chen μ_1, μ_2 einer Seitenfläche des zu dem System (4) gehörenden Puiseux-Polyeders im Raume, die keiner Koordinatenaxe parallel ist, während k_1, k_2 einer Kante dieser Seitenfläche enstprechen.

Ich untersuche weiter die Existenz und Darstellbarkeit durch Reihen successiver Approximationen gewisser Integrale, die man doppelt logarithmische Integrale nennen kann und welche die Gestalt besitzen

$$y_1 = v_1 x^{\mu_1} (\log x)^{k_{11}} (\log_2 x)^{k_{12}}, \qquad y_2 = v_2 x^{\mu_2} (\log x)^{k_{21}} (\log_2 x)^{k_{22}}$$

wo $\log_2 x$ den zweimal genommenen Logarithmus von x bedeutet, μ_1, μ_2 die einer Seitenfläche entsprechenden vorher genannten Zahlen sind, während k_{11}, k_{21} den Zahlen k_{12}, k_{21}, die einer Kante entsprechen, proportional sind, k_{12}, k_{22} a priori beliebige Zahlen sind und sich dann als gleichfalls rationale Zahlen ergeben.

Man könnte ähnlich, wie es Herr Dulac für eine einzige Gleichung (1) getan hat, nach denjenigen Integralen des Systems zweier Gleichungen (4) fragen, bei denen μ_1, μ_2 den Kanten, oder sogar einer einzelnen Ecke der Puiseux-Polyeders entsprechen. Im ersten Falle können die Zahlen μ_1, μ_2 beide irrational sein, so zwar, dass zwischen ihnen eine lineare Beziehung mit rationalen Koefficienten besteht. Im zweiten Falle können beide Zahlen irrational und linear unabhängig sein. Weiter könnte man die Integrale untersuchen, bei denen zwar μ_1 und μ_2 einer Seitenfläche, aber k_{11}, k_{12} eine Ecke, oder μ_1, μ_2 einer Kante, aber k_{11}, k_{21} einer Ecke des Polyeders entsprechen, u. s. w. Man käme denn zu Integralen mit irrationalen Zahlen k_{11}, k_{21}. Auf alle diese Fragen gehen wir aber nicht ein. Den eigentlichen Untersuchungen dieser Arbeit schicken wir eine kurze Ableitung der Resultate der früher von aus verfassten und oben zitierten Note voraus.

ROMUALD WITWIŃSKI.

O układach odwracalnych powierzchni potrójnie ortogonalnych.

Sur les systèmes réversibles des surfaces triplement orthogonales.

WSTĘP.

1. Układy „odwracalne" powierzchnf potrójnie ortogonalnych są to układy, dla których ruch względny trójścianu osi spółrzędnych w odniesieniu do trójścianu trzech normalnych tworzy nowy układ ortogonalny, którego osie, w ten sposób przestawione, są trzema normalnemi. Powierzchnie, które stanowią ten układ, są to cyklidy Dupina.

Układami odwracalnemi zajmował się po raz pierwszy znakomity matematyk francuski Gaston Darboux, który około końca r. 1913 ogłosił w „Comptes Rendus de l'Académie des sciences" kilka not, dotyczących teoryi tych układów.

Praca niniejsza ma na celu zbadanie tego samego pytania na drodze czysto-geometrycznej; idąc w tym kierunku, bez pomocy Analizy, można osiągnąć znaczną liczbę wyników, otrzymanych przez Darboux'a. Przeprowadzam tutaj rozważanie różnych kształtów, jakie może przybierać układ odwracalny, i dowodzę, że wszystkie układy ortogonalne, składające się wyłącznie z cyklid, mogą być otrzymane przez inwersyę z układu odwracalnego. Dołączam wreszcie kilka uwag odnośnie do tych układów.

Metoda, którą stosuję, jest to metoda Darboux-Combescure'a, polegająca, jak wiadomo, na podzieleniu zagadnienia na dwie części: badamy z początku ruch trzechparametrowy, dokoła wierzchołka stałego, trójścianu trójprostokątnego, którego krawędzie są równoległe do normalnych trzech powierzchni, i następnie poszukujemy sposobu przeniesienia tego trójścianu tak, aby przez zmienianie każdego z trzech parametrów wierzchołek opisywał jednę z powierzchni układu.

ROZDZIAŁ I.

2. **Linie krzywizny układu odwracalnego są płaskie.** Niech będzie $Oxyz$ trójścian ruchomy, którego krawędzie Ox, Oy, Oz są odpowiednio równoległe do normalnych powierzchni, otrzymanych przy zachowaniu stałości jednego z parametrów ρ, ρ_1, ρ_2, i $OXYZ$ niechaj będzie trójścian stały, utworzony przez trzy osie spółrzędnych. Przemieszczenie trójścianu $Oxyz$ zależy od dziewięciu obrotów, z których każdy jest składową, w kierunku jednej z krawędzi trójścianu ruchomego, obrotu tego trójścianu, wyznaczonego przez zmianę jednego tylko z parametrów ρ, ρ_1, ρ_2. Znane są trzy warunki konieczne i dostateczne na to, żeby ruch trójścianu należał do układu potrójnie ortogonalnego: jest konieczne i dostateczne, żeby trzy obroty były równe zeru, mianowicie, obrót około osi Ox, kiedy zmienia się tylko ρ; obrót około osi Oy, kiedy zmienia się tylko ρ_1; obrót około osi Oz, kiedy zmienia się tylko ρ_2. Pierwszy z tych warunków wyraża, że, o ile zmienia się tylko ρ, trójścian ruchomy $Oxyz$ obraca się około osi, położonej w płaszczyźnie Oyz. Ruch trójścianu ruchomego jest więc wyznaczony przez toczenie się płaszczyzny Oyz po stożku stałym.

Ruch odwrotny, czyli ruch względny trójścianu osi spółrzędnych $OXYZ$ w odniesieniu do trójścianu $Oxyz$, będzie więc wyznaczony przez toczenie się tego stożka, który teraz jest ruchomy, na płaszczyźnie stałej Oyz. Ale dlatego, aby ten ruch odwrotny tworzył nowy układ ortogonalny, trzebaby, żeby stożek sprowadzał się do płaszczyzny, co jest niemożliwe. Stożek może się sprowadzić tylko do prostej, i wówczas oś obrotu jest to oś, stale położona w płaszczyźnie Oyz. Otóż aby układ był odwracalny, trzeba i wystarcza, by, o ile zmienia się tylko ρ, obrót trójścianu dokonywał się około osi stale położonej jednocześnie w płaszczyźnie OYZ i w płaszczyźnie OYZ, i żeby, o ile zmienia się tylko ρ_1, albo ρ_2, dwa drugie warunki analogiczne były spełnione.

Wynika stąd bezpośrednio, że linie krzywizny każdej z powierzchni układu są płaskie. Istotnie, założywszy, że ρ_2 jest stałą, zmieniajmy ρ i ρ_1. Otrzymamy powierzchnię układu, której normalna będzie równoległa do Oz i której odwzorowanie kuliste linij krzywizny otrzymamy przez przemieszczenie punktu C osi Oz, znajdującego się w odległości jednostki długości od punktu początkowego. Linia krzywizny, odpowiadająca tylko zmienności parametru ρ, będzie więc miała za odwzorowanie kuliste linię, opisaną przez C, kiedy zmienia się tylko ρ. Lecz ponieważ wówczas obrót dokonywa się około osi stałej, to punkt C opisze koło kuli. Otóż styczne w różnych punktach linii krzywizny są równoległe do stycznych w punktach odpowiadających jej odwzorowania kulistego. A więc wszystkie te styczne są położone

w jednej i tej samej płaszczyźnie, — i omawiana linia krzywizny jest istotnie płaska. Oczywiste jest, że to samo stosuje się do wszystkich innych linij krzywizny, otrzymanych przez zmienienie z osobna każdego z parametrów ρ, ρ_1 lub ρ_2.

3. **Wyznaczenie odwzorowania kulistego układu ortogonalnego.** Widzimy nadto, że odwzorowanie kuliste każdej powierzchni układu składa się z sieci kół ortogonalnych. Otóż wiadomo, że podobna sieć, nakreślona na kuli, jest utworzona z kół, których płaszczyzny przechodzą przez jednę lub drugą z dwóch prostych sprzężonych w odniesieniu do kuli.

Niech będzie $OABC$ jedno z położeń czworościanu ruchomego, przyczem A, B, C znajdują się w odległości, równej jednostce długości od punktu początkowego. Widzieliśmy, że, o ile zmienia się tylko ρ, czworościan ten obraca się około osi niezmiennej, która jest linią przecięcia płaszczyzn OBC i OYZ. Więc punkt C opisuje koło małe, którego płaszczyzna jest prostopadła do tej osi i przeto równoległa do płaszczyzny OAX, w szczególności zaś do prostej stałej OX. Jeżeli teraz będziemy zmieniali ρ_1, płaszczyzna tego koła będzie się przemieszczała, przechodząc przez prostą stałą (D); ponieważ ta płaszczyzna zostaje równoległą do OX, jest przeto konieczne, aby prosta (D) była równoległa do prostej OX. Zupełnie tak samo, kiedy zmienia się tylko ρ_1, punkt C opisuje koło, którego płaszczyzna jest równoległa do OY, i kiedy następnie zmienia się ρ_1, płaszczyzna tego koła obraca się około prostej (D'), równoległej do OY. Wreszcie, ponieważ proste (D) i (D') są sprzężone, przeto wспólna ich prostopadła przechodzi przez środek kuli; a więc jest nią oś OZ. Widzimy wówczas, że odwzorowanie kuliste całego układu powinno mieć tę własność, że, jeżeli jedna z trzech zmiennych pozostaje stałą, punkt odpowiedni czworościanu ruchomego opisuje sieć ortogonalną, utworzoną z kół, których płaszczyzny przejdą przez dwie proste sprzężone, prostopadłe do odpowiedniej osi spółrzędnych. Należy teraz wykazać, czy podobne odwzorowanie kuliste jest możliwe.

Niechaj będzie $OABC$ jedno z położeń szczególnych czworościanu ruchomego. Przez punkt A, w płaszczyźnie stycznej do kuli prowadzę proste AQ i AR, odpowiednio równoległe do OB i OC; tak samo, przez punkt B — proste BP' i CR', odpowiednio równoległe do OA i OC, i wreszcie, przez punkt C — proste CP'' i CQ'', odpowiednio równoległe do OA i OB. Przez prostą AQ prowadzę płaszczyznę, równoległą do OY, która spotyka oś OX w punkcie G i przecina płaszczyznę OXY według prostej (E) równoległej do osi OY. Obieram na osi OX punkt G_1, sprzężony z G w odniesieniu do kuli i przez G, prowadzę prostą (F), równoległą do osi OZ. Dwie proste (E) i (F) są sprzężone. Płaszczyzny, przechodzące przez punkt A i przez każdą z dwóch prostych (E) i (F) muszą więc przecinać kulę według dwóch kół ortogonalnych; a więc przecinają one płaszczyznę styczną w A według dwóch prostych prostopadłych; ponieważ zaś pierwsza płaszczyzna przechodzi przez prostą AQ, przeto druga przechodzi przez prostą AR. Gdybym tedy przez prostą AK poprowadził płaszczyznę równoległą do osi OZ, to ta płaszczyzna, jako identyczna z płaszczyzną, przechodzącą przez A i (F), przecięłaby oś OX w punkcie G_1, sprzężonym z punktem G. Tak samo, płaszczyzny równoległe do osi OX i OZ, poprowadzone przez proste BP' i CQ', wyznaczą na osi OY dwa punkty sprzężone H i H_1, przez które przejdą dwie proste sprzężone (D') i (F'), równoległe do osi OX i OZ. Wreszcie, płaszczyzny, przeprowadzone przez proste CP'' i CQ'', równolegle do osi OX i OY, wyznaczą na osi OZ punkty sprzężone K i K_1, przez które przejdą dwie proste sprzężone (D'') i (E''), odpowiednio równoległe do osi OX i OY.

Oznaczmy przez OU, OV, OW odpowiednie linie przecięcia trzech płaszczyzn OBC, OCA, OAB z płaszczyznami spółrzędnych OYZ, OZX, OXY; OU jest prostopadła jednocześnie do OA i do OX; OV do OB i do OY; OW, do OC i do OZ.

Położenie trójścianu $OABC$ zależy od trzech parametrów. Każdemu z tych położeń odpowiadają trzy pary punktów sprzężonych, po jednej parze na każdej z osi. Załóżmy, że punkty K i K_1 są stałe. W ten sposób wyznaczy się na kuli sieć kół ortogonalnych, których płaszczyzny odpowiednio przechodzą przez proste (D'') i (E''), — sieć, opisana przez punkt C. Styczne do dwóch z trzech kół w jednym z ich punktów przecięcia przetną odpowiednio proste (D'') i (E''), i trójścian, utworzony przez promień kuli OC i równoległe, przeprowadzone ze środka do tych dwóch stycznych, będzie jednem z położeń trójścianu powyższego; ale zbiór tych nowych położeń zależy tylko od dwóch parametrów. Jeżeli punkt C będzie przemieszczony na jedno z tych dwóch kół, których płaszczyzna przechodzi przez prostą (D''), to obrót będzie miał miejsce około osi OU, która jest prostopadła do płaszczyzny tego koła, ponieważ jest prostopadła, z jednej strony, do stycznej tego koła, równoległej do OA, i, z drugiej strony, — do osi OX, równoległej do (D''). Jeżeli ten sam punkt będzie przemieszczony na drugie koło, obrót będzie miał miejsce około osi OV. Jeżeli więc zechcemy od jednego położenia przejść do drugiego nieskończenie blizkiego, lecz dowolnego w zbiorze dwuparametrowym, wypadnie nadać obrót trójścianowi około jednej osi, położonej w płaszczyźnie OUV.

Załóżmy teraz, że ustalamy punkty H i H_1. Otrzymamy wówczas nowy zbiór położeń trójścianu, i można będzie przejść od jednego położenia do nieskończenie blizkiego drugiego przez obrót około osi, położonej w płaszczyźnie OUW. Jeżeli ustalimy jednocześnie punkty H, H_1 i K, K_1, to trójścian będzie mógł obracać się tylko około osi OU, o ile trzy proste OU,

OV, OW nie są położone w jednej płaszczyźnie, co zawsze można założyć, ponieważ trójścian początkowy jest zupełnie dowolny, jeżeli, oprócz tego, położenie trójścianu ruchomego istotnie zależy, jak to założyliśmy, od trzech zmiennych niezależnych.

Punkty G i G_1 przy obracaniu się trójścianu około OU, koniecznie muszą się przemieszczać na prostej OX. W samej rzeczy, trójścian można sprowadzić do położenia nieskończenie blizkiego dowolnego w zbiorze trzechparametrowym, obracając go kolejno około osi OU, OV i OW. Pierwszy obrót zachowuje stałość punktów H, H_1, K i K_1. Dwa pozostałe obroty zachowują stałość punktów G i G'. Stąd wnioskujemy, że, o ile punkty G i G_1 zostawały stałemi podczas obrotu około osi OU, to zostaną nieruchome przy wszelkiem przemieszczeniu trójścianu, nawet przy przemieszczeniu skończonem, które zawsze można uważać, jako ciąg przemieszczeń nieskończenie małych. Lecz wtedy otrzymalibyśmy, że, niezależnie od wartości ρ, punkt A zawsze opisywałby tę samą sieć kulistą, i położenie trójścianu zależałoby tylko od dwóch parametrów.

W ten sposób otrzymujemy, że, o ile trójścian obraca się około osi OU, jego położenie jest funkcyą położenia dwóch punktów sprzężonych G i G_1 i, gdy rozpatrzymy zbiór wszystkich położeń możliwych trójścianu ruchomego, widzimy, że to położenie jest funkcyą trzech zmiennych ρ, ρ_1, ρ_2, służących odpowiednio dla ustalenia położenia punktów sprzężonych G i G_1, H i H_1, K i K_1. Gdy zmienia się tylko jedna z tych trzech zmiennych, trójścian obraca się około jednej z trzech prostych OU, OV, OW stosownie do warunków naszego zagadnienia, — i w ten sposób odwzorowanie kuliste jest ustalone w całej ogólności.

4. Przypadek, kiedy zbiór położeń trójścianu ruchomego zależy tylko od dwóch parametrów. Rozważmy teraz przypadek, kiedy trzy proste OU, OV, OW są położone w jednej płaszczyźnie (T). Prosta OU — przecięcie płaszczyzn OBC i OYZ—jest prostopadła jednocześnie do prostych OA i OX. Więc płaszczyzna OAX jest prostopadła do płaszczyzny (T). To samo stosuje się do płaszczyzn OBY i OCZ. Otóż te trzy płaszczyzny przejdą przez jednę i tę samą prostą OS, prostopadłą do płaszczyzny (T). Położenie trójścianu jest wyznaczone przez położenie prostej OS, a, ponieważ ta prosta ma kierunek dowolny, to zbiór położeń trójścianu, czyniący zadość wskazanemu warunkowi, zależy od dwóch parametrów, jak to zresztą wynika z rozważania poprzedniego. Załóżmy, że punkty K i K_1 są stałe: otrzymamy na kuli jeszcze jednę sieć kół ortogonalnych, które opisze punkt C. Płaszczyzny tych kół przejdą: jedna przez prostą (D''), równoległą do OX, i druga — przez prostą (E''), równoległą do OY. Pierwsza zawiera oprócz tego styczną do koła, która jest równoległa do OA, i druga—styczną do drugiego koła, równoległą do OB. A więc pierwsza płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny OAX, a druga — do płaszczyzny OBY. Linia przecięcia CI płaszczyzn dwóch kół jest więc równoległa do OS, a przeto również do płaszczyzny OCZ, zawierającej prostą OS. Ale płaszczyzna OCZ przechodzi przez punkt C, skąd wynika, że prosta CI jest położona w tej płaszczyźnie i spotyka oś OZ. Z uwagi, że płaszczyzna jednego z dwóch kół spotyka oś OZ w punkcie K, a druga — w punkcie K_1, wynika, że dwa punkty K i K_1 zlewają się, a ponieważ te punkty są sprzężone, to punkt, w którym się zlewają, może być tylko jednym z punktów Z_1, w którym oś OZ spotyka kulę; dwie zaś proste (D'') i (E'') w tym to punkcie są styczne do kuli.

Tak samo, punkty G i G_1 zlewają się z jednym z punktów przecięcia X_1 kuli z osią OX, a punkty H i H_1 — w jednym z punktów przecięcia Y_1 kuli z osią OY. Trzy zmienne ρ, ρ_1, ρ_2 nie mogą już służyć do ustalenia położenia tych punktów, które stały się nieruchomemi. Jeżeli ρ_2 pozostawimy niezmienne, otrzymamy na kuli sieć kół ortogonalnych, których płaszczyzny przechodzą przez jednę lub drugą ze stycznych do kuli w punkcie Z_1, równoległych do OX, albo do OY. Jeżeli będziemy zmieniali ρ_2, to ta sieć pozostanie bez zmiany, ale koło odpowiadające tejże samej wartości ρ lub ρ_1 zmienia się. Stąd wynika, że wszystkie powierzchnie jednej i tej samej rodziny mają jednakowe odwzorowanie kuliste i jeszcze to, że wszystkie powierzchnie trzech rodzin mają odwzorowania kuliste równe, lecz różnie na kuli położone. Jasnem jest, że podobne odwzorowanie istotnie zachodzi, ponieważ jest to odwzorowanie kuliste układu, utworzonego przez kule styczne w punkcie początkowym do jednej, albo do drugiej z trzech płaszczyzn spółrzędnych. Poniżej przekonamy się, że to samo odwzorowanie kuliste należy również do układów, składających się z cyklid szczególnych.

Wreszcie, nie należy pomijać przypadku szczególnie prostego, kiedy położenie trójścianu ruchomego zależy tylko od dwóch zmiennych ρ i ρ_1 i pozostaje bez zmiany, gdy się zmienia ρ_2.

5. **Powierzchnie, tworzące układ ortogonalny odwracalny, mają wszystkie linie krzywizny kołowe.** Przechodzę teraz do zbadania powierzchni, tworzących układ ortogonalny odwracalny. Z poprzednio znalezionego odwzorowania kulistego, wynika, że linie krzywizny są wszystkie płaskie. Dowiodę teraz, że są one przytem kołowe. Niech M będzie punkt jakikolwiek, przez który przechodzą trzy powierzchnie ortogonalne. Kiedy zmienia się tylko ρ, trójścian trzech normalnych $Mxyz$ obraca się około osi MT o kierunku niezmiennym, położonej w płaszczyźnie Myz, i podlega jednocześnie ruchowi przeniesienia, którego kierunek niezmiennie stanowi kierunek prostej Mx, prostopadłej do osi obrotu. Składowa tych dwóch ruchów jest ruch pojedyńczy około osi, równoległej do pierwszej, i położonej również w płaszczyźnie Myz, prostopadłej do kierunku przeniesienia. Otóż miejscem osi chwilowych w trójścianie ruchomym jest płaszczyzna Myz, i ruch wynika z toczenia się tej płaszczyzny po walcu stałym. Ruch odwrotny jest więc wyznaczony przez toczenie się tego walca po płaszczyźnie stałej. Jeżeliby układ był odwracalny, walec ten musiałby być płaszczyzną, co jest niemożliwe; a więc ruch musi zachodzić około osi niezmiennej, i trajektoryą punktu M jest koło. Ponieważ oczywiście, rzecz ma się podobnie, gdy się zmienia ρ lub ρ_2 to dochodzimy do wniosku, że *wszystkie linie krzywizny układu są kołami*. Warunek ten jest dostateczny. Jedyne powierzchnie, których wszystkie linie krzywizny są kołowe, są to cyklidy Dupina, lub powierzchnie, które z tych cyklid powstają przez zniekształcenie, jak to: kula, płaszczyzna, stożki i walce obrotowe, o ile proste będziemy uważali, jako koła o promieniu nieskończonym. Pomijając więc te układy pospolite, wnosimy, że *wszystkie układy ortogonalne odwracalne składają się z cyklid.*

ROZDZIAŁ II.

6. **Cyklidy — obwiednie kul.** Zanim przejdziemy do zadania, jak można zbudować układ ortogonalny, uważam za właściwe przypomnieć tu główne własności cyklid, jakkolwiek powierzchnie te stanowiły już przedmiot badań wielu matematyków. Wymienię tu pracę Fouché'a, który podał treściwą teoryę cyklid, uważając je, jako obwiednie kul, niezmiennie stycznych do trzech kul stałych (por. „Nouvelles Annales de Mathématiques" za czerwiec, sierpień i wrzesień 1892 r.). Zamierzam tu wyprowadzić główne własności cyklid, wychodząc tylko z tej prawdy, że wszystkie linie krzywizny są kołowe. Najprzód zważmy, że podobna powierzchnia istotnie istnieje, gdyż otrzymujemy ją przez inwersyę ze stożka obrotowego względem dowolnego punktu w przestrzeni, jako bieguna. Wiemy już z powyższego, że odwzorowanie kuliste linij krzywizny składa się z kół ortogonalnych, których płaszczyzny przechodzą przez jednę lub drugą z dwóch prostych sprzężonych. Te proste sprzężone mogą przecinać wspólną do nich prostopadłą w dwóch różnych punktach, albo również dobrze — być stycznemi w jednym i tym samym punkcie kuli. Lecz oto uwagi ogólne, dotyczące dwóch przypadków. Płaszczyzna kołowej linii krzywizny przecina powierzchnię pod kątem stałym, a więc przez każde koło krzywizny może przechodzić kula, opisana na powierzchni. Powierzchnia jest obwiednią wszystkich powierzchni tych kul, które przechodzą przez linie krzywizny jednej i tej samej rodzrny. Ponieważ istnieją dwie rodziny linij krzywizny, przeto cyklida jest obwiednią wspólną dwóch rodzin kul. Wynika stąd, że dwie kule, należące do dwóch rodzin różnych, są stycz-

ne w punkcie cyklidy, przez który przechodzą dwie odpowiednie linie krzywizny, i że każda kula jednej rodziny jest styczna do wszystkich kul drugiej rodziny. Potrzeba trzech kul dla wyznaczenia rodziny kul do nich stycznych; lecz nadto, należy z pomiędzy środków podobieństwa tych trzech kul wybrać trzy z tych środków, leżące w linii prostej w ten sposób, aby punkty styczności kuli ruchomej z dwiema z kul stałych były antihomologiczne względem jednego ze środków. Ponieważ istnieją cztery osie podobieństwa, otrzymujemy przeto cztery rodziny kul stycznych do trzech kul danych. Należy ograniczyć się do jednej z nich. Uważajmy styczność wewnętrzną za dodatnią, styczność zaś zewnętrzną za ujemną. Jeżeli wyobrazimy sobie wszystkie kule styczne do dwóch kul stałych, to, ponieważ punkty styczności są antihomologiczne względem środka podobieństwa S, dwie styczności będą jednego rodzaju lub rodzajów różnych, zależnie od tego, czy punkt S będzie środkiem podobieństwa prostego lub odwrotnego. Inaczej mówiąc, iloczyn dwóch styczności pozostaje bez zmiany, gdy zachowujemy środek podobieństwa. Otóż, w przypadku rozważanej rodziny kul stycznych do trzech kul stałych iloczyny styczności, wziętych po dwie, pozostają bez zmiany; to znaczy, że jedna ze styczności nie może zmienić rodzaju, gdy nie zmieniają go dwie inne. A więc ostatecznie: cyklida jest obwiednią kul stycznych do trzech kul stałych, przyczem trzy styczności są jednego rodzaju, albo zmieniają rodzaj jednocześnie.

7. Punkty stożkowe, płaszczyzny opisane, płaszczyzny symetryi. Trzy kule stałe przecinają się w dwóch punktach rzeczywistych albo urojonych, które są kulami o promieniu równym zeru, pierwszej rodziny, i powinny przeto znajdować się na wszystkich kulach drugiej rodziny, do której należą trzy kule stałe. Oprócz tego, pomiędzy kulami pierwszej rodziny występują dwie płaszczyzny rzeczywiste lub urojone, styczne do trzech kul pierwotnych. Wszystkie kule drugiej rodziny muszą być styczne do tych dwóch płaszczyzn. Uważając powierzchnię, jako obwiednię kul drugiej rodziny, widzimy, że cyklida jest obwiednią kul, przechodzących przez dwa punkty stałe i stycznych do płaszczyzny stałej. Kule te są więc również styczne do płaszczyzny symetrycznej z pierwszą, względem płaszczyzny prostopadłej do prostej, łączącej dwa punkty stałe, w środku tej prostej.

Charakterystyczną osobliwością tych kul są koła cyklidy, przechodzące przez dwa punkty stałe i które dotykają każdej z dwóch płaszczyzn stałych na kole cyklidy, znajdującem się w tej płaszczyźnie. A więc: cyklida jest miejscem kół, przechodzących przez dwa punkty stałe i stycznych do dwóch płaszczyzn stałych, symetrycznych względem płaszczyzny prostopadłej do prostej, łączącej dwa punkty stałe, w środku tej prostej. Oczywistem jest, że w pewnych przypadkach szczególnych dwa punkty stałe mogą się zlewać również, jak i dwie stałe płaszczyzny.

Punkty stałe są punktami stożkowemi cyklidy, płaszczyzny stałe są płaszczyznami opisanemi. Ponieważ każda rodzina kul zawiera dwie kule o promieniu zero i dwie płaszczyzny, to cyklida posiada cztery punkty stożkowe i cztery płaszczyzny opisane, rzeczywiste lub urojone, różne lub zlewające się. Będziemy nazywali osią pierwiastną cyklidy każdą z prostych, łączących dwa punkty stożkowe jednej i tej samej rodziny. Pomiędzy kulami drugiej rodziny, które przechodzą wszystkie przez te dwa punkty, znajdują się dwie płaszczyzny opisane tej rodziny, skąd wynika, że każda z dwóch osi pierwiastnych jest to prosta przecięcia się dwóch płaszczyzn opisanych jednej i tej samej rodziny. Są one do siebie prostopadłe i równoległe do dwóch prostych stałych, przez które przechodzą płaszczyzny kół odwzorowania kulistego.

Stąd bezpośrednio otrzymujemy, że cyklida posiada dwie płaszczyzny symetryi, z których każda przechodzi przez jedną z osi pierwiastnych i jest prostopadła do drugiej w środku odległości dwóch punktów stożkowych, położonych na tej drugiej płaszczyźnie. Każda z tych płaszczyzn zawiera środki wszystkich kul, przechodzących przez punkty stożkowe, których te płaszczyzny nie zawierają.

8. Cyklida jest powierzchnią analagmatyczną. Stożek stycznych w punkcie stożkowym. Miejsce środków kul jednej i tej samej rodziny. Inwersya przekształca cyklidę na inną cyklidę, ponieważ kołowe linie krzywizny przekształcają się na inne koła. Jeżeli biegun inwersyi znajduje się na jednej z osi pierwiastnych i moduł inwersyi jest odpowiednio obrany, wtedy wszystkie kule, przechodzące przez punkty stożkowe, położone na tej osi, przekształcają się same na siebie — i cyklida się odtwarza. Jest to powierzchnia analagmatyczna. Jeżeli biegun inwersyi jest w jednym z punktów stożkowych, to wszystkie kule, przechodzące przez ten punkt, przekształcają się na płaszczyzny, przechodzące przez przekształcony drugi punkt stożkowy, położony na tej samej osi pierwiastnej, a ponieważ wszystkie te płaszczyzny muszą być styczne do kuli drugiej rodziny, to one owijają stożek obrotowy, który jest przekształceniem przez inwersyę cyklidy. Stożek ten staje się walcem, jeżeli dwa punkty stożkowe zlewają się. Wynika stąd: stożek stycznych w każdym punkcie stożkowym jest stożkiem obrotowym, ponieważ koła, przechodzące przez punkty stożkowe, przekształcają się na tworzące stożka, tworzące kąt stały z osią pierwiastną.

Twierdzenie to wynika również z tego faktu, że stożek, opisany wzdłuż koła krzywizny, jest obrotowy. Przy przejściu do granicy stożek ten staje się stożkiem stycznych. Z powyższego wynika jeszcze, że każda cyklida jest powierzchnią odwrotną względem stożka lub walca obrotowego. Przetnijmy cyklidę jedną z jej płaszczyzn symetryi (P). Kule, których środki są położone w tej płaszczyźnie, przetną się według kół wielkich (C). Uważajmy trzy z tych wielkich kół. W płaszczyźnie (P) znajdują się dwa koła (ω) i (ω'), styczne do tych trzech kół, z zastrzeżeniem warunków styczności. Są to koła wielkie dwóch kul stycznych do trzech kul, mających za koła wielkie koła obrane (C). Kule te należą zatem do drugiej rodziny i są styczne do wszystkich kul pierwszej rodziny. Wszystkie tedy koła (C) są styczne do kół (ω) i (ω'), a miejsce ich środków, to jest miejsce środków kul pierwszej rodziny, jest stożkową, posiadającą ogniska w środkach kół (ω) i (ω'). Stąd wnioskujemy, że *cyklida jest obwiednią kul, mających swój środek w płaszczyźnie stałej i stycznych do dwóch kół stałych, poprowadzonych na tej płaszczyźnie.* — zawsze z temi samemi zastrzeżeniami co do rodzaju styczności. Jest również oczywiste, że jedno z kół może się sprowadzać do prostej lub do punktu.

Nadto dwie stożkowe, z których każda stanowi miejsce środków kul jednej z dwóch rodzin, są ogniskowemi jedna drugiej. Istotnie, każda kula S jednej z rodzin dotyka wszystkich kul drugiej rodziny w punktach, znajdujących się na kole, według którego kula (S) dotyka swojej obwiedniej. Proste, łączące środek kuli (S) ze środkami wszystkich kul drugiej rodziny, przechodzą przez punkty styczności i tworzą stożek obrotowy. Miejscem środków (S) jest więc miejsce wierzchołków stożków obrotowych, przechodzących przez stożkową, miejsce środków kul drugiej rodziny, t. j., ogniskową tej stożkowej.

9. Cyklida czwartego rzędu. Posiada ona dwie płaszczyzny opisane rzeczywiste i dwie urojone. Powróćmy do odwzorowania kulistego, składającego się z kół, których płaszczyzny przechodzą przez proste (D'') i (E''), i załóżmy, że te dwie proste przecinają swoją wspólną prostopadłą w dwóch punktach różnych. Każda płaszczyzna, opisana na cyklidzie, musi odpowiadać płaszczyźnie stycznej do kuli, ponieważ we wszystkich punktach styczności normalne są równoległe. Otóż, z dwóch prostych sprzężonych (D'') i (E'') jedna przecina kulę, a druga jest zewnątrz tej kuli. Można więc poprowadzić przez te proste do kuli dwie płaszczyzny styczne rzeczywiste i dwie inne urojone. Z drugiej strony, jeżeli kierunek płaszczyzny opisanej jest rzeczywisty, to ta płaszczyzna jest również rzeczywista, ponieważ musi przechodzić przez jednę z osi pierwiastnych powierzchni, które są obie rzeczywiste. Udowodniliśmy więc, że z pośród czterech płaszczyzn, opisanych na cyklidzie, zawsze dwie są rzeczywiste i dwie urojone.

10. Różne kształty cyklid czwartego rzędu. Możemy teraