1^{\alpha_1'}v^{\alpha_2'}+\ldots]\,u^2\frac{dv_1}{du}\\
&=k_1 u v_1[\Sigma A v_1^{\alpha_1}v^{\alpha_2}+u^{\rho(d'-d)}\Sigma A' v_1^{\alpha_1'}v_2^{\alpha_2'}+\ldots]\\
&+\mu_1 v_1[\Sigma A v_1^{\alpha_1}v^{\alpha_2}+u^{\rho(d'-d)}\Sigma A' v_1^{\alpha_1'}v_2^{\alpha_2'}+\ldots]\\
&-[\Sigma A^{(1)} v_1^{\alpha_1^{(1)}}v_2^{\alpha_2^{(1)}}+u^{\rho(d'^{(1)}-d^{(1)})}\Sigma A' v_1'^{\alpha_1^{(1)}}v_2^{\alpha_2^{(1)}}+\ldots],\\
&[\Sigma A v_1^{\alpha_1}v_2^{\alpha_2}+u^{\rho(d'-d)}\Sigma A' v_1^{\alpha_1'}r_2^{\alpha_2'}+\ldots]\,u^2\frac{dv_2}{du}\\
&=k_2 u v_2[\Sigma A v_1^{\alpha_1}v^{\alpha_2}+u^{\rho(d'-d)}\Sigma A' v_1^{\alpha_1'}v^{\alpha_2'}+\ldots]\\
&+\mu_2 v_2[\Sigma A v_1^{\alpha_1}v_2^{\alpha_2}+u^{\rho(d'-d)}\Sigma A' v_1^{\alpha_1'}v^{\alpha_2'}+\ldots]\\
&-[\Sigma A^{(2)} v_1^{\alpha_1^{(2)}}v_2^{\alpha_2^{(2)}}+u^{\rho(d''^{(2)}-d^{(2)})}\Sigma A'^{(2)} v_1^{\alpha_1'^{(2)}}v_2^{\alpha_2'^{(2)}}+\ldots].
\end{aligned}\tag{16}$$

Tu d', $d'^{(1)}$, $d'^{(2)}$ odpowiadają trzem prostym równoległym do boku PQ, które najpierw posiadają odpowiednio punkty lewe, prawe pierwsze i prawe drugie i które także mogą zlewać się ze sobą. Z drugiej strony $e^{\frac{\sigma}{u}}$, $e^{\frac{\sigma^{(1)}}{u}}$, $e^{\frac{\sigma^{(2)}}{u}}$ tak silnie wraz z u zdążają do zera, że z pewnością wszystkie wyrazy w nawiasie, w które wchodzi u, mocniej zdążają do zera, niż $u^{\rho(d'-d)}$, lub $u^{\rho(d'^{(1)}-d^{(1)})}$ lub też $u^{\rho(d'^{(2)}-d^{(2)})}$.

Niechaj spółrzędne punktu P będą ξ_1, η_1, spółrzędne zaś h-tego punktu jednego z trzech gatunków, gdy postępujemy w kierunku PQ, niechaj będą:

$$\xi_h=\alpha_{1,h}+1=\alpha_{1,h}^{(1)}=\alpha_{1,h}^{(2)}+1,\qquad \eta_h=\alpha_{2,h}+1=\alpha_{2,h}^{(1)}+1=\alpha_{2,h}^{(2)}.$$

Dalej niechaj będzie:

$$k_l=\xi_h-\xi_1=\alpha_{1,h}+1-\xi_1,\qquad k_h^{(1)}=\xi_h-\xi_1=\alpha_{1,h}^{(1)}-\xi_1,$$
$$k_h^{(2)}=\xi_h-\xi_1=\alpha_{1,h}^{(2)}+1-\xi_1,$$

$$l_h = \eta_h - \eta_1 = \alpha_{2,h} + 1 - \eta_1, \qquad l_h^{(1)} = \eta_h - \eta_l = \alpha_{2,h}^{(1)} - \eta_1,$$

$$l_h^{(2)} = \eta_h - \eta_l = \alpha_{2,h}^{(2)} - \eta_1.$$

Te różnice są wielokrotnościami liczb k, l, mianowicie:

$$k_h = -\mu_h . k, \quad k_h^{(1)} = -\mu_h^{(1)} . k, \quad k_h^{(2)} = -\mu_h^{(2)} . k,$$

$$l_h = \mu_h . l, \quad l_2^{(1)} = \mu_h^{(1)} l, \quad l_h^{(2)} = \mu_h^{(2)} l.$$

Możemy więc napisać:

$$\Sigma A v_1^{\alpha_1} v^{\alpha_2} = v_1^{\xi_1 - 1} v^{\eta_1 - 1} \Sigma A v_1^{\xi_h - \xi_1} v_2^{\eta_h - \eta_1}$$

$$= v_1^{\xi_1 - 1} v_2^{\eta_1 - 1} \Sigma A v_1^{-\mu_h k} v_2^{\mu_h l} = v_1^{\xi_1 - 1} v_2^{\eta_1 - 1} \Sigma A \left(\frac{v_2^l}{v_1^k}\right)^{\mu_h}.$$

$$\Sigma A^{(1)} v_1^{\alpha_1^{(1)}} v_2^{\alpha_2^{(1)}} = v_1^{\xi_1} v_2^{\eta_1 - 1} \Sigma A^{(1)} v_1^{\xi_h - \xi_1} v_2^{\eta_h - \eta_1}$$

$$= v_1^{\xi_1} v_2^{\eta_1 - 1} \Sigma A^{(1)} \left(\frac{v_2^l}{v_1^k}\right)^{\mu_h^{(1)}},$$

$$\Sigma A^{(2)} v^{\alpha_1^{(2)}} v_2^{\alpha_2^{(2)}} = v_1^{\xi_1 - 1} v_2^{\eta_1} \Sigma A^{(2)} v_1^{\xi_h - \xi_1} v_2^{\eta_h - \eta_1}$$

$$= v_1^{\xi_1 - 1} v_2^{\eta_1} \Sigma A^{(2)} \left(\frac{v_2^l}{v_1^k}\right)^{\mu_h^{(2)}}.$$

Wprowadźmy teraz zmienną $V = v_1^{-k} v_2^{l}$, a otrzymamy:

$$\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} = v_1^{\xi_1 - 1} v_2^{\eta_1 - 1} \Sigma A V^{\mu_h},$$

$$\Sigma A^{(1)} v_1^{\alpha_1^{(1)}} v_2^{\alpha_2^{(1)}} = v_1^{\xi_1} v_2^{\eta_1 - 1} \Sigma A^{(1)} V^{\mu_h^{(1)}},$$

$$\Sigma A^{(2)} v_1^{\alpha_1^{(2)}} v_2^{\alpha_2^{(2)}} = v_1^{\xi_1 - 1} v_2^{\eta_1} \Sigma A^{(2)} V^{\mu_h^{(2)}}.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\Sigma A V^{\mu_h} = \Phi(V), \quad \Sigma A^{(1)} V^{\mu_h^{(1)}} = \Phi^{(1)}(V), \quad \Sigma A^{(2)} V^{\mu_h^{(2)}} = \Phi^{(2)}(V)$$

i rozpatrzmy najbliższą równoległą do boku PQ, i równozwrotną z nim prostą $P'Q'$, gdzie P' ma oznaczać punkt pierwszy, Q' punkt ostatni, odpowiadający ścianie bocznej S wielościanu i leżący na tej równoległej. Jeżeli

ξ_1', η_1' są spółrzędne punktu P', zaś ξ_h', η_h' spółrzędne punktu h-tego; jeżeli położymy nadto:

$$\Sigma A' v_1^{\alpha_1'} v_2^{\alpha_2'} = v_1^{\xi_1' - 1} v_2^{\eta_1' - 1} \Phi'(V),$$

$$\Sigma A' v_1^{\alpha_1'} v_2^{\alpha_2'} = v_1^{\xi_1'} v_2^{\eta_1' - 1} \Phi'^{(1)}(V),$$

$$\Sigma A'^{(2)} v_1^{\alpha_1'^{(2)}} v_2^{\alpha_1'^{(2)}} = v_1^{\xi_1' - 1} v_2^{\eta_1'} \Phi'^{(2)}(V)$$

i podzielimy obie strony równania (16) przez $v_1^{\xi_1 - 1} v_2^{\eta_1 - 1}$, otrzymamy ostatecznie:

$$\begin{aligned}
&[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1' - \xi_1} v_2^{\eta_1' - 1} \Phi'(V) + \ldots]\, u^2 \frac{dv_1}{du} \\
&= k_1 u v_1 [\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1' - \xi_1} v_2^{\eta_1' - \eta_1} \Phi'(V) + ..] \\
&+ \mu_1 v_1 [\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1' - \xi_1} v_2^{\eta_1' - \eta_1} \Phi'(V) + ..] \\
&- v_1 [\Phi^{(1)}(V) + u^{\rho(d_1'^{(1)} - d^{(1)})} v_1^{\xi_1'^{(1)} - \xi_1} v_2^{\eta_1'^{(1)} - \eta_1} \Phi'^{(1)}(V) + ..], \\
&[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1' - \xi_1} v_2^{\eta_1' - \eta_1} \Phi'(V) + ..]\, u^2 \frac{dv_2}{du} \\
&= k_2 u v_2 [\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1' - \xi_1} v_2^{\eta_1' - \eta_1} \Phi'(V) + ..] \\
&+ \mu_2 v_2 [\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1' - \xi_1} v_2^{\eta_1' - \eta_1} \Phi'(V) + ..] \\
&- v_2 [\Phi^2(V) + u^{\rho(d'^{(2)} - d^{(2)})} v_1^{\xi_1'^{(2)} - \xi_1} v_2^{\eta_1'^{(2)} - \eta_1} \Phi'^{(2)}(V) + ..]
\end{aligned} \tag{17}$$

Należy zauważyć, że liczby $\xi_1' - \xi_1$, $\eta_1' - \eta_1$ mogą być ujemne.

§ 6. Widać teraz odrazu, że wartości graniczne $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ czynią zadość obu równaniom:

$$\begin{aligned}
\Psi'(V) &= \mu_1 \Phi(V) - \Phi^{(1)}(V) = 0, \\
\Psi^{(2)}(V) &= \mu_2 \Phi(V) - \Phi^{(2)}(V) = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

W samej rzeczy, według założeń naszych jest $\Phi(V^{(0)})$ od zera różne. Jeżeli więc podzielimy obie strony równań (17) przez wyrażenie niniejsze po stronie lewej i rozwiniemy wszystko na szeregi potęgowe, otrzymamy równania postaci:

$$u^2 \frac{dv_1}{du} = k_1 u v_1 [1 + \varepsilon_1(v_1, v_2, u)] + v_1 \frac{\Psi^{(1)}(V)}{\Phi(V^{(0)})}. \quad [1 + \varepsilon_1'(v_1, v_2, u)]$$

$$+ u^{\rho(d'-d)} \varphi_1(v_1, v_2, u),$$

$$u^2 \frac{d v_2}{d u} = k_2 u v_2 \, [1 + \varepsilon_2 (v_1, v_2, u)] + v_2 \frac{\Psi^{(2)}(V)}{\Phi(V^0)} \cdot [1 + \varepsilon'_2 (v_1, v_2, u)]$$

$$+ u^{\rho(d'-d)} \varphi_2 (v_1, v_2, u),$$

gdzie ε_1, ε_1', ε_2, ε_2' zmierzają wraz z u do zera, gdy φ_1, φ_2 pozostają skończonemi. Jeżeli teraz podzielimy przez u^2 i zcałkujemy, to $\Phi^{(1)}(V)$, $\Psi^{(2)}(V)$ muszą wraz z u zmierzać do zera, gdyż w razie przeciwnym nie skompensowały by się odpowiadające im całki.

