$$L \times P_n \equiv Q_n,$$

$$L \times P \equiv Q,$$

Jest wtedy:

$$Q_{n+1} < Q_n,$$

$$Q \equiv D(Q_n)$$

a ponieważ zbiory Q_n są domknięte, i, na zasadzie (III):

$$Q_n \neq 0$$

więc:

$$Q \neq 0.$$

Stąd wynika:

$$\Gamma(P) > \Gamma(T)$$

a, że oczywiście:

$$\Gamma(P) < \Gamma(T),$$

więc

$$\Gamma(P) \equiv \Gamma(T)$$

c. b. d. o.

Warszawa 12/I 1915.

RÉSUMÉ.

Je demontre dans cette note le

Theorème: W étant l'ensemble de points situé à l'interieur et sur la frontière d'un polygone, on peut trouver un ensemble fermé, punctiforme P, contenu dans W et tel, que toute droite rencontrant W rencontre P.

Le cas general d'un polygone quelconque se ramenant aisement au cas d'un triangle, je ne donne la démonstration que pour ce cas. Elle est basée sur le lemme suivant: un triangle T étant donné on peut definir un ensemble $\varphi(T)$, composé de quatre triangles, contenus dans T, n'ayant pas de points communs deux à deux, et tels, que toute droite rencontrant T rencontre au moins un d'eux.

En désignant, pour tout ensemble U composé d'un nombre fini de triangles sans points communs deux à deux, par $\varphi(U)$, l'ensemble qu'on obtient en remplaçant tout triangle T_i de U — par $\varphi(T_i)$, je forme la suite:

$$P_0 \equiv T; \quad P_{n+1} \equiv \varphi(P_n).$$

L'ensemble P de points communs à tous les P_n est fermé, punctiforme, contenus dans T et rencontre toute droite passant par T.

W. SIERPIŃSKI.

Sur une méthode de numéroter toutes les valeurs extrêmales d'une fonction arbitraire.

(Sposób ponumerowania wszystkich wartości extremalnych dowolnej funkcyi).

Dans ma communication „Démonstration de la dénombrabilité des valeurs extrêmales d'une fonction" (Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie. 1912, p. 235) j'ai démontré que l'ensemble de toutes les valeurs différentes qu'obtient une fonction $f(x)$ (continue ou non), quand elle atteint son maximum ou son minimum, est au plus dénombrable. Je veux montrer maintenant comment on peut effectivement numéroter toutes les valeurs extrêmales d'une fonction donnée.

Soit donc $f(x)$ une fonction donnée, d'ailleurs arbitraire (continue ou non) d'une variable réelle. Nous ne diminuerons pas évidemment la généralité de nos considérations en supposant que la fonction $f(x)$ est définie pour toutes les valeurs réelles de la variable.

Désignons par M l'ensemble de toutes les valeurs différentes qu'obtient la fonction $f(x)$ quand elle atteint un de ses maxima (qui peuvent être propres — eigentlich — ou non) et soit m un élement de l'ensemble M.

L'ensemble de tous les intervalles (a, b) aux extrémités rationnelles est, comme on sait, dénombrable et nous le savons ranger en une suite infinie bien déterminée

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad (a_3, b_3), \ldots$$

Le nombre m désignant la valeur qu'obtient la fonction $f(x)$, quand elle atteint un de ses maxima, il existe un nombre réel ξ, tel que $f(\xi) = m$ et un intervalle (a, b) de notre suite, tel que $a < \xi < b$ et que

$$f(x) \leqslant f(\xi) \quad \text{pour} \quad a < x < b.$$

Désignons par (a_k, b_k) le premier intervalle de notre suite tel que pour un nombre réel ξ nous avons

$$a_k < \xi < b_k \quad \text{et} \quad f(\xi) = m,$$

et que

$$f(x) \leqslant m \quad \text{pour} \quad a_k < x < b_k.$$

Il correspondra donc à tout élement m de l'ensemble M un indice k bien déterminé. Je dis qu'aux différents élements de l'ensemble M correspondront toujours des indices différents. En effet, supposons qu'aux élements différents m et m' de l'ensemble M correspond le même indice k. Nous aurions donc pour un nombre ξ:

$$a_k < \xi < b_k, \tag{1}$$

$$f(\xi) = m, \tag{2}$$

et

$$f(x) \leqslant m \quad \text{pour} \quad a_k < x < b_k; \tag{3}$$

d'autre part, pour un nombre ξ' nous aurions:

$$a_k < \xi' < b_k, \tag{4}$$

$$f(\xi') = m', \tag{5}$$

et

$$f(x) \leqslant m' \quad \text{pour} \quad a_k < x < b_k. \tag{6}$$

D'après (4), nous pouvons dans (3) poser $x = \xi'$, ce qui donne

$$f(\xi') \leqslant m; \tag{7}$$

d'autre part, d'après (1), nous pouvons dans (6) poser $x = \xi$, ce qui donne

$$f(\xi) \leqslant m'. \tag{8}$$

Les inégalités (7) et (8) donnent, d'après (2) et (5):

$$m = m',$$

contre l'hypothèse que les nombres m et m' sont différents.

Nous avons donc démontré qu'à tout élement m de l'ensemble M correspond un indice k bien déterminé, et qu'aux élements différents de l'ensemble M correspondent toujours des indices différents. Pour ranger tous les élements de l'ensemble M en une suite (finie ou infinie) bien déterminée il suffit regarder comme premier l'élement auquel correspond le plus petit indice k_1, comme second — celui auquel correspond le plus petit indice $> k_1$, et ainsi de suite. La suite ainsi obtenue ne dépendera que de la nature de la fonction $f(x)$ (mais pas de la manière dont la fonction était définie).

STANISŁAW RUZIEWICZ.

O funkcyach ciągłych, monotonicznych, posiadających pantachiczne przedziały stałości.

(Uber stetige, monotone, überall dicht die Constanzintervalle besitzende Funktionen).

Niedawno zbudowałem przykład funkcyi ciągłej, monotonicznej, nie posiadającej pochodnej w nieprzeliczalnej mnogości punktów.[1] P. Sierpiński zwrócił mi uwagę, że podobne przykłady stanowią krzywe o pantachicznych odcinkach stałości, zbudowane przez Cantora[2] i Harnacka[2].

Dla dowodu, że krzywe te nie posiadają w nieprzeliczalnej mnogości punktów pochodnej (ani skończonej ani nieskończenie wielkiej), wykażemy:

1) Dla każdego punktu ξ, nie leżącego wewnątrz żadnego z odcinków stałości w krzywej $\varphi(x)$ Cantora lub Harnacka, istnieje taki ciąg liczb $x_n \neq \xi$, $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \xi$, że $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\varphi(\xi) - \varphi(x_n)}{\xi - x_n} = \infty$.

2) W każdej krzywej $f(x)$ ciągłej, o pantachicznych odcinkach stałości istnieje wśród punktów ξ, nie leżących wewnątrz żadnego z odcinków stałości, taka nieprzeliczalna mnogość punktów ξ', że dla każdego z nich można dobrać taki ciąg liczb $x_n \neq \xi'$, $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \xi'$, że $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{f(\xi') - f(x_n)}{\xi' - x_n} = 0$.

W pierwszej części tej pracy udowadniam twierdzenie 1-sze dla krzywej Harnacka, przyczem dla wygody badań przedstawiam ją analitycznie, jako rozwiązanie pewnego układu równań funkcyjnych. W części drugiej zajmuję się twierdzeniem 1-szem dla krzywej Cantora, w części trzeciej twierdzeniem 2-giem.

[1]) Sprawozd. Tow. Nauk. Warszawskiego, 1913, rok VI.
[2]) Acta Mathematica, T. 4, p. 386.
[3]) Mathemat. Annalen, T. 24, str. 227.