ROZDZIAŁ IV.

ROZDZIAŁ V.

ROZDZIAŁ VI.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x=0}\left(\dfrac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=x_0}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$.

Sur la relation entre l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x=0}\left(\dfrac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=x_0}$ et la continuité de la fonction $f(x)$.

Zadaniem noty niniejszej jest dowód następującego twierdzenia:

Dla każdego naturalnego $n>2$ znaleść można funkcyę $f(x)$ mierzalną i ograniczoną, nieciągłą w punkcie x_0, a przytem taką, że granica:

$$\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x}\right)_{x=x_0} \tag{I}$$

istnieje.

Zagadnienie istnienia takiej funkcyi zostało postawione przez p. Sierpińskiego[1] i rozwiązane dla szczególnych przypadków, mianowicie dla $n=2$ przecząco przez p. Sierpińskiego[2], zaś dla $n=3$ twierdząco przezemnie.[3]

Pomijając przypadek $n=3$, zakładamy, że

$$p_1=2,\quad p_2,\quad p_3,\ldots,\quad p_m \tag{1}$$

jest ciągiem liczb pierwszych nie większych od n, uporządkowanych według wielkości. Każdej liczbie naturalnej $k\leqq n$ można przyporządkować jeden i tylko jeden ciąg liczb nieujemnych, całkowitych:

---

[1]) Prace mat.-fiz. t. **26**, str. 127.
[2]) l. c.
[3]) Prace mat.-fiz. **26**, str. 215

$$\partial_1^{(k)}, \quad \partial_2^{(k)}, \quad \ldots \quad \partial_m^{(k)} \tag{2}$$

tak, aby było:

$$k = \prod_{s=1}^{m} p_s^{\partial_s^{(k)}}; \tag{3}$$

jest to nic innego, jak twierdzenie o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze.

Weźmy teraz pod uwagę równanie różnicowe o m zmiennych niezależnych:

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \binom{n}{s} f(y_1 + \partial_1^{(n-s)},\ y_2 + \partial_2^{(n-s)} \ldots y_m + \partial_m^{(n-s)}) = 0. \tag{4}$$

Udowodnimy, że równanie to posiada conajmniej jednę całkę szczególną, zależną od dwu tylko zmiennych y_1, y_m i mającą kształt:

$$f(y_1, y_2, \ldots y_m) = a^{y_1} . b^{y_m}, \tag{5}$$

gdzie a i b są stałe zespolone, czyniące zadość warunkowi:

$$|a| = |b| = 1. \tag{6}$$

Wstawiając wyrażenie (5) w równanie (4) i opuszczając wspólny czynnik $a^{y_1} . b^{y_m}$, otrzymamy:

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \binom{n}{s} a^{\partial_1^{(n-s)}} b^{\partial_m^{(n-s)}}. \tag{7}$$

Jednomiany, wchodzące w skład tej sumy, rozpadają się na trzy kategorye:

α) takie dla których $\partial_m^{(n-s)} > 0$; ma to miejsce jedynie dla $n - s = p_m$; z postulatu bowiem Bertranda i określenia liczby p_m wynika, że jest $2p_m > n \geqq n - s$ (w przeciwnym bowiem razie istniałaby liczba pierwsza p_{m+1}, spełniająca nierówności: $p_m > p_{m+1} \leqq n$). Kategorya ta składa się z jednego tylko wyrazu, dla którego $\partial_1^{(n-s)} = \partial_1^{(p_m)} = 0$ i któremu nadać możemy kształt:

$$(-1)^{n+1} \binom{n}{p_m} b; \tag{8}$$

β) takie, dla których $\partial_1^{(n-s)} = \partial_m^{(n-s)} = 0$, a więc wszystkie wyrazy, dla których $n - s$ jest nieparzyste, i różne od p_m:

$$\sum_{r=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^{n+1} \binom{n}{2r+1} - (-1)^{n+1} \binom{n}{p_m} = (-1)^{n+1} . \left(2^{n-1} - \binom{n}{p_m}\right); \tag{9}$$

γ) wszystkie parzyste, a więc te dla których $\partial_m^{(n-s)} = 0$, zaś $\partial_1^{(n-s)} > 0$:

$$\sum_{r=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^n \binom{n}{2r} a^{\partial_1^{(2r)}} \tag{10}$$

przyczem suma spółczynników tych wyrazów jest:

$$(-1)^n (2^{n-1} - 1). \tag{11}$$

Możemy wobec powyższego przedstawić równanie nasze w postaci:

$$\binom{n}{p_m} b - \sum_{r=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n}{2r} a^{\partial_1^{(2r)}} + \left(2^{n-1} - \binom{n}{p_m}\right) = 0. \tag{12}$$

