Jeżeli N należy do (P) lub (P_1), to oczywiście A należy do (P_2). W przeciwnym razie poprowadźmy przez N płaszczyznę podpierającą ν i połączmy N z dowolnym punktem L mnogości (P), leżącym w płaszczyźnie ν. Na prostej NL znajduje się jeszcze jeden punkt brzegu K mnogości $C(P_\nu)$, przyczem N leży pomiędzy K i L Na zasadzie twierdzenia 1-go punkt L należy do (P_1). Zatem w trójkącie MLK, zawierającym punkt A, dwa wierzchołki należą do (P), trzeci zaś do (P_1). Stąd wynika, że wszystkie punkty tego trójkąta, a więc i A, należą do (P_2), co należało udowodnić.[1]

Podobnie, jak w § 1 możemy jeszcze dowieść dwóch własności mnogości $C(P)$.

Twierdzenie 5. Mnogość $C(P)$ posiada tę samą średnicę, co mnogość (P).

Twierdzenie 6. Mnogość $C(P)$ jest identyczna z mnogością punktów wspólnych wszystkich kul, zawierających mnogość (P).

Zusammenfassung.

Es bezeichne (P) eine abgeschlossene, in einem endlichen Bereiche des dreidimensionalen Raumes gelegene Punktmenge. Sei ferner $C(P)$ die Menge der gemeinsamen Punkte aller konvexen Punktmengen, welche die Punktmenge (P) enthalten. $C(P)$ ist also die kleinste konvexe welche die Punktmenge (P) enthält.

Über die Menge $C(P)$ werden folgende Sätze bewiesen.

1. Die Menge $C(P)$ ist identisch mit der Menge der gemeinsamen Punkte aller Kugeln welche die Punktmenge (P) enthalten.

2. Die Menge $C(P)$ besitzt den gleichen Durchmesser, wie die Menge (P), unter dem Durchmesser einer Punktmenge die obere Grenze der gegenseitigen Abstände ihrer Punkte verstanden.

3. Der Schnitt der Menge $C(P)$ mit einer ihrer Stützebenen α ist identisch mit der kleinsten konvexen Punktmenge, welche den Schnitt von (P) mit α enthält.

4. Bezeichnet $(P_1) = \varphi(P)$ die Menge der Punkte aller Strecken, die je zwei Punkte von P verbinden (Endpunkte mitgezählt), so ist die Menge $C(P)$ identisch mit der Menge $(P_2) = \varphi(P_1) = \varphi\varphi(P)$.

Alle obigen Sätze lassen eine unmittelbare Ausdehnung auf den Raum von n Dimensionen zu.

[1]) Dla przestrzeni n-wymiarowej twierdzenie to brzmi: Jeżeli n czyni zadość nierówności $2^k \leqq n < 2^{k+1}$, to $P_{k+1} = \varphi^{(k+1)}(P)$ jest identyczne z $C(P)$, zaś $\varphi^{(k)}(P)$ jest naogół podmnogością właściwą mnogości $C(P)$. Patrz S. Straszewicz, Beiträge zur Theorie der konvexen Punktmengen. Dissertation, Zürich 1914.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

Przykład zbioru domkniętego, punktokształtnego, mającego punkty wspólne z każdą prostą, przecinającą pewien obszar domknięty.

Sur un ensemble fermé, punctiforme, qui rencontre toute droite passant par un certain domaine.

Przykłady zbiorów płaskich, domkniętych i punktokształtnych, mających punkty wspólne z każdą prostą, przecinającą pewien obszar, a więc zbiorów, których rzut na którąkolwiek prostą płaszczyzny zawiera odcinek, zostały podane przez Zoretti'ego i Denjoy[1]). Celem noty niniejszej jest podanie nowego przykładu takiego zbioru.

Wprowadzamy oznaczenia następujące:

Jeżeli A, B są zbiorami, wówczas symbol $A \times B$ oznacza zbiór elementów wspólnych zbiorom A i B; symbole

$$A \equiv B, \quad A \not\equiv B, \quad A < B, \quad A \not< B$$

znaczą odpowiednio: A i B są identyczne, nie są identyczne, A zawarte jest w B, nie jest zawarte w B.

Jeżeli $\{A_i\}$, $i = 1, 2 \ldots$, jest ciągiem zbiorów, wówczas $D(A_i)$ oznacza zbiór elementów wspólnych wszystkim A_i. Jeżeli wreszcie A jest zbiorem punktów, wówczas $\Gamma(A)$ oznacza zbiór prostych, mających punkty wspólne ze zbiorem A, zaś $\delta(A)$ — średnicę zbioru A, t. zn. górną granicę wzajemnych odległości jego punktów.

