$$a_k < \xi < b_k \quad \text{et} \quad f(\xi) = m,$$

et que

$$f(x) \leqslant m \quad \text{pour} \quad a_k < x < b_k.$$

Il correspondra donc à tout élement m de l'ensemble M un indice k bien déterminé. Je dis qu'aux différents élements de l'ensemble M correspondront toujours des indices différents. En effet, supposons qu'aux élements différents m et m' de l'ensemble M correspond le même indice k. Nous aurions donc pour un nombre ξ:

$$a_k < \xi < b_k, \tag{1}$$

$$f(\xi) = m, \tag{2}$$

et

$$f(x) \leqslant m \quad \text{pour} \quad a_k < x < b_k; \tag{3}$$

d'autre part, pour un nombre ξ' nous aurions:

$$a_k < \xi' < b_k, \tag{4}$$

$$f(\xi') = m', \tag{5}$$

et

$$f(x) \leqslant m' \quad \text{pour} \quad a_k < x < b_k. \tag{6}$$

D'après (4), nous pouvons dans (3) poser $x = \xi'$, ce qui donne

$$f(\xi') \leqslant m; \tag{7}$$

d'autre part, d'après (1), nous pouvons dans (6) poser $x = \xi$, ce qui donne

$$f(\xi) \leqslant m'. \tag{8}$$

Les inégalités (7) et (8) donnent, d'après (2) et (5):

$$m = m',$$

contre l'hypothèse que les nombres m et m' sont différents.

Nous avons donc démontré qu'à tout élement m de l'ensemble M correspond un indice k bien déterminé, et qu'aux élements différents de l'ensemble M correspondent toujours des indices différents. Pour ranger tous les élements de l'ensemble M en une suite (finie ou infinie) bien déterminée il suffit regarder comme premier l'élement auquel correspond le plus petit indice k_1, comme second — celui auquel correspond le plus petit indice $> k_1$, et ainsi de suite. La suite ainsi obtenue ne dépendera que de la nature de la fonction $f(x)$ (mais pas de la manière dont la fonction était définie).

STANISŁAW RUZIEWICZ.

O funkcyach ciągłych, monotonicznych, posiadających pantachiczne przedziały stałości.

(Uber stetige, monotone, überall dicht die Constanzintervalle besitzende Funktionen).

Niedawno zbudowałem przykład funkcyi ciągłej, monotonicznej, nie posiadającej pochodnej w nieprzeliczalnej mnogości punktów.[1] P. Sierpiński zwrócił mi uwagę, że podobne przykłady stanowią krzywe o pantachicznych odcinkach stałości, zbudowane przez Cantora[2] i Harnacka[2].

Dla dowodu, że krzywe te nie posiadają w nieprzeliczalnej mnogości punktów pochodnej (ani skończonej ani nieskończenie wielkiej), wykażemy:

1) Dla każdego punktu ξ, nie leżącego wewnątrz żadnego z odcinków stałości w krzywej $\varphi(x)$ Cantora lub Harnacka, istnieje taki ciąg liczb $x_n \neq \xi$, $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \xi$, że $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\varphi(\xi) - \varphi(x_n)}{\xi - x_n} = \infty$.

2) W każdej krzywej $f(x)$ ciągłej, o pantachicznych odcinkach stałości istnieje wśród punktów ξ, nie leżących wewnątrz żadnego z odcinków stałości, taka nieprzeliczalna mnogość punktów ξ', że dla każdego z nich można dobrać taki ciąg liczb $x_n \neq \xi'$, $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \xi'$, że $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{f(\xi') - f(x_n)}{\xi' - x_n} = 0$.

W pierwszej części tej pracy udowadniam twierdzenie 1-sze dla krzywej Harnacka, przyczem dla wygody badań przedstawiam ją analitycznie, jako rozwiązanie pewnego układu równań funkcyjnych. W części drugiej zajmuję się twierdzeniem 1-szem dla krzywej Cantora, w części trzeciej twierdzeniem 2-giem.

