

W. SIERPIŃSKI.

## O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia.

Sur une courbe dont tout point est un point de ramification.

Celem niniejszej pracy jest podanie przykładu krzywej cantorowskiej i jordanowskiej jednocześnie<sup>1)</sup>, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia.

Punktem rozgałęzienia kontynuuum  $\mathcal{O}$  nazywamy punkt jego  $p$  wtedy, jeżeli istnieją trzy kontynua, będące podmnożkami kontynuuum  $\mathcal{O}$ , z których każde dwa posiadają punkt  $p$  i tylko ten punkt jako wspólny.

Niech  $T$  oznacza dany trójkąt równoboczny,  $A, B, C$  — odpowiednio jego wierzchołki: lewy, górny i prawy (zob. fig. 1). Łącząc środki boków trójkąta  $T$ , dzielimy go na cztery mniejsze trójkąty równoboczne, z których trzy:  $T_0, T_1, T_2$ , zawierające odpowiednio wierzchołki  $A, B, C$ , położone są równoległe do trójkąta  $T$ , czwarty zaś trójkąt  $U$  (zawierający środek trójkąta  $T$ ) ma wierzchołek skierowany ku dołowi. Całe wnętrze tego ostatniego trójkąta odrzucimy.

Wierzchołki trójkątów  $T_0, T_1, T_2$  oznaczymy odpowiednio: lewe przez  $A_0, A_1, A_2$ , górne przez  $B_0, B_1, B_2$ , prawe przez  $C_0, C_1, C_2$ .

Z każdym z trójkątów  $T_0, T_1, T_2$  postąpimy podobnie jak z trójkątem  $T$ , przez co otrzymamy 9 nowych trójkątów, położonych równoległe do trójkąta  $T$ , które oznaczymy przez  $T_{\lambda_1 \lambda_2}$  ( $\lambda_1 = 0, 1, 2, \lambda_2 = 0, 1, 2$ ) ich zaś wierzchołki odpowiednio przez  $A_{\lambda_1 \lambda_2}, B_{\lambda_1 \lambda_2}, C_{\lambda_1 \lambda_2}$ , oraz trzy nowe trójkąty

<sup>1)</sup> Krzywą cantorowską nazywamy kontynuuum nigdziegęste w płaszczyźnie (t. j. mnogość płaską zamkniętą, spójną, składającą się więcej niż z jednego punktu, której każdy punkt jest punktem brzegowym). Krzywą jordanowską nazywamy jednoznacznie i ciągle (lecz niekoniecznie jedno-jednoznacznie) odwzorowanie (skończonego) odcinka.

$U_0, U_1, U_2$ , położone równoległe do trójkąta  $U$ , których wnętrza odrzucamy (fig. 2).

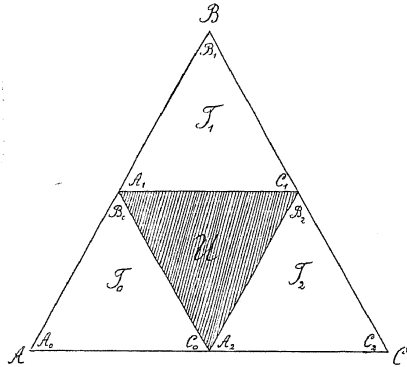


Fig. 1.

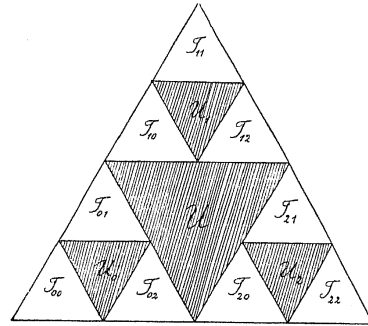


Fig. 2.

Ogólnie, mając trójkąt  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$  o wierzchołkach: lewym  $A_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ , górnym  $B_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$  i prawym  $C_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ , postąpimy z nim podobnie jak z trójkątem  $T$ , przez co otrzymamy trzy nowe trójkąty

$$T_{\lambda_1, \dots, \lambda_n 0}, \quad T_{\lambda_1, \dots, \lambda_n 1}, \quad T_{\lambda_1, \dots, \lambda_n 2},$$

zawierające odpowiednio wierzchołki  $A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}, B_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}, C_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ , położone równoległe do trójkąta  $T$ , oraz czwarty trójkąt  $U_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ , położony równoległe do  $U$ , którego całe wnętrze odrzucamy.

