W. SIERPIŃSKI.

Kontynuum liniowe jako mnogość abstrakcyjna.

(Le continu linéaire comme un ensemble abstrait).

WSTĘP.

Mnogością abstrakcyjną (ensemble abstrait) nazywamy według Frécheta zbiór P o jakichkolwiek, byleby różnych, elementach, zwanych punktami, jeżeli spełnione są następujące warunki:

1°. Dla każdego ciągu nieskończonego p_n, którego każdy wyraz jest elementem zbioru P, oraz dla każdego elementu p zbioru P ustalone jest, czy p uważamy, czy też nie uważamy jako granicę ciągu p_n.

2°. Każdy ciąg nieskończony p_n elementów zbioru P posiada conajwyżej jedną granicę (którą oznaczamy, o ile istnieje, przez $\lim\limits_{n=\infty} p_n$).

3°. Jeżeli $p_n = p$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$), to $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p$.

4°. Jeżeli $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p$, k_n zaś oznacza dowolny, stale rosnący ciąg nieskończony wskaźników, to $\lim\limits_{n=\infty} p_{k_n} = p$.

Jasne jest, że część zbioru abstrakcyjnego jest znowu zbiorem abstrakcyjnym.

Jeżeli zbiór A[1] jest częścią zbioru B, to będziemy pisali: $A \subset B$ lub $B \supset A$ (czytaj: A zawarte w B, lub: B zawiera A. Jasne jest, że jeżeli jednocześnie $A \subset B$ oraz $B \subset A$, to zbiory A i B zawierają te same elementy, czyli $A = B$.

Podobnież, jeżeli punkt p należy do zbioru A, będziemy pisali $p \subset A$, lub $A \supset p$. Jeżeli zbiór A składa się z jednego tylko elementu p, to bę-

[1]) Zbiory będziemy oznaczali literami wielkiemi, punkty zaś — małemi.

dziemy pisali: $A = p$[1]. Według naszego znakowania wzór $A = 0$ będzie więc oznaczał, że zbiór A składa się z jednego tylko elementu, którym jest liczba 0; natomiast, dla wyrażenia, że zbiór A jest pró żny (t. j. że nie zawiera żadnego elementu), będziemy pisali: $A = \{\}$.

Zbiór wszystkich tych elementów, które należą do jednego conajmniej ze zbiorów A i B, będziemy nazywali sumą zbiorów A i B i oznaczali przez $A + B$, zbiór zaś wszystkich tych elementów, które należą jednocześnie do zbiorów A i B, będziemy nazywali iloczynem zbiorów A i B i oznaczali przez AB. Uogólnienie na większą liczbę składników lub czynników jest natychmiastowe, przyczem, jak łatwo widzieć, zachodzą prawa: przemiennościowe, łącznościowe i rozdzielnościowe.

Według przyjętego więc znakowania, $A + p$ oznacza zbiór, który otrzymujemy przez dołączenie do zbioru A elementu p. Dalej, mamy zawsze bądź $Ap = p$, bądź też $Ap = \{\}$, zależnie od tego, czy element p należy, czy też nie należy do zbioru A. Podobnież, wzór $AB = \{\}$ oznacza, że zbiory A i B nie posiadają elementów wspólnych. Zauważymy jeszcze, że jeżeli $B \subset A$, to $A + B = A$, zaś $AB = B$.

Zbiór A nazywamy zamkniętym w zbiorze B (lub krócej: zamkniętym w B), jeżeli granica każdego ciągu p_n elementów zbioru A, która należy do B, należy też do A (innemi słowy, jeżeli wzory $p_n \subset A$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) oraz $\lim_{n=\infty} p_n \subset B$, pociągają za sobą zawsze wzór $\lim_{n=\infty} p_n \subset A$). Łatwo widzieć, że suma jakoteż iloczyn dwóch zbiorów zamkniętych w B jest znowu zbiorem zamkniętym w B.

Część W zbioru A nazywamy wszędziegęstą w tym zbiorze, jeżeli każdy element zbioru A jest granicą pewnego ciągu p_n, którego wyrazy należą do W.

Niech P i Q będą dwa zbiory abstrakcyjne i załóżmy, że między ich elementami istnieje odpowiedniość jedno-jednoznaczna; niech przytem $q = f(p)$ oznacza ogólnie element zbioru Q, odpowiadający elementowi p zbioru P, zaś $p = \varphi(q)$ — element zbioru P, odpowiadający elementowi q zbioru Q.

Jeżeli wzór

$$\lim_{n=\infty} p_n = p_0,$$

o ile zachodzi dla elementów zbioru P, pociąga za sobą zawsze w zbiorze Q wzór

[1]) Gdyby chodziło o wyraźne zaznaczenie różnicy między zbiorem, składającym się z jednego tylko elementu p, a samym elementem p: moglibyśmy pierwszy oznaczać przez $\{p\}$. Potrzeba takiego rozróżnienia nie zachodzi jednak w niniejszej pracy.

$$\lim_{n=\infty} f(p_n) = f(p_0),$$

wzór zaś

$$\lim_{n=\infty} q_n = q_0,$$

o ile zachodzi w zbiorze Q, pociąga za sobą zawsze w zbiorze P wzór

$$\lim_{n=\infty} \varphi(q_n) = \varphi(q_0),$$

to zbiory abstrakcyjne P i Q nazywamy homeomorficznemi.

Każdy zbiór abstrakcyjny, homeomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0, 1), nazywamy kontynuum liniowem.

Celem niniejszej pracy jest dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie. *Na to, żeby mnogość abstrakcyjna P była kontynuum liniowem, potrzeba i wystarcza, aby spełnione były następujące warunki:*

1) Dla każdego punktu p zbioru P, z wyjątkiem dwóch, zbiór P jest sumą dwóch różnych od P zbiorów zamkniętych w P, mających, jako jedyny punkt wspólny, punkt p.

2) Jeżeli punkt p nie jest granicą ciągu nieskończonego p_n elementów zbioru P, to istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n taki iż $\lim_{n=\infty} p_{k_n} = q$, gdzie q jest różnym od p punktem zbioru P.

3) Zbiór P posiada część przeliczalną wszędziegęstą.

Warunki 1), 2) i 3) są od siebie niezależne.

Dowód. Okazanie, że warunki nasze są konieczne, nie przedstawia trudności; zajmiemy się więc tylko dowodem, że są wystarczające.

Załóżmy więc, że zbiór abstrakcyjny P spełnia wszystkie trzy warunki naszego twierdzenia.

Zaliczymy do klasy R każdy rozkład zbioru P na sumę dwóch różnych od P zbiorów zamkniętych w P, mających jeden i tylko jeden punkt wspólny.

W myśl warunku 1), dla każdego danego punktu p zbioru P, z wyjątkiem pewnych dwóch jego punktów — nazwijmy je a i b — istnieje conajmniej jeden rozkład $P = A + B$, należący do klasy R i taki, iż $AB = p$. Natomiast nie istnieje żaden rozkład $P = A + B$, należący do klasy R i taki, iż $AB = a$, lub taki iż, $AB = b$. W każdym rozkładzie $P = A + B$, należącym do klasy R, jest więc iloczyn AB różny od a i od b; punkt a należy więc do jednego i tylko jednego ze składników sumy $A + B$; podobnież punkt b; będziemy oczywiście mogli zawsze założyć, że $a \subset A$ (nie przesądzając przytem, czy b należy do B).

Lemmat I. Zbiór P nie daje się rozbić na sumę dwóch zbiorów zamkniętych w P, nie mających punktów wspólnych.

