S. DICKSTEIN.

Wzór całkowy Wrońskiego.

Sur une formule intégrale de Wronski.

Wzór całkowy, ogłoszony przez Wrońskiego bez dowodu w roku 1853,[1] służy do obliczania przybliżonego całek. Podajemy w tym artykule dowód tego wzoru, oparty na wzorze interpolacyjnym Lagrange'a.

1. Niechaj $y = f(x)$ będzie funkcya zmiennej x, która dla m wartości tej zmiennej

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \dots, \quad x_{m-1} \tag{1}$$

przyjmuje odpowiednio wartości dane

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \dots, \quad y_{m-1}. \tag{2}$$

Mamy obliczyć całkę

$$\int_a^b y\,dx,$$

gdzie a i b są pewne stałe granice całkowania.

Niechaj $\varphi(x)$ oznacza funkcyę całkowitą stopnia m-tego, która dla wartości (1) przyjmuje odpowiednio te same wartości (2), co funkcya $y = f(x)$. Wzór interpolacyjny Lagrange'a[2] daje nam następujące wyrażenie na funkcyę $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{m-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{m-1})}\, y_i \tag{3}$$

---

[1]) H. Wronski, Science nautique des marées, str. 31—32.

[2]) Patrz np. S. Dickstein, Pojęcia i metody Matematyki, str. 252.

lub

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\psi(x)}{x - x_i} \, \frac{y_i}{\psi'(x_i)}, \tag{4}$$

gdzie

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{m-1}), \tag{5}$$

$\psi'(x_i)$ zaś oznacza wartość pochodnej funkcyi $\psi(x)$ dla $x = x_i$.

2. Mając to, możemy funkcyę $y = f(x)$ wyrazić za pomocą wzoru: [2]

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!}, \tag{6}$$

gdzie ζ jest pewna wartość średnia pomiędzy wartościami (1) zmiennej x; $f^{(m)}(\zeta)$ oznacza wartość m-tej pochodnej funkcyi $f(\zeta)$ dla $x = \zeta$.

Całkując wzór (6), otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} \int_a^b \psi(x)\,dx,$$

lub, na podstawie wzoru (4):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{y_i}{\psi'(x_i)} \int_a^b \frac{\psi(x)}{x - x_i}\,dx + \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Oznaczając w y r a z d o p e ł n i a j ą c y

$$\frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} \int_a^b \psi(x)\,dx$$

przez R, piszemy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{y_i}{\psi'(x_i)} \int_a^b \frac{\psi(x)}{x - x_i}\,dx + R. \tag{7}$$

3. Wiadomo, że do funkcyi całkowitej jakiejkolwiek $F(x)$ stopnia m-tego, jeżeli h oznacza przyrost dowolny zmiennej x, stosuje się następujące rozwinięcie, wynikające wprost z wzoru T a y l o r a:

1) Patrz np. G. P e a n o, Lezioni di Analisi infinitesimale Vol. I, str. 245.

$$F(x) - F(x - h) = (x - h) F'(x) - \frac{(x - h)^2}{2!} F''(x) + \frac{(x - h)^3}{3!} F'''(x) - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{(x - h)^m}{m!} F^{(m)}(x),$$

lub

$$\frac{F(x) - F(x - h)}{x - h} = F'(x) - \frac{x - h}{2!} F''(x) + \frac{(x - h)^2}{3!} F'''(x) - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{(x - h)^{m-1}}{m!} F^{(m)}(x).$$

Kładąc tu

$$F(x) = \varphi(x), \qquad h = x_i,$$

otrzymujemy

$$F(x - h) = \varphi(x_i) = 0,$$

a wzory poprzedzające stają się:

$$\psi(x) = (x - x_i)\psi'(x) - \frac{(x - x_i)^2}{2!} \psi''(x) + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \psi'''(x) - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{(x - x_i)^m}{m!} \psi^{(m)}(x), \tag{8}$$

$$\frac{\psi(x)}{x - x_i} = \psi'(x) - \frac{x - x_i}{2!} \psi''(x) + \frac{(x - x_i)^2}{3!} \psi'''(x) - \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{(x - x_i)^{m-1}}{m!} \psi^{(m)}(x). \tag{9}$$

Całkując wzór (9) w granicach nieoznaczonych, otrzymujemy:

$$\int \frac{\psi(x)}{x - x_i}\,dx = \int \psi'(x)\,dx - \frac{1}{2!} \int (x - x_i)\psi''(x)\,dx$$

$$+ \frac{1}{3!} \int (x - x_i)^2 \psi'''(x)\,dx - \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int (x - x_i)^{m-1} \psi^{(m)}(x)\,dx. \tag{10}$$

Stronę drugą przekształcimy przy pomocy całkowania przez części; będzie mianowicie (stałych całkowania nie piszemy):

$$\int \psi'(x)\,dx = \psi(x)$$

$$\int (x - x_i)\psi''(x)\,dx = (x - x_i)\psi'(x) - \int \psi'(x)\,dx$$

$$= (x - x_i)\psi'(x) - \psi(x)$$

$$\int (x-x_i)^2 \psi'''(x)\,dx = (x-x_i)^2 \psi''(x) - 2\int (x-x_i)\psi''(x)\,dx$$
$$= (x-x_i)^2\psi''(x) - 2(x-x_i)\psi'(x) + 2\psi(x)$$
$$\int (x-x_i)^3 \psi^{IV}(x)\,dx = (x-x_i)^3\psi'''(x) - 3\int (x-x_i)^2\psi'''(x)\,dx$$
$$= (x-x_i)^3\psi'''(x) - 3(x-x_i)^2\psi''(x) + 6(x-x_i)\psi'(x) - 6\psi(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Wstawiając te wartości po stronie drugiej wzoru (10), otrzymamy:

$$\int \frac{\psi(x)}{x-x_i}\,dx = \psi(x) - \frac{1}{2!}\left[(x-x_i)\psi'(x) - \psi(x)\right]$$
$$+\frac{1}{3!}\left[(x-x_i)^2\psi''(x) - 2(x-x_i)\psi'(x) + 2\psi(x)\right]$$
$$-\frac{1}{4!}\left[(x-x_i)^3\psi'''(x) - 3(x-x_i)^2\psi''(x) + 6(x-x_i)\psi'(x) - 6\psi(x)\right]$$
$$+\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\left[(x-x_i)^{m-1}\psi^{(m-1)}(x) - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\right].$$

Dla uproszczenia strony drugiej otrzymanego rozwinięcia korzystamy z wzoru (8); wstawiamy mianowicie po stronie drugiej zamiast $\psi(x)$ stronę drugą wzoru (8) i po dokonaniu łatwych redukcyj, otrzymujemy następujące wyrażenie całki $\int \frac{\psi(x)}{x-x_i}\,dx$:

$$\int \frac{\psi(x)}{x-x_i}\,dx = (x-x_i)\psi'(x)$$
$$-\frac{1}{2!}\left(1+\tfrac{1}{2}\right)(x-x_i)^2\psi''(x)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)(x-x_i)^3\psi'''(x)$$
$$-\frac{1}{4!}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)(x-x_i)''\psi^{IV}(x)$$
$$+\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right)(x-x_1)^m\psi^{(m)}(x).$$

Połóżmy dla skrócenia:

$$S(\nu) = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu},$$

[przyjmujemy nadto, że $S(o)=0$]; wzór poprzedni da się napisać tak:

$$S\frac{\psi(x)}{x-x_i}\,dx = S(1)(x-x_i)\psi'(x)$$
$$-\frac{1}{2!}S(2)(x-x_i)^2\psi''(x)$$
$$+\frac{1}{3!}S(3)(x-x_i)^3\psi'''(x)$$
$$-\frac{1}{4!}S(4)(x-x_i)^4\psi^{IV}(x)$$
$$+\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\frac{(-1^{m-1}}{m!}S(m)(x-x_1)^m\psi^{(m)}(x),$$

lub

$$\int \frac{\psi(x)}{x-x_i}\,dx = \Omega_i \tag{11}$$

gdzie

$$\Omega_i = \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}S(\nu)(x-x_i)^\nu\psi^{(\nu)}(x). \tag{12}$$

Będzie zatem według wzoru (7):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{y_i}{\psi'(x_i)}\Big|_a^b\Omega_i + R$$
$$= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{y_i}{\psi'(x_i)}\Big|_a^b\Omega_i + R. \tag{13}$$

4. Dajmy, że wartości (1) zmiennej x są następujące:

$$x_0=0,\quad x_1=\xi,\quad x_2=2\xi,\ \ldots,\quad x_{m-1}=(m-1)\xi,$$

gdzie ξ jest jakiekolwiek; funkcya $\psi(x)$, wyrażona wzorem (5), staje się wtedy równa:

$$x(x-\xi)(x-2\xi)\ \ldots\ (x-\overline{m-1}\,\xi),$$

funkcyę tę oznacza Wroński symbolem $x^{m|-\xi}$. Wartość pierwszej pochodnej funkcyi tej dla $x = x_i$ będzie oczywiście równa

$$\begin{aligned}\psi'(x_i) &= (x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_{m-1})\\ &= i\xi\,.\,(i\xi - \xi)\dots(i\xi - \overline{i-1}\,\xi)(i\xi - \overline{i+1}\,\xi)\dots(i\xi - \overline{m-1}\,\xi)\\ &= i(i-1)\dots 1\,.\,\xi^i\,.\,(-1)^{m-1-i}\,.\,1\,.\,2\dots(m-1-i)\,\xi^{m-1-i}\\ &= (-1)^{m-1-i}\,i!\,(m-1-i)!\,\xi^{m-1}.\end{aligned}$$

Kładąc dla skrócenia

$$A_i = \frac{(-1)^i}{i!\,(m-1-i)!}, \tag{14}$$

otrzymujemy

$$\psi'(x_i) = \frac{(-1)^{m-1}}{A_i}\,\xi^{m-1}. \tag{15}$$

Funkcya Ω_i staje się w tym przypadku równa

$$\Omega_i = \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\,S(\nu)\,(x - i\xi)^{\nu}\,\frac{d^{\nu} x^{m|-\xi}}{dx^{\nu}}\,. \tag{16}$$

$$(i = 1,\ 2\dots m), \qquad \Omega_0 = 1.$$

Wprowadzając wartości (14) i (15) do wzoru (13), otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{\xi^{m-1}} \sum_0^{m-1} y_i \Big|_a^b \Omega_i + R$$

Jest to wzór Wrońskiego, który chcieliśmy udowodnić.

Wroński wyrazu dopełniającego nie podaje i pisze swój wzór całkowy w postaci:

$$\int y\,dx = \frac{(-1)^{m-1}}{\xi^{m-1}}\,[A_0\Omega_0 y_0 + A_1\Omega_1 y_1 + \dots + A_{m-1} y_{m-1}] + C_0,$$

gdzie A_i i Ω_i mają wartości określone wzorami (14) i (15), C_0 zaś jest stałą dowolną. Po drugiej stronie wzoru (16) dodaje Wroński wielkość nieoznaczoną M, która musi być tak obrana, aby dla $x = 0$ było $\Omega_i = 0$.

5. Wzór udowodniony jest przypadkiem szczególnym analogicznego wzoru ogólnego na całkę wielokrotną $\int^{(r)} y\,dx^r$. Wypisujemy ten ostatni w postaci, danej mu przez Wrońskiego:

$$\int^{(r)} y\,dx^r = \frac{(-1)^{m-1}}{\xi^{m-1}}\,[A_0\Omega_0 y_0 + A_1\Omega_1 y_1 + \dots A_{m-1}\Omega_{m-1} y_{m-1}]$$

$$+ C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{r-1} x^{r-1},$$

gdzie C_0, $C_1, \dots, C_{r-1}$ są stałe dowolne całkowania, spółczynniki A_i mają wartości określone wzorem (14), funkcye zaś Ω_i $(i = 1, 2, \dots, m-1)$ wyrażają się w ten sposób:

$$\begin{aligned}\Omega_i = {} & S(r-1)\,\frac{(x - i\xi)^{r-1}}{(r-1)!}\,x^{m|-\xi}\\ & - \frac{r}{1}\,S(r)\,\frac{(x - i\xi)^r}{r!}\,\frac{d x^{m|-\xi}}{dx}\\ & + \frac{r(r+1)}{2!}\,S(r+1)\,\frac{(x - i\xi)^{r+1}}{(r+1)!}\,\frac{d^2 x^{m|-\xi}}{dx^2}\\ & - \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}\,S(r+2)\,\frac{(x - i\xi)^{r+2}}{(r+2)!}\,\frac{d^3 x^{m|-\xi}}{dx^3}\\ & + \dots\\ & + (-1)^m\,\frac{\nu(\nu+1)\dots(\nu+m-1)}{m!}\,S(r+m-1)\,\frac{(x - i\xi)^{r+m-1}}{(r+m-1)!}\,\frac{d^m x^{m|-\xi}}{dx^m}\\ & + M_0^{(i)} + M_1^{(i)} x + M_2^{(i)} x^2 + \dots + M_{r-1}^{(i)},\end{aligned}$$

gdzie liczby $M_0^{(i)}$, $M_1^{(i)}, \dots M_{r-1}^{(i)}$ winny być wyznaczone w ten sposób, aby funkcya Ω_i i jej pochodne aż do pochodnej rzędu $(r-1)$ włącznie miały wartość zero dla $x = 0$.