Oznaczmy przez  $\mathcal{O}$  zbiór wszystkich punktów trójkąta  $T$ , nie leżących wewnątrz żadnego z trójkątów:

$$U, \quad U_0, \quad U_1, \quad U_2, \quad U_{00}, \quad U_{01}, \quad \dots, \quad U_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}, \quad \dots \quad (1)$$

Zbiór  $\mathcal{O}$  jest oczywiście zamknięty i nigdziegęsty w płaszczyźnie (Miara powierzchniowa zbioru  $\mathcal{O}$  jest zerem, gdyż, jak łatwo obliczyć, suma pól trójkątów (1) równa jest polu trójkąta  $T$ ). Można by z łatwością dowieść bezpośrednio, że zbiór  $\mathcal{O}$  jest kontynuuum. Udowodnimy, że zbiór  $\mathcal{O}$  jest krzywą jordanowską; stąd będzie wynikało natychmiast, że jest to kontynuuum. Zbiór  $\mathcal{O}$ , jako kontynuuum nigdziegęste, będzie więc też krzywą cantorowską. Określimy pewien ciąg nieskończony łamanych:  $L^{(0)}, L', L'', \dots$  Jako linię  $L^{(0)}$  przyjmijmy podstawę  $AC$  trójkąta  $T$ ; końce tej linii oznaczmy, dla symetrii, przez  $S_0$  i  $S_1$ . Aby otrzymać  $L'$ , położmy  $S_0' = S_0, S_1' = S_1$ , da-

lej, przez  $S_1'$  oznaczmy trzeci wierzchołek tego z trójkątów  $T_{\lambda_i}$ , którego jednym wierzchołkiem jest punkt  $S_0$ , a drugim — środek boku  $S_0 S_1$  (będzie to, w danym przypadku, wierzchołek  $B_0$  trójkąta  $T_0$ ), wreszcie przez  $S_2'$  oznaczmy trzeci wierzchołek tego z trójkątów  $T_{\lambda_i}$ , którego jednym wierzchołkiem jest punkt  $S_1$ , a drugim — środek boku  $S_0 S_1$ . Linią  $L'$  będzie łamana

$$S_0' S_1' S_2' S_3',$$

zawierająca po jednym boku z każdego z trzech trójkątów  $T_{\lambda_i}$  (zob. fig. 3).

Ogólnie, mając linię  $L^{(n)}$ , będącą łamaną

$$S_0^{(n)} S_1^{(n)} \dots S_{3^n}^{(n)},$$

zawierającą po jednym boku z każdego z  $3^n$  trójkątów  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ , otrzymamy łamaną  $L^{(n+1)}$ , zastępując bok  $S_{i-1}^{(n)} S_i^{(n)}$  ( $i=1, 2, \dots, 3^n$ ) łamanej  $L^{(n)}$  przez łamaną

$$S_{3i-3}^{(n+1)} S_{3i-2}^{(n+1)} S_{3i-1}^{(n+1)} S_{3i}^{(n+1)},$$

gdzie  $S_{3i-3}^{(n+1)} \equiv S_{3i}^{(n)}, S_{3i-1}^{(n+1)} \equiv S_i^{(n)}$ , zaś  $S_{3i-2}^{(n+1)}$  oznacza trzeci wierzchołek tego z trójkątów  $T_{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}}$ , którego jednym wierzchołkiem jest punkt  $S_i^{(n)}$ , drugim zaś — środek boku  $S_{i-1}^{(n)} S_i^{(n)}$ ; wreszcie  $S_{3i-1}^{(n+1)}$  oznacza trzeci wierzchołek tego z trójkątów  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}}$ , którego jednym wierzchołkiem jest punkt  $S_i^{(n)}$ , zaś drugim — środek boku  $S_{i-1}^{(n)} S_i^{(n)}$ . Łatwo widzieć, że łamana

$$L^{(n+1)} \equiv S_0^{(n+1)} S_1^{(n+1)} \dots S_{3^{n+1}}^{(n+1)}$$

zawiera po jednym boku z każdego z  $3^{n+1}$  trójkątów  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}}$ . Łamane  $L, L', L'', L^{(4)}$  i  $L^{(5)}$  widzimy na fig. 3-8.

