gdzie stale

$$\alpha_n + \beta_n > 0 \qquad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zauważymy, że już przed rokiem p. Stefan Mazurkiewicz znalazł przykład krzywej (cantorowskiej i jordanowskiej jednocześnie), której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia rzędu nieskończonego (t. j. w każdym punkcie p krzywej schodzi się nieskończenie wiele kontynuów, będących podmnogościami tej krzywej, z których każde dwa posiadają tylko punkt p jako wspólny).

Przykładu swego p. Mazurkiewicz dotąd drukiem nie ogłosił, a dowód jego jest mi nieznany. Samą krzywą otrzymuje p. Mazurkiewicz, dzieląc kwadrat na 9 mniejszych kwadratów (zapomocą równoległych do boków) i usuwając wnętrze kwadratu środkowego, a z każdym z pozostałych 8-miu kwadratów postępując taksamo jak z pierwotnym kwadratem, i t. d. in infinitum.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

Konstrukcya funkcyi różniczkowalnej, mającej wszędziegęsty zbiór przedziałów stałości.

Sur une fonction dérivable, qui admet un ensemble partout dense de traits d'invariabilité.

Celem noty niniejszej jest podanie przykładu funkcyi, która: 1) jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego przedziału; 2) posiada w danym przedziale wszędziegęsty zbiór przedziałów stałości.

Wiadomo, że istnieją funkcye $f(x)$, różniczkowalne w przedziale $(0, 1)$ a przytem takie, że zbiór zer funkcyi $f'(x)$ — jest w tym przedziale wszędziegęsty [1]. Wykażemy, że można każdej takiej funkcyi przyporządkować funkcyę $F(x)$, określoną i różniczkowalną w pewnym przedziale $(0, 1+\mu)$, i posiadającą w tym przedziale wszędziegęsty zbiór przedziałów stałości.

Oznaczmy przez (A) zbiór zer funkcyi $f'(x)$. Niech będzie

$$\{\alpha_n\} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

przeliczalna podmnogość zbioru (A), wszędziegęsta i nie zawierająca końców przedziału. Określamy trzy ciągi nieskończone:

$$\{\delta_n\}, \tag{2}$$

$$\{\varepsilon_n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

$$\{\eta_n\} \tag{4}$$

w sposób następujący:

---

[1]) Koepcke, Math. Ann. 35, Pompein Math. Ann. 63.

δ_n jest największą liczbą dodatnią, spełniającą warunki:

$$\delta_n \leqq \frac{1}{n}, \tag{5}$$

$$\frac{|f(a_n+\delta_n)-f(a_n)|}{\delta_n} \leqq \frac{1}{2n}. \tag{6}$$

Liczba taka, wobec ciągłości funkcyi $f(x)$ i warunku:

$$f'(a_n) = \lim_{h=0} \frac{f(a_n+h)-f(a_n)}{h} = 0, \tag{7}$$

istnieje dla każdego naturalnego n.

ε_n jest największą liczbą dodatnią, sprawdzającą nierówności:

$$\varepsilon_n \leqq \frac{1}{n}, \qquad \varepsilon_{n+1} \leqq \varepsilon_n, \tag{8}$$

dla której warunek

$$|x-a_n| \leqq \varepsilon_n \tag{9}$$

pociąga za sobą:

$$\frac{|f(x+\delta_n)-f(x)|}{\delta_n} \leqq \frac{1}{n}; \tag{10}$$

liczba taka istnieje dla każdego n, wobec warunku (6) oraz ciągłości funkcyi

$$\frac{f(x+\delta_n)-f(x)}{\delta_n}.$$

Wreszcie:

$$\eta_n = \frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}}. \tag{11}$$

Oznaczmy przez $s(x)$, względnie przez $S(x)$, sumę:

$$\sum_n \eta_n, \tag{12}$$

rozciągniętą na wszystkie wskaźniki n, dla których:

$$a_n < x. \tag{13}$$

względnie na wszystkie wskaźniki n, dla których:

$$a_n \leqq x. \tag{14}$$

Jeżeli $x = a_m$, wówczas:

$$S(x) = s(x) + \eta_m; \tag{15}$$

jeżeli natomiast x jest różne od wszystkich liczb zbioru (1), wówczas:

$$S(x) = s(x). \tag{16}$$

Połóżmy:

$$\mu = S(1) = s(1) \tag{17}$$

i przyporządkujmy każdej liczbie a_n przedział

$$a_n + s(a_n) \leqslant y \leqslant a_n + S(a_n), \tag{18}$$

każdej zaś liczbie x przedziału (0, 1), różnej od wszystkich a_n — liczbę:

$$y = x + s(x) = x + S(x). \tag{19}$$

Na mocy powyższego przyporządkowania każdej liczbie y przedziału $(0,\ 1+\mu)$ odpowiadać będzie jedna i tylko jedna liczba $\varphi(y)$ przedziału (0, 1), przyczem, jak łatwo widzieć, odpowiedniość będzie ciągła. Kładziemy teraz:

$$F(y) = f(\varphi(y)) \qquad 0 \leqq y \leqq 1+\mu. \tag{20}$$

Powiadam, że funkcya $F(y)$ posiada własności żądane.

P o p i e r w s z e: zbiór przedziałów

$$(a_n + s(a_n), \quad a_n + S(a_n)) \tag{21}$$

jest wszędziegęsty w przedziale $(0,\ 1+\mu)$, a każdy z nich jest przedziałem stałości dla funkcyi $\varphi(y)$, a więc i dla funkcyi $F(y)$.