Dowód. Załóżmy, że

$$P = P_1 + P_2,$$

gdzie zbiory P_1 i P_2 są zamknięte w P i nie mają punktów wspólnych. Punkt a należy więc do jednego tylko z tych zbiorów, np. do zbioru P_1. Pisząc

$$P = P_1 + (P_2 + a),$$

będziemy oczywiście mieli rozkład zbioru P na sumę dwóch zbiorów zamkniętych w P (P_1 oraz $P_2 + a$), których jedynym punktem wspólnym jest punkt a. Lecz, wobec definicyi punktu a, rozkład taki nie może należeć do klasy R; wnosimy stąd, że składniki uważanego rozkładu nie mogą być oba jednocześnie różne od P. Lecz $P_1 \neq P$, gdyż zbiór P zawiera oprócz zbioru P_1 jeszcze punkty zbioru P_2, z których żaden nie należy do P_1. Musiałoby więc być $P_2 + a = P$, skąd, w jednej chwili: $P_1 = a$. Wobec tego punkt b należy do P_2 i, pisząc

$$P = (P_1 + b) + P_2,$$

znaleźlibyśmy, jak wyżej, $P_2 = b$. Byłoby więc:

$$P = P_1 + P_2 = a + b,$$

gdy tymczasem z warunku 3) wynika, że zbiór P jest nieskończony. Założenie, że lemmat nasz nie jest prawdziwy, doprowadza więc do sprzeczności.

Lemmat II. Jeżeli p i p_1 są dwa różne między sobą, jakoteż od a i b punkty zbioru P, zaś $P = A + B$, oraz $P = A_1 + B_1$ — należące do klasy R rozkłady takie, iż

$$a \subset A, \quad AB = p, \quad p_1 \subset B, \quad a \subset A_1, \quad A_1 B_1 = p_1,$$

to mamy:

$$B_1 \subset B, \quad \text{oraz} \quad p B_1 = \{\}.$$

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego lemmatu są spełnione. Z uwagi, że $PA_1 = A_1$, możemy napisać:

$$P = A_1 + B_1 = PA_1 + B_1 = (A + B) A_1 + B_1 = AA_1 + (BA_1 + B_1).$$

Kładąc:

$$P_1 = AA_1, \quad P_2 = BA_1 + B_1, \tag{1}$$

będziemy więc mieli rozkład zbioru P na sumę dwóch zbiorów zamkniętych w P:

$$P = P_1 + P_2 \tag{2}$$

(z których żaden nie jest próżny, gdyż ze wzorów (1) wynika natychmiast, że $P_1 \supset a$, zaś $P_2 \supset p_1$); jest przytem (wobec $AB = p$, $A_1 B_1 = p_1$):

$$P_1 P_2 = AA_1 (BA_1 + B_1) = ABA_1 + AA_1 B_1 = pA_1 + Ap_1. \tag{3}$$

Lecz

$$Ap_1 = \{\}, \tag{4}$$

gdyż $p_1 \subset B$, zaś $AB = p \neq p_1$. Gdyby było również $pA_1 = \{\}$, mielibyśmy, w myśl (3), $P_1 P_2 = \{\}$ i wzór (2) dawałby rozkład zbioru P na sumę dwóch zamkniętych w P zbiorów, nie mających punktów wspólnych, wbrew lemmatowi I.

Jest więc $pA_1 \neq \{\}$, czyli $p \subset A_1$, zatem (wobec $A_1 B_1 = p_1 \neq p$):

$$pB_1 = \{\}. \tag{5}$$

Gdyby było $AB_1 \neq \{\}$, to, z uwagi, że

$$P = A_1 + B_1 = A_1 + PB_1 = A_1 + (B + A) B_1 = A_1 + BB_1 + AB_1,$$

moglibyśmy, kładąc

$$A_1 + BB_1 = Q_1, \quad AB_1 = Q_2, \tag{6}$$

napisać rozkład zbioru P na sumę dwóch zamkniętych w P zbiorów:

$$P = Q_1 + Q_2$$

(z których żaden nie jest próżny, gdyż, w myśl (6), $Q_1 \supset p_1$, zaś $Q_2 = AB_1 \neq \{\}$ w myśl założenia), przytem:

$$Q_1 Q_2 = (A_1 + BB_1) AB_1 = AA_1 B_1 + ABB_1 = Ap_1 + pB_1,$$

w myśl zatem (4) i (5):

$$Q_1 Q_2 = \{\}$$

— wbrew lemmatowi I.

Musi więc być $AB_1 = \{\}$, skąd:

$$B_1 = PB_1 = (A + B) B_1 = AB_1 + BB_1 = BB_1,$$

czyli $B_1 \subset B$. Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Niech p oznacza dany, różny od a i b punkt zbioru P. W stosunku do każdego punktu q zbioru P zachodzi, przy danem p, jedno z dwojga: albo istnieje w klasie R taki rozkład $P = A + B$, dla którego

$$a \subset A, \quad AB = p \quad \text{oraz} \quad q \subset B,$$

albo też rozkładu takiego w klasie R niema. Zbiór wszystkich tych punktów q zbioru P, dla których, przy danem p, taki rozkład istnieje, oznaczmy przez $S(p)$; będzie to więc zbiór, wyznaczony w zupełności przez punkt p, przytem nie próżny, gdyż oczywiście zawsze $p \subset S(p)$.

Lemmat III. Jeżeli p oraz p_1 są dwa różne między sobą, jakoteż od a i b punkty zbioru P, i jeżeli $P = A + B$ oznacza rozkład, należący do klasy R i taki, że

$$a \subset A, \quad AB = p, \quad \text{oraz} \quad p_1 \subset B,$$

to mamy: $S(p_1) \subset B$.

Dowód. Niech q oznacza jakikolwiek punkt zbioru $S(p_1)$. Z definicyi tego zbioru oraz założenia $q \subset S(p_1)$ wynika, że istnieje rozkład $P = A_1 + B_1$, należący do klasy R i taki, że

$$a \subset A_1, \quad A_1 B_1 = p_1, \quad \text{oraz} \quad q \subset B_1.$$

Lecz, w myśl lemmatu II oraz założeń lemmatu III:

$$B_1 \subset B,$$

skąd $q \subset B_1 \subset B$. Wzór $q \subset S(p_1)$ pociąga więc zawsze za sobą wzór $q \subset B$, co dowodzi, że $S(p_1) \subset B$, c. b. d. o.

Z definicyi zbioru $S(p)$ wynika dalej natychmiast, że $B \subset S(p)$; w myśl lemmatu III będziemy więc mieli jeszcze:

$$S(p_1) \subset S(p).$$

Powiadam, że $pS(p_1) = \{\}$. W samej rzeczy, gdyby było $pS(p_1) \neq \{\}$, czyli $p \subset S(p_1)$, to — w myśl definicyi zbioru $S(p_1)$ — istniałby rozkład $P = A_1 + B_1$, należący do klasy R i taki, iż

$$a \subset A_1, \quad A_1 B_1 = p_1, \quad \text{oraz} \quad p \subset B_1,$$

gdy tymczasem, w myśl lemmatu II, winno być $pB_1 = \{\}$. Dowiedliśmy więc, że zachodzi też:

Lemmat IV. Jeżeli p i p_1 są dwa różne między sobą, jakoteż od a i b punkty zbioru P, oraz jeżeli $p_1 \subset S(p)$, to mamy:

$$S(p_1) \subset S(p), \quad \text{oraz} \quad pS(p_1) = \{\}.$$

Lemmat V. Jeżeli W oznacza część przeliczalną wszędziegęstą zbioru P, zaś $P = A + B$ — rozkład, należący do klasy R i taki, że $a \subset A$, $AB = p$, to w zbiorze W istnieje punkt w, różny od a, b i p i należący do B.

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego lemmatu są spełnione. Gdyby przytem było $B = p + b$, to (wobec $p \subset B$) mielibyśmy:

$$P = A + B = A + p + b = A + b.$$

W razie $Ab \neq \{\}$ mielibyśmy stąd $P = A$ — wbrew założeniu, że uważany rozkład należy do klasy R, w razie zaś $Ab = \{\}$, wzór $P = A + b$ byłby sprzeczny z lemmatem I.

Nie jest więc $B = p + b$, zatem w zbiorze B istnieje punkt q różny od p i od b. Jest więc $Aq = \{\}$. Jeżeli punkt q sam nie jest elementem zbioru W, to, jak łatwo widzieć, z definicyi tego zbioru wynika, że istnieje ciąg nieskończony w_n różnych punktów zbioru W, którego granicą jest q. Gdyby wszystkie w_n dla $n > \mu$ należały do zbioru A, to, z uwagi, że zbiór ten jest zamknięty w P, musiałoby być $q = \lim_{n=\infty} w_n \subset A$, wbrew $Aq = \{\}$. Istnieje więc w ciągu w_n nieskończenie wiele różnych wyrazów, należących do B. W każdym więc razie istnieje punkt w zbioru W, różny od p i b i należący do B, co jest prawdą oczywiście i wtedy, jeżeli punkt q sam jest elementem zbioru W.