---

1) Sprawozd. Tow. Nauk. Warszawskiego, 1913, rok VI.
2) Acta Mathematica, T. 4, p. 386.
3) Mathemat. Annalen, T. 24, str. 227.

I.

Rozważmy następujący układ równań funkcyjnych:

$$
\text{(I)} \quad \left.\begin{aligned}
&\varphi\left(\frac{x}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\varphi(x), \\
&\varphi\left(\frac{x+1}{4}\right) = \tfrac{1}{2}, \\
&\varphi\left(\frac{x+2}{4}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varphi(x), \\
&\varphi\left(\frac{x+3}{4}\right) = 1.
\end{aligned}\right\} \; 0 \leqslant x \leqslant 1.
$$

Układ ten możemy ująć w jedno równanie:

$$
\text{(II)} \qquad \varphi\left(\frac{x+\alpha}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\,\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1+(-1)^\alpha}{4}\varphi(x),
$$

$$
\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3; \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.
$$

($\mathrm{E}\,a$ oznacza największą liczbę całkowitą, nie przenoszącą a; $(-1)^0 = 1$).

Założmy, że istnieje funkcya φ, określona w przedziale (0, 1) i ograniczona w nim, spełniająca powyższy układ równań funkcyjnych.

Rozwińmy liczbę x w układzie czwórkowym na ułamek istotnie nieskończony:

$$
x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \frac{\alpha_3}{4^3} + \ldots
$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$
\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\,\frac{\alpha_k+1}{2} = a_k,
$$

$$
\frac{1+(-1)^{\alpha_k}}{4} = b_k,
$$

$$
\prod_{n=1}^{m} b_n = B_m,
$$

$$
x_k = \frac{\alpha_{k+1}}{4} + \frac{\alpha_{k+2}}{4^2} + \frac{\alpha_{k+3}}{4^3} + \ldots
$$

Mamy wobec naszych oznaczeń i wobec wzoru (II):

$$
\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\alpha_1 + x_1}{4}\right) = a_1 + b_1\varphi(x_1),
$$

$$
\varphi(x_1) = \varphi\left(\frac{\alpha_2 + x_2}{4}\right) = a_2 + b_2\varphi(x_2),
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
$$

$$
\varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\frac{\alpha_n + x_n}{4}\right) = a_n + b_n\varphi(x_n).
$$

Wstawiając do wyrażenia na $\varphi(x)$ kolejno wyrażenia na $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, .. $\varphi(x_{n-1})$, otrzymujemy:

$$
\varphi(x) = a_1 + B_1 a_2 + B_2 a_3 + \ldots + B_{n-1}a_n + B_n\varphi(x_n).
$$

Zauważmy, że B_k jest albo 0, albo $= \frac{1}{2^k}$. Ponieważ funkcya φ jest w przedziale (0, 1), według założenia, ograniczona, otrzymujemy rozwinięcie

$$
\text{(III)} \qquad \varphi(x) = a_1 + B_1 a_2 + B_2 a_3 + \ldots,
$$

zbieżne bezwzględnie, gdyż ogólny składnik jego spełnia nierówności

$$
0 \leqslant B_{n-1}a_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.
$$

O ile x daje dwa rozwinięcia: jedno skończone i drugie nieskończone, obliczmy raz wartość funkcyi dla rozwinięcia skończonego, drugi raz dla nieskończonego.

Mamy więc dwa rozwinięcia:

$$
x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{4^n}, \qquad \alpha_n \geqslant 1,
$$

i

$$
x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha_n - 1}{4^n} + \frac{3}{4^{n+1}} + \frac{3}{4^{n+2}} + \ldots
$$

W pierwszym przypadku jako wartość funkcyi otrzymujemy:

$$
\overline{\varphi}(x) = a_1 + B_1 a_2 + \ldots + B_{n-2}a_{n-1} + B_{n-1}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\,\frac{\alpha_n+1}{2},
$$

w drugim:

$$
\varphi(x) = a_1 + B_1 a_2 + \ldots + B_{n-2}a_{n-1} + B_{n-1}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\,\frac{\alpha_n}{2} + B_{n-1}\frac{1+(-1)^{\alpha_n-1}}{4}.
$$

Gdyby było $B_k = 0$ dla $k \leqslant n-1$, to oczywiście byłoby $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$. Załóżmy więc, że $B_{n-1} \neq 0$.