Tym sposobem konieczny jest jeden warunek, aby (przy naszych założeniach) równanie nasze posiadało całki pojedyńczo-logarytmowe. Funkcya V dąży wraz z u do

$$V_1^{(0)} = \frac{(v_1^{(0)})^l}{(v_1^{(0)})^k},$$

a różnica $V - V^{(0)}$ daje się rozwinąć na szereg holomorficzny zmiennych $\zeta_1 = v_1 - v_1^{(0)}$, $\zeta_2 = v_2 - v_2^{(0)}$. Jeżeli wprowadzimy oznaczenie $V - V^{(0)} = Z$, będzie:

$$\begin{aligned}
&[\Phi(V) + u^{\rho(d-d)} v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} \Phi'(V) + \ldots] \, u^2 \frac{d v_1}{d u} \\
&= v_1 \left(Z \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial V^{(0)}} + \ldots + \frac{1}{m!} Z^m \frac{\partial^m \Psi^{(1)}}{\partial {V^{(0)}}^{(m)}}\right) \\
&+ k_1 u v_1 [\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} \varphi_1 (v_1, v_2, u)] \\
&+ v_1 u^{\rho(d'-d)} [v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} \psi'^{(1)}(V) + u^{\lambda_1} \varphi_1' (v_1, v_2, u)]; \\
&[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} \Phi'(V) + \ldots] \, u^2 \frac{d v_2}{d u} \\
&= v_2 \left(Z \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial V^{(0)}} + \ldots + \frac{1}{m!} Z^m \frac{\partial^m \Psi^{(2)}}{\partial {V^{(0)}}^m}\right) \\
&+ k_2 u v_2 [\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} \varphi_2 (v_1, v_2, u] \\
&+ v_2 u^{\rho(d'-d)} [v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} \Psi'^{(2)}(V) + u^{\lambda_2} \varphi_2' (v_1, v_2, u)]
\end{aligned} \tag{19}$$

Położyliśmy tu dla skrócenia

$$\begin{aligned}
\mu_1 \Phi'(V) - \Phi'^{(1)}(V) &= \Psi'^{(1)}(V), \\
\mu_2 \Phi'(V) - \Phi'^{(2)}(V) &= \Psi'^{(2)}(V),
\end{aligned} \tag{20}$$

gdzie występują wyrazy, znajdujące się na tej samej równoległej najbliższej bokowi PQ, której odległość od początku wynosi d'. Załóżmy, co w ogólności zachodzić będzie, że żadna z dwu funkcyj (20) dla $V = V^{(0)}$ nie znika, i że istotnie na najbliższej prostej równoległej od boku PQ znajdują się punkty wszystkich trzech gatunków. Funkcye φ_1, φ_1', φ_2, φ_2' są skończone, gdy u dąży do zera; wreszcie λ_1, λ_2 są liczby skończone.

Mnożymy równania (19) przez $-\frac{k}{v_1}$, $\frac{l}{v_2}$ i dodajemy je do siebie. Otóż jest

$$\log V = -k \log v_1 + l \log v_2,$$

$$\frac{d \log V}{d u} = -k \frac{d v_1}{d u} \frac{1}{v_1} + l \frac{d v_2}{d u} \cdot \frac{1}{v_2},$$

z drugiej zaś strony mamy

$$k l k_2 - k k_1 = 0.$$

Wreszcie wprowadźmy oznaczenia

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Psi^{(1)}}{d {V^{(0)}}^k} = L_1^{(k)}, \qquad \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Psi^{(2)}}{\partial {V^{(0)}}^k} = L_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Otrzymamy równanie następujące:

$$\begin{aligned}
&[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} \Phi'(V) + \ldots] \, u^2 \frac{dZ}{du} \\
&= (V^{(0)} + Z) [(-k_0 L_1^{(1)} + l L_2^{(2)} Z + \ldots + (-k L_1^{(m)} + l L_2^{(m)} Z^m] \\
&+ (V^{(0)} + Z) u^{\rho(d'-d)} [-k \Psi'^{(1)}(V) + l \Psi'^{(2)}(V)] v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} \\
&+ u^{\rho(d'-d)+\lambda} \varphi (v_1, v_2, u),
\end{aligned} \tag{22}$$

gdzie $\lambda > 0$, funkcya zaś φ pozostaje skończoną. W ogólności tak wielkości

$$K^{(i)} = -k L_1^{(i)} + l L_2^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

jak i wielkość

$$M = -k \psi'^{(1)}(V^{(0)}) + l \psi'^{(2)}(V^{(0)})$$

będą różne od zera.

§ **7.** Tworzymy jeszcze jedno równanie z obu równań (19), mnożąc je odpowiednio przez

$$\frac{1}{v_1} L_2^{(1)}, \qquad \frac{1}{v_2} L_1^{(1)},$$

a następnie odejmując. Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\frac{v_1^{L_2^{(1)}}}{v_2^{L_1^{(1)}}} = W, \qquad \frac{(v_1^0)^{L_2^{(1)}}}{(v_2^0)^{L_1^{(2)}}} = W^{(0)}, \qquad \log \frac{W}{W^{(0)}} = Z', \tag{23}$$

otrzymamy równanie:

$$[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} \Phi'(V) + \ldots] u^2 \frac{dZ'}{du}$$

$$\begin{aligned} &= (L_2^{(1)} L_1^{(2)} - L_1^{(1)} L_2^{(2)}) Z^2 + \ldots + (L_2^{(1)} L_1^{(m)} - L_1^{(1)} L_2^{(m)}) Z^m \\ &+ (L_2^{(1)} k_1 - L_1^{(1)} k_2) u [\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)} \Psi(v_1, v_2, u)] \end{aligned} \tag{24}$$

$$+ u^{\rho(d'-d)} [v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} (L_2^{(1)} \Psi'^{(1)}(V) - L_1^{(1)} \Psi'^{(2)}(V)) + u^\lambda \varphi(v_1, v_2, u)].$$

Wogóle wielkości

$$\begin{gathered} N = L_2^{(1)} \Psi'^{(1)}(V^{(0)}) - L_1^{(1)} \Psi'^{(i)}(V^{(0)}) \\ R = L_2^{(1)} k_1 - L_1^{(1)} k_2, \quad T^{(i)} = L_2^{(1)} L_1^{(i)} - L_1^{(1)} L_2^{(2)}, \quad i = 2, \ldots, m \end{gathered} \tag{25}$$

są z pewnością różne od zera.

Weźmy teraz pod uwagę równanie (22). Dzielimy obie jego strony przez wyrażenie w nawiasie po stronie lewej i rozwijamy wszystko na szeregi potęgowe. Otrzymamy tym sposobem:

$$\begin{aligned} u^2 \frac{dZ}{du} &= \frac{K^{(1)} V^{(0)}}{\Phi(V^{(0)})} Z[1 + \varepsilon(v_1, v_2, Z, u)] \\ &+ \frac{M V^{(0)}}{\Phi(V^{(0)})} v_1^{\xi_1'-\xi_1} v_2^{\eta_1'-\eta_1} u^{\rho(d'-d)} [1 + \varepsilon'(v_1, v_2, Z, u)] + u^{\rho(d'-d)+\lambda} \varphi(v_1 v_2, Z, u), \end{aligned} \tag{26}$$

gdzie funkcye ε, ε' zmierzają do zera wraz z u, funkcya zaś φ pozostaje skończoną. Piszemy dalej równanie (24) w postaci

$$\begin{aligned} u^2 \frac{dZ'}{du} &= \frac{T^{(2)}}{\Phi(V^{(0)})} Z^2 [1 + \varepsilon(Z, v_1, v_2, u)] + Ru [(1 + \varepsilon'(Z, v_1, v_2, u)] \\ &+ \frac{N u^{\rho(d'-d)}}{\Phi(V^{(0)})} v_1^{(0)\,\xi_1'-\xi_1} v_2^{(0)\,\eta_1'-\eta_1} [1 + \varepsilon''(Z, v_1, v_2, u)], \end{aligned} \tag{27}$$

gdzie znowu funkcye ε, ε', ε'' wraz z u zmierzają do zera. Uczyńmy teraz założenie, które usprawiedliwimy później, że funkcya niewiadoma Z zdąża do zera w ten sposób, iż stosunek jej do pewnej potęgi u^λ zmiennej u zmierza do wartości różnej od zera. Wtedy, jak łatwo widzieć, musi się spełniać warunek

$$\rho(d' - d) = 1. \tag{28}$$

W samej rzeczy, gdyby było $\rho(d' - d) < 1$, wtedy, po zcałkowaniu równania (26), stawająca się nieskończoną całka

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^{2-\rho(d'-d)}} \tag{a}$$

zniosłaby się z całką

$$\int_{u_0}^{u} \frac{Z\,du}{u^2}, \tag{b}$$

a z całkowania równania (27) wynikłoby, że stawająca się nieskończoną całka (a) musiałaby się znieść z całką

$$\int_{u_0}^{u} \frac{Z^2\,du}{u^2}, \tag{c}$$

co jest niemożliwe, gdyż przy uczynionych założeniach całka (c) staje się słabiej nieskończona niż całka (b). Musi być zatem $\rho(d' - d) \geqslant 1$. Gdyby jednak było $\rho(d' - d) > 1$, całka (b) musiałaby dążyć do wartości skończonej, a wtedy i całka (c) byłaby skończona, i druga całka w równaniu (27), t. j. całka

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u} \tag{d}$$

nie mogłaby być skompensowana. Otrzymujemy tym sposobem:

$$\rho = \frac{1}{d' - d}.$$

Teraz wynika z równania (26), że całka (b) jest tak samo nieskończona jak całka (d), a więc całka (c) jest słabiej (jeżeli wogóle jest) nieskończona, przeto spółczynniki przy u po prawej stronie równania (27) muszą być równe zeru. To prowadzi do równania

$$R\Phi(V^{(0)}) + N v^{(0)^{\xi_1'-\xi_1}} v_2^{(0)^{\eta_1'-\eta_1}} = 0, \tag{29}$$

lub do równania

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial V^0} [v_1^{(0)^{\xi_1'}} v_2^{(0)^{\eta_1'}} \Psi'^{(2)}(V^{(0)}) + k_2 v_1^{(0)^{\xi_1}} v_2^{(0)^{\eta_1}} \Phi(V^{(0)})] \\ &- \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial V^0} [v_1^{(0)^{\xi_1'}} v_2^{(0)^{\eta_1'}} \Psi'(V^{(0)}) + k_1 v_1^{(0)^{\xi_1}} v_2^{(0)^{\eta_1}} \Phi(V^{(0)})] = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Równanie to wraz z równaniami (18) wyznacza wielkości $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ tak, że istnieje skończona liczba rozwiązań. W samej rzeczy różnice $\xi_1' - \xi_1$, $\eta_1' - \eta_1$

nie są proporcyonalne do wielkości $-k$, l. Równanie przeto (29) lub (30) zawiera wielkości $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ nietylko w kombinacyi $V^{(0)}$.

§ **8.** Teraz wyznaczymy z równań (26), (27) wielkości Z, Z', jako funkcye wielkości u. Uskutecznimy to za pomocą metody kolejnych przybliżeń. Zauważmy najprzód, że z równań

$$Z = V - V^{(0)} = \frac{v_2^{\,l}}{v_1^{\,k}} - \frac{(v_2^{\,0})^l}{(v_1^{\,0})^k}, \qquad Z' = \log W - \log W^{(0)}$$

dają się $\zeta_1 = v_1 - v_1^{(0)}$, $\zeta_2 = v_2 - v_2^{(0)}$ wyrazić jako funkcye holomorficzne wielkości Z, Z', które wraz z niemi znikają. W samej rzeczy jakobian ich jest różny od zera. Zamiast ζ_1, ζ_2 wprowadzamy funkcye $Z_1 = Z$, $Z_2 = Z'$ i otrzymujemy równania następującego typu ogólnego:

$$\begin{aligned} u^2 \frac{dZ_1}{du} &= AZ_1 + Bu + u\varepsilon_1(u) + \varphi_1(Z_1, Z_2, u), \\ u^2 \frac{dZ_2}{du} &= CuZ_2 + u\varepsilon_2(u) + \varphi_2(Z_1, Z_2, u). \end{aligned} \tag{31}$$

Tu A, B, C są trzy liczby w ogólności różne od zera; funkcye ε_1, ε_2 wraz z u dążą do zera, gdy $u' < 0$ i gdy stosunek $\frac{u'}{u''}$ dąży do nieskończoności; spełniają one w pewnym obszarze B nierówności postaci:

$$|\varepsilon_i(u)| < |u|^\lambda, \quad \lambda > 0, \qquad (i = 1, 2).$$

Funkcye φ_1, φ_2 są szeregami potęgowemi wielkości Z_1, Z_2, a spółczynniki wyrazów ich pierwszego rzędu są funkcyami, które w obszarze B czynią zadość nierównościom postaci $< |u|^\lambda$, gdzie $\lambda > 0$. W naszym szczególnym przypadku funkcya φ_1 ma same wyrazy, które zawierają albo Z_1 conajmniej w drugiej potędze, albo też Z_2 i są względem u rzędu wielkości $u^{1+\lambda}$, $\lambda \geqslant 0$ (stałe). Funkcya φ_2 zawiera albo wyrazy z Z_1^2, albo wyrazy mające u jako czynnik, tak że u jest pomnożone albo przez Z_1, albo przez potęgę wielkości Z_2, wyższą niż pierwsza.

§ **9.** Z równaniami temi postępujemy jak następuje. Rozpatrujemy szereg funkcyj aproksymacyjnych:

$$Z_1^{(0)},\ Z_2^{(0)},\ Z_1^{(1)},\ Z_2^{(1)}, \ldots\ Z_1^{(i)},\ Z_2^{(i)}, \ldots, \tag{32}$$

określonych przez następujące równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} u^2 \frac{dZ_1^{(0)}}{du} &= AZ_1^{(0)} + u(B + \varepsilon_1(u)), \\ u^2 \frac{dZ_2^{(0)}}{du} &= CuZ_2^{(0)} + u\varepsilon_2(u) \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} u^2 \frac{dZ_1^{(i+1)}}{du} &= AZ_1^{(i+1)} + u(B + \varepsilon_1(u)) + \varphi_1(Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, (u)), \\ u^2 \frac{dZ_2^{(i+1)}}{du} &= CuZ_2^{(i+1)} + u\varepsilon_2(u) + \varphi_2(Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, u). \end{aligned} \tag{34}$$

W równaniach tych stałe A, B mają wartości

$$A = \frac{K^{(1)} V^{(0)}}{\Phi(V^{(0)})}, \qquad B = \frac{M V^{(0)}}{\Phi(V^{(0)})} \, v_1^{(0)\,\xi_1'-\xi_1} \, v_2^{(0)\,\eta_1'-\eta_1}.$$

Stałe A, B, C są w przypadku ogólnym różne od zera. Tworzymy teraz różnice

$$H_1^{(i+1)} = Z_1^{(i+1)} - Z_1^{(i)}, \quad H_2^{(i+1)} = Z_2^{(i+1)} - Z_2^{(i)}; \quad i = 0, 1, \tag{35}$$

oraz odpowiednie równania różniczkowe postaci:

$$\begin{aligned} u^2 \frac{dH_1^{(i+1)}}{du} &= AH_1^{(i+1)} + \bar{\varphi}(H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, u), \\ u^2 \frac{dH_2^{(i+1)}}{du} &= CuH_2^{(i+1)} + \bar{\varphi}_2(H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, Z_1^{(i)}\ Z_2^{(i)}\ u). \end{aligned} \tag{36}$$

Funkcye $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ postępują według potęg rosnących wielkości $H_1^{(i)}$, $H_2^{(i)}$ tak, że wszystkie spółczynniki przy tych zmiennych zawierają albo $Z_1^{(i)}$, $Z_2^{(i)}$, albo też u. Funkcya $\bar{\varphi}_1$ posiada wyrazy tylko z $H_1^{(i)}$ lub z u, ale nie z samemi tylko $H_2^{(i)}$; funkcya $\bar{\varphi}_2$ nie zawiera wyrazu z $H_2^{(i)}$ w pierwszej potędze ze spółczynnikiem u, występującym osobno. Prócz tego wszystkie wyrazy w $\bar{\varphi}_2$ wolne od u zawierają zmienną $H_1^{(i)}$.

§ **10.** Mamy najprzód, oczywiście

$$\begin{aligned} Z_1^{(0)} &= e^{-\frac{A}{u}} \left[C_1 + \int_{u_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \cdot \frac{B + \varepsilon_1(u)}{u} \right], \\ Z_2^{(0)} &= u^C \left[C_2 + \int_{u_0}^{u} \frac{u^{-C} \varepsilon_2(u)}{u} \, du \right], \end{aligned} \tag{37}$$

gdzie C_1, C_2 są dwie stałe całkowania, które można obrać tak, by $Z_1^{(0)}$, $Z_2^{(0)}$ dążyły wraz z u do zera. Mamy tu do rozróżnienia cztery przypadki odpowiednie do znaku części rzeczywistej stałych A i C. Przypadek, w którym A lub C jest czysto urojone, pomijamy.

Jeżeli $A = A' + i A''$, wtedy

$$\frac{A}{u} = \frac{A' u' + A'' u''}{u'^2 + u''^2} + i \, \frac{A'' u' + A' u''}{u'^2 + u''^2}.$$

Gdy więc A' jest dodatnie, to $e^{\frac{A}{u}}$ dąży do nieskończoności, bez względu na zachowanie się argumentu. Otóż całka

$$\int\limits_{u_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \frac{B + \varepsilon_1(u)}{u} \, du$$

ma w tym przypadku wartość graniczną zupełnie oznaczoną, a więc stała C_1 musi posiadać wartość

$$\int\limits_{0}^{u_0} e^{\frac{A}{u}} \frac{B + \varepsilon_1(u)}{u} \, du.$$

Mamy przeto jedyną całkę postaci

$$Z_1^{(0)} = e^{-\frac{A}{u}} \int\limits_{0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \frac{B + \varepsilon_1(u)}{u} \, du. \tag{38}$$

Całkujemy teraz cząstkowo:

$$\int\limits_{0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \varphi(u) \, du = - e^{\frac{A}{u}} \frac{u^2}{A} \varphi(u) \Big|_0^u + \frac{1}{A} \int\limits_{0}^{u} e^{\frac{A}{u}} d\,(u^2 \varphi(u)),$$

gdzie $\varphi(u) = \frac{1}{u} (B + \varepsilon_1(u))$. Przy pomocy powtórnego całkowania cząstkowego dostajemy

$$\int\limits_{0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \frac{d\,(u^2 \varphi(u))}{du} \, du = - \frac{u^2}{A} \Psi(u) \, e^{\frac{A}{u}} \Big|_0^u + \frac{1}{A} \int\limits_{0}^{u} e^{\frac{A}{u}} d\,(u^2 \Psi(u));$$

$$\Psi(u) = \frac{d\,(u^2 \varphi(u))}{du}.$$

Otóż $\Psi(u)$ pozostaje skończonem, gdy u dąży wskazanym sposobem do zera, gdyż $\frac{d \varepsilon_1(u)}{du}$ jest rzędu wielkości $u^{\lambda-1}$, $\varepsilon_1(u)$ bowiem jest szeregiem potęgowym o wyrazach, które są potęgami i iloczynami wielkości u^{λ}, $(\lambda > 0)$ i $e^{\frac{\sigma}{u}} u^k$, przyczem $\sigma > 0$, k zaś jest dowolne. Pochodne tych wielkości

$$\lambda u^{\lambda-1}, \qquad k u^{k-1} e^{\frac{\sigma}{u}} - u^{k-2} e^{\frac{\sigma}{u}}$$

gdy u zmierza do zera, zachowują się, tak, że iloczyn $\frac{d \varepsilon_1(u)}{du} . u$ pozostaje skończony i ograniczony. Podobnież widzieć łatwo, że

$$\frac{d}{du} (u^2 \Psi(u))$$

dąży wraz z u do zera, będąc tego samego rzędu wielkości co u. Będzie tedy

$$\frac{d}{du} (u^2 \Psi(u)) = u \sigma(u),$$

gdzie $\sigma(u)$ jest skończone. Dalej mamy

$$\left| e^{\frac{A}{u}} \right| = e^{A' \log r - A'' \varphi} = r^{A'} e^{A'' \varphi}.$$

Jeżeli wprowadzimy długość drogi s jako parametr, będzie:

$$\left| \int\limits_{0}^{u} e^{\frac{A}{u}} u \sigma(u) \, du \right| < K \int\limits_{0}^{s} r^{A'} u' \frac{du'}{ds} \, ds.$$

Jest tedy

$$\left| e^{-\frac{A}{n}} \int\limits_{0}^{u} e^{\frac{A}{u}} u \sigma(u) \, du \right| < K r^{-A'} r^{A'} \frac{u'^2}{2}$$

$$< K \frac{|u|^2}{2}.$$

Na mocy równania (38) napisać można

$$Z_1^{(0)} = - u \frac{B}{A} (1 + \varepsilon(u);$$

spełnia się tedy z pewnością nierówność

$$|Z_1^{(0)}| < K |u|, \qquad K > \left| \frac{B}{A} \right|. \tag{39}$$

Rozpatrzmy teraz całkę

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{u^{-C} \varepsilon_2(u)}{u} \, du.$$

Jeżeli część rzeczywista stałej C jest ujemna, wtedy całka dąży z pewnością do granicy oznaczonej, gdy u dąży do zera; mamy zatem:

$$Z_2^{(0)} = u^C \int_0^u u^{-C} \frac{\varepsilon_2(u)}{u}\, du. \tag{40}$$

Napiszmy $C = C' + i\,C''$, będzie:

$$|u^C| = r^{C'} e^{-C''\varphi};$$

funkcya $\varepsilon_2(u)$ jest rzędu wielkości u^λ, to znaczy $|\varepsilon_2(u)| < K|u|^\lambda$. Otrzymujemy zatem nierówność

$$|Z_2^{(0)}| < K s^{C'} \int_0^s \sigma^{-C'-\lambda-1}\, d\sigma,$$

a stąd

$$|Z_2^{(0)}| < K|u|^\lambda.$$

Dajmy, że udowodniliśmy już nierówności

$$|Z_1^{(i)}| < K(u), \quad |Z_2^{(i)}| < K|u|^\lambda, \quad 1 > \lambda \geqq 0 \tag{41}$$

dla $i = 0, 1, \ldots j$, wtedy należy jeszcze dowieść, że też same nierówności zachodzą dla $i = j+1$, jeżeli tylko K jest liczbą dowolną większą od $\left|\frac{B}{A}\right|$. W samej rzeczy, z pierwszego równania (34) i z nierówności (41) wypływa, że według tego, co powiedziano o funkcyi φ_1, można $Z_1^{(j+1)}$ napisać w postaci

$$Z_1^{(j+1)} = -u\frac{B}{A}(1 + \varepsilon(u)),$$

z drugiego zaś równania (34) i z własności funkcyi φ_2 wypływa

$$Z_2^{j+1} < K|u|^\lambda,$$

co stwierdza ogólność nierówności (41) dla stałego K.

§ **11.** Teraz należy rozstrzygnąć pytanie, dotyczące zbieżności kolejnych przybliżeń. Równania (36) dają nam teraz:

$$\left.\begin{aligned} H_1^{(i+1)} &= e^{-\frac{A}{u}} \int_0^u \frac{1}{u^2} e^{\frac{A}{u}} \bar{\varphi}_1 (H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, u)\, du, \\ H_2^{(i+1)} &= u^C \int_0^u \frac{1}{u^2} u^{-C} \bar{\varphi}_2 (H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, u)\, du; \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Dla $i = 0$ jest $H_1^{(0)} = Z_1^{(0)}$, $H_2^{(0)} = Z_2^{(0)}$. Funkcya $\bar{\varphi}_1$ spełnia według tego, co powiedziano, dla $i = 0$ nierówność

$$|\bar{\varphi}_1| < K'|u|^{1+\lambda};$$

będzie tedy

$$|H_1^{(1)}| < L|u|^{1+\lambda}.$$

Dalej w drugiem równaniu (42) funkcya $\bar{\varphi}_2$ dla $i = 0$ spełnia nierówność

$$|\bar{\varphi}_2| < K'|u|^{1+2\lambda}.$$

Istotnie: $\bar{\varphi}_2$ nie zawiera wyrazu $uH_2^{(0)}$; najniższemi wyrazami są

$$H_1^{(0)^2}, \quad uH_1^{(0)}, \quad uH_2^{(0)^2}$$

a więc wszystkie są rzędu wielkości u^2 lub $u^{1+2\lambda}$, a ponieważ można założyć $\lambda \leqq \frac{1}{2}$, otrzymujemy przeto powyższą nierówność. Stąd zaś wynika nierówność

$$|H_2^{(1)}| < L|u|^{2\lambda}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że udowodniono nierówności

$$|H_1^{(i)}| < L|u|^{1+i\lambda}, \quad H_2^{(i)} < L|u|^{(i+1)\lambda} \tag{43}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, j$, wtedy dla $i = j+1$ będzie

$$|\bar{\varphi}_1| < K'|u|^{1+(j+1)\lambda}.$$

A zatem:

$$|H_1^{(j+1)}| < L|u|^{1+(j+1)\lambda}.$$

Dalej jest

$$|\bar{\varphi}_2| < K'|u|^{1+(j+2)\lambda},$$

gdyż

$$|\bar{\varphi}_2| < K'|u|^{2+(j+1)\lambda}, \quad \text{oraz} \quad |\bar{\varphi}_2| < K'|u|^{1+(j+2)\lambda},$$

a liczba λ może być przyjęta jako $\leqq \frac{1}{2}$. Otrzymujemy tedy

$$|H_2^{(j+1)}| < L|u|^{(j+2)\lambda},$$

a więc nierówności (43) stosują się i do $i = j+1$, przyczem liczba L jest niezależna od i.

Tym sposobem szeregi przybliżeń kolejnych

$$Z_1 = Z_1^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} H_1^{(i)}, \qquad Z_2 = Z_2^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} H_2^{(i)} \tag{44}$$

są zbieżne bezwzględnie i jednostajnie. Są one całkami równań (31). Istotnie z równań (38), (40), (42) wynika najprzód, że Z_1, Z_2 wraz z u zdążają do zera, następnie, że szeregi pochodnych szeregów (44):

$$\frac{d Z_1^{(0)}}{d u}+\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d H^{(i)}}{d u}, \qquad \frac{d Z_2^{(0)}}{d u}+\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d H_2^{(i)}}{d u}, \tag{45}$$

są jednostajnie zbieżne w każdym obszarze zmiennej u w płaszczyźnie zespolonej, leżącym na lewo od osi u'' w dostatecznie małej przestrzeni kątowej, zawierającym oś u', w dostatecznej blizkości punktu zerowego, przyczem ograniczenie obszaru punktu tego nie zawiera. W takim zamkniętym obszarze, czyniącym zadość nierówności $|u|<\delta$, gdzie δ jest małą liczbą, szeregi (45) są jednostajnie zbieżne i przedstawiają pochodne szeregów (44). Stąd wynika, że różnice

$$\varphi_1 (Z_1^{(i+1)}, Z_2^{(i+1)}, u) - \varphi_1 (Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, u),$$

$$\varphi_2 (Z_1^{(i+1)}, Z_2^{(i+1)}, u) - \varphi_2 (Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, u)$$

dążą do zera jednostajnie wraz z u, a więc że i wyrażenia

$$u^2 \frac{d Z_1^{(i+1)}}{d u} - A Z_1^{(i+1)} - u (B + \varepsilon_1 (u)) - \varphi_1 (Z_1^{(i+1)}, Z_2^{(i+1)}, u),$$

$$u^2 \frac{d Z_2^{(i+1)}}{d u} - C u Z_1^{(i+1)} - u \varepsilon_2 (u) - \varphi_2 (Z_1^{(i+1)}, Z_2^{(i+1)}, u)$$

dążą jednostajnie wraz z u do zera w obszarze B, co dowodzi właśnie, że Z_1, Z_2 są całkami równań (31).

Są to całki jedyne. Gdyby bowiem Z_1', Z_2' stanowiły drugą parę całek, wtedy biorąc różnice

$$D_1 = Z_1' - Z_1, \qquad D_2 = Z_2' - Z_2,$$

mielibyśmy, na podstawie równań (31), tożsamości

$$\begin{aligned} D_1 &= e^{-\frac{A}{u}} \int_0^u \frac{1}{u^2} e^{\frac{A}{u}} \bar{\varphi}_1 (D_1, D_2, Z_1, Z_2, u)\, d u, \\ D_2 &= u^C \int_0^u \frac{1}{u^2} u^{-C} \bar{\varphi}_2 (D_1, D_2, Z_1, Z_2, u)\, d u, \end{aligned} \tag{46}$$

co jest niemożliwe. Gdyż z równania pierwszego wynika w sposób wyżej wskazany

$$|D_1| < K_1 (|D_1| u^{\lambda}| + |D_2| |u|),$$

gdzie K_1 jest pewną liczbą dodatnią, z drugiego zaś równania wynika analogicznie

$$|D_2| < K_2 (|D_1| + |D_2| |u|^{\lambda}),$$

gdzie K_2 jest również liczbą dodatnią. Stąd dostajemy

$$|D_1| < K_1 [|D_1| u_1|^{\lambda} + K_2 |D_1| |u| + K_3 |D_1| |u|^{1+\lambda}],$$

co nie jest możliwe.

§ 12. Zwróćmy się obecnie do rozważania dalszych możliwych przypadków ze względu na znak części rzeczywistych wielkości A i C. Rzecz tę możemy już przedstawić znacznie treściwiej. Niechaj najprzód część rzeczywista liczby A będzie ujemna i również ujemną niechaj będzie część rzeczywista liczby C.

Mamy wtedy równania

$$\begin{aligned} Z_1^{(0)} &= e^{-\frac{A}{u}} \left[e^{\frac{A}{u_0}} . k_0 + \int_{u_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \frac{B + \varepsilon_1 (u)}{u}\, d u \right], \\ Z_2^{(0)} &= u^C \int_0^u \frac{u^{-C} \varepsilon_2 (u)}{u}\, d u; \end{aligned} \tag{47}$$

k_0 jest liczbą dowolną, mianowicie wartością funkcyi $Z_1^{(0)}$ dla $u = u_0$. Mamy teraz, po uskutecznieniu całkowania cząstkowego:

$$\int_{u_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \varphi (u)\, d u = - \frac{u^2}{A} e^{\frac{A}{u}} \varphi (u) \Big|_{u_0}^{u} + \frac{1}{A} \Big|_{u_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \Psi (u)\, d u,$$

$$\int_{u_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \Psi (u)\, d u = - \frac{u^2}{A} e^{\frac{A}{u}} \Psi (u) \Big|_{u_0}^{u} + \frac{1}{A} \int_{u_0}^{u_0} e^{\frac{A}{u}} \frac{d (u^2 \Psi (u))}{d u}\, d u.$$

Ponieważ u zdąża do zera po stycznej oznaczonej, to wynika stąd, że można wstawić pomiędzy u_0 i u bezwzględnie dostatecznie małe η_0,

$$\int_{u_0}^{u} = \int_{u_0}^{\eta_0} + \int_{\eta_0}^{u},$$

aby zachodziły nierówności

$$\left| e^{-\frac{A}{u}} \int_{\eta_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \sigma (u)\, d u \right| < K s^{-A'} \int_{\eta_0}^{s} \sigma^{A'} \sigma\, d \sigma < K |u|.$$

Po jednokrotnem jeszcze całkowaniu cząstkowem dostajemy

$$\int_{u_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \sigma(u)\, du = -\frac{u^2}{A} e^{\frac{A}{u}} \sigma(u) \Big|_{u_0}^{u} + \frac{1}{A} \int_{u_0}^{u} e^{\frac{A}{u}} \frac{d}{du} (u^2 \sigma(u))\, du,$$

$$\sigma(u) = \frac{d}{du} (u^2 \Psi(u)).$$

Ponieważ $\sigma(u)$ jest rzędu wielkości u^2, otrzymujemy więc znów

$$Z_1^{(0)} = -\frac{uB}{A} (1 + \varepsilon(u)).$$

Podobnież więc, jak poprzednio, będzie

$$|Z_2^{(0)}| < K |u|^{\lambda};$$

mamy tedy nierówności

$$|Z_1^{(i)}| < K |u|, \qquad |Z_2^{(i)}| < K |u|^{\lambda},$$

przez co znowu usprawiedliwione zostaje stosowanie przybliżeń kolejnych.

Niechaj będzie teraz C' dodatnie; całkujemy drugie z równań (33) w ten sposób:

$$Z_2^{(0)} = u^C \left[u_0^{-C} k_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{u^{-C} \varepsilon_2(u)}{u} du \right];$$

pomiędzy u_0 i u wstawiamy znów liczbę bezwzględnie małą η_0, wtedy będzie

$$\left| u^C \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{u^{-C} \varepsilon_2(u)}{u} du \right| < K |u|^{\lambda},$$

a przeto

$$|Z_2^{(0)}| < K |u|^{\mu}, \qquad \mu < (C', \lambda)$$

A więc i teraz przy dowolnym znaku wielkości A' stosowanie przybliżeń kolejnych jest usprawiedliwione. Należy uczynić jeszcze uwagę o pochodnych funkcyj $Z_1^{(i)}$, $Z_2^{(i)}$. Mamy

$$Z_1^{(0)} = e^{-\frac{A}{u}} \int_0^u e^{\frac{A}{u}} \varphi(u)\, du,$$

skąd wypływa:

$$\frac{dZ_1^{(0)}}{du} = \varphi(u) + \frac{A}{u^2} e^{-\frac{A}{u}} \int_0^u e^{\frac{A}{u}} \varphi(u)\, du$$

$$= -\frac{2u\varphi + u^2\varphi'}{A} [1 + \varepsilon(u)] = -\frac{B}{A} [1 + \varepsilon(u)].$$

Podobnież pochodna $\frac{dZ_2^{(0)}}{du}$ jest rzędu wielkości $u^{\lambda-1}$. Mamy również ogólnie

$$\frac{dZ_1^{(i)}}{du} = -\frac{B}{A} [1 + \varepsilon(u)], \qquad \left| \frac{dZ_2^{(i)}}{du} \right| < L |u|^{\mu-1}.$$

Jeżeli zważymy, że liczba ρ może być wyznaczona z warunków

$$\rho (d' - d) = 1,$$

$$d' - d = (\xi_1' - \xi_1) \sin \psi + (\eta_1' - \eta_1) \cos \psi,$$

to otrzymamy następujące wartości spółczynników k_1, k_2:

$$k_1 = -\frac{l}{(\xi_1' - \xi_1) l + (\eta_1' - \eta_1) k}, \qquad (48)$$

$$k_2 = -\frac{k}{(\xi_1' - \xi_1) l + (\eta_1' - \eta_1) k},$$

a więc liczby k_1, k_2 są wymierne.

§ **13.** Otrzymane wyniki możemy zawrzeć w następującem twierdzeniu:

Twierdzenie. Równania różniczkowe (4) mogą posiadać całki postaci

$$y_1 = v_1 x^{\mu_1} (\log x)^{k_1}, \qquad y_2 = v_2 x^{\mu_2} (\log x)^{k_2},$$

odpowiadające danej ścianie bocznej S wielościanu Puiseux'-go i jednej z jego krawędzi K, gdzie μ_1, μ_2 są liczby wymierne dodatnie, k_1, k_2 liczby wymierne. Funkcye v_1, v_2 dają się rozwinąć jako szeregi jednostajnie zbieżne kolejnych przybliżeń, dążą — gdy x po oznaczonej stycznej zmierza do początku — do oznaczonych od zera różnych wartości $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$.

Te wielkości $v^{(0)}_1$, $v_2^{(0)}$ wyznaczają się z równań

$$\Psi^{(1)}(V^{(0)}) = \mu_1 \Phi(V^{(0)}) - \Phi^{(1)}(V^{(0)}) = 0,$$

$$\Psi^{(2)}(V^{(0)}) = \mu_2 \Phi(V^{(0)}) - \Phi^{(2)}(V^{(0)}) = 0, \qquad (49)$$

$$\frac{\partial \Psi^{(1)}(V^{(0)})}{\partial V^{(0)}} [v_1^{(0)^{\xi_1'}} v_2^{(0)^{\eta_1'}} \Psi'^{(2)}(V^{(0)}) + k_2 v_1^{(0)^{\xi_1}} v_2^{(0)^{\eta_1}} \Phi(V^{(0)})]$$

$$-\frac{\partial \Psi^{(2)}(V^{(0)})}{\partial V^{(0)}} [v_1^{(0)^{\xi_1'}} v_2^{(0)^{\eta_1'}} \Psi'^{(1)}(V^{(0)}) + k_1 v_1^{(0)^{\xi_1}} v_2^{(0)^{\eta_1}} \Psi(V^{(0)})] = 0,$$

w których $V^{(0)} = {v_1^{(0)}}^{-k} \, {v_2^{(0)}}^{l}$ i liczby k_1, k_2 są całkowitemi. Potrzebny jest przeto jeden jedyny warunek, aby dwa pierwsze równania (49) posiadały wspólne rozwiązanie. Istnieje wtedy skończona liczba układów wartości $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$. Jeżeli część rzeczywista liczby stałej A, odpowiadającej układowi liczb $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$, jest dodatnia, to zależnie od tego, czy część rzeczywista drugiej stałej liczby C jest ujemna lub dodatnia, istnieje jedna całka lub pojedyńczo nieskończona liczba całek. Jeżeli zaś część rzeczywista liczby A jest ujemna, to wtedy, gdy część rzeczywista liczby C jest ujemna, liczba całek jest pojedyńczo nieskończona; gdy ta część jest dodatnia, to podwójnie nieskończona.