Przyjmijmy punkt  $A$  za początek współrzędnych kartezjańskich (prostokątnych), kierunek  $AC$  za dodatni kierunek osi  $X$ -ów, odcinek  $AC$  — za jednostkę długości.

Równania łamanej  $L^{(n)}$  możemy oczywiście napisać w postaci:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_n(t), \\ y &= \psi_n(t), \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1,$$

tak, iżby wartościom

$$t = 0, \quad \frac{1}{3^n}, \quad \frac{2}{3^n}, \quad \dots, \quad 1$$

odpowiadały odpowiednio punkty

$$S_0^{(n)}, \quad S_1^{(n)}, \quad S_2^{(n)}, \quad \dots, \quad S_{3^n}^{(n)}$$

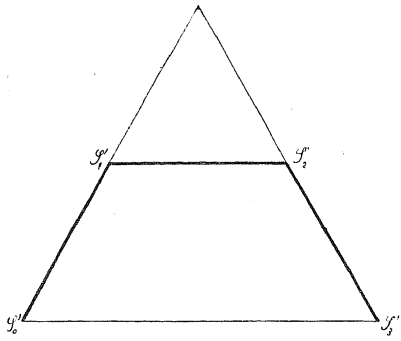


Fig. 3.

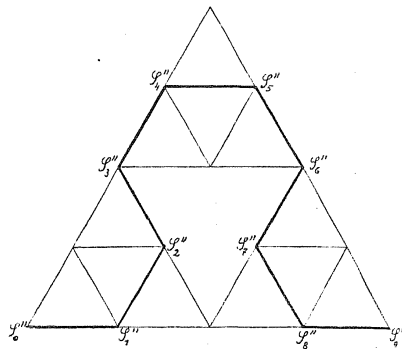


Fig. 4.

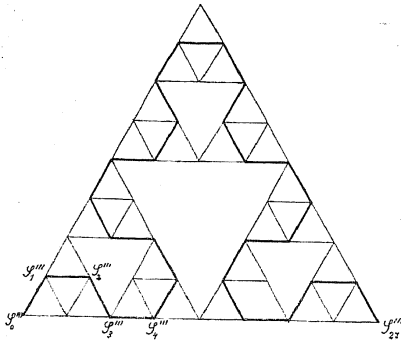


Fig. 5.

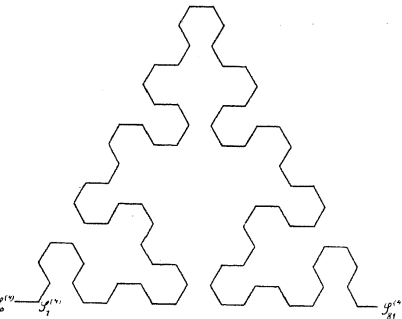


Fig. 6.

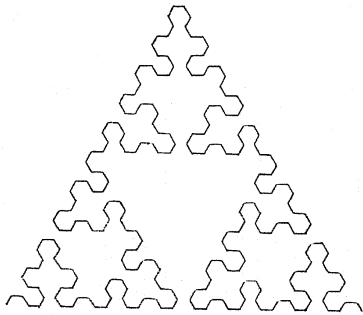


Fig. 7.

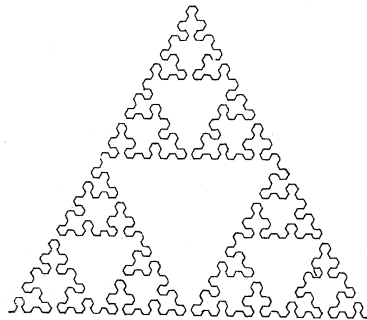


Fig. 8.

łamej  $L^{(n)}$  i żeby w każdym z przedziałów

$$\left( \frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n} \right), \quad i = 1, 2, \dots, 3^n,$$

funkcje  $\varphi_n(t)$  i  $\psi_n(t)$  były liniowe.