P o w t ó r e: funkcya $F(y)$ jest różniczkowalna w każdym punkcie uważanego przedziału. Istotnie, załóżmy najprzód, że:

$$[f'(x)]_{x=\varphi(y)} = 0. \tag{22}$$

Połóżmy:

$$\varphi(y) = x, \qquad \varphi(y+k) = x+h. \tag{23}$$

Jeżeli $h = 0$, wówczas:

$$\frac{F(y+k)-F(y)}{k} = \frac{f(x)-f(x)}{k} = 0. \tag{24}$$

W przeciwnym razie jest:

$$\operatorname{sgn} h = \operatorname{sgn} k. \tag{25}$$

Jeżeli $h > 0$, wówczas:

$$k \geqq h + [s(x+h) - S(x)] > h; \tag{26}$$

jeżeli $h < 0$:

$$|k| \geqq |h| + |S(x+h) - s(x)| > |h| \tag{27}$$

w każdym więc razie:

$$\left|\frac{F(y+k)-F(y)}{k}\right| = \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \cdot \left|\frac{h}{k}\right| \geqq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \tag{28}$$

Z warunków (22), (28), (24) wynika, że w każdym razie:

$$F'(y) = 0. \tag{29}$$

Załóżmy teraz, że

$$[f'(x)]_{x=\varphi(y)} \neq 0. \tag{30}$$

W tym przypadku jest $\varphi(y)$ różne od wszystkich a_m; co więcej, w ciągu przedziałów:

$$(a_n+\varepsilon_n,\quad a_n-\varepsilon_n) \qquad n=1,2,\ldots \tag{31}$$

istnieje tylko skończona liczba takich przedziałów, które zawierają $\varphi(y)$. Istotnie, gdyby $\varphi(y)$ zawarte było w każdym z nieskończenie wielu przedziałów:

$$(a_{r_n}-\varepsilon_{r_n},\quad a_{r_n}+\varepsilon_{r_n}), \tag{32}$$

wówczas, na mocy określenia liczby ε_{r_n}, mielibyśmy:

$$\left|\frac{f(\varphi(y)+\delta_{r_n})-f(\varphi(y))}{\delta_{r_n}}\right| \leqq \frac{1}{r_n}, \tag{33}$$

a więc, przy uwzględnieniu warunku (5):

$$\lim_{n=\infty} \delta_{r_n} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(\varphi(y)+\delta_{r_n})-f(\varphi(y))}{\delta_{r_n}} = 0, \tag{34}$$

co, wobec różniczkowalności funkcyi $f(x)$, pociąga za sobą:

$$[f'(x)]_{x=\varphi(y)} = 0 \tag{35}$$

w sprzeczności z założeniem (30).

Istnieje więc taka liczba N, że dla $n \geqq N$ leży $\varphi(y)$ nazewnątrz przedziałów $(a_n+\varepsilon_n,\ a_n-\varepsilon_n)$. Zachowując oznaczenia (23), możemy teraz dobrać r tak małe, aby dla $|k| < r$ odpowiednie h sprawdzało nierówności

$$|h| < |x-a_n| \qquad n=1,2,\ldots,N. \tag{36}$$

Oznaczmy przez n_h pierwszą liczbę naturalną, dla której a_n znajduje się w przedziale $(x-|h|,\ x+|h|)$; ponieważ, wobec (36), x jest zewnątrz przedziału $(a_{n_h}-\varepsilon_{n_h},\ a_{n_h}+\varepsilon_{n_h})$, więc:

$$|h| \geqq \varepsilon_{n_h}. \tag{37}$$

Mamy dalej, na podstawie określenia liczby n_h:

$$|h| \leqq |k| \leqq |h| + S(x+|h|) - s(x-|h|)$$

$$\leqq |h| + \sum_{n=n_h}^{\infty} \eta_n \tag{38}$$

$$\leqq |h| + \frac{\varepsilon_{n_h}}{2^{n_h}} \leqq |h|\left(1+\frac{1}{2^{n_h}}\right)$$

$$1 \geqq \frac{|h|}{|k|} \geqq \frac{1}{1+\dfrac{1}{2^{n_h}}}. \tag{39}$$

Jest jednak:

$$\lim_{k=0} h = 0, \tag{40}$$

$$\lim_{h=0} n_h = \infty, \tag{41}$$

a więc:

$$\lim_{k=0} \left|\frac{h}{k}\right| = 1 \tag{42}$$

i tym sposobem, wobec (25):

$$\lim_{k=0} \frac{h}{k} = 1. \tag{43}$$

Stąd wynika:

$$\begin{aligned} \lim_{k=0} \frac{F(y+k)-F(y)}{k} &= \lim_{k=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{h}{k} \\ &= \lim_{k=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{k=0} \frac{h}{k} \\ &= f'(x). \end{aligned} \tag{44}$$

Funkcya $F(y)$ jest więc i w przypadku (30) różniczkowalna, c. b. d. o.

RÉSUMÉ.

Je démontre dans cette note l'existence d'une fonction $f(x)$, qui possède en tout point d'un intervalle $(0,\ 1+\mu)$ une dérivée unique et qui admet en même temps un ensemble de traits d'invariabilité partout dense dans cet intervalle.