Ponieważ wreszcie każdy punkt zbioru B jest różny od a (gdyż $a \subset A$, $AB = p$, zaś $p \neq a$ — skoro rozkład $P = A + B$ należy do klasy R), więc udowodniliśmy nasz lemmat w zupełności.

Wobec definicyi zbiotu $S(p)$ z lemmatu V wynika natychmiast następujący

Wniosek. Jeżeli p oznacza punkt zbioru P, różny od a i b, to w zbiorze W istnieje punkt w, różny od a, b i p i należący do zbioru $S(p)$.

Lemmat VI. W każdym rozkładzie $P = A + B$, należącym do klasy R, w którym $a \subset A$, mamy: $b \subset B$.

Dowód. Załóżmy, że dla pewnego rozkładu $P = A_0 + B_0$, należącego do klasy R, mamy $a \subset A_0$, $A_0 B_0 = p_0$, oraz $b \subset A_0$. Zbiór B_0 nie zawiera więc ani punktu a ani punktu b, czyli:

$$aB_0 = \{\} \quad \text{oraz} \quad bB_0 = \{\}. \tag{7}$$

Niech W oznacza część przeliczalną wszędziegęstą zbioru P (która istnieje, w myśl warunku 3)). Punkty zbioru W możemy więc ustawić w pewien ciąg nieskończony

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3, \ldots \tag{8}$$

Niech p_1 oznacza pierwszy wyraz ciągu (8), różny od a, b i p_0 i należący do B_0; wyraz taki istnieje, w myśl lemmatu V. Przytem, wobec $p_1 \subset B_0$ oraz $p_1 \neq p_0$, będzie, w myśl lemmatu III:

$$S(p_1) \subset B_0$$

i tembardziej: $S(p_1) \subset S(p_0)$. (9)

Oznaczmy ogólnie, dla $n>1$, przez p_n pierwszy wyraz ciągu (8), różny od a, b i p_{n-1} i należący do $S(p_{n-1})$; istnienie takiego wyrazu wynika przez łatwą indukcyę z wniosku z lemmatu VI.

W myśl lemmatu IV będziemy mieli, dla $n>1$:

$$S(p_n) \subset S(p_{n-1}),$$

co zachodzi i dla $n=1$. Stąd, w jednej chwili:

$$S(p_n) \subset S(p_m) \quad \text{dla} \quad n \geqslant m \geqslant 0,$$

i tembardziej:

$$p_n \subset S(p_m) \quad \text{dla} \quad n \geqslant m \geqslant 0. \tag{10}$$

W myśl warunku 2) istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n taki, iż ciąg p_{k_n} posiada w zbiorze P granicę; połóżmy:

$$\lim_{n=\infty} p_{k_n} = g.$$

Niech k oznacza jakąkolwiek daną liczbę naturalną. Wobec $p_{k+1} \subset S(p_k)$ (co wynika z określenia ciągu p_n), oraz w myśl definicyi zbioru $S(p_k)$, istnieje rozkład $P = A + B$, należący do klasy R i taki, że

$$a \subset A, \quad AB = p_k \quad \text{oraz} \quad p_{k+1} \subset B.$$

Stąd, w myśl lemmatu IV:

$$S(p_{k+1}) \subset B; \tag{11}$$

zatem, zgodnie ze związkiem (10) (kładąc $m = k+1$):

$$p_n \subset B, \quad \text{dla} \quad n > k,$$

skąd, z uwagi, że zbiór B jest zamknięty w zbiorze P, wynika, że:

$$g = \lim_{n=\infty} p_{k_n} \subset B.$$

i, ponieważ oczywiście $B \subset S(p_k)$ przeto:

$$g \subset S(p_k), \tag{12}$$

co, wobec $S(p_1) \subset S(p_0)$, jest prawdziwe i dla $k=0$.

Dowiedliśmy więc, że wzór (12) zachodzi dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Ponieważ $p_{k+1} \subset S(p_k)$, $p_{k+1} \neq p_k$, dla $k = 0, 1, 2, \dots$ oraz w myśl lemmatu IV, mamy: $p_k S(p_{k+1}) = \{\}$, a że, w myśl (12), mamy też: $g \subset S(p_{k+1})$; będzie tedy:

$$g \neq p_k \tag{13}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Wzór (12) daje w szczególności:

$$g \subset S(p_1),$$

skąd, wobec (9):

$$g \subset B_0,$$

z uwagi zatem na wzór (7) będzie:

$$g \neq a, \quad \text{oraz} \quad g \neq b \tag{14}$$

Według (12), (13), (14) oraz lemmatu IV, mamy:

$$S(g) \subset S(p_k) \quad \text{oraz} \quad p_k S(g) = \{\}, \tag{15}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Wobec (14) i w myśl wniosku z lemmatu V, w zbiorze W istnieje punkt różny od a i b i należący do zbioru $S(g)$; niech w_s oznacza pierwszy wyraz ciągu (8), spełniający te warunki. Będzie więc, w myśl (15):

$$w_s \subset S(g) \subset S(p_k), \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{16}$$

Punkty p_k są wyrazami ciągu (8); połóżmy

$$p_k = w_{r_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{17}$$

Wobec $p_k \subset S(p_{k-1})$ oraz $p_k \neq p_{k-1}$ mamy, w myśl lemmatu IV:

$$p_{k-1} S(p_k) = \{\},$$

skąd, ponieważ $p_{k+1} \subset S(p_k)$, znajdujemy:

$$p_{k+1} \neq p_{k-1}.$$

Według (10) możemy, przy naturalnem k, napisać:

$$p_{k+1} \subset S(p_{k-1}).$$

Punkt p_{k+1} jest więc wyrazem ciągu (8), różnym od p_{k-1}, a i b i należącym do zbioru $S(p_{k-1})$; z definicyi punktu p_k i uwagi, że $p_{k+1} \neq p_k$ wynika więc, że p_{k+1} jest dalszym wyrazem ciągu (8) niż p_k, t. j., wobec (17):

$$r_{k+1} > r_k \quad (\text{dla } k = 1, 2, 3, \dots)$$

Ciąg wskaźników r_k jest więc rosnący. Z uwagi, że, według (16), (9) i (15) punkt w_1 jest różny od a, b i p_0 i należy do B_0, oraz z definicyi punktu $p_1 = w_{r_1}$ wnosimy, że $s \geqslant r_1$; dla wskaźnika s zachodzi więc, przy pewnem k, nierówność:

$$r^k \leqslant s < r_{k+1}. \tag{18}$$

Lecz wyraz w_s jest, jak wiemy, różny od a i b, według (15) zaś i z uwagi, że $w_s \subset S(g)$, mamy $w_s \neq p_k$, przytem, w myśl (16): $w_s \subset S(p_k)$; wobec definicyi punktu p_{k+1} musiałoby więc być $r_{k+1} \leqslant s$, wbrew (18).

Założenie, że lemmat VI nie jest prawdziwy, doprowadza tedy do sprzeczności. Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Lemmat VII. Dla każdego punktu p zbioru P, różnego od a i b, istnieje tylko jeden rozkład $P = A + B$, należący do klasy R i taki, że $a \subset A$, $AB = p$.

Dowód. Załóżmy, że dla pewnego punktu p zbioru P, różnego od a i b, istnieją dwa różne rozkłady $P = A + B$ oraz $P = A_1 + B_1$, należące do klasy R i takie, że

$$a \subset A, \quad AB = p, \quad a \subset A_1, \quad A_1 B_1 = p. \tag{19}$$

Możemy więc napisać:

$$P = A + B = A + BP = A + B(B_1 + A_1) = (A + BB_1) + BA_1 \tag{20}$$

oraz

$$P = A_1 + B_1 = A_1 + B_1 P = A_1 + B_1(B + A) = (A_1 + B_1 B) + B_1 A. \tag{21}$$

Zbiory BA_1 i $B_1 A$ są różne od P, gdyż, wobec $p \neq a$ oraz warunków (19), nie zawierają punktu a.