Połóżmy dla skrócenia:

$$\bar{\varphi}(x) - a_1 - B_1 a_2 - \ldots - B_{n-2} a_{n-1} = \bar{\psi}(x),$$

$$\varphi(x) - a_1 - B_1 a_2 - \ldots - B_{n-2} a_{n-1} = \psi(x),$$

Gdy $\alpha_n = 1$ lub 2, to

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{2^n}, \qquad \psi(x) = \frac{1}{2^n}.$$

Gdy $\alpha_n = 3$, to

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \psi(x) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zawsze jest więc $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$.

O ile zatem istnieje funkcya φ, ograniczona w przedziale (0, 1) i będąca rozwiązaniem układu równań (I), to istnieje tylko jedna, gdyż rozwija się na szereg (III), dający dla każdej wartości x jednę tylko wartość.

Lecz z łatwością sprawdzamy, że szereg (III) jest rzeczywiście rozwiązaniem naszych równań funkcyjnych.

Gdy bowiem

$$x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots,$$

mamy

$$\varphi\left(\frac{x}{4}\right) = \varphi\left(\frac{0}{4} + \frac{\alpha_1}{4^2} + \frac{\alpha^2}{4^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{E} \frac{0+1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \mathrm{E} \frac{\alpha_1+1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1+(-1)^{\alpha_1}}{4} \frac{1}{2} \mathrm{E} \frac{\alpha_2+1}{2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \varphi(x);$$

$$\varphi\left(\frac{x+1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha_1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \mathrm{E} \frac{1+1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\varphi\left(\frac{x+2}{4}\right) = \varphi\left(\frac{2}{4} + \frac{\alpha_1}{4^2} + \frac{\alpha_2}{4^3} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \mathrm{E} \frac{2+1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{E} \frac{\alpha_1+1}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1+(-1)^{\alpha_1}}{4} \frac{1}{2} \mathrm{E} \frac{\alpha_2+1}{2} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varphi(x);$$

$$\varphi\left(\frac{x+3}{4}\right) = \varphi\left(\frac{3}{4} + \frac{\alpha_1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \mathrm{E} \frac{3+1}{2} = 1.$$

Istnieje więc jedna i tylko jedna funkcya, ograniczona w przedziale (0, 1) i spełniająca w tym przedziale układ równań funkcyjnych (I).

Udowodnimy, że funkcya ta jest ciągła, stale nie malejąca i posiada pantachiczne przedziały stałości.

Załóżmy, dla dowodu ciągłości funkcyi φ, że x i x' są dwiema liczbami rzeczywistemi przedziału (0, 1), których rozwinięcia istotnie nieskończone różnią się dopiero na m-tem miejscu. Wówczas mamy:

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| = |B_{m-1} a_m - B_{m-1} a'_m + B_m a_{m+1} - B'_m a'_{m+1} + \ldots|$$

$$\leqslant \frac{2}{2^{m-1}} + \frac{2}{2^m} + \ldots = \frac{1}{2^{m-3}},$$

co dowodzi ciągłości funkcyi $\varphi(x)$.

Udowodnimy, że funkcya $\varphi(x)$ jest monotoniczna. Niech więc x i $x' > x$ będą dwiema liczbami przedziału (0, 1), różniącemi się w swych rozwinięciach istotnie nieskończonych dopiero na n-tem miejscu; n-ta cyfra rozwinięcia liczby x' jest wtedy większa od odpowiedniej cyfry rozwinięcia liczby x. Nazwijmy te cyfry α_n' i α_n. Możliwe są następujące przypadki:

1) $\alpha'_n = 3$, $\alpha_n = 2$,

2) $\alpha'_n = 2$, $\alpha_n = 1$,

3) $\alpha'_n = 1$, $\alpha_n = 0$,

4) $\alpha'_n = 3$, $\alpha_n = 1$,

5) $\alpha'_n = 2$, $\alpha_n = 0$,

6) $\alpha'_n = 3$, $\alpha_n = 0$.

Wystarczy oczywiście nierówności $\varphi(x') \geqslant \varphi(x)$ dowieść tylko w trzech pierwszych przypadkach.

Mamy:

$$\varphi(x') - \varphi(x) = B_{n-1}(a'_n - a_n) + B'_n a'_{n+1} - B_n a_{n+1} + \ldots$$

Gdyby było $B_{n-1} = 0$, to mielibyśmy $\varphi(x') = \varphi(x)$ i nierówność $\varphi(x') \geqslant \varphi(x)$ byłaby prawdziwa. Załóżmy więc, że $B_{n-1} \neq 0$ $\left(\text{a więc} = \frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Wówczas mamy w przypadku 1) i 3):

$$\varphi(x') - \varphi(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{a_{n+1}}{2^n} - B_{n+1} a_{n+2} - \ldots$$

Rozpatrzmy teraz wyrażenie

$$A_{n+1} = a_{n+1} + 2^n B_{n+1} a_{n+2} + \dots$$

Gdy żadna z cyfr rozwinięcia liczby x nie jest $=3$, wówczas

$$A_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1}{2} + \dots \leqslant 1 .$$

Gdy zaś $\alpha_{n+k} = 3$, to

$$A_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2} + \dots + 2^n \frac{1}{2^{n+k-2}} \frac{1}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+k-1}} < 1 .$$

Stąd więc otrzymujemy

$$\varphi(x') - \varphi(x) = \frac{1}{2^n} - \frac{A_{n+1}}{2} \geqslant 0 ,$$

czyli

$$\varphi(x') \geqslant \varphi(x) .$$

W przypadku 2) mamy, zważywszy, że $B_{n+k} = 0$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\varphi(x') - \varphi(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2^n} a'_{n+1} + B'_{n+1} a'_{n+2} + \dots ,$$

skąd, ponieważ wszystkie składniki są nieujemne, wnosimy, że i w tym przypadku

$$\varphi(x') \geqslant \varphi(x) .$$

Widoczne jest dalej, że funkcya posiada przedziały pantachiczne, w których jest stała. Z rozwinięcia funkcyi wynika, że każdy przedział

(A) $$\left(\frac{\alpha_1}{4} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n} , \quad \frac{\alpha_1}{4} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{4^{n-1}} + \frac{2}{4^n} \right)$$

i każdy przedział

(B) $$\left(\frac{\alpha_1}{4} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{4^{n-1}} + \frac{3}{4^n} , \quad \frac{\alpha_1}{4} + \dots + \frac{\alpha_{n-1} + 1}{4^{n-1}} \right),$$

gdzie α_k są 0 lub 2, jest przedziałem stałości. Długość każdego z przedziałów (A) i przedziałów (B) wynosi $\frac{1}{4^n}$, n może przybierać wszystkie wartości naturalne i przy każdem n mamy 2^{n-1} różnych przedziałów (A) i 2^{n-1} różnych przedziałów (B). Suma ich wynosi więc:

$$S = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 ,$$

skąd widzimy, że przedziały stałości funkcyi φ są wszędzie gęste.

Weźmy teraz pod uwagę wszystkie te punkty ξ, które są końcami odcinków stałości lub nie leżą na żadnym z nich. Punkty te charakteryzują się tem, że dla każdego z nich istnieje rozwinięcie na ułamek czwórkowy (rozwinięcie to może być skończone lub nieskończone), którego cyframi są tylko 0 lub 2.