Jeżeli

$$\bar{\alpha}_1,\ \bar{\alpha}_2,\ \bar{\beta};\qquad \bar{\alpha}_1',\ \bar{\alpha}_2',\ \bar{\beta}';\qquad \bar{\alpha}_1'',\ \bar{\alpha}_2'',\ \bar{\beta}'',$$

są spółrzędne trzech punktów R, R', R'', leżących na ścianie bocznej, przyczem R, R' leżą na krawędzi K, wtedy wyznaczamy μ_1, μ_2 z równań

$$\mu_1 (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1') + \mu_2 (\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2') + (\bar{\beta} - \bar{\beta}') = 0,$$

$$\mu_1 (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1'') + \mu_2 (\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2'') + (\bar{\beta} - \bar{\beta}'') = 0$$

i otrzymujemy:

$$\mu_1 = \frac{(\bar{\alpha}_2'' - \bar{\alpha}_2')\,\bar{\beta} + (\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2'')\,\bar{\beta}' + (\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2)\,\bar{\beta}''}{M},$$

$$\mu_2 = \frac{(\bar{\alpha}_1' - \bar{\alpha}_1'')\,\bar{\beta} + (\bar{\alpha}_2'' - \bar{\alpha}_1)\,\bar{\beta}' + (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_1')\,\bar{\beta}''}{M},$$

$$M = \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2' - \bar{\alpha}_1' \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2'' - \bar{\alpha}_1'' \bar{\alpha}_2' + \bar{\alpha}_1'' \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2'',$$

$$k_1 = -\frac{\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2'}{M}, \qquad k_2 = -\frac{\alpha_1' - \alpha_1}{M}.$$

III. Całki podwójnie logarytmowe układu dwu równań różniczkowych.

§ **14.** Przechodzimy teraz do pytania o istnieniu i przedstawialności przez szeregi nieskończone kolejnych przybliżeń całek podwójnie logarytmowych postaci (6), przyjmując, że μ_1, μ_2 należą do uważanej ściany bocznej, k_{11} i k_{21} zaś do poprzednio również uważanej krawędzi, a więc są proporcyonalne do liczb k_1, k_2.

Jeżeli do równań (4) wstawimy wyrażenie (6) i położymy jeszcze $\log x = \frac{1}{u}$, otrzymamy następujące dwa równania, dające się otrzymać z równań (15) poprzedzającego rozdziału, jeżeli w nich v_1, v_2 zastąpimy przez $v_1 \left(\log \frac{1}{u}\right)^{k_{12}}$, $v_2 \left(\log \frac{1}{u}\right)^{k_{22}}$:

$$\left[\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k_{11}(\alpha_1+1) - k_{21}\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{k_{12}(\alpha+1) + k_{22} k_2} + e^{\frac{\sigma}{u}} F_1(v_1, v_2, u)\right] u^2 \frac{dv_1}{du}$$

$$= v_1 \left[\mu_1 + k_{11} u + k_{12} u \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1}\right] \cdot \left[\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k_{11}(\alpha_1+1) - k_{21}\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{k_{12}(\alpha_1+1) + k_{22}\alpha_2}\right.$$

$$\left. + e^{\frac{\sigma}{u}} F_1(v_1, v_2, u)\right] - \left[\Sigma A^{(1)} v_1^{\alpha_1^{(1)}} v_2^{\alpha_2^{(1)}} u^{-k_{11}\alpha_1^{(1)} - k_{2,}\alpha_2^{(1)}} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{k_{12}\alpha_2^{(1)} + k_{22}\alpha_2^{(1)}}\right.$$

$$\left. + e^{\frac{\sigma^{(1)}}{u}} F^{(1)}(v_1, v_2, u)\right], \tag{50}$$

$$\left[\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k_{11}\alpha_1 - k_{21}(\alpha_1+1)} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{k_{12}\alpha_1 + k_{22}(\alpha_2+1)} + e^{\frac{\sigma}{u}} F_2(v_1, v_2, u)\right] u^2 \frac{dv_2}{du}$$

$$= v_2 \left[\mu_2 + k_{21} u + k_{22} u \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1}\right] \left[\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} u^{-k_{11}\alpha_1 - k_{21}(\alpha_2+1)} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{k_{12}\alpha_1 + k_{22}(\alpha_2+1)}\right.$$

$$\left. + e^{\frac{\sigma}{u}} F_2(v_1, v_2, u)\right] - \left[\Sigma A^{(2)} v_1^{\alpha_1^{(2)}} v_2^{\alpha_2^{(2)}} u^{-k_{21}\alpha_1^{(2)} - k_{21}\alpha_2^{(2)}} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{k_{12}\alpha_2^{(2)} + k_{22}\alpha_2^{(2)}}\right.$$

$$\left. + e^{\frac{\sigma^{(2)}}{u}} F^{(2)}(v_1, v_2, u)\right].$$

Liczby k_{11}, k_{21} — dla ustalenia myśli — przyjmijmy za ujemne. Uważajmy kierunek φ, którego funkcye kierunkowe $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ za obie dodatnie

$$\rho \cos\varphi = -k_{11}, \qquad \rho \sin\varphi = -k_{21}$$

i przez punkt końcowy wielokąta poprowadźmy w płaszczyźnie spółrzędnych $\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2$ prostą LL o równaniu

$$(x - \xi_1)\cos\varphi' + (y - \eta_1)\sin\varphi' = 0,$$

gdzie przez φ' oznaczamy kierunek normalnej do prostej LL z osią $\bar{\alpha}_1$. Bierzemy k_{12}, k_{22} proporcyonalnie do $\cos\varphi'$, $\sin\varphi'$, kładąc

$$\rho' \cos \varphi' = - k_{12}, \quad \rho' \sin \varphi' = - k_{22}. \tag{51}$$

Niechaj $\overline{LL}$ będzie prosta ruchoma równoległa do LL. Jeżeli $\bar{d}'$ jest odległością prostej $\overline{LL}$ od początku, liczona dodatnio w kierunku φ', będzie

$$\bar{d}' = \xi_1 \cos \varphi' + \eta_1 \sin \varphi',$$

a więc

$$\rho' \bar{d}' = - k_{12} (\alpha_1+1) - k_{22} (\alpha_2+1) = - k_{12} \alpha_1^{(1)} - k_{22} (\alpha_2^{(1)}+1)$$
$$= - k_{12} (\alpha_1^{(2)}+1) - k_{22} \alpha_2^{(2)},$$

jeżeli punkty α_1+1, α_2+1; $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}+1$; $\alpha_1^{(2)}+1$, $\alpha_2^{(2)}$ leżą na prostej $\overline{LL}$. Oznaczmy przez d' odległość prostej LL, przechodzącej przez punkt P, od początku. Jeżeli ρ' jest dodatnie, wtedy wykładniki wielkości $\log \frac{1}{u}$ w równaniach (50) maleją, gdy odległość prostej $\overline{LL}$ od początku rośnie. Dlatego $\overline{LL}$ musi przecinać oś α_2, jeżeli do punktu P figury należeć mają największe wykładniki wielkości $\log \frac{1}{u}$.

Jeżeli podzielimy równania (50) przez

$$u^{\rho d + k_{21}} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' d' - k_{22}}$$

i odpowiednio przez

$$u^{\rho d + k_{11}} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' d' - k_{12}},$$

otrzymamy równania:

$$\left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho (d' - d')} + \ldots\right] u^2 \frac{d v_1}{d u}$$
$$= v_1 \left[\mu_1 + k_{11} u + k_{12} u \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1}\right] \left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}' - d')} + \ldots\right]$$
$$- \left[A^{(1)^{(P)}} v_1^{\alpha_1^{(1)^{(P)}}} v_2^{\alpha_2^{(1)^{(P)}}} + \Sigma A^{(1)} v_1^{\alpha_1^{(1)}} v_2^{\alpha_2^{(1)}} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}^{(1)} - d')} + \ldots\right],$$
$$\left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}' - d')} + \ldots\right] u^2 \frac{d v_2}{d u} \tag{52}$$
$$= v_2 \left[\mu_2 + k_{21} u + k_{22} u \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1}\right] \left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v^{\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}' - d')} + \ldots\right]$$
$$- \left[A^{(2)^{(P)}} v_1^{\alpha_1^{(2)^{(P)}}} v_2^{\alpha_2^{(2)^{(P)}}} + \Sigma A^{(2)} v_1^{\alpha_1^{(2)}} v_2^{\alpha_2^{(2)}} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}^{(2)} - d')} + \ldots\right].$$

Tu oznacza (P), że odpowiednie wyrazy należą do punktu P wielokąta. Jeżeli v_1, v_2 mają zmierzać ku zupełnie oznaczonym różnym od zera wartościom $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$, to z równań (52) wynika, że jeżeli prosta $\overline{LL}$ nie ma się zlewać z bokiem PQ wielokąta, muszą spełniać się teraz koniecznie warunki

$$\mu_1 A^{(P)} - A^{(1)^{(P)}} = 0, \qquad \mu_2 A^{(P)} - A^{(2)^{(P)}} = 0. \tag{53}$$

To znaczy, że punkt P musi być punktem potrójnym. Zakładamy przytem, że $A^{(P)}$ jest różne od zera, wyłączając wprost przypadek, w którym to nie ma miejsca.

Rozpatrzmy teraz tę prostą równoległą do $\overline{LL}$, która przechodzi przez punkt najbliższy punktowi P na boku PQ. Z równań (52) wynika wtedy, że i ten punkt musi być potrójny, i podobnież wszystkie punkty, leżące na boku PQ, muszą być potrójne. Spełniają się przeto warunki postaci

$$\mu_1 A_i - A_i^{(1)} = 0, \qquad \mu_2 A_i - A_i^{(2)} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \ldots \tag{54}$$

jeżeli punkty od P do Q będziemy kolejno numerowali.

Teraz układ (52) przyjmuje postać:

$$\left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}' - d')} + \ldots\right] u^2 \frac{d v_1}{d u}$$
$$= u v_1 \left[k_{11} + k_{12} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1}\right] \left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}' - d')} + \ldots\right]$$
$$+ \mu_1 v_1 \left[A^{(R)} v_1^{\alpha_1^{(R)}} v_2^{\alpha_2^{(R)}} u^{\rho (\bar{d} - d)} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (d'^{(R)} - d')} + \ldots\right]$$
$$- \left[A^{(1)^{(R)}} v_1^{\alpha_1^{(1)^{(R)}}} v_2^{\alpha_2^{(1)^{(R)}}} u^{\rho (\bar{d} + d)} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}'^{(R)^{(1)}} - d')} + \ldots\right];$$
$$\left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}' - d)} + \ldots\right] u^2 \frac{d v_2}{d u} \tag{55}$$
$$= u v_2 \left[k_{21} + k_{22} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1}\right] \left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v^{\alpha_2} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (\bar{d}' - d')} + \ldots\right]$$
$$+ \mu_2 v_2 \left[A^{(R)} v_1^{\alpha_1^{(R)}} v_2^{\alpha_2^{(R)}} u^{\rho (\bar{d} - d)} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-\rho' (d'^{(R)} - d')} + \ldots\right]$$
$$- \left[A^{(2)^{(R)}} v_1^{\alpha_1^{(2)^{(R)}}} v_2^{\alpha_2^{(2)^{(B)}}} u^{-\rho' (\bar{d} - d')} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\rho' (d'^{(R)^{(2)}} - d')} + \ldots\right].$$

Ponieważ $A^{(P)}$ jest różne od zera, przeto $\rho (\bar{d} - d)$ nie może być większe od 1. Gdyby było mniejsze od 1, wtedy, jak to łatwo widzieć, musiałyby wszystkie punkty, leżące na przechodzącej przez punkt R najbliższej równoległej do boku PQ, być punktami potrójnemi, musiałyby zatem spełniać się warunki następujące:

$$\mu_1 A_2^{(II)} - A_i^{(1)^{(II)}} = 0, \qquad \mu_2 A_i^{(II)} - A_i^{(2)^{(II)}} = 0, \tag{56}$$

gdzie skaźnik (II) oznaczać ma, że idzie właśnie o punkty, znajdujące się na pierwszej prostej równoległej do boku PQ. Musiałyby w takim razie istnieć dalsze punkty boku wielokąta, którym odpowiada takie $\bar{d}$, iż $\rho(\bar{d}-d)=1$, bo inaczej nie kompensowałyby się wyrazy, zawierające u w naszych równaniach. Jest więc ogólnie:

$$\rho(\bar{d}-d) = 1, \tag{57}$$

gdzie $\bar{d}$ odpowiada właśnie prostej, przechodzącej przez punkt R. Stąd wyznaczamy ρ, jak w przypadku całek pojedyńczo-logarytmowych, mianowicie:

$$\rho = \frac{1}{\bar{d}-d}. \tag{58}$$

Teraz można już obie strony równań (52) podzielić przez u. Wtedy w tych równaniach po prawej stronie będziemy mieli różne wyrazy, zawierające $\log\frac{1}{u}$ z różnemi wykładnikami.