Twierdzenie: Niech będzie L linia łamana, zamknięta, bez punktów wielokrotnych, W — zbiór punktów, leżących na L

[1]) L. Zoretti, Comptes rendus **142** p. 763 (1906); Leçons sur le prolongement analytique p. 23—24 (1911); A. Denjoy, Comptes rendus **149** p. 726 (1909); A. Schoenfliess, Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen I. p. 323—324 (1913).

i wewnątrz L; istnieje wówczas zbiór P, domknięty, punktokształtny, zawarty w W i taki, że:

$$\Gamma(P) \equiv \Gamma(W)\,^{1)}.$$

Dowód Wobec tego, że każdy wielobok rozciąć się daje na skończoną liczbę trójkątów, że suma skończonej liczby zbiorów punktokształtnych, domkniętych jest punktokształtna, domknięta, i że:

$$\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \Gamma(A_i),$$

wystarczy przeprowadzić dowód dla przypadku, gdy W jest trójkątem.

Lemmat. Niech $T \equiv (a_1, a_2, a_3)$ oznacza trójkąt o wierzchołkach a_1, a_2, a_3. Można wówczas określić jednoznacznie zbiór $\varphi(T)$, będący sumą czterech trójkątów $T_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\varphi(T) \equiv \sum_{i=1}^{4} T_i$$

o własnościach następujących:

$$\varphi(T) < T, \tag{1}$$

$$T_i \times T_k \equiv 0, \quad i \neq k; \quad i, k = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

$$\delta(T_i) \leqq \tfrac{3}{4}\delta(T), \tag{3}$$

$$\Gamma(\varphi(T)) \equiv \Gamma(T). \tag{4}$$

Oznaczmy przez b_1, b_2, b_3 środki boków $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$; przez c_1, c_2, c_3 — środki boków $\overline{b_3 b_1}$, $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{b_2 b_3}$, przez $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ — środki odcinków $\overline{c_1 c_2}$, $\overline{c_2 c_3}$, $\overline{c_3 c_1}$, przez e_1, e_2, e_3 punkty przecięcia odcinków $\overline{c_1 a_2}$, i $\overline{b_1 \partial_1}$, $\overline{c_2 a_3}$ i $\overline{b_2 \partial_2}$, $\overline{c_3 a_1}$ i $\overline{b_3 \partial_3}$, wreszcie przez f_1, f_2, f_3 — środki odcinków $\overline{e_1 \partial_1}$, $\overline{e_2 \partial_2}$, $\overline{e_2 \partial_3}$. Połóżmy:

---

[1]) W przykładach Zoretti'ego i Denjoy istnieje taki zbiór domknięty i punktokształtny P i taki obszar domknięty S, że:

$$\Gamma(P) > \Gamma(S)$$

ale

$$\Gamma(P) \not\equiv \Gamma(S) \quad \text{i} \quad P \not< S;$$

wskutek tego rzut zbioru P na prostą jest naogół odcinkiem + zbiór punktokształtny. W moim przykładzie rzut zbioru P na którąkolwiek prostą jest identyczny z rzutem linii L, jest więc poprostu odcinkiem.

$$T_i \equiv (a_i b_i f_i), \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$T_4 \equiv (c_1 c_2 c_3),$$

$$\varphi(T) \equiv \sum_{i=1}^{4} T_i.$$

Warunek (1) jest oczywiście spełniony; proste rozumowanie, które pomijam, wykazuje, że zachodzi również (2).

Dalej jest:

$$(a_1 a_2 a_3) \backsim (c_1 c_2 c_3),$$

$$\overline{a_i a_k} = 4\,\overline{b_i b_k},$$

a więc:

$$\delta(T_4) = \tfrac{1}{4}\delta(T).$$

Dla boków T_1 mamy następujące nierówności:

α) $$\overline{a_1 b_1} = \tfrac{1}{2}\overline{ab} \leqq \tfrac{1}{2}\delta(T),$$

β) $$\overline{b_1 f_1} < \overline{b_1 \partial_1} < \overline{b_1 c_1} + \overline{b_1 c_2} = \tfrac{1}{4}(\overline{a_2 a_3} + \overline{a_3 a_1}) \leqq \tfrac{1}{2}\delta(T),\,^{1)}$$

γ) albo: $$\overline{a_1 f_1} \leqq \overline{a_1 b_1} \leqq \tfrac{1}{2}\delta(T),$$

albo też $$\overline{a_1 f_1} \leqq \overline{a_1 \partial_1} \leqq \overline{a_1 c_1} + \overline{c_1 \partial_1} \leqq \tfrac{1}{2}\delta(T) + \tfrac{1}{4}\delta(T) \leqq \tfrac{3}{4}\delta(T).\,^{2)}$$

W każdym razie więc jest:

$$\delta(T_1) \leqq \tfrac{3}{4}\delta(T)$$

i podobnież:

$$\delta(T_i) \leqq \tfrac{3}{4}\delta(T); \qquad i = 2, 3.$$

Pozostaje do udowodnienia warunek (4).