Niech ξ oznacza jeden z takich punktów, w którego rozwinięciu jest nieskończenie wiele cyfr równych 2. Niech to będą cyfry $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots$

Połóżmy

$$x_{k_n - 1} = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_n - 1}}{4^{k_n - 1}} .$$

Mamy, jak łatwo obliczyć:

$$\frac{\varphi(\xi) - \varphi(x_{k_n - 1})}{\xi - x_{k_n - 1}} = \frac{\frac{1}{2^{k_n - 1}} \alpha_{k_n} + \frac{1}{2^{k_n}} \alpha_{k_n + 1} + \dots}{\frac{\alpha_{k_n}}{4^{k_n}} + \frac{\alpha_{k_n + 1}}{4^{k_n + 1}} + \dots} =$$

$$= 4 \,.\, 2^{k_n - 1} \frac{\alpha_{k_n} + \frac{\alpha_{k_n + 1}}{2} + \dots}{\alpha_{k_n} + \frac{\alpha_{k_n + 1}}{4} + \dots}$$

$$\geqslant 4 \,.\, 2^{k_n - 1} \frac{\frac{1}{2}}{3} = 2^{k_n - 1} \,.\, \frac{4}{6} > 2^{k_n - 2} ;$$

jest więc w tym przypadku

$$\lim_{n = \infty} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x_{k_n - 1})}{\xi - x_{k_n - 1}} = \infty .$$

Gdy natomiast ξ jest ułamkiem skończonym, którego wszystkie cyfry są 0 lub 2, a więc postaci

$$\xi = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{4^k} ,$$

wówczas położymy

$$x_n = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{4^k} + \frac{2}{4^{k+n}} .$$

Mamy wtedy:

$$\frac{\varphi(\xi)-\varphi(x_n)}{\xi - x_n} = \frac{\frac{1}{2^{k+n}}}{\frac{2}{4^{k+n}}} = 2^{k+n-1},$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(x_n)}{\xi - x_n} = \infty.$$

Miejsc ξ, mających jako cyfry rozwinięcia 0 i 2, jest oczywiście mnogość mocy kontynuum; istnieje bowiem odpowiedniość doskonała między niemi a wszystkiemi liczbami rzeczywistemi przedziału (0, 1). Dla dowodu wystarczy podporządkować każdej liczbie

$$\frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots \quad \text{liczbę} \quad \frac{\frac{\alpha_1}{2}}{2} + \frac{\frac{\alpha_2}{2}}{2^2} + \frac{\frac{\alpha_3}{2}}{2^3} + \ldots, \quad \text{i odwrotnie.}$$

Dowiedliśmy więc dla krzywej Harnacka pierwszej części naszego twierdzenia.

II.

Rozpatrzymy teraz funkcyę Cantora o pantachicznych przedziałach stałości. Funkcyę tę określimy w sposób następujący dla $0 \leqslant x \leqslant 1$:

Niech α_k oznacza 0 lub 2. Gdy x spełnia nierówności

$$\frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \leqslant x \leqslant \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n},$$

położymy:

$$\psi(x) = \frac{\alpha_1}{2^2} + \frac{\alpha_2}{2^3} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Gdy natomiast x przedstawiamy za pomocą rozwinięcia nieskończonego

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}, \quad \text{gdzie } \alpha_n = 0 \text{ lub } 2,$$

to położymy

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^{n+1}}.$$

Z łatwością widzimy, że tak określona funkcya $\psi(x)$ jest w przedziale 0, 1) ciągła, stale nie malejąca i posiada pantachiczne przedziały stałości.

Niech teraz ξ oznacza którykolwiek z punktów, dla którego istnieje jedno przynajmniej rozwinięcie (skończone wzgl. nieskończone) na ułamek trójkowy, którego cyframi są same 0 lub 2. Obierzmy ciąg x_n, zmierzający do ξ, w sposób następujący: Gdy ξ ma na n-tem miejscu rozwinięcia cyfrę 0, to w rozwinięciu liczby x_n na n-tem miejscu połóżmy cyfrę 2, gdy zaś na n-tem miejscu rozwinięcia liczby ξ jest cyfra 2, połóżmy w x_n na n-tem miejscu cyfrę 0. Reszta cyfr rozwinięcia liczby x_n jest identyczna z cyframi rozwinięcia liczby ξ.

Mamy wówczas, jak to w jednej chwili wynika z definicyi funkcyi $\psi(x)$:

$$\frac{\psi(\xi)-\psi(x_n)}{\xi - x_n} = \frac{\pm\frac{2}{2^{n+1}}}{\pm\frac{2}{3^n}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi(\xi)-\psi(x_n)}{\xi - x_n} = \infty.$$

Podobnie, jak w krzywej Harnacka, widzimy i tu z łatwością, że punktów ξ wyżej określonych istnieje mnogość mocy kontynuum.

Pierwszej części naszego twierdzenia dowiedliśmy więc w zupełności.

III.

Niech funkcya $\varphi(x)$, określona w przedziale (0, 1), przedstawia funkcyę ciągłą o pantachicznych odcinkach stałości, ale nie będącą stałą w tym przedziale.

Weźmy pod uwagę którykolwiek odcinek stałości, którego końcami są a_0 i b_0 $(b_0 > a_0)$. Ponieważ funkcya $\varphi(x)$ jest ciągła, możemy znaleść takie liczby ε_0 i η_0, spełniające nierówności

$$0 < \varepsilon_0 \leqslant b_0 - a_0$$

i

$$0 < \eta_0 \leqslant b_0 - a_0,$$

że dla wszystkich liczb x przedziału $(a_0 - \varepsilon_0, a_0)$ i przedziału $(b_0, b_0 + \eta_0)$ będzie zachodziła nierówność:

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leqslant b_0 - a_0,$$

gdzie ξ oznacza którykolwiek punkt odcinka (a_0, b_0).

W przedziałach $(a_0 - \varepsilon_0, a_0)$ i $(b_0, b_0 + \eta_0)$ znajdują się, według założenia co do natury funkcyi $\varphi(x)$, znów odcinki stałości. Obierzmy w każdym przedziale po jednym z nich — oznaczmy $(a^0{}_{,0}, b_{0,0})$[1] i $(a_{0,1}, b_{0,1})$ — tak by zachodziły nierówności:

$$a_0 - \varepsilon_0 < a_{0,0} < b_{0,0} < a_0,$$

$$b_0 < a_{0,1} < b_{0,1} < b_0 + \eta_0,$$

oraz

$$b_{0,0} - a_{0,0} \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2}, \qquad b_{0,1} - a_{0,1} \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

(Jest to naturalnie możliwe, bo w każdym przedziale, który nie jest w całości odcinkiem stałości lub jego częścią, znajduje się nieskończenie wiele odcinków stałości, nie zachodzących na siebie; znajdą się więc takie, których długość jest mniejsza od danej naprzód dodatniej liczby σ).

Ze względu, że funkcya $\varphi(x)$ jest ciągła, możemy wyznaczyć takie przedziały

$$(a_{0,0} - \varepsilon_{0,0}, a_{0,0}), \qquad (b_{0,0}, b_{0,0} + \eta_{0,0})$$

oraz

$$(a_{0,1} - \varepsilon_{0,1}, a_{0,1}), \qquad (b_{0,1}, b_{0,1} + \eta_{0,1}),$$

ażeby zachodziły wszystkie wypisane nierówności:

$$0 < \varepsilon_{0,0} \leqslant b_{0,0} - a_{0,0}, \qquad 0 < \eta_{0,0} \leqslant b_{0,0} - a_{0,0},$$

$$0 < \varepsilon_{0,1} \leqslant b_{0,1} - a_{0,1}, \qquad 0 < \eta_{0,1} \leqslant b_{0,1} - a_{0,1},$$

$$a_0 - \varepsilon_0 < a_{0,0} - \varepsilon_{0,0} < a_{0,0} < b_{0,0} < b_{0,0} + \eta_{0,0} < a_0 < b_0$$

$$< a_{0,1} - \varepsilon_{0,1} < a_{0,1} < b_{0,1} < b_{0,1} + \eta_{0,1} < b_0 + \eta_0,$$

oraz dla każdej liczby x przedziałów $(a_{0,0} - \varepsilon_{0,0}, a_{0,0})$, $(b_{0,0}, b_{0,0} + \eta_{0,1})$ nierówność