Należy tu rozpatrzeć następujące przypadki: wielkość $d'^{(R)} - d'$ może być dodatnia, równa zeru lub ujemna. Gdyby była dodatnia, wtedy wyrazy, zawierające $A^{(P)}$, nie kompensowałyby się. Gdyby była ujemna, wtedy musiałyby być punktami potrójnemi wszystkie punkty, leżące po tej stronie prostej LL, po której znajduje się początek O, aby mogły kompensować się wzajemnie wyrazy po prawej stronie równań (55). Punkt R jest naturalnie tym punktem płaszczyzny $\bar{\alpha}^{(1)}\bar{\alpha}^{(2)}$, który leży na najbliższej równoległej do boku PQ, a mianowicie pierwszym punktem w kierunku równoległym do PQ. Punkt R nie powinien oczywiście leżeć na boku wielokąta, tak że linia LL niekoniecznie musi się zlewać z bokiem PR wielokąta, ale wszystkie punkty, leżące na przechodzącej przez punkt R równoległej do boku PQ, znajdują się po tej samej stronie prostej LL. Liczby k_{12}, k_{22} — poza czynnikiem ρ' — można wyznaczyć z warunku

$$d'^{(R)} = d'. \tag{59}$$

Jeżeli punkt R jest punktem, odpowiadającym lewej stronie równań (4) (punkt lewy), wtedy mamy następujące dwa warunki:

$$A^{(R)}\mu_1 v_1^{(0)\alpha_1^{(R)}+1} v_2^{(0)\alpha_2^{(R)}} + A^{(P)} k_{11} v_1^{(1)\alpha_1^{(P)}+1} v_2^{(0)\alpha_2^{(P)}} = 0,$$

$$A^{(R)}\mu_2 v_1^{(0)\alpha_1^{(R)}} v_2^{(0)\alpha_2^{(R)}+1} + A^{(P)} k_{21} v_1^{(0)\alpha_1^{(P)}} v_2^{(0)\alpha_2^{(P)}+1} = 0;$$

stąd wynika: $\mu_1 k_{21} - \mu_2 k_{11} = 0$,

co w ogólności zachodzić nie będzie, gdyż byłoby wtedy $\beta' = \beta$. W przypadku **ogólnym** punkt R będzie przeto przynajmniej punktem podwójnym. Załóżmy, że jest on punktem prawym pierwszym lub prawym drugim, t. j. że odpowiada prawym stronom obu równań (4). Wtedy spełniają się oba warunki:

$$\begin{aligned} &A^{(r)(R)} v_1^{(0)\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{(0)\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} - A^{(P)} k_{11} = 0, \\ &A^{(2)(R)} v_1^{(0)\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{(0)\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} - A^{(P)} k_{21} = 0; \end{aligned} \tag{60}$$

będzie tedy

$$A^{(1)(R)} k_{21} - A^{(2)(R)} k_{11} = 0.$$

Równania (55) otrzymują teraz postać następującą:

$$\begin{aligned} &\left[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(1)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(\bar{d}'-d')} + \dots\right] u\frac{dv_1}{du} \\ &= v_1\left[k_{11} + k_{12}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1}\right]\left[\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(\bar{d}'-d')} + \dots\right] \\ &+ k_{12}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1} A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}+1} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \left[k_{11}A^{(P)} - A^{(1)^{(R)}} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}}\right] v_1^{\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(P)}-1} \\ &+ \mu_1 v_1\left[\Sigma A^{(II)} v_1^{\alpha_1^{(II)}} v_2^{\alpha_2^{(II)}}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho' d'^{(II)}-d')} + \dots\right] \\ &- v_1\left[\Sigma A^{(1)^{(II)}} v_1^{\alpha_1^{(1)^{(II)}}} v_2^{\alpha_2^{(1)^{(II)}}}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'^{(1)^{(II)}}-d')} + \dots\right]; \\ &A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(\bar{d}'-d)} + \dots\Big] u\frac{dv_2}{du} \\ &= v_2\left[k_{21} + k_{22}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1}\right]\left[\Sigma A v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(\bar{d}'-d')} + \dots\right] \\ &+ k_{22}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1} A^{(P)} (v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}+1} + \left[k_{21}A^{(P)} - A^{(2)^{(R)}} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}}\right] v_1^{\xi^{(P)}-1} v_2^{\eta^{(P)}} \\ &+ \mu_2 v_2\left[\Sigma A^{(II)} v_1^{\alpha_1^{(II)}} v_2^{\alpha_2^{(II)}}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(\bar{d}'^{(II)}-d')} + \dots\right] \\ &- v_2\left[\Sigma A^{(2)^{(II)}} v_1^{\alpha_1^{(2)^{(II)}}} v_2^{\alpha_2^{(2)^{(II)}}}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(\bar{d}'^{(2)^{(II)}}-d')} + \dots\right]. \end{aligned} \tag{61}$$

Położmy:

$$\log\frac{1}{u}=\frac{1}{t}\,,\qquad -\frac{du}{u}=-\frac{dt}{t^2}\,;\tag{62}$$

ponieważ u dąży do zera w ten sposób, że $\frac{u'}{u''}$ dąży do nieskończoności, to teraz t zmierza do zera w ten sposób, że, gdy położymy $t=t'+it''$, wtedy z równości

$$t=t'+it''=-\frac{1}{\log u}=-\frac{1}{\log(u'+iu'')}=-\frac{1}{\log u'+\log\left(1+i\frac{u''}{u'}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\log u'+i\frac{u''}{u'}(1+\varepsilon(u))}=-\frac{1}{\log u'}\left[1+\varepsilon(u)\right]$$

$$=-\frac{1}{\log(-u')-\log(-1)}\left[1+\varepsilon(u)\right]=-\frac{1}{\log(-u')}\left(1+\varepsilon(u)\right)$$

ponieważ $u'<0$, wynika, że $t'>0$ i że t tak zdąża do zera, iż stosunek $\frac{t''}{t'}$ zmierza do zera.

Wprowadźmy zmienne

$$v_1-v_1^{(0)}=\zeta_1\,,\qquad v_2-v_2^{(0)}=\zeta_2\,,\tag{63}$$

a otrzymamy równania:

$$\begin{aligned}
&\left[A^{(P)}v_1^{\alpha_1^{(P)}}v_2^{\alpha_2^{(P)}}+\ldots\right]t^2\frac{d\zeta_1}{dt}=v_1(k_{11}+k_{12}t)\left[\Sigma A\,v_1^{\alpha_1}v_2^{\alpha_2}t^{\rho'(\bar d'-d')}+\ldots\right]\\
&\quad+k_{12}A^{(P)}v_1^{\alpha_1^{(P)}+1}v_2^{\alpha_2^{(P)}}t+v_1(\alpha_1\zeta_1+\beta_1\zeta_2+\ldots)\\
&\quad+\mu_1 v_1\left[\Sigma A^{(II)}v_1^{\alpha_1^{(II)}}v_2^{\alpha_2^{(II)}}t^{\rho(d'^{(II)}-d')}+\ldots\right]\\
&\quad-v_1\left[\Sigma A^{(1)^{(II)}}v_1^{\alpha_1^{(1)^{(II)}}}v_2^{\alpha_2^{(1)^{(II)}}}t^{\rho'(d'^{(1)^{(II)}}-d')}+\ldots\right];\\
&\left[A^{(P)}v_1^{\alpha_1^{(P)}}v_2^{\alpha_2^{(P)}}+\ldots\right]t^2\frac{d\zeta_2}{dt}=v_2(k_{21}+k_{22}t)\left[\Sigma A\,v_1^{\alpha_1}v_2^{\alpha_2}t^{\rho'(\bar d'-d')}+\ldots\right]\\
&\quad+k_{22}A^{(P)}v_1^{\alpha_1^{(P)}}v_2^{\alpha_2^{(P)}+1}+v_2(\alpha_2\zeta_1+\beta_2\zeta_2+\ldots)\\
&\quad+\mu_2 v_2\left[\Sigma A^{(II)}v_1^{\alpha_1^{(II)}}v_2^{\alpha_2^{(II)}}t^{\rho'(d'^{(II)}-d')}+\ldots\right]\\
&\quad-v_2\left[\Sigma A^{(2)^{(II)}}v_1^{\alpha_1^{(2)^{(II)}}}v_2^{\alpha_2^{(2)^{(II)}}}t^{\rho'(d'^{(2)^{(II)}}d')}+\ldots\right],
\end{aligned}\tag{64}$$

gdzie $\alpha_1:\alpha_2=\beta_1:\beta_2$. Otrzymujemy zatem równania, podobne do tych, które otrzymaliśmy już w cytowanej, mającej ukazać się, pracy.

Mamy oczywiście:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{A^{(1)^{(R)}}}{A^{(2)^{(R)}}}=\frac{k_{11}}{k_{21}}\,,$$

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}}{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}}\cdot\frac{v_2^{(0)}}{v_1^{(0)}}\,,$$

$$\frac{k_{12}}{k_{22}}=\frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'}=\frac{-\sin\left(\varphi'-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\varphi'-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\eta^{(P)}-\eta^{(R)}}{\xi^{(P)}-\xi^{(R)}}\,.$$

Pomnóżmy równania (64) przez $\frac{k_{21}}{v_2}$, $\frac{k_{11}}{v_2}$ i odejmijmy je od siebie; jeżeli położymy jeszcze

$$V=v_1^{k_{21}}v_2^{-k_{11}}\,,$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned}
&\left[A^{(P)}v_1^{\alpha_1^{(P)}}v_2^{\alpha_2^{(P)}}+\ldots\right]t^2\frac{d\log V}{dt}=(k_{21}k_{12}-k_{11}k_{22})\,t\left[\Sigma A\,v_1^{\alpha_1}v_2^{\alpha_2}t^{\rho'(\bar d'-d')}+\ldots\right]\\
&\quad+(k_{12}k_{21}-k_{22}k_{11})\,t\,A^{(P)}v_1^{\xi^{(P)}-1}v_2^{\eta^{(P)}-1}\\
&\quad+(\mu_1k_{21}-\mu_2k_{11})\left[\Sigma A^{(II)}v_1^{\alpha_1^{(II)}}v_2^{\alpha_2^{(II)}}t^{\rho'(d'^{(II)}-d')}+\ldots\right]\\
&\quad-k_{21}\left[\Sigma A^{(1)^{(II)}}v_1^{\alpha_1^{(1)^{(II)}}}v_2^{\alpha_2^{(1)^{(II)}}}t^{\rho'(d'^{(1)^{(II)}}-d')}+\ldots\right]\\
&\quad+k_{11}\left[\Sigma A^{(2)^{(II)}}v_1^{\alpha_1^{(2)^{(II)}}}v_2^{\alpha_2^{(2)^{(II)}}}t^{\rho'(d'^{(2)^{(II)}}-d')}+\ldots\right].
\end{aligned}\tag{65}$$

Ponieważ $\varphi'\neq\varphi$, przeto widocznie $k_{21}k_{12}-k_{11}k_{22}\neq 0$, a według założenia jest $\mu_2k_{21}-\mu_2k_{11}\neq 0$.

Mnożymy teraz równania (61) przez $\frac{k_{22}}{v_1}$, $\frac{k_{22}}{v_2}$ i odejmujemy od siebie; kładąc jeszcze

$$W=v_1^{k_{22}}v_2^{-k_{12}}\,,$$

gdzie W jest oczywiście niezależne od V, otrzymamy

$$
\begin{aligned}
[A^{(P)} v_1^{\alpha_1^{(P)}} v_2^{\alpha_2^{(P)}} + \ldots] \, t^2 \frac{d \log W}{dt} &= (k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12}) \, [\Sigma A \, v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} t^{\rho'(d'-d')} + \ldots] \\
&+ (k_{22} k_{11} - k_{12} k_{21}) (A^{(P)} - l \, W^{\mu}) \, v_1^{\xi_1} v_2^{\eta_1} \\
&+ (\mu_1 k_{22} - \mu_2 k_{12}) \, [\Sigma A^{(II)} v_1^{\alpha_1^{(II)}} v_2^{\alpha_2^{(II)}} t^{\rho'(d'^{(II)} - d')} + \ldots] \\
&- k_{22} \, [\Sigma A^{(1)^{(II)}} v_1^{\alpha_1^{(1)^{(II)}}} v_2^{\alpha_2^{(1)^{(II)}}} t^{\rho'(d'^{(1)^{(II)}} - d')} + \ldots] \\
&+ k_{12} \, [\Sigma A^{(2)^{(II)}} v_1^{\alpha_1^{(2)^{(II)}}} v_2^{\alpha_2^{(2)^{(II)}}} t^{\rho'(d'^{(2)^{(II)}} - d')} + \ldots].
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Tu l i μ oznaczają:

$$
l = \frac{A^{(1)^{(R)}}}{k_{11}} = \frac{A^{(2)^{(R)}}}{k_{21}},
$$

$$
\mu = \frac{\xi^{(R)} - \xi^{(P)}}{k_{22}} = \frac{\eta^{(P)} - \eta^{(R)}}{k_{12}}.
$$

Z równań (66) wynika teraz, co następuje. Przyjmujemy, że na prostej, przez punkt R biegnącej równolegle do boku $\overline{PQ}$, punkt lewy jest najbliższym sąsiednim punktu R. Wtedy wynika koniecznie z równań (65):

$$
\rho' (d'^{(II)} - d') = 1, \tag{67}
$$

skąd:

$$
\rho' = \frac{1}{d'^{(II)} - d'}. \tag{68}
$$

Dalej $v_2^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ czynią zadość równaniu

$$
(k_{21} k_{12} - k_{11} k_{22}) \, A^{(P)} v_1^{(0)^{\xi^{(P)} - 1}} v_2^{(0)^{\eta^{(P)} - 1}} + (\mu_1 k_{21} - \mu_2 k_{11}) \, A^{(II)} v_1^{(0)^{\alpha_1^{(II)}}} v_2^{(0)^{\alpha_2^{(II)}}} = 0, \tag{69}
$$

które razem z równaniem

$$
l \, v_1^{(0)^{\xi^{(R)} - \xi^{(P)}}} v_2^{(0)^{\eta^{(R)} - \eta^{(P)}}} - A^{(P)} = 0 \tag{70}
$$

prowadzi do skończonej liczby rozwiązań na $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$.

Zachodzą równości:

$$
d'^{(II)} - d' = (\xi^{(II)} - \xi^{(R)}) \cos \varphi' + (\eta^{(II)} - \eta^{(R)}) \sin \varphi',
$$

$$
- (\xi^{(II)} - \xi^{(R)}) \, k_{12} - (\eta^{(II)} - \eta^{(R)}) \, k_{22} = 1,
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k_{12}} &= - (\xi^{(II)} - \xi^{(R)}) - (\eta^{(II)} - \eta^{(R)}) \frac{\xi^{(R)} - \xi^{(P)}}{\eta^{(P)} - \eta^{(R)}} \\
&= - \frac{(\xi^{(II)} - \xi^{(R)}) (\eta^{(P)} - \eta^{(R)}) - (\eta^{(II)} - \eta^{(R)}) (\xi^{(P)} - \xi^{(R)})}{\eta^{(P)} - \eta^{(R)}}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{k_{22}} = - \frac{(\xi^{(II)} - \xi^{(R)}) (\eta^{(P)} - \eta^{(R)}) - (\eta^{(II)} - \eta^{(R)}) (\xi^{(P)} - \xi^{(R)})}{\xi^{(R)} - \xi^{(P)}}.
$$

Tym sposobem wielkości k_{12}, k_{22} są wymierne.

16. Jeżeli do równań (65), (66) wprowadzimy, jako funkcye niewiadome wielkości

$$
Z_1 = V - V^{(0)}, \quad Z_2 = W - W^{(0)}, \tag{71}
$$

wtedy otrzymamy dwa równania następującego typu, które traktować będziemy przy pomocy przybliżeń kolejnych:

$$
\begin{aligned}
t \frac{dZ_1}{dt} &= A Z_1 + B Z_2 + \varphi_1 (Z_1, Z_2, t) \\
t^2 \frac{dZ_2}{dt} &= C Z_2 + \varphi_2 (Z_1, Z_2, t),
\end{aligned}
\tag{72}
$$

gdzie A, B, C są wogólności liczbami różnemi od zera, funkcye zaś φ_1, φ_2 zawierają wyrazy z całkowitemi dodatniemi potęgami wielkości Z_1, Z_2 oraz wyrazy wolne od Z_1, Z_2 i zawierające tylko t. Przyczem oczywiście φ_1, φ_2 zawierają pierwsze potęgi wielkości Z_1, Z_2, pomnożone przez funkcye zmiennej t, zmierzające do zera. Wszystkie spółczynniki potęg wielkości Z_1, Z_2 są rzędu $\leqslant$ rzędu wielkości t^{μ}, gdzie μ jest liczba stała, t. j. są bezwzględniejsze od $|t|^{\mu}$.

Teraz można już odrazu zastosować przybliżenia kolejne, które funkcyom Z_1, Z_2, a więc i funkcyom ζ_1, ζ_2 nadają postać wiadomą.

Wspólny mianownik wyrażeń k_{12} i k_{22}, mianowicie:

$$
\xi^{(P)} \cdot \eta^{(R)} - \xi^{(R)} \eta^{(P)} + \xi^{(R)} \eta^{(II)} - \xi^{(II)} \eta^{(R)} + \xi^{(II)} \eta^{(P)} - \xi^{(P)} \eta^{(II)},
$$

podobnie jak i mianownik M wyrażeń na μ_1, μ_2, k_{11}, k_{21}, jest wielokrotnością liczby całkowitej, wyrażającej podwójne pole trójkąta, którego wierzchołkami są dwa punkty, leżące najbliżej od siebie na prostej $\overline{PQ}$ sieci znajdującej się w płaszczyźnie $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$, a punkt trzeci jest punktem R najbliższej równoległej do prostej PQ. Liczba μ w wyrażeniu W^{μ} (równanie 66) jest liczbą całkowitą.

Równania aproksymacyjne równań (72) są, jak wiadomo, postaci:

$$\begin{aligned} t\frac{dZ_1^{(i)}}{dt} &= AZ_1^{(i)} + BZ_2^{(i-1)} + \varphi_1(Z_1^{(i-1)}, Z_2^{(i-1)}, t), \\ t^2\frac{dZ_2^{(i)}}{dt} &= CZ_2^{(i)} + \varphi_2(Z_1^{(i-1)}, Z_2^{(i-1)}, t); \end{aligned} \tag{73}$$

całkujemy je według znanej metody:[1]

$$Z_1^{(i)} = t^A\left[Z_1^{(0)} t_0^{-A} \int_{t_0}^{t} \frac{BZ_2^{(i-1)} + \varphi_1(Z_1^{(i-1)}, Z_2^{(i-1)}, t)}{t}\, t^{-A}\, dt\right],$$

$$Z_2^{(i)} = e^{-\frac{C}{t}}\left[Z_2^{(0)} e^{\frac{C}{t_0}} + \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_2(Z_1^{(i-1)}, Z_2^{(i-1)}, t)}{t^2}\, e^{\frac{C}{t}}\, dt\right]$$

$$i = 1, 2, \ldots; \quad Z_1^{(0)} = Z_2^{(0)} = 0.$$

Jeżeli części rzeczywiste spółczynników A, C są dodatnie, otrzymujemy wtedy ∞^2 całek, gdyż wartości początkowe $Z_1^{(0)}$, $Z_2^{(0)}$ wielkości Z_1, Z_2 dla $t = t_0$, można wybrać dowolnie, jeżeli tylko są bezwzględnie dość małe. Jeżeli jedna z części rzeczywistych jest ujemna, mamy wtedy ∞^1 całek; wreszcie mamy tylko jedną całkę, jeżeli części rzeczywiste obu wielkości A i C są ujemne.

Nie przedstawia żadnej trudności przedstawienie spółczynników A i C w formie wyraźnej; zauważymy przytem, że A zawiera jako czynnik wielkości A^{II} i B zaś zawiera czynnik $A^{(2)(C)}$ lub $A^{(2)(R)}$.

Tym sposobem istnienie całek podwójnie logarytmowych postaci (6) zostało udowodnione.

17. Nasze wywody są bardzo niezupełne, pozostawiliśmy bowiem bez uwagi znaczną liczbę interesujących przypadków szczególnych; badanie wyczerpujące tych przypadków nie jest na czasie z tego mianowicie powodu, że przypadek pojedyńczego równania i zwłaszcza jego całek logarytmowych jeszcze dotąd bardzo daleki jest od zupełnego wyczerpania. Ostatnie prace

[1]) Dowód, podany przez Bendixsona w „Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik" t. 5, 1909 w pracy: „Sur les systémes singuliers des systèmes d'équations différentielles; première Note", jest fałszywy, gdyż użyta w niej liczba M, która jest maximum wyrażenia

$$\left|\frac{a_\nu x + \varphi_\nu(x, 0, \ldots 0)}{x^\mu}\right|, \quad 0 \leqq x \leqq \rho_1$$

nie istnieje, gdy $p > 1$.

[2]) Bulletin de la Société mathématique de France, tomy 36, 39; 1908, 1911.

Dulaca[1]) posunęły znacznie nasze wiadomości, dotyczące całek niewymiernych i urojonych równania (1) (t. j. gdy μ jest niewymierne lub urojone w równaniu (3)); podobne rozważania mogłyby być przeprowadzone też i w przypadku naszych całek.

Nietrudno wykazać istnienie całek niewymiernych, gdy więc μ_1, μ_2 a nawet k_{11}, k_{21} mogą być niewymierne.

Kończymy naszą pracę, podając dowód nieistnienia całek podwójnie logarytmowych, odpowiadających bokowi PQ. Twierdzimy tedy, że związek

$$k_{11} : k_{21} = k_{12} : k_{22} = k : l$$

nie jest możliwy.

W samej rzeczy, mamy obecnie $\varphi = \varphi'$ i jeżeli wprowadzimy wyrażenia, użyte wyżej w równaniach (50), mianowicie:

$$\Phi(V), \quad \Phi^{(1)}(V), \quad \Phi^{(2)}(V), \qquad V = v_1^{-k} v_2^{l}, \quad V - V^{(0)} = Z_1,$$

dostaniemy równania:

$$\begin{aligned} &\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} \Phi'(V)\ldots\right] u^2\frac{dv}{du} \\ &= \mu_1 v_1\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} \Phi'(V) + \ldots\right] \\ &\qquad + v_1 u\left[(k_{11} + k_{12})\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1}\right]. \\ &\quad .\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} \Phi'(V) + \ldots\right] \\ &- v_1\left[\Phi^{(1)}(V) + u^{\rho(d'^{(1)}-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'^{(1)}-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} \Phi'^{(1)}(V) + \ldots\right]; \\ &\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} \Phi'(V) + \ldots\right] u^2\frac{dv_2}{du} \\ &= \mu_2 v_2\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} \Phi'(V) + \ldots\right] \\ &\qquad + v_2 u\left[k_{21} + k_{22}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1}\right]. \\ &\quad .\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} \Phi'(V) + \ldots\right] \\ &- v_2\left[\Phi^{(2)}(V) + u^{\rho'(d'^{(2)}-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'^{(2)}-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(B)}-\eta^{(P)}} \Phi'^{(2)}(V) + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{75}$$

[1]) Bulletin de la Société mathématique de France 36, 39; 1908 i 1911.

Otrzymujemy zatem, podobnie jak w przypadku całek pojedyńczo-logarytmowych, warunki:

$$\mu_1 \Phi(V^{(0)}) - \Phi^{(1)}(V^{(0)}) = 0, \qquad \mu_2 \Phi(V^{(0)} - \Phi^{(0)}(V^{(0)}) = 0. \tag{76}$$

Mnożymy teraz równania (75) przez $-\frac{k}{v_1}$, $\frac{l}{v_2}$ i dodajemy; będzie:

$$\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}}\Phi'(V) + \ldots\right] u^2\frac{dZ_1}{du}$$
$$= V\{[(-kL_1^{(1)} + (L_2^{(1)}) Z_1 + \ldots + \ldots + (-kL_1^{(m)} + l L_2^{(m)}) Z_1^m] \tag{77}$$
$$+ u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} [-k\Phi'^{(1)}(V) + l\Psi'^{(2)}(V)]\, v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}}$$
$$+ u^{\rho(d'-d)+\lambda}\varphi(v_1, v_2, u)$$

przy znakowaniach poprzednich. Jeżeli podobnie równania (75) pomnożymy przez $\frac{L_2^{(1)}}{v_1}$, $\frac{L_1^{(1)}}{v_2}$, odejmiemy je od siebie i położymy

$$W = \frac{v_1^{L_2^{(1)}}}{v_2^{L_1^{(1)}}}, \qquad Z_2 = \log\frac{W}{W^{(0)}},$$

otrzymamy:

$$\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(P)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}}\Phi'(V) + \ldots\right] u^2\frac{dZ_2}{du}$$
$$= (L_2^{(1)}L_1^{(2)} - L_1^{(1)}L_2^{(2)}) Z_1^2 + \ldots + (L_2^{(1)}L_1^{(m)} - L_1^{(1)}L_2^{(m)}) Z_1^m$$
$$+ (L_2^{(1)}k_{11} - L_1^{(1)}k_{21})\, u\left[1 + \left(\log\frac{1}{u}\right)\frac{k_{12}}{k_{11}}\right. \tag{78}$$
$$\left[\Phi(V) + u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} + \ldots\right]$$
$$+ u^{\rho(d'-d)}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)} v_1^{\xi^{(R)}-\xi^{(P)}} v_2^{\eta^{(R)}-\eta^{(P)}} \cdot \left[L_2^{(1)}\Psi'^{(1)}(V) - L_1^{(2)}\Psi'^{(2)}(V)\right]$$
$$+ u^{\rho(d'-d)+\lambda}\varphi'(v_1, v_2, u), \qquad \lambda > 0.$$

Z równania (77) wypływa, że $\rho(d'-d)$ nie może być <1, gdyż w takim razie, gdy Z j e s t o z n a c z o n e g o r z ę d u w i e l k o ś c i względem n_1 wynikałoby wtedy, że

$$\int\frac{Z_1\,du}{u^2},$$

jest rzędu wielkości całki

$$\int\frac{du}{u^{2-\rho(d'-d)}}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)},$$

co jednak jest w sprzeczności z równaniem (78), ponieważ w równaniu tem zamiast $\int\frac{Z_1\,du}{u^2}$ występuje $\int\frac{Z_1^2\,du}{u^2}$. Podobnież nie może być $\rho'(d'-d)>1$, gdyż wtedy całka $\int\frac{Z_1\,du}{u^2}$ byłaby skończona, a w równaniu (78) całka $\int\frac{du}{u}$ pozostałaby nieskompensowana. Jest przeto

$$\rho(d'-d) = 1.$$

Wtedy całka $\int\frac{Z_1\,du}{u^2}$ w równaniu (77) jest rzędu całki

$$\int\frac{du}{u\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\rho'(d'-d)}} = -\log\log\left(\frac{1}{u}\right),$$

gdy $\rho'(d'-d) = 1$, zresztą równa

$$-\left(\log\frac{1}{u}\right)^{1-\rho'(d'-d)}.$$

Jeżeli $\rho'>0$, wtedy, ponieważ z równania (77) wynika, że $\int\frac{Z_1\,du}{u^2}$ jest rzędu całki

$$\int\frac{du}{u\left(\log\frac{1}{u}\right)^{\rho'(d'-d)}},$$

nie może być $\int\frac{Z_1^2\,du}{u^2}$ rzędu całki $\int\frac{du}{u}$ z równania (78). Nie może być też $\rho'<0$, wtedy bowiem całka $\int\frac{Z_1^2\,du}{u^2}$ z równania (78) byłaby rzędu całki

$$\int\frac{du}{u}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\rho'(d'-d)},$$

ale tego samego rzędu jest całka $\int\frac{Z_1\,du}{u^\lambda}$, co jest niemożliwe, jeżeli z a ł o ż y m y, że Z_1 tak zmierza do zera, iż $\frac{Z_1}{u^2}$ dąży do pewnej wartości oznaczonej od zera różnej.

Tym sposobem dowiedzione zostało nieistnienie naszych całek i jest to równie prawdopodobnem, wtedy, kiedy nie czyni się żadnych założeń o zachowaniu się funkcyi Z_1, t. j. funkcyj ζ_1 i ζ_2.

Funkcye

$$y_1 = x^{\mu_1} (\log x)^{k_{11}} (\log_2 x)^{k_{12}}, \qquad y_2 = x^{\mu_2} (\log x)^{k_{21}} (\log_2 x)^{k_{22}}, \tag{79}$$

czynią zadość równaniom

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \left[\frac{\mu_1}{x} + \frac{k_{11}}{x \log x} + \frac{k_{12}}{x \log x \log_2 x}\right] y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} &= \left[\frac{\mu_2}{x} + \frac{k_{21}}{x \log x} + \frac{k_{22}}{x \log x \log_2 x}\right] y_2. \end{aligned} \tag{80}$$

Z tych równań można wyeliminować $\log x$ i $\log_2 x$, gdy k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22} są czterema liczbami wymiernemi, których wyznacznik jest odwrotnością liczby całkowitej; ale z pewnością nie można tego uczynić, gdy wyznacznik tych czterech liczb jest równy zeru.

Zusammenfassung.

Die wohlbekannten Arbeiten von Briot und Bouquet, Poincaré, der Herren Picard, Bendixson, Horn, Dulac und vieler anderer Mathematiker über die Natur derjenigen Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades, die den Anfangsbedingungen $x = 0$, $y = 0$ zu genügen haben, für welche die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ unbestimmt wird, haben gezeigt, wie verschieden die Natur der möglichen Integrale ist und welche verschiedenen von vorn herein unerwarteten Umstände eintreten können. Briot und Bouquet halten die ganz natürliche Idee zunächst nach denjenigen Integralen der Differentialgleichung

$$\left(\sum A' y^{\alpha'} x^{\beta'}\right) \frac{dy}{dx} = \sum A y^{\alpha} x^{\beta},$$

in welcher die beiden Summen Polynome oder allgemeine konvergierende Potenzreihen sind. die für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden, zu fragen, die in Bezug auf die unabhängige Variable x von einer bestimmten Grössenordnung sind. Das heisst, sie untersuchten die Frage der Existenz von Integralen der folgenden Gestalt

$$y = v x^{\mu},$$

wo μ eine positive Zahl ist und v eine Funktion von x ist, die mit x gegen Null strebt. Dieselbe Methode, die Existenz gewisser von vorn herein angenommener Integrale der Differentialgleichung zu beweisen wurde dann von den Herren Königsberger, Goursat und Forsyth angewendet, um die Grundlagen für das Studium der analogen Singularität eines Systems mehrerer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades zu schaffen, wo also wieder die unbekannten Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ für $x = 0$, $y = 0$ die Werte $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ annehmen sollen und für diese Anfangsbedingungen die Ableitungen $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinen.

In einer vor mehreren Jahren veröffentlichten Note[1] habe ich die Methode von Briot und Bouquet auf das Studium derjenigen Integrale einer einzigen Differentialgleichung (1) angewendet, die sich in der folgenden Weise darstellen lassen

$$y = v x^{\mu} (\log x)^k,$$

wo μ eine positive, k eine beliebige konstante Zahl ist und die Funktion v von x gegen einen endlichen von Null verschiedenen Wert $v^{(0)}$ strebt, wenn x gegen Null strebt. Ich habe die Existenz diese Integrale unter gewissen Voraussetzungen in Bezug auf die Koefficienten der Gleichung (1) bewiesen. In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mit dem analogen Studium des Systems zweier gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt

$$\begin{aligned} (\Sigma A y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} x^{\beta}) \frac{dy_1}{dx} &= \Sigma A^{(1)} y_1^{\alpha_1^{(1)}} y_2^{\alpha_2^{(1)}} \beta^{(1)}, \\ (\Sigma A y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} x^{\beta}) \frac{dy_2}{dx} &= \Sigma A^{(2)} y_1^{\alpha_1^{(2)}} y_2^{\alpha_2^{(1)}} \beta^{(2)}, \end{aligned}$$

und beweise unter gewissen Voraussetzungen für die Koefficienten der Glieder der Summen dieses Systems die Existenz von folgenden Systemen von Integralen

$$y_1 = v_1 x^{\mu_1} (\log x)^{k_1}, \qquad y_2 = v_2 x^{\mu_2} (\log x)^{k_2}.$$

Es bedeuten hier μ_1, μ_2 zwei positive Zahlen, k_1, k_2 zwei beliebige Zahlen und die beiden Funktionen v_1, v_2 streben gegen zwei von Null verschiedene Zahlen. Es wird eine analytische Darstellung dieser Integrale mit Hilfe der klassischen Methode successiver Approximationen gegeben. Die Zahlen μ sowie die Zahlen k sind sämmtlich rational und zwar entspre-

---

[1] Über singuläre Punkter der Differentialgleichungen erster Ordnung. Göttingen 1908.

chen μ_1, μ_2 einer Seitenfläche des zu dem System (4) gehörenden Puiseux-Polyeders im Raume, die keiner Koordinatenaxe parallel ist, während k_1, k_2 einer Kante dieser Seitenfläche enstprechen.

Ich untersuche weiter die Existenz und Darstellbarkeit durch Reihen successiver Approximationen gewisser Integrale, die man doppelt logarithmische Integrale nennen kann und welche die Gestalt besitzen

$$y_1 = v_1 x^{\mu_1} (\log x)^{k_{11}} (\log_2 x)^{k_{12}}, \qquad y_2 = v_2 x^{\mu_2} (\log x)^{k_{21}} (\log_2 x)^{k_{22}}$$

wo $\log_2 x$ den zweimal genommenen Logarithmus von x bedeutet, μ_1, μ_2 die einer Seitenfläche entsprechenden vorher genannten Zahlen sind, während k_{11}, k_{21} den Zahlen k_{12}, k_{21}, die einer Kante entsprechen, proportional sind, k_{12}, k_{22} a priori beliebige Zahlen sind und sich dann als gleichfalls rationale Zahlen ergeben.

Man könnte ähnlich, wie es Herr Dulac für eine einzige Gleichung (1) getan hat, nach denjenigen Integralen des Systems zweier Gleichungen (4) fragen, bei denen μ_1, μ_2 den Kanten, oder sogar einer einzelnen Ecke der Puiseux-Polyeders entsprechen. Im ersten Falle können die Zahlen μ_1, μ_2 beide irrational sein, so zwar, dass zwischen ihnen eine lineare Beziehung mit rationalen Koefficienten besteht. Im zweiten Falle können beide Zahlen irrational und linear unabhängig sein. Weiter könnte man die Integrale untersuchen, bei denen zwar μ_1 und μ_2 einer Seitenfläche, aber k_{11}, k_{12} eine Ecke, oder μ_1, μ_2 einer Kante, aber k_{11}, k_{21} einer Ecke des Polyeders entsprechen, u. s. w. Man käme denn zu Integralen mit irrationalen Zahlen k_{11}, k_{21}. Auf alle diese Fragen gehen wir aber nicht ein. Den eigentlichen Untersuchungen dieser Arbeit schicken wir eine kurze Ableitung der Resultate der früher von aus verfassten und oben zitierten Note voraus.

ROMUALD WITWIŃSKI.

O układach odwracalnych powierzchni potrójnie ortogonalnych.

Sur les systèmes réversibles des surfaces triplement orthogonales.

WSTĘP.

1. Układy „odwracalne“ powierzchni potrójnie ortogonalnych są to układy, dla których ruch względny trójścianu osi spółrzędnych w odniesieniu do trójścianu trzech normalnych tworzy nowy układ ortogonalny, którego osie, w ten sposób przestawione, są trzema normalnemi. Powierzchnie, które stanowią ten układ, są to cyklidy Dupina.

Układami odwracalnemi zajmował się po raz pierwszy znakomity matematyk francuski Gaston Darboux, który około końca r. 1913 ogłosił w „Comptes Rendus de l'Académie des sciences“ kilka not, dotyczących teoryi tych układów.

Praca niniejsza ma na celu zbadanie tego samego pytania na drodze czysto-geometrycznej; idąc w tym kierunku, bez pomocy Analizy, można osiągnąć znaczną liczbę wyników, otrzymanych przez Darboux'a. Przeprowadzam tutaj rozważanie różnych kształtów, jakie może przybierać układ odwracalny, i dowodzę, że wszystkie układy ortogonalne, składające się wyłącznie z cyklid, mogą być otrzymane przez inwersyę z układu odwracalnego. Dołączam wreszcie kilka uwag odnośnie do tych układów.

Metoda, którą stosuję, jest to metoda Darboux-Combescure'a, polegająca, jak wiadomo, na podzieleniu zagadnienia na dwie części: badamy z początku ruch trzechparametrowy, dokoła wierzchołka stałego, trójścianu trójprostokątnego, którego krawędzie są równoległe do normalnych trzech powierzchni, i następnie poszukujemy sposobu przeniesienia tego trójścianu tak, aby przez zmienianie każdego z trzech parametrów wierzchołek opisywał jednę z powierzchni układu.