Z warunku (1) wynika:

$$\Gamma(\varphi(T)) < \Gamma(T);$$

gdyby nie było odwrotnie:

$$\Gamma(\varphi(T)) > \Gamma(T)$$

wówczas istniałaby prosta L taka, iż:

$$L \times T_i \equiv 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$L \times T \not\equiv 0$$

---

[1]) Średnica trójkąta = maximum długości jego boków.

[2]) $\overline{a_1 c_1}$ jest mniejsze albo od $\overline{a_1 b_1}$, albo od $\overline{b_1 a_3}$.

Z aksyomatu Pascha[1] wynika w związku z założeniem, że L przecina dokładnie dwa z pomiędzy odcinków $\overline{b_1 a_2}$, $\overline{b_2 a_3}$, $\overline{b_3 a_1}$; przypuścimy, że są niemi odcinki $b_1 a_2$ i $b_2 a_3$. Możliwe są dwie ewentualności:

I. L przecina $\overline{a_3 c_3}$.

Posługując się założeniem i wymienionym aksyomatem, wnosimy, że L przecina (przytem wewnątrz) odcinki: $\overline{c_3 b_3}$, $\overline{b_3 c_1}$, $\overline{a_1 c_1}$, $\overline{c_1 b_1}$, przecina więc odcinek $\overline{b_1 b_3} = \overline{b_3 c_1} + \overline{c_1 b_1}$ w dwu różnych punktach, co jest niemożliwe.

II. L nie przecina $a_3 c_3$; wówczas jednak przecina $\overline{c_3 b_2}$ i $\overline{b_2 \partial_2}$; stąd wynika,[2] że b_2 i ∂_2 leżą po różnych stronach linii L. Ponieważ, w myśl założeń, L nie przecina $\overline{a_3 c_3} + \overline{c_3 \partial_2} + \overline{\partial_2 c_2}$, więc ∂_2 leży po tej samej stronie linii L, co cały odcinek $\overline{c_2 a_3}$, w szczególności, po tej samej, co e_2; wobec tego jednak, że L nie przecina $\overline{f_2 b_2} = \overline{f_2 e_2} + \overline{e_2 b_2}$, więc e_2 i b_2, a zatem i ∂_2 i b_2 leżą po tej samej stronie linii L. I w przypadku II dochodzimy tym sposobem do sprzeczności. Warunek (4) musi więc być spełniony. Tym sposobem lemmat nasz został udowodniony.

Załóżmy teraz, że zbiór U jest sumą skończonej liczby n trójkątów, z których żadne dwa nie mają punktów wspólnych:

$$U = \sum_{n=1}^{n} T_i;$$

$$T_i \times T_k = 0, \qquad i \neq k, \quad i, k = 1, 2 \ldots n.$$

Oznaczmy przez $\lambda(U)$ górną granicę średnic kontynuów, zawartych w U. Z założenia wynika, że kontynuum takie całkowicie zawarte jest w jednym z trójkątów T_i, a stąd, że $\lambda(U)$ równa się największej z liczb $\delta(T_i)$, $i = 1, 2 \ldots n$.

Kładziemy:

$$\varphi(U) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(T_i).$$

Z czterech warunków, którym czyni zadość $\varphi(T_i)$, wynika:

(1) $$\varphi(U) < U,$$

(2) $\varphi(U)$ jest sumą $4n$ trójkątów, z których żadne dwa nie mają punktów wspólnych; można więc do $\varphi(U)$ znów zastosować działanie φ.

(3) $$\lambda(\varphi(U)) \leqq \tfrac{3}{4}\lambda(U),$$

(4) $$\Gamma(\varphi(U)) = \Gamma(U).$$

Niech będzie teraz T trójkąt dany. Połóżmy:

$$P_0 = T,$$

$$P_{n+1} = \varphi(P_n), \qquad n \geqq 0$$

$$P = D(P_n);$$

powiadam, że P czyni zadość warunkom naszego twierdzenia dla $W = T$.