(IV)
$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leqslant \frac{b_{0,0} - a_{0,0}}{2}$$

i dla liczb x przedziałów $(a_{0,1} - \varepsilon_{0,1}, a_{0,1})$, $(b_{0,1}, b_{0,1} + \eta_{0,1})$ nierówność

(V)
$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leqslant \frac{b_{0,1} - a_{0,1}}{2},$$

gdzie ξ oznacza w (IV) dowolny punkt odcinka $(a_{0,0}, b_{0,0})$, w (V) dowolny punkt odcinka $(a_{0,1}, b_{0,1})$.

---

[1]) Naturalnie wskaźniki $0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ są tu tylko symbolami, którym nie nadajemy znaczenia liczbowego, tak że np. 0 i 0,0 uważamy za symbole różne i punkty a_0 i $a_{0,0}$ za punkty różne.

W ten sposób postępujemy dalej i dochodzimy do przedziałów

(VI)
$$(a_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_n} - \varepsilon_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_n}, a_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_n}),$$
$$(b_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_n}, b_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_n} + \eta_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_n}),$$

gdzie każde α jest zerem lub jednością. Spełnione tu być mają następujące nierówności:

(VII)
$$b_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_n} - a_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_n} \leqslant \frac{b_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_{n-1}} - a_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_{n-1}}}{2};$$

(VIII)
$$a_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_{n-1}} - \varepsilon_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}} < a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0} - \varepsilon_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0}$$
$$< a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0} < b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0} < b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0} + \eta_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0}$$
$$< a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}} < b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}} < a_{0,\alpha\ldots,\alpha_{n-1}1} - \varepsilon_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}1}$$
$$< a_{0,\alpha_1\alpha\ldots,\alpha_{n-1}1} < b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}1} < b_{0,\alpha\ldots,\alpha_{n-1}1} + \eta_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}1}$$
$$< b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}} + \eta_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}};$$

(IX)
$$0 < \varepsilon_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0} \leqslant b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0} - a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0},$$
$$0 < \eta_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0} \leqslant b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0} - a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}0},$$
$$0 < \varepsilon_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}1} \leqslant b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}1} - a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}1},$$
$$0 < \eta_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}1} \leqslant b_{0,\alpha\ldots,\alpha_{n-1}1} - a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}1},$$

dla każdej zaś liczby x przedziałów (VI) nierówność:

(X)
$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leqslant \frac{b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n} - a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n}}{2^n},$$

gdzie ξ oznacza jakąkolwiek liczbę przedziału

$$(a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n}, b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n}).$$

W każdy z przedziałów

$$(a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n} - \varepsilon_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n}, a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n}),$$

oraz

$$(b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n}, b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n} + \eta_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_n})$$

wstawimy w podany wyżej sposób znów nowe przedziały i tak postępujemy dalej.

Weźmy teraz pod uwagę ciągi przedziałów:

$$
\begin{array}{ll}
(a_0 - \varepsilon_0, \quad a_0), & (b_0, \quad b_0 + \eta_0), \\
(a_{0,\alpha_1} - \varepsilon_{0,\alpha_1}, \quad a_{0,\alpha_1}), & (b_{0,\alpha_1}, \quad b_{0,\alpha_1} + \eta_{0,\alpha_1}), \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
(a_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} - \varepsilon_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}), & (b_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}, \quad b_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} + \eta_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}), \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}
$$

Jak z nierówności (VIII) wynika, każdy z przedziałów, wypisanych w n-tym wierszu, mieści się całkowicie wewnątrz jednego z przedziałów, wypisanych w $n-1$-ym wierszu. Z nierówności znów (VII) i (IX) wynika, że zmierzają one do zera. Każdy ciąg przedziałów,[1] z których każdy następny jest zawarty w poprzedzającym i zmierzających do zera wyznacza, według znanego twierdzenia, punkt wspólny wszystkim.[2] Jeżeli punkt ten jest wspólny przedziałom $(a_0 - \varepsilon_0, a_0)$, $(a_{0,\alpha_1} - \varepsilon_{0,\alpha_1}, a_{0,\alpha_1}) \ldots (a_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} - \varepsilon_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}, a_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}) \ldots$, oznaczmy go przez $p_{0,\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_n\ldots}$; jeżeli natomiast jest wspólny przedziałom $(b_0, b_0 + \eta_0)$, $(b_{0,\alpha_1}, b_{0,\alpha_1} + \eta_{0,\alpha_1}) \ldots$, oznaczmy go przez $q_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots}$.

Nie wchodząc bliżej w rozbiór, czy punkty $p_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots}$ i $q_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots}$ mogą być identyczne, udowodnimy, że dwa punkty $p_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots}$ i $p_{0,\beta_1\beta_2\ldots}$ są różne, jeżeli nie zachodzi równość $\alpha_n = \beta_n$ przy wszelkiem naturalnem n.

Weźmy bowiem dwa punkty

$$p_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_{n-1}\,0\,\alpha_{n+1}\ldots}$$

i

$$p_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_{a-1}\,1\,\beta_{n+1}\ldots};$$

chwila zastanowienia nad treścią naszych znakowań doprowadza nas do wniosku, że zachodzi nierówność:

$$p_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots,\alpha_{n-1}\,0\,\alpha_{n+1}\ldots} \leqslant a_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}} < b_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n-1}} \leqslant p_{0,\alpha_1\ldots,\alpha_{n+1}\,1\,\beta_{n+1}\ldots},$$

skąd widzimy, że uważane punkty są istotnie różne. Z łatwością widzimy stąd, że moc mnogości tych wszystkich punktów jest kontynuum.

---

[1]) Mowa tu naturalnie o przedziałach zamkniętych.

[2]) Zob. np. W. Sierpiński, Zarys Teoryi mnogości, Bibl. mat.-fiz. Serya III, T. IX, Warszawa, 1912.

Weźmy teraz pod uwagę wyrażenie

$$A_n = \left| \frac{\varphi(p_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots}) - \varphi\left(\frac{a_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} + b_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{2}\right)}{p_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots} - \frac{a_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} + b_{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{2}} \right|.$$

Stosując do licznika tego wyrażenia wzór (X) i zważywszy, że $p_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots}$ nie leży wewnątrz odcinka $(a_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots a_n}, b_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$, otrzymujemy nierówność:

$$A_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} A_n = 0.$$

Dowiedliśmy więc w zupełności drugiej części naszego twierdzenia.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit beweise ich, dass die durch G. Cantor[1]) u. Harnack[2]) angegebenen stetigen, monotonen, überall dicht die Constanzintervalle besitzenden Kurven die Eigenschaft haben, dass sie in einer unabzählbaren Menge von Punkten keine (weder endliche noch unendlich grosse) Ableitung besitzen. Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

1) Ich beweise, dass für jeden Punkt ξ, welcher innerhalb keines Constanzintervalls der Cantorschen oder Harnackschen Kurve $\varphi(x)$ liegt, eine solche Folge von Punkten x_n angegeben werden kann, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x_n)}{\xi - x_n} = \infty \quad \text{ist.}$$

2) Ich beweise für alle stetigen Kurven $\varphi(x)$, die überal dicht Constanzintervalle besitzen, dass in der Menge von Punkten x, die innerhalb keines Constanzintervalls liegen, eine Menge von der Mächtigkeit Continuums von Punkten ξ sich befindet, dass für jeden dieser Punkte eine solche Folge x_n existiert, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x_n)}{\xi - x_n} = 0 \quad \text{ist.}$$

---

[1]) Acta Mathematica, Bd. 4, p. 386.

[2]) Mathemat. Annalen, Bd. 24, p. 227.