Weźmy pod rozwagę dwie kolejne łamane  $L^{(n)}$  i  $L^{(n+1)}$  o równaniach

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_n(t) \\ y &= \psi_n(t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1, \quad \left. \begin{aligned} x &= \varphi_{n+1}(t) \\ y &= \psi_{n+1}(t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1.$$

Przy danem  $i = 0, 1, 2, \dots, 3^n$  część łamej  $L^{(n)}$ , określona przez równania

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_n(t) \\ y &= \psi_n(t) \end{aligned} \right\} \frac{i-1}{3^n} \leq t \leq \frac{i}{3^n},$$

przedstawia, jak łatwo widzieć, bok  $S_{i-1}^{(n)}, S_i^{(n)}$  jednego z trójkątów  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ , np. trójkąta  $T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ . Część zaś łamej  $L^{(n+1)}$ , określona przez równania

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_{n+1}(t) \\ y &= \psi_{n+1}(t) \end{aligned} \right\} \frac{i-1}{3^n} \leq t \leq \frac{i}{3^n},$$

będzie łamaną

$$S_{3i-3}^{(n+1)} S_{3i-2}^{(n+1)} S_{3i-1}^{(n+1)} S_{3i}^{(n+1)}$$

(gdzie  $S_{3i-3}^{(n+1)} \equiv S_{i-1}^{(n)}$ ,  $S_{3i}^{(n+1)} \equiv S_i^{(n)}$ ), nie wychodząca poza trójkąt  $T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ , którego boki, jak łatwo obliczyć przez indukcję, są równe  $\frac{1}{3^n}$ . Będzie więc przy wszelkiem  $t$  w przedziale  $\left( \frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n} \right)$ :

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{3^n}, \quad |\psi_n(t) - \psi_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{3^n} \quad (2)$$

[gdź punkty  $(\varphi_n(t), \psi_n(t))$  oraz  $(\varphi_{n+1}(t), \psi_{n+1}(t))$  leżą w tym samym trójkącie  $T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$  o bokach  $\leq \frac{1}{3^n}$ ].

Ponieważ nierówności (2) zachodzą dla każdego z przedziałów

$$\left( 0, \frac{1}{3^n} \right), \left( \frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n} \right), \dots, \left( \frac{3^n-1}{3^n}, 1 \right),$$

więc zachodzą one dla każdego  $t$  w przedziale  $(0, 1)$ .

Nierówności (2) zachodzą przy wszelkim naturalnym  $n$ ; mamy więc, przy dowolnych naturalnych  $n$  i  $k$ :

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t)| \leq |\varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t)| + |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_{n+2}(t)| + \dots \\ \dots + |\varphi_{n+k-1}(t) - \varphi_{n+k}(t)| \leq \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^{n+k}} < \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}},$$

zatem, dla każdego  $t$  w przedziale  $(0, 1)$ :

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t)| < \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

i, podobnie:

$$|\psi_n(t) - \psi_{n+k}(t)| < \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}.$$

Nierówności te wskazują, że ciągi nieskończone funkcji ciągłych  $\varphi_n(t)$  i  $\psi_n(t)$  są w przedziale  $(0, 1)$  zbieżne jednostajnie. Funkcje graniczne

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t), \quad \psi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t)$$

są tedy ciągłe w przedziale  $(0, 1)$ . Krzywa  $K$ , określona przez równania

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

jest więc krzywą ciągłą (jordanowską).

Ponieważ każdy bok łamanej  $L^{(n)}$  jest bokiem jednego z trójkątów  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ , więc wszystkie punkty łamanej  $L^{(n)}$  są punktami mnogości  $\mathcal{O}$ . Ponieważ zaś mnogość  $\mathcal{O}$  jest zamknięta, więc wszystkie punkty krzywej  $K$ , która jest granicą łamanych  $L^{(n)}$ , są też punktami mnogości  $\mathcal{O}$ .

Z drugiej strony, wszystkie wierzchołki łamanej  $L^{(n)}$  są zarazem wierzchołkami każdej z łamanych  $L^{(n+1)}$ ,  $L^{(n+2)}$ ,  $L^{(n+3)}$ ,  $\dots$ , zatem też—punktami krzywej  $K$ . Krzywa  $K$  przechodzi więc przez każdy z trójkątów  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ , przy każdym  $n$ . Ponieważ zaś mnogość  $\mathcal{O}$  leży całkowicie w  $3^n$  trójkątach  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ , więc dla każdego punktu  $p$  mnogości  $\mathcal{O}$  istnieje punkt krzywej  $K$ ,

oddalony od  $p$  mniej niż o  $\frac{1}{3^n}$ . Wobec dowolności liczby  $n$ , wnosimy stąd, że każdy punkt mnogości  $\mathcal{O}$  jest punktem skupienia punktów krzywej  $K$ , zatem — punktem tej krzywej (gdyż jest ona ciągłą).

Mnogość  $\mathcal{O}$  jest więc identyczna ze zbiorem wszystkich punktów krzywej  $K$ . Dowiedliśmy zatem, że mnogość  $\mathcal{O}$  jest krzywą jordanowską.

Niech  $p$  oznacza jakikolwiek dany punkt mnogości  $\mathcal{O}$ , nie będący wierzchołkiem trójkąta  $T$ , ani żadnego z trójkątów  $T_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ . Jak łatwo widzieć, istnieje oznaczony w zupełności przez punkt  $p$  ciąg nieskończony wskaźników (zpośród wskaźników 0, 1, 2):

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \quad (4)$$

taki, iż punkt  $p$  należy do każdego z trójkątów:

$$T_{\alpha_1}, T_{\alpha_1, \alpha_2}, T_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}, \dots$$

Weźmy pod rozwagę ciąg nieskończony odpowiednich wierzchołków:

$$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_1, \alpha_2}, A_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}, \dots$$

i oznaczmy przez  $P$  zbiór, złożony z punktu  $p$  oraz ze wszystkich punktów każdego z odcinków:

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_i} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

Niektóre z tych odcinków mogą się redukować do punktów (o ile wierzchołki  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_i}$  oraz  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}}$  się zlewają; wszakże nieskończenie wiele z odcinków (6) ma długość dodatnią. Gdyby bowiem dla dostatecznie wielkich wskaźników  $i$ , np. dla  $i \geq k$ , było stale

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_i} \equiv A_{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}},$$

to punkt  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$  byłby wspólnym dla każdego z trójkątów (5), które, jak łatwo widzieć, posiadają jako jedyny punkt wspólny, punkt  $p$ . Byłoby zatem

$$p \equiv A_{\alpha_1, \dots, \alpha_k},$$

wbrew założeniu, że punkt  $p$  nie jest wierzchołkiem żadnego z trójkątów  $T_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ .

Zbiór  $P$  jest więc zbiorem nieskończonym. Powiadam, że zbiór  $P$  jest zamknięty. W samej rzeczy. Załóżmy, że zbiór  $P$  nie jest zamknięty, że więc posiada miejsce skupienia  $q$ , nie będące elementem zbioru  $P$ . Przy dowolnym  $n$  zbiór  $P$  możemy rozpatrywać jako sumę zbiorów:

$$P = P_n + Q_n,$$

gdzie  $P_n$  oznacza łamaną

$$P_n = A_{\alpha_1} A_{\alpha_1, \alpha_2} \dots A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$$

(mogącą się zresztą redukować do punktu), zaś  $Q_n$  — zbiór pozostałych punktów zbioru  $P$ . Ponieważ zbiór  $P_n$  jest oczywiście zamknięty, więc punkt  $q$

jest miejscem skupienia zbioru  $Q_n$ . Lecz zbiór  $Q_n$ , jak łatwo widzieć, leży w trójkącie  $T_{a_1 a_2 \dots a_n}$ , zatem też jego punkt skupienia  $q$  jest punktem trójkąta  $T_{a_1 \dots a_n}$ . Punkt  $q$  jest więc punktem wspólnym każdego z trójkątów (6) skąd wniosek, że  $q = p$ , wbrew założeniu, że  $q$  nie należy do  $P$ . Dowiedliśmy więc, że zbiór  $P$  jest zamknięty. Dowód, że zbiór  $P$  jest spójny, nie przedstawia żadnej trudności. Udowodniliśmy zatem, że zbiór  $P$  jest kontynuacją; z drugiej strony, zbiór  $P$  jest oczywiście podmnogością zbioru  $\mathcal{C}$ .

Podobnie, wychodząc z ciągów nieskończonych

$$B_{a_1}, B_{a_1 a_2}, B_{a_1 a_2 a_3}, \dots,$$

$$C_{a_1}, C_{a_1 a_2}, C_{a_1 a_2 a_3}, \dots,$$

określmy odpowiednio kontynua  $Q$  i  $R$ .

Powiadam, że każde dwa z kontynuów  $P$ ,  $Q$  i  $R$  mają tylko punkt  $p$  jako punkt wspólny.

W samej rzeczy, założmy, że np. kontynua  $P$  i  $Q$  posiadają, prócz punktu  $p$ , jeszcze punkt wspólny  $p'$ . Z definicji zbioru  $P$  wynika, że punkt  $p'$  tego zbioru, jako różny od punktu  $p$ , musi być punktem początkowym lub wewnętrznym jednego z odcinków (6), np. odcinka

$$A_{a_1 \dots a_k} A_{a_1 \dots a_{k+1}} \quad (7)$$

i podobnie, przy pewnym  $l$ , punkt  $p'$  (jako należący do  $Q$ ) jest punktem początkowym lub wewnętrznym odcinka

$$B_{a_1 \dots a_l} B_{a_1 \dots a_{l+1}} \quad (8)$$

Jeżeli  $k = l$ , to, jak łatwo widzieć (rozpatrując oddzielnie 3 przypadki:  $a_{k+1} = 0, 1, 2$ ) odcinki (7) i (8) nie posiadają punktów wspólnych. Założmy więc, że  $k \neq l$ , np. że  $k < l$ . Wówczas, jak łatwo widzieć, odcinek (8) leży w trójkącie  $T_{a_1 \dots a_{k+1}}$ ; natomiast wszystkie punkty odcinka (7), prócz punktu  $A_{a_1 \dots a_{k+1}}$ , leżą zewnątrz trójkąta  $T_{a_1 \dots a_{k+1}}$ . W żadnym więc razie punkt  $p'$  nie może być jednocześnie początkowym lub wewnętrznym punktem odcinków (7) i (8). Dowiedliśmy tedy, że kontynua  $P$  i  $Q$  nie posiadają punktów wspólnych, innych, niż  $p$ . Podobnie udowodnilibyśmy, że  $P$  i  $Q$ , oraz że  $Q$  i  $R$  nie mają punktów wspólnych, różnych od  $p$ .

Dowiedliśmy zatem, że kontynua  $P$ ,  $Q$  i  $R$ , są podmnogościami zbioru

$\mathcal{C}$  i że każde dwa z nich posiadają punkt  $p$  i tylko ten punkt jako wspólny. Punkt  $p$  jest więc punktem rozgałęzienia krzywej  $\mathcal{C}$ .

Udowodniliśmy zatem, że każdy punkt krzywej  $\mathcal{C}$ , nie będący wierzchołkiem żadnego z trójkątów  $T_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ , jest punktem rozgałęzienia krzywej  $\mathcal{C}$ . Co się zaś tyczy wierzchołków trójkątów  $T_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ , to z łatwością widzimy, że w każdym z nich, nie będącym jednocześnie wierzchołkiem trójkąta  $T$ , schodzą się po cztery różne odcinki, leżące całkowicie w zbiorze  $\mathcal{C}$ .

Wszystkie więc punkty krzywej  $\mathcal{C}$ , z wyjątkiem, być może, punktów  $A, B$  i  $C$ , są jej punktami rozgałęzienia.

Aby otrzymać krzywą, której wszystkie bez wyjątku punkty są punktami rozgałęzienia, wystarczy podzielić sześciobok foremny na sześć trójkątów foremnych (łączyć jego wierzchołki ze środkiem) i w każdy z nich wpisać krzywą  $\mathcal{C}$ . Suma tych sześciu figur da nam żadaną krzywą. Godnem uwagi jest, że punkty krzywej  $K$ , określonej przez równania (3), są co najwyżej podwójne, mianowicie, jak to czytelnik sam zechce bliżej zbadać, punkty, odpowiadające wartościom

$$t = \frac{k}{3^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}} \quad \left( \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, 3^n - 1, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

są podwójne (krzywa przechodzi przez każdy z nich dwa i tylko dwa razy: przy wartości  $t$  oraz przy wartości  $t' = t + \frac{2}{3^{n+1}}$ ), wszystkie zaś pozostałe punkty naszej krzywej są pojedyncze (krzywa przechodzi przez każdy z nich raz tylko jeden); mimo to jednak każdy punkt naszej krzywej, nie będący wierzchołkiem trójkąta  $T$ , jest jej punktem rozgałęzienia.

Krzywą, której każdy punkt (z wyjątkiem pewnych trzech) jest punktem rozgałęzienia, można otrzymać jeszcze w następujący sposób. Podzielmy kwadrat  $Q$  na cztery mniejsze kwadraciki i odrzucmy lewy dolny kwadracik. Z każdym z pozostałych trzech kwadracików postąpimy taksamo i t. d. in infinitum. Nieodrzucone części kwadratu  $Q$  dadzą w granicy krzywą  $K'$ , o której możnaby dowieść, że tylko swą wielkością i położeniem różni się od rzutu prostokątnego krzywej  $K$  na płaszczyznę, przechodzącą przez  $AC$  i nachyloną pod kątem  $\arctg \sqrt{2}$  do płaszczyzny krzywej  $K$ .

Krzywą  $K'$  możnaby też, jak łatwo widzieć, określić arytmetycznie, jako zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny  $(x, y)$ , których spólrzędne  $x, y$  możemy rozwinąć na ułamki dwójkowe

$$x = (0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots)_2$$

$$y = (0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots)_2,$$

) Gdyby  $p'$  było punktem końcowym odcinka (7), to możnaby rozpatrywać punkt  $p'$  jako punkt początkowy odcinka  $A_{a_1 \dots a_{k+1}} A_{a_1 \dots a_{k+2}}$ .

gdzie stale

$$\alpha_n + \beta_n > 0 \quad (\text{dla } n = 1, 2, 3, \dots).$$

Zauważymy, że już przed rokiem p. Stefan Mazurkiewicz znalazł przykład krzywej (cantorowskiej i jordanowskiej jednocześnie), której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia rzędu nieskończonego (t. j. w każdym punkcie  $p$  krzywej schodzi się nieskończenie wiele kontynuów, będących podmnogociami tej krzywej, z których każde dwa posiadają tylko punkt  $p$  jako wspólny).

Przykładu swego p. Mazurkiewicz dotąd drukiem nie ogłosił, a dowód jego jest mi nieznanym. Samą krzywą otrzymuje p. Mazurkiewicz, dzieląc kwadrat na 9 mniejszych kwadratów (zapomocą równoległych do boków) i usuwając wewnątrz kwadratu środkowego, a z każdym z pozostałych 8-miu kwadratów postępując taksamo jak z pierwotnym kwadratem, i t. d. in infinitum.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

## Konstrukcja funkcji różniczkowalnej, mającej wszędziegęsty zbiór przedziałów stałości.

Sur une fonction dérivable, qui admet un ensemble partout dense de traits d'invariabilité.

Celem noty niniejszej jest podanie przykładu funkcji, która: 1) jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego przedziału; 2) posiada w danym przedziale wszędziegęsty zbiór przedziałów stałości.

Wiadomo, że istnieją funkcje  $f(x)$ , różniczkowalne w przedziale  $(0, 1)$  a przytem takie, że zbiór zer funkcji  $f'(x)$  — jest w tym przedziale wszędziegęsty<sup>1)</sup>. Wykażemy, że można każdej takiej funkcji przyporządkować funkcję  $F(x)$ , określoną i różniczkowalną w pewnym przedziale  $(0, 1 + \mu)$ , i posiadającą w tym przedziale wszędziegęsty zbiór przedziałów stałości.

Oznaczmy przez  $(A)$  zbiór zer funkcji  $f'(x)$ . Niech będzie

$$\{\alpha_n\} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

przeliczalna podmnogocność zbioru  $(A)$ , wszędziegęsta i nie zawierająca końców przedziału. Określamy trzy ciągi nieskończone:

$$\{\delta_n\}, \quad (2)$$

$$\{\varepsilon_n\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$\{\eta_n\} \quad (4)$$

w sposób następujący:

<sup>1)</sup> Koepcke, Math. Ann. 35, Pompein Math. Ann. 63.