Istotnie, z własności symbolu φ wynika:

(I) $$P_{n+1} < P_n,$$

(II) $$\lambda(P_{n+1}) \leqq \tfrac{3}{4}\lambda(P), \quad \text{więc:}$$

$$\lambda(P_{n+1}) \leqq (\tfrac{3}{4})^{n+1}\delta(T);$$

(III) $$\Gamma(P_{n+1}) = \Gamma(P_n), \quad \text{a więc:}$$

$$\Gamma(P_{n+1}) = \Gamma(P_0) = \Gamma(T).$$

Zbiory P_n są domknięte; stąd i z (I) wynika, że P jest zbiorem domkniętym,[1] przyczem:

$$P < P_n < T.$$

Załóżmy, że P zawiera kontynuum C; jest wtedy:

$$C < P_n \qquad n = 0, 1 \ldots$$

$$\delta(C) \leqq (\tfrac{3}{4})^n \delta(T), \qquad n = 0, 1 \ldots$$

a więc.

$$\delta(C) = 0,$$

co jest niemożliwe. Tym sposobem P jest zbiorem punktokształtnym.

Wreszcie, niech będzie L prostą, zawartą w $\Gamma(T)$; połóżmy:

[1] Por. Hilbert, Grundlagen der Geometrie p. 5 (1909).
[2] Por. Hilbert, l. c. p. 6—7.

[1] Por. Schoenfliess, l. c. I p. 253—254. Możnaby z łatwością udowodnić, że P jest zbiorem doskonałym.

$$L \times P_n \equiv Q_n,$$

Jest wtedy:

$$L \times P \equiv Q,$$

$$Q_{n+1} < Q_n,$$

$$Q \equiv D(Q_n)$$

a ponieważ zbiory Q_n są domknięte, i, na zasadzie (III):

$$Q_n \not\equiv 0$$

więc:

$$Q \not\equiv 0.$$

Stąd wynika:

$$\Gamma(P) > \Gamma(T)$$

a, że oczywiście:

$$\Gamma(P) < \Gamma(T),$$

więc

$$\Gamma(P) \equiv \Gamma(T)$$

c. b. d. o.

Warszawa 12/I 1915.

RÉSUMÉ.

Je demontre dans cette note le

Theorème: W étant l'ensemble de points situé à l'interieur et sur la frontière d'un polygone, on peut trouver un ensemble fermé, punctiforme P, contenu dans W et tel, que toute droite rencontrant W rencontre P.

Le cas general d'un polygone quelconque se ramenant aisement au cas d'un triangle, je ne donne la démonstration que pour ce cas. Elle est basée sur le lemme suivant: un triangle T étant donné on peut definir un ensemble $\varphi(T)$, composé de quatre triangles, contenus dans T, n'ayant pas de points communs deux à deux, et tels, que toute droite rencontrant T rencontre au moins un d'eux.

En désignant, pour tout ensemble U composé d'un nombre fini de triangles sans points communs deux à deux, par $\varphi(U)$, l'ensemble qu'on obtient en remplaçant tout triangle T_i de U — par $\varphi(T_i)$, je forme la suite:

$$P_0 \equiv T; \quad P_{n+1} \equiv \varphi(P_n).$$

L'ensemble P de points communs à tous les P_n est fermé, punctiforme, contenus dans T et rencontre toute droite passant par T.

W. SIERPIŃSKI.

Sur une méthode de numéroter toutes les valeurs extrêmales d'une fonction arbitraire.

(Sposób ponumerowania wszystkich wartości extremalnych dowolnej funkcyi).

Dans ma communication „Démonstration de la dénombrabilité des valeurs extrêmales d'une fonction" (Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie. 1912, p. 235) j'ai démontré que l'ensemble de toutes les valeurs différentes qu'obtient une fonction $f(x)$ (continue ou non), quand elle atteint son maximum ou son minimum, est au plus dénombrable. Je veux montrer maintenant comment on peut effectivement numéroter toutes les valeurs extrêmales d'une fonction donnée.

Soit donc $f(x)$ une fonction donnée, d'ailleurs arbitraire (continue ou non) d'une variable réelle. Nous ne diminuerons pas évidemment la généralité de nos considérations en supposant que la fonction $f(x)$ est définie pour toutes les valeurs réelles de la variable.

Désignons par M l'ensemble de toutes les valeurs différentes qu'obtient la fonction $f(x)$ quand elle atteint un de ses maxima (qui peuvent être propres — eigentlich — ou non) et soit m un élement de l'ensemble M.

L'ensemble de tous les intervalles (a, b) aux extrémités rationnelles est, comme on sait, dénombrable et nous le savons ranger en une suite infinie bien déterminée

$$(a_1, b_1), \quad a_2, b_2), \quad (a_3, b_3), \ldots$$

Le nombre m désignant la valeur qu'obtient la fonction $f(x)$, quand elle atteint un de ses maxima, il existe un nombre réel ξ, tel que $f(\xi) = m$ et un intervalle (a, b) de notre suite, tel que $a < \xi < b$ et que

$$f(x) \leqslant f(\xi) \quad \text{pour} \quad a < x < b.$$

Désignons par (a_k, b_k) le premier intervalle de notre suite tel que pour un nombre réel ξ nous avons