Gdyby było jednocześnie

$$A + BB_1 = P \quad \text{oraz} \quad A_1 + B_1 B = P,$$

mielibyśmy stąd:

$$A_1(A + BB_1) = A_1 P = A_1 \quad \text{oraz} \quad A(A_1 + B_1 B) = AP = A,$$

skąd, z uwagi, że według (19):

$$A_1 B B_1 = Bp = p, \qquad AB_1 B = B_1 p = p,$$

oraz, że $p \subset AA_1$, znaleźlibyśmy w jednej chwili:

$$A_1 A = A_1 \quad \text{oraz} \quad AA_1 = A,$$

co daje

$$A_1 = A,$$

zatem też odrazu $B_1 = B$, wbrew założeniu, że rozkłady $P = A + B$ oraz $P = A_1 + B_1$ są różne.

Jeden conajmniej ze zbiorów

$$A + BB_1 \quad \text{oraz} \quad A_1 + B_1 B$$

jest więc różny od P. Zależnie od tego, czy pierwszy z tych zbiorów jest, czy też nie jest różny od P, połóżmy:

$$A_0 = A + BB_1, \qquad B_0 = BA_1,$$

albo

$$A_0 = A_1 + B_1 B, \qquad B_0 = B_1 A. \tag{22}$$

W każdym więc razie zbiory A_0 i B_0 będą różne od P, zamknięte w P, przytem według (20) i (21):

$$P = A_0 + B_0,$$

oraz

$$A_0 B_0 = p,$$

gdyż podług (19) jest:

$$(A + BB_1) BA_1 = pA_1 + Bp = p,$$

oraz

$$(A_1 + B_1 B) B_1 A = pA + B_1 p = p.$$

Rozkład $P = A_0 + B_0$ należy więc do klasy R, przytem, w myśl (22), $a \subset A_0$ oraz $b \subset A_0$ — wbrew lemmatowi VI.

Lemmat nasz został więc dowiedziony. Wobec warunku 1) dowiedliśmy zarazem, że dla każdego punktu p zbioru P, różnego od a i b, istnieje jeden i tylko jeden rozkład $P = A + B$, należący do klasy R i taki, że $a \subset A$, $AB = p$. Zbiory A i B, dające ten rozkład, są więc przez punkt p wyznaczone w zupełności; będziemy je oznaczali odpowiednio przez $A(p)$ i $B(p)$. Jeżeli tedy p jest różnym od a i b punktem zbioru P, to rozkład

$$P = A(p) + B(p)$$

będzie tym jedynym rozkładem, należącym do klasy R, w którym

$$a \subset A(p) \quad \text{oraz} \quad A(p)B(p) = p;$$

w myśl lemmatu VI będziemy mieli nadto:

$$b \subset B(p).$$

Połóżmy jeszcze:

$$A(a) = a, \quad B(a) = P, \quad A(b) = P, \quad B(b) = b, \tag{23}$$

Jak łatwo widzieć, dla każdego bez wyjątku punktu p zbioru P będzie teraz istniał jeden i tylko jeden rozkład

$$P = A(p) + B(p),$$

gdzie $A(p)$ i $B(p)$ są zbiory zamknięte w P, przyczem:

$$a \subset A(p), \quad b \subset B(p), \quad A(p)B(p) = p. \tag{24}$$

Niech teraz p i p_1 będą dwa jakiekolwiek, byleby różne, punkty zbioru P. Na podstawie lemmatu II oraz wzorów (23) wnosimy z łatwością, że jeżeli $p_1 \subset B(p)$, to:

$$B(p_1) \subset B(p), \quad \text{oraz} \quad p \subset A(p_1),$$

skąd:

$$A(p) = A(p) \, . \, P = A(p)\,[A(p_1) + B(p_1)] = A(p)\,A(p_1) + A(p)\,B(p_1)$$

$$\subset A(p)\,A(p_1) + A(p)\,B(p) = A(p)\,A(p_1) + p = A(p)\,A(p_1),$$

zatem: $A(p) \subset A(p_1)$.

Jeżeli więc $p_1 \subset B(p)$, to mamy:

$$A(p) \subset A(p_1) \quad \text{oraz} \quad B(p_1) \subset B(p).$$

Podobnież, jeżeli $p \subset B(p_1)$, będziemy mieli

$$A(p_1) \subset A(p) \quad \text{oraz} \quad B(p) \subset B(p_1).$$

Załóżmy wreszcie, że nie mamy ani $p_1 \subset B(p)$, ani też $p \subset B(p_1)$. Oznaczmy przez skrócenie:

$$A(p) = A, \quad B(p) = B, \quad A(p_1) = A_1, \quad B(p_1) = B_1.$$

W myśl naszego założenia jest więc

$$p_1 B = \{\} \quad \text{oraz} \quad p B_1 = \{\}. \tag{25}$$

Weźmy pod rozwagę rozkład:

$$P = A + B = A + BP = A + B(A_1 + B_1) = (A + BA_1) + BB_1. \tag{26}$$

Połóżmy:

$$P_1 = A + BA_1, \quad P_2 = BB_1, \tag{27}$$

— będą to dwa zbiory zamknięte w P, przytem żaden z nich nie próżny, gdyż, według (24), $P_1 \supset a$, zaś $P_2 \supset b$. Dalej, w myśl (27), będzie

$$P_1 P_2 = (A + BA_1)\,BB_1 = pB_1 + Bp_1,$$

zatem według (25):

$$P_1 P_2 = \{\},$$

według (26) zaś:

$$P = P_1 + P_2,$$

— wbrew lemmatowi I.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli p i p_1 są dwa jakiekolwiek, ale różne punkty zbioru P, to zachodzi jedno z dwojga:

albo jest $p_1 \subset B(p)$, co pociąga za sobą wzory:

$$A(p) \subset A(p_1) \quad \text{oraz} \quad B(p_1) \subset B(p), \tag{28}$$

albo też jest $p \subset B(p)$, co pociąga za sobą wzory:

$$A(p_1) \subset A(p) \quad \text{oraz} \quad B(p) \subset B(p_1), \tag{29}$$

Nie może przytem być jednocześnie $A(p) \subset A(p_1)$ oraz $A(p_1) \subset A(p)$, gdyż wówczas mielibyśmy $p \subset A(p_1)$ i $p_1 \subset A(p)$ zatem, wobec $p \neq p_1$, $pB(p_1) = \{\}$ oraz $p_1 B(p) = \{\}$, gdy tymczasem wyżej dowiedliśmy, że zawsze albo $p \subset B(p_1)$ albo też $p_1 \subset B(p)$.

Udowodniliśmy więc, że jeżeli p i p_1 są dwa różne punkty zbioru P, to zbiory $A(p)$ oraz $A(p_1)$ mogą być połączone jednym i tylko jednym z dwóch znaków: $\supset, \subset$.

Uporządkujmy teraz zbiór P, uważając z dwóch różnych elementów p i p_1 element p jako wcześniejszy od p_1, pisząc $p < p_1$, jeżeli $A(p) \subset A(p_1)$. Zbiór P będzie w ten sposób l i n i o w o u p o r z ą d k o w a n y.

Lemmat VIII. Dla dwóch jakichkolwiek punktów p i p_1 zbioru P warunek

$$p \subset A(p_1) \tag{30}$$

jest równoważny warunkowi

$$p \leqslant p_1. \tag{31}$$

Dowód. Że warunek (31) pociąga za sobą warunek (30), wynika natychmiast ze sposobu, w jaki uporządkowaliśmy zbiór P, i z uwagi, że zawsze $p \subset A(p)$.

Załóżmy więc, że zachodzi wzór (30). W razie $p = p_1$ wzór (31) zachodzi oczywiście. Jeżeli zaś $p \neq p_1$, to, jak wiemy, zachodzą wzory $p_1 \subset B(p)$, albo też $p \subset B(p_1)$. Gdyby było $p \subset B(p_1)$, mielibyśmy, w myśl (30): $p \subset A(p_1)\,B(p_1) = p_1$, czyli $p \subset p_1$, wbrew założeniu, że $p \neq p_1$. Musi więc zachodzić wzór $p_1 \subset B(p)$, który, jak wiemy, pociąga za sobą wzory (28), skąd, wobec sposobu, w jaki uporządkowaliśmy zbiór P, wynika wzór (31). Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Jako natychmiastowy wniosek z naszego lemmatu, otrzymujemy:

Zbiór wszystkich punktów p zbioru P, spełniających warunek $p \leqslant p_1$ jest identyczny ze zbiorem $A(p_1)$. Stąd wynika też w jednej chwili, że zbiór wszystkich punktów p zbioru P, spełniających warunek $p \geqslant p_1$, jest identyczny ze zbiorem $B(p_1)$.

Lemmat IXa. Jeżeli w zbiorze P mamy:

$$\lim_{n=\infty} p_n = p_0, \tag{32}$$

oraz, dla dostatecznie wielkich n stale:

$$p_n \leqslant q, \tag{33}$$

to

$$p_0 \leqslant q.$$

Dowód. Załóżmy, że wzór (33) zachodzi dla $n > \mu$; w myśl lemmatu VIII będzie więc:

$$p_n \subset A(q), \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd, z uwagi że zbiór $A(q)$ jest zamknięty w P, i według (32):

$$p_0 \subset A(q),$$

co, wobec lemmatu VIII, daje: $p_0 \leqslant q$, c. b. d. o.

Lemmat IX b. Jeżeli w zbiorze P mamy

$$\lim_{n=\infty} p_n = p_0, \tag{34}$$

oraz, dla dostatecznie wielkich n stale:

$$p_n \geqslant q, \tag{35}$$

to

$$p_0 \geqslant q.$$

Dowód. Załóżmy, że wzór (35) zachodzi dla $n > \mu$. Według wniosku końcowego z lemmatu VIII mamy stąd:

$$p_n \subset B(q), \quad \text{dla} \quad n > \mu,$$

skąd, wobec (34) i zamkniętości zbioru $B(q)$ w zbiorze P:

$$p_0 \subset B(q),$$

co znowu daje (w myśl tegoż wniosku z lemmatu VIII):

$$p_0 \geqslant q, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Lemmat X a. Jeżeli, w zbiorze P:

$$\lim_{n=\infty} p_n < q, \tag{36}$$

to, dla dostatecznie wielkich n, musi być stale:

$$p_n < q. \tag{37}$$

Dowód. Gdyby dla nieskończenie wielu różnych wskaźników n było, wbrew (37):

$$p_n \geqslant q, \tag{38}$$

to istniałby ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n, taki iż

$$p_{k_n} \geqslant q, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, według lemmatu IX b:

$$\lim_{n=\infty} p_{k_n} \geqslant q,$$

wbrew (36). Nierówność (38) może więc zachodzić conajwyżej dla skończonej liczby różnych wskaźników, zatem dla dostatecznie wielkich n musi zachodzić wzór (37), c. b. d. o.

Podobnież, opierając się na lemmacie IX a, udowodnilibyśmy

Lemmat X b. Jeżeli w zbiorze P:

$$\lim_{n=\infty} p_n > q,$$

to, dla dostatecznie wielkich n musi być stale:

$$p_n > q.$$

Lemmat XI. Jeżeli p_1 i p_2 są dwa punkty zbioru P oraz $p_1 < p_2$, to istnieje w zbiorze P punkt p taki, iż $p_1 < p < p_2$.

Dowód. Załóżmy, że, wbrew lemmatowi XI, punktu p, spełniającego nierówności $p_1 < p < p_2$, w zbiorze P niema. Dla każdego punktu p zbioru P mielibyśmy więc bądź $p \leqslant p_1$, bądź też $p \geqslant p_2$. Według wniosku z lemmatu VIII, mielibyśmy więc

$$P = A(p_1) + B(p_2). \tag{39}$$

Lecz, wobec $p_1 < p_2$ oraz sposobu uporządkowania zbioru P, mamy: $A(p_1) \subset A(p_2)$, zatem:

$$A(p_1)\, B(p_2) \subset A(p_2)\, B(p_2) = p_2;$$

z drugiej strony jednak punkt p_2 nie należy do $A(p_1)$, gdyż, w razie $p_2 \subset A(p_1)$, mielibyśmy, w myśl lemmatu VIII: $p_2 \leqslant p_1$, wbrew założeniu. Jest więc

$$A(p_1)\, B(p_2) = \{\}$$

i wzór (39) daje rozkład zbioru P na sumę dwóch zamkniętych w P zbiorów, nie mających punktów wspólnych, wbrew lemmatowi I. Założenie, że lemmat XI nie jest prawdziwy, doprowadza więc do sprzeczności.

Wniosek. Jeżeli W oznacza część przeliczalną wszędziegęstą zbioru P, p_1 i p_2 zaś są dwa punkty zbioru P takie, iż $p_1 < p_2$, to w zbiorze W istnieje punkt w taki, iż $p_1 < w < p_2$.

Dowód. Załóżmy, że p_1 i p_2 są dwa dane punkty zbioru P takie, iż $p_1 < p_2$. W myśl lemmatu XI istnieje w zbiorze P punkt p taki, iż $p_1 < p < p_2$. Z założenia, że zbiór W jest wszędziegęstą częścią zbioru P, wynika dalej, że istnieje ciąg nieskończony w_n punktów zbioru W taki, iż:

$$\lim_{n=\infty} w_n = p.$$

Wobec lemmatów Xa i Xb oraz nierówności $p_1 < p < p_1$ wypływa stąd natychmiast, że dla dostatecznie wielkich n musi być stale:

$$p_1 < w_n < p_2,$$

stąd odrazu wynika wniosek, który chcieliśmy udowodnić.

Z lemmatu XI wynika, że zbiór P, jako zbiór uporządkowany (według przyjętego przez nas prawa) nie posiada skoków. Udowodnimy obecnie, że zbiór P nie posiada też luk.

Weźmy pod rozwagę jakikolwiek przekrój $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ zbioru P, t. j. rozkład tego zbioru na sumę dwóch zbiorów $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, nie mających punktów wspólnych i takich, że każdy punkt zbioru $\mathfrak{A}$ jest (w naszem uporządkowaniu) wcześniejszy od każdego punktu zbioru $\mathfrak{B}$. Musi tu być oczywiście

$$a \subset \mathfrak{A}, \quad \text{oraz} \quad b \subset \mathfrak{B}$$

(gdyż a jest najwcześniejszym, zaś b — najpóźniejszym elementem zbioru P).

Załóżmy, że przekrój $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ wyznacza lukę, t j. że w klasie $\mathfrak{A}$ niema elementu ostatniego, że w klasie $\mathfrak{B}$ niema elementu pierwszego.

Powiadam, że zbiory $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są zamknięte w P. W samej rzeczy, niech p_n oznacza ciąg nieskończony punktów zbioru $\mathfrak{A}$, zaś p_0 — jego granicę. Gdyby było $p_0 \subset \mathfrak{B}$, to, wobec założenia, że w zbiorze $\mathfrak{B}$ niema elementu pierwszego, istniałby w zbiorze $\mathfrak{B}$ punkt $q < p_0$, skąd, wobec $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p_0$ oraz w myśl lemmatu Xb, mielibyśmy, dla dostatecznie wielkich n, $p_n > q$, zatem $p_n \subset \mathfrak{B}$, wbrew założeniu. Podobnież udowodnilibyśmy, że zbiór $\mathfrak{B}$ jest zamknięty w P.

Wzór $P = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ dawałby tedy rozkład zbioru P na sumę dwóch zbiorów zamkniętych w P, nie mających punktów wspólnych, wbrew lemmatowi I.

Dowiedliśmy więc, że zbiór P nie posiada luk.

Zbiór P, jako zbiór uporządkowany, nie posiada zatem skoków ani luk; jest to więc zbiór ciągły. Przytem, posiada elementy pierwszy i ostatni (a i b), zaś między każdemi dwoma elementami zbioru P leżą elementy pewnej przeliczalnej jego części. Zbiór P, jako zbiór uporządkowany (według przyjętego prawa) jest więc podobny zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych przedziału $(0, 1)$, uporządkowanemu według ich wielkości. Między elementami zbioru P z jednej strony a liczbami rzeczywistemi przedziału $(0, 1)$ — z drugiej, możemy tedy ustalić tego rodzaju jedno-jednoznaczną odpowiedniość, iż dwóm punktom zbioru P, p_1 i p_2, gdzie $p_1 < p_2$, będą zawsze odpowiadały dwie liczby rzeczywiste przedziału $(0, 1)$, x_1 i x_2, gdzie $x_1 < x_2$.

Oznaczmy przez $f(p)$ liczbę rzeczywistą, odpowiadającą punktowi p zbioru P, zaś przez $\varphi(x)$ — punkt zbioru P, odpowiadający liczbie rzeczywistej x.

Udowodnimy, że jeżeli w zbiorze P mamy $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p_0$, to w obszarze liczb rzeczywistych: $\lim\limits_{n=\infty} f(p_n) = f(p_0)$.

Załóżmy więc, że w zbiorze P jest

$$\lim_{n=\infty} p_n = p_0, \tag{40}$$

i połóżmy:

$$f(p_n) = x_n, \quad f(p_0) = x_0. \tag{41}$$

Niech (α, β) oznacza przedział dowolny taki, iż

$$0 \leqslant \alpha < x_0 < \beta \leqslant 1.$$

(Gdyby było $x_0 = 0$ lub $x_0 = 1$, należałoby nasz dowód zlekka zmodyfikować, biorąc pod rozwagę zamiast przedziału (α, β), otaczającego x_0, tylko liczbę $\beta > 0$ lub tylko liczbę $\alpha < 1$).

Powiadam, że dla dostatecznie wielkich n będzie stale

$$\alpha < x_n < \beta. \tag{43}$$

W samej rzeczy, gdyby dla nieskończenie wielu różnych n było $x_n \leqslant \alpha$, to istniałby ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n taki, iż

$$x_{k_n} \leqslant \alpha \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

co pociąga za sobą:

$$\varphi(x_{k_n}) \leqslant \varphi(\alpha),$$

czyli, w zbiorze P:

$$p_{k_n} \leqslant \varphi(\alpha),$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, skąd, w myśl (40) oraz lemmatu IXa, wynika:

$$p_0 \leqslant \varphi(\alpha),$$

co znowu daje:

$$f(p_0) \leqslant f(\varphi(\alpha)) = \alpha,$$

czyli $x_0 \leqslant \alpha$, wbrew definicyi liczby α.

Podobnież udowodnilibyśmy, że nie może dla nieskończenie wielu różnych n być $x_n \geqslant \beta$.

Dla każdego więc przedziału (α, β), spełniającego nierówności (42), będzie dla dostatecznie wielkich n zachodziła nierówność (43), co dowodzi, że w obszarze liczb rzeczywistych jest:

$$\lim_{n=\infty} x_n = x_0,$$

czyli, wobec (41):

$$\lim_{n=\infty} f(p_n) = f(p_0),$$

co było do okazania:

Udowodnimy wreszcie, że jeżeli w przedziale (0, 1) mamy $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x_0$, to w zbiorze P będzie $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0)$.

Załóżmy więc, że w przedziale (0, 1) mamy

$$\lim_{n=\infty} x_n = x_0, \tag{44}$$

i połóżmy:

$$\varphi(x_n) = p_n, \quad \varphi(x_0) = p_0. \tag{45}$$

Gdyby nie było $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p_0$, to, w myśl warunku 2), istniałby ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n oraz punkt q zbioru P takie, iż

$$\lim_{n=\infty} p_{k_n} = q \neq p_0, \tag{46}$$

skąd mielibyśmy w obszarze liczb rzeczywistych, jak dowiedliśmy:

$$\lim_{n=\infty} f(p_{k_n}) = f(q),$$

czyli:

$$\lim_{n=\infty} x_{k_n} = f(q),$$

skąd, wobec (44), znaleźlibyśmy:

$$f(q) = x_0,$$

zatem:

$$q = \varphi(x_0),$$

czyli, w myśl (45):

$$q = p_0,$$

wbrew (46).

Musi tedy być $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p_0$, czyli, w myśl (45):

$$\lim_{n=\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0), \quad \text{c. b. d. o.}$$

Dowiedliśmy więc, że zbiór P jest jedno-jednoznacznem i ciągłem odwzorowaniem przedziału (0, 1): jest to zatem **kontynuum liniowe**.

Twierdzenie nasze zostało więc dowiedzione.

Udowodnimy obecnie **niezależność** warunków 1), 2) i 3).

Że warunek 1) jest niezależny od warunków 2) i 3), wynika natychmiast z uwagi, że każde kontynuum (Cantorowskie) w przestrzeni euklidesowej m-wymiarowej spełnia warunki 2) i 3). (Wystarczy więc wziąć kontynuum, nie będące łukiem prostym, aby otrzymać przykład zbioru, spełniającego warunki 2) i 3), lecz nie spełniającego warunku 1), np. zbiór wszystkich punktów kwadratu, albo zbiór wszystkich punktów dwóch przecinających się odcinków). Może się przytem zdarzyć, że—przy zachowaniu warunków 2) i 3)— warunek 1) nie jest spełniony, bądź dlatego, że wyjątkowych punktów (dla których odpowiedni rozkład, należący do klasy R, nie istnieje) jest więcej niż dwa, bądź też dlatego, że jest ich mniej niż dwa. (Np. dla kwadratu wszystkie punkty są wyjątkowe; dla obwodów dwóch kół, nie mających punktów wspólnych — żaden punkt nie jest wyjątkowy; dla zbioru, składającego się z punktów obwodu koła i jego środka — jeden tylko punkt jest wyjątkowy).

Że warunek 2) nie zależy od warunków 1) i 3), dowodzi tego zbiór utworzony ze wszystkich punktów skończonego odcinka oraz przecinającej go, nieograniczonej po obu stronach, prostej. Jak łatwo widzieć, warunki 1) i 3) będą tu spełnione, natomiast warunek 2) zachodzić nie będzie.

Trudniej nieco byłoby udowodnić niezależność warunku 3) od warunków 1) i 2) (jeżeli pominąć pospolity przykład zbioru, złożonego z dwóch punktów). Ograniczymy się tu tylko na podaniu odnośnego przykładu, pozostawiając bliższą jego dyskusyę czytelnikowi.

Oznaczmy przez P zbiór wszystkich układów $[x, y]$, gdzie x i y są liczby rzeczywiste przedziału (0, 1).

Umówimy się z dwóch punktów $p_1 = [x_1, y_1]$ oraz $p_2 = [x_2, y_2]$ zbioru P uważać p_1 jako wcześniejsze od p_2, pisząc $p_1 < p_2$, jeżeli $x_1 < x_2$, lub jeżeli jednocześnie $x_1 = x_2$ oraz $y_1 < y_2$. Przez taką umowę, jak łatwo widzieć, zbiór P zostanie liniowo uporządkowany. Granicę określimy w zbiorze P w następujący sposób: punkt p zbioru P będziemy wtedy i tylko wtedy uważali jako granicę ciągu nieskończonego p_n punktów tego zbioru, jeżeli dla każdego punktu $p' < p$ nierówność $p_n \leqslant p'$, zaś dla każdego punktu $p'' > p$ — nierówność $p_n \geqslant p''$, zachodzi conajwyżej dla skończonej liczby różnych wskaźników n.

Możnaby dowieść, że zbiór P spełnia warunki 1) i 2), natomiast nie spełnia warunku 3). Przykład ten dowodzi zarazem, że w twierdzeniu naszem nie możemy warunku 3) zastąpić przez warunek, że zbiór P jest nieskończony.

Warunki 1), 2) i 3) są więc od siebie niezależne.

Łatwo widzieć, że każdy zbiór abstrakcyjny P, spełniający warunek 2), jest **zwarty** (compact) (t. j. w każdej jego części nieskończonej istnieje ciąg nieskończony różnych elementów, posiadający w zbiorze P granicę). Godne uwagi jest jednak to, że warunek 2) w naszem twierdzeniu nie da się zastąpić przez warunek zwartości (jakby się to może na pierwszy rzut oka zdawało), że mianowicie zbiór zwarty, spełniający warunki 1) i 3) może nie być kontynuum liniowem.

Aby dać przykład takiego zbioru, weźmy pod rozwagę zbiór $\overline{P}$ symboli $[x]$, gdzie x oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą przedziału (0, 1), i umówmy się, że ciąg $[x_n]$ wtedy i tylko wtedy zmierza do granicy $[x]$, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x|$ jest zbieżny. Łatwo widzieć, że przez taką umowę określamy mnogość abstrakcyjną. Powiadam, że mnogość ta jest zwarta.

Niech $\overline{Q}$ oznacza dowolną daną część zbioru $\overline{P}$. Oznaczmy ogólnie przez Q — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, iż $[x] \subset Q$. (W myśl tego znakowania zbiór P będzie więc zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych przedziału (0, 1)).

Niech teraz $\overline{Q}$ oznacza daną nieskończoną część zbioru $\overline{P}$. Zbiór Q będzie więc zbiorem, zawierającym nieskończenie wiele różnych liczb rzeczywistych przedziału (0, 1); w myśl twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, zbiór Q posiada conajmniej jedno miejsce skupienia g, przyczem będzie $g \subset P$, zatem $[g] \subset P$. Z definicyi miejsca skupienia wynika stąd dalej, że istnieje ciąg nieskończony różnych od g liczb rzeczywistych $x_n \subset Q$ taki, iż

$$\lim_{n=\infty} x_n = g. \tag{47}$$

Połóżmy $k_1 = 1$, a dla $n > 1$ oznaczmy ogólnie przez k_n najmniejszy wskaźnik, przy którym zachodzą nierówności:

$$k_n > k_{n-1}, \qquad |x_{k_n} - g| < \frac{1}{n^2};$$

wskaźnik taki istnieje, w myśl (47). Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{k_n} - g|$ będzie więc zbieżny. Według przyjętej definicyi granicy w zbiorze $\overline{P}$ będzie przeto:

$$\lim_{n=\infty} [x_{k_n}] = [g],$$

przyczem wyrazy $[x_{k_n}]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ są różnemi od $[g]$ elementami zbioru $\overline{Q}$ (gdyż $x_n \neq g$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$). Wynika też stąd natychmiast, że wśród wyrazów $[x_{k_n}]$ jest nieskończenie wiele różnych.

W zbiorze $\overline{Q}$ istnieje zatem ciąg nieskończony różnych elementów, posiadający w zbiorze $\overline{P}$ granicę.

Dowiedliśmy więc, że zbiór $\overline{P}$ jest zwarty.

Powiadam dalej, że jeżeli zbiór $\overline{Q}$ jest zamknięty w $\overline{P}$, to zbiór Q jest zamknięty w P, i naodwrót.

Załóżmy, że zbiór Q jest zamknięty i niech $[x_n]$ oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony punktów zbioru $\overline{Q}$, zaś $[x]$ — jego granicę. Jest więc

$$[x_n] \subset \overline{Q}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{48}$$

oraz, w zbiorze $\overline{P}$:

$$\lim_{n=\infty} [x_n] = [x]. \tag{49}$$

Ze wzoru (48) wynika, że

$$x_n \subset Q, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

z definicyi zaś granicy w zbiorze $\overline{P}$ wynika natychmiast, wobec (49):

$$\lim_{n=\infty} x_n = x.$$

Na mocy założenia, że zbiór Q jest zamknięty, mamy stąd:

$$x \subset Q,$$

zatem:

$$[x] \subset \overline{Q},$$

co dowodzi, że zbiór $\overline{Q}$ jest zamknięty.

Załóżmy teraz, że zbiór $\overline{Q}$ jest zamknięty i niech x_n oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony punktów zbioru Q, zaś x — jego granicę. Jest więc:

$$x_n \subset Q, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{50}$$

oraz, w zbiorze P:

$$\lim_{n=\infty} x_n = x. \tag{51}$$

Wobec (51) możemy wyznaczyć ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n taki, iż

$$|x_{k_n} - x| < \frac{1}{n^2},$$

skąd, według definicyi granicy w zbiorze $\overline{P}$, wynika natychmiast:

$$\lim_{n=\infty} [x_{k_n}] = [x]. \tag{52}$$

Lecz, wobec (50), mamy:

$$[x_n] \subset \overline{Q} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, według (52) i z założenia, że zbiór $\overline{Q}$ jest zamknięty, będzie:

$$[x] \subset \overline{Q},$$

co daje:

$$x \subset Q.$$

Dowiedliśmy więc, że zbiór Q jest zamknięty.

Zbiory Q i $\overline{Q}$ są więc zawsze jednocześnie zamknięte lub niezamknięte odpowiednio w zbiorach P i $\overline{P}$.

Stąd i z uwagi, że zbiór P spełnia warunek 1), wnosimy z łatwością, że i zbiór $\overline{P}$ spełnia ten warunek.

Powiadam wreszcie, że zbiór $\overline{P}$ spełnia warunek 3). W samej rzeczy, oznaczmy przez $\overline{W}$ zbiór wszystkich symboli $[w]$, gdzie w jest liczbą wymierną przedziału $(0, 1)$. Dla każdej danej liczby rzeczywistej x przedziału $(0, 1)$ można, jak łatwo widzieć, zbudować ciąg nieskończony liczb wymiernych w_n tegoż przedziału taki, iż

$$|w_n - x| < \frac{1}{n^2}.$$

Będzie więc

$$[w_n] \subset \overline{W} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

oraz

$$\lim_{n=\infty} [w_n] = [x],$$

co dowodzi, że zbiór $\overline{W}$ jest wszędziegęstą częścią zbioru $\overline{P}$. Lecz zbiór $\overline{W}$ jest oczywiście przeliczalny; dowiedliśmy więc, że zbiór $\overline{P}$ spełnia warunek 3).

Zbiór $\overline{P}$ jest tedy zbiorem abstrakcyjnym zwartym i spełnia warunki 1) i 3). Warunku 2) atoli zbiór P nie spełnia, gdyż np. ciąg nieskończony $\left[\frac{1}{n}\right]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ elementów zbioru P nie zmierza do granicy $[0]$, a jednak nie istnieje żaden ciąg rosnący wskaźników k_n, dla którego ciąg $\left[\frac{1}{k_n}\right]$ zmierzałby do innej niż $[0]$ granicy (gdyż dla takiego ciągu musiałoby być $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{k_n} = g \neq 0$, co niemożliwe).

Dowiedliśmy więc, że w naszem twierdzeniu warunek 2) nie jest równoważny warunkowi zwartości.

Wyjaśnimy tu jeszcze, jakie znaczenie ogólne posiada dla mnogości abstrakcyjnych warunek 2).

Niech P oznacza jakąkolwiek daną mnogość abstrakcyjną. Może się zdarzyć, że pojęcie granicy, ustalone w mnogości P, daje się r o z s z e r z y ć, bądź przez wprowadzenie nowych umów, wedle których pewne ciągi, nie posiadające dotąd w zbiorze P granic, będą je teraz w tym zbiorze miały, bądź też przez dołączenie do zbioru P nowych elementów i uważanie ich jako granice pewnych ciągów punktów zbioru P, które dotąd granic nie miały, tak przytem, że jeżeli pierwotnie w zbiorze P było $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p$, to wzór ten pozostaje w mocy i po rozszerzeniu pojęcia granicy w uważanym zbiorze.

Naprzykład pojęcie granicy w zbiorze $\overline{P}$ wszystkich symboli $[x]$, któryśmy badali wyżej, może być rozszerzone przez wprowadzenie umowy, że element $[x]$ jest granicą nietylko tych ciągów $[x_n]$, dla których szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - x|$ jest zbieżny, ale i tylko dla których szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - x)^2$ jest zbieżny. (Więc np. ciąg $\left[\frac{1}{n}\right]$, który przedtem w zbiorze $\overline{P}$ nie posiadał granicy, teraz będzie miał granicę $[0]$). Dalszem jeszcze rozszerzeniem pojęcia granicy w tym zbiorze byłoby przyjęcie umowy, że $[x]$ jest granicą każdego ciągu $[x_n]$, dla którego $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$. Oczywiście nowe umowy, rozszerzające pojęcie granicy, muszą być zawsze tego rodzaju, żeby przez ich przyjęcie uważany zbiór nie przestał być mnogością abstrakcyjną. (Więc np. dla zbioru liczb rzeczywistych nie możnaby przyjąć nowej umowy, wedle której $\lim\limits_{n=\infty} (-1)^n = 0$, gdyż sprzeciwiałaby się ona własności mnogości abstrakcyjnych, według której, o ile istnieje $\lim\limits_{n=\infty} p_n$, to musi być $\lim\limits_{n=\infty} p_{k_n} = \lim\limits_{n=\infty} p_n$ dla każdego ciągu nieskończonego rosnącego wskaźników k_k, a właśnie, według już istniejących dla zbioru liczb rzeczywistych umów, mamy $\lim\limits_{n=\infty} (-1)^{2n} = 1$).

W zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych pojęcie granicy możemy rozszerzyć przez dołączenie do tego naszego zbioru elementu ∞ i umowę, że element ten jest granicą każdego nieograniczenie rosnącego ciągu liczb rzeczywistych.

Może się jednak zdarzyć, że w danej mnogości abstrakcyjnej P pojęcie granicy nie podlega już (w powyższem znaczeniu) dalszemu rozszerzeniu. Mnogość taką będziemy nazywali z u p e ł n ą.

Okazuje się, że na to, iżby mnogość abstrakcyjna P była zupełna, potrzeba i wystarcza, aby dla niej zachodził warunek 2).

Udowodnimy, że warunek nasz jest konieczny. Załóżmy, że mnogość abstrakcyjna P nie spełnia warunku 2). Z założenia tego wynika natychmiast, że istnieje ciąg nieskończony p_n punktów zbioru P, nie posiadający granicy, lecz taki, że wszystkie ciągi p_{k_n} $(k_1 < k_2 < \ldots)$, które posiadają granicę, mają jednę i tę samą granicę. (W przeciwnym bowiem razie dla każdego ciągu nieskończonego p_n punktów mnogości P, nie posiadającego granicy, istniałyby ciągi p_{r_n} $(r_1 < r_3 < \ldots)$ oraz p_{s_n} $(s_1 < s_2 < \ldots)$, mające różne granice — i zbiór P spełniałby oczywiście warunek 2)).

Jeżeli dla uważanego ciągu p_n żaden ciąg p_{k_n} $(k_1 < k_2 < \ldots)$ nie posiada granicy, to wprowadzimy nową umowę, wedle której wszystkim tym ciągom p_{k_n} (a więc, w szczególności, i samemu ciągowi p_n, który otrzymujemy, kładąc $k_n = n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$) przypiszemy granicę p_1, jeżeli zaś istnieją ciągi p_{l_n} ($l_1 < l_2 < \ldots$) mające granicę—a, w myśl naszego założenia, wszystkie takie ciągi będą miały tę samą granicę p_0 — to przypiszemy wszystkim ciągom p_{k_n} ($k_1 < k_2 < \ldots$) granicę p_0. Łatwo widzieć, że, po wprowadzeniu takiej umowy, mnogość P nie przestanie być mnogością abstrakcyjną, natomiast pojęcie granicy zostanie w niej rozszerzone, gdyż np. ciąg p_n, który w pierwotnej mnogości nie miał granicy, będzie ją teraz posiadał.

Jeżeli więc warunek 2) nie jest dla danej mnogości spełniony, to mnogość nie jest zupełna. Warunek nasz jest tedy konieczny na to, żeby mnogość była zupełna.

Udowodnimy teraz, że warunek nasz jest wystarczający. Załóżmy przeto, że mnogość abstrakcyjna P spełnia warunek 2) i przypuśćmy, że mnogość ta nie jest zupełna, że więc pojęcie granicy daje się w niej rozszerzyć. Istnieje tedy ciąg nieskończony p_n punktów zbioru P, który w tym zbiorze pierwotnie nie miał granicy, ale, po rozszerzeniu pojęcia granicy, posiada granicę g (będącą punktem zbioru P, albo też punktem, który do zbioru tego pierwotnie nie należał, lecz został do niego dołączony). Rozróżnijmy tu dwa przypadki:

1⁰. Element g jest punktem zbioru P. Ponieważ w zbiorze P punkt g nie był pierwotnie granicą ciągu p_n, więc, w myśl warunku 2), dla pewnego ciągu rosnącego wskaźników k_n musiało być $\lim\limits_{n=\infty} p_{k_n} = q \neq g$, co powinnoby pozostać prawdziwem i po rozszerzeniu pojęcia granicy, wbrew założeniu, że wówczas $\lim\limits_{n=\infty} p_n = g$.

2⁰. Element g nie jest punktem zbioru P. Mnogość abstrakcyjna, spełniająca warunek 2) jest, jak wiemy, zwarta; dla ciągu p_n istnieje więc ciąg wskaźników k_n ($k_1 < k_2 < \ldots$) taki, iż $\lim\limits_{n=\infty} p_{k_n} = p$, gdzie p jest punktem zbioru P, wbrew temu, że po rozszerzeniu pojęcia granicy $\lim\limits_{n=\infty} p_n = g$, gdzie $g \neq p$ (gdyż punkt g nie należał pierwotnie do zbioru P).

Dowiedliśmy tedy, że jeżeli mnogość abstrakcyjna P spełnia warunek 2), to mnogość ta jest zupełna. Warunek nasz jest więc wystarczający.

Udowodniliśmy zatem, że na to, aby mnogość abstrakcyjna P była zupełna, potrzeba i wystarcza, iżby spełniała warunek 2).

Zauważymy pewien ciekawy wniosek z naszego twierdzenia, dającego warunki konieczne i wystarczające na to, żeby mnogość abstrakcyjna była kontynuum liniowem.

Wniosek. Na to, żeby zbiór P punktów przestrzeni euklidesowej m-wymiarowej, ograniczony i zawierający więcej niż dwa punkty, był łukiem prostym, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdego punktu p zbioru P z wyjątkiem dwóch, zbiór P był sumą dwóch różnych od P zbiorów zamkniętych, których jedynym punktem wspólnym jest punkt p.[1]

Dowód. Łukiem prostym (arc simple) nazywamy, jak wiadomo, jedno-jednoznaczne i ciągłe odwzorowanie odcinka. Że łuk prosty spełnia warunki naszego wniosku, jest oczywiste.

Załóżmy tedy, że warunki naszego wniosku są spełnione. Zbiór P, spełniający te warunki, jest oczywiście zamknięty (skoro może być sumą dwóch zbiorów zamkniętych). Zbiory, zamknięte w P, są więc zbiorami zamkniętemi, i naodwrót. Jeżeli przeto warunek naszego wniosku jest spełniony, to spełniony jest też warunek 1) naszego twierdzenia, który, przy założeniu, że zbiór P zawiera więcej niż dwa punkty, pociąga za sobą prawdziwość lemmatu I. W myśl tego lemmatu zbiór P jest spójny. Jako ograniczony, zamknięty i spójny, zawierający więcej niż jeden punkt, zbiór P jest więc kontynuum (Cantorowskiem). Warunki 2) i 3) naszego twierdzenia są przeto spełnione same przez się. Zbiór P spełnia więc wszystkie warunki naszego twierdzenia, skąd wynika, że jest to łuk prosty.

Udowodniliśmy tym sposobem nasz wniosek.

Wiatka, w styczniu 1915.

RÉSUMÉ.

Le continu linéaire comme un ensemble abstrait.

Je démontre le théorème suivant:

Pour qu' un ensemble abstrait soit un continu linéaire, il faut et il suffit que cet ensemble satisfait aux conditions suivantes:

1) Pour tout point p de P, sauf deux points de cet ensemble, l'ensemble P est une somme de deux ensembles, différents de P et fermés dans P, dont le point commun unique est le point p.

2) Pour tout point p de P et pour toute suite infinie p_n des points de P qui ne converge pas vers p, il existe un point q de P, autre que p et une suite infinie croissante des indices k_n, telle que $\lim p_{k_n} = q$.

3) Il existe un sous-ensemble dénombrable de P, qui est dense en P.

Je démontre que ces trois conditions sont indépendantes.

---

[1]) Porówn. moją pracę: „L'arc simple comme un ensemble de points dans l'espace à m dimmensions".