Rozwiązujemy względem b i kładziemy $a = e^{i\varphi}$; otrzymamy:

$$b = F(\varphi) = \frac{-2^{n-1} + \binom{n}{p_m} + \sum_{r=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \binom{n}{2r} e^{\partial_1^{(2r)} \varphi i}}{\binom{n}{p_m}}. \tag{13}$$

Zagadnienie sprowadza się tym sposobem do znalezienia rozwiązań rzeczywistych równania

$$|F(\varphi)| = 1. \tag{14}$$

Zauważymy przedewszystkiem, że $|F(\varphi)|$ jest funkcyą ciągłą argumentu φ; wystarczy więc jeżeli udowodnimy, iż:

$$|F(0)| < 1; \qquad |F(\pi)| > 1. \tag{15}$$

Mamy:

$$F(0) = \frac{-2^{n-1} + \binom{n}{p_m} + (2^{n-1} - 1)}{\binom{n}{p_m}} = \frac{\binom{n}{p_m} - 1}{\binom{n}{p_m}} \tag{16}$$

a więc:

$$|F(0)| < 1 \tag{17}$$

$$F(\pi) = \frac{-2^{n-1} + \binom{n}{p_m} + \sum\limits_{r=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^{\delta_1^{(2r)}} \binom{n}{2r}}{\binom{n}{p_m}}. \qquad (18)$$

Rozróżniamy dwa przypadki:

A) $$n \leqq 10.$$

Układamy dla tych przypadków następującą tabelkę:

$$\delta_1^{(2)} = 1, \quad \delta_1^{(4)} = 2, \quad \delta_1^{(6)} = 1, \quad \delta_1^{(8)} = 3, \quad \delta_1^{(10)} = 1$$

$$n = 4, \quad p_m = 3; \quad F(\pi) = \frac{-8+4+(-6+4)}{4} = -\frac{3}{2},$$

$$n = 5, \quad p_m = 5; \quad F(\pi) = \frac{-16+1+(-10+5)}{1} = -20,$$

$$n = 6, \quad p_m = 5; \quad F(\pi) = \frac{-32+6(-15+15-1)}{6} = -\frac{9}{2},$$

$$n = 7, \quad p_m = 7; \quad F(\pi) = \frac{-64+1+(-21+35-7)}{1} = -56,$$

$$n = 8, \quad p_m = 7; \quad F(\pi) = \frac{-128+8+(-28+70-28-1)}{8} = -\frac{107}{8},$$

$$n = 9, \quad p_m = 7; \quad F(\pi) = \frac{-256+36+(-36+126-84-9)}{36} = -\frac{223}{36},$$

$$n = 10, \quad p_m = 7; \quad F(\pi) = \frac{-512+120+(-45+210-210-45-1)}{120} = -\frac{483}{120}.$$

Jest więc w tych przypadkach napewno:

$$F(\pi) > 1. \qquad (18)$$

B) $$n \geqq 11,$$

Oznaczmy przez A_n największy ze spółczynników $\binom{n}{s}$, $s = 1, 2 \ldots, n$. Powiadam, że:

$$\frac{2^{n-1} - A_n - 2^{\frac{n}{2}}}{A_n} > 1. \qquad (19)$$

Istotnie, nierówność (19) napisać można tak:

$$G_n = \frac{2A_n + 2^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} < 1. \qquad (20)$$

Jeżeli n jest parzyste: $n = 2t$, $n+1 = 2t+1$, wówczas:

$$A_n = \frac{2t(2t-1)(2t-2)\ldots(t+1)}{t!}, \qquad (21)$$

$$A_{n+1} = \frac{(2t+1)(2t)(2t-1)\ldots(t+2)}{t!} = \frac{2t+1}{t+1} A_n \leqq 2A_n. \qquad (22)$$

Dla

$$n = 2t+1$$

mamy

$$n+1 = 2t+2$$

oraz

$$A_{n+1} = \frac{(2t+2)\ldots(t+2)}{(t+1)!} = 2A_n. \qquad (23)$$

Ze związków (22), (23) wynika:

$$G_{n+1} = \frac{2A_{n+1} + 2^{\frac{n+1}{2}}}{2^n} \leqq \frac{2.(2A_n + 2^{\frac{n}{2}})}{2.\ 2^{n-1}} = G_n. \qquad (24)$$

Ponieważ jednak:

$$G_{11} = \frac{2 \times 462 + 2^{\frac{11}{2}}}{1024} < \frac{924+64}{1024} = \frac{988}{1024} < 1, \qquad (25)$$

nierówności więc (19), (20) spełnione są dla wszystkich $n \geqq 11$.

Mamy dalej:

$$\binom{n}{p_m} \leqq A_n \qquad (26)$$

ponieważ zaś dla r nieparzystego jest $\delta_1^{(2r)} = 1$, więc

$$\sum_{r=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^{\delta_1^{(2r)}} \binom{n}{2r} \leqq \sum_{r=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^r . \binom{n}{2r} = \Re\,(1+i)^n - 1 - |1+i|^n = 2^{\frac{n}{2}}.\text{[1]} \qquad (27)$$

Nierówności (19), (26), (27) pociągają za sobą:

---

[1]) Oznaczam przez $\Re(\alpha)$ — część rzeczywistą liczby α.

$$-F(\pi)=\frac{2^{n-1}-\binom{n}{p_m}-\sum\limits_{r=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^{\delta_1^{(2r)}}\binom{n}{2r}}{\binom{n}{p_m}}>1, \tag{28}$$

czyli

$$|F(\pi)|>1. \tag{29}$$

Nierówności (15) są tym sposobem zawsze spełnione. Istnieje więc wartość rzeczywista φ_0, dla której

$$|b| = |F(\varphi_0)| = 1. \tag{30}$$

czyli:

$$b=e^{i\psi_0}. \tag{31}$$

Funkcya $e^{i(y_1\varphi_0+y_m\psi_0)}$ jest całką szukaną równania (4). Ponieważ spółczynniki równania są rzeczywiste, więc:

$$\Phi(y_1, y_m)=\Re\left[e^{i(y_1\varphi_0+y_m\psi_0)}\right]=\cos(y_1\varphi_0+y_m\varphi_0) \tag{32}$$

jest również jego całką. Zauważymy przytem, że

$$\varphi_0 \neq 0, \quad \varphi_0 \neq 2k\pi \qquad (k=1, 2\ldots).$$

Możemy teraz zdefiniować funkcyę $f(x)$, czyniącą zadość warunkom zagadnienia.

Jeżeli:

$$x=p_1^{y_1}.p_2^{y_2}\ldots p_m^{y_m} \quad (y_k=0, \pm 1, \pm 2\ldots; \; k=1, 2,\ldots, m) \tag{33}$$

wówczas:

$$f(x)=\Phi(y_1, y_m). \tag{34}$$

Dla pozostałych x jest:

$$f(x)=0. \tag{35}$$

Funkcya $f(x)$ jest ograniczona, gdyż

$$|f(x)| \leqq 1; \tag{36}$$

powtóre jest nieciągła w punkcie $x=0$. Istotnie:

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right)=\cos(-k\varphi_0)=\cos k\varphi_0 \tag{37}$$

ciąg jednak $\{\cos k\varphi_0\}$, $k=1, 2\ldots$ jest zbieżny tylko dla

$$\varphi_0 \equiv 0 \ (\text{mod. } 2\pi),$$

co w naszym przypadku nie zachodzi, granica więc $\lim\limits_{k=\infty} f\left(\frac{1}{2^k}\right)$ nie istnieje.

Warunek (I) jest tem nie mniej w punkcie $x=x_0$ spełniony. Istotnie, jeżeli Δx nie posiada formy (33), wówczas żadna z liczb $k.\Delta x$ $(k=1, 2\ldots n)$ formy tej nie posiada, jest więc:

$$f(k.\Delta x)=0 \qquad k=1, 2,\ldots, n \tag{88}$$

$$\left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=0}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}f((n-s)\Delta x)}{\Delta x^n}=0. \tag{39}$$

Niech teraz będzie

$$\Delta x=p_1^{y_1}.p_2^{y_2}\ldots p_m^{y_m}; \tag{40}$$

wówczas:

$$k.\Delta x=p_1^{y_1+\delta_1^{(k)}}.p_2^{y_2+\delta_2^{(k)}}\ldots p^{y_m+\delta_m^{(k)}}, \tag{41}$$

$$\left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=0}=\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\binom{n}{s}\Phi\left(x_1+\delta_1^{(n-s)}, \; y_m+\delta_m^{(n-s)}\right). \tag{42}$$

Wyrażenie to staje się lewą stroną równania (4) po podstawieniu

$$f(y_1, y_2\ldots y_m)=\Phi(y_1, y_m) \tag{43}$$

ponieważ jednnk $\Phi(y_1, y_m)$ jest całką równania (4) więc i w tym przypadku:

$$\left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=0}=0. \tag{44}$$

a stąd:

$$\lim_{x=0}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}=0 \tag{45}$$

c. b. d. o.

RÉSUMÉ.

Je démontre dans cette note la proposition suivante: Pour tout entier $n \geqq 3$, existe une fonction mesurable et bornée $f(x)$ discontinue dans $x=x_0$ et telle, que la limite

$$\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=x_0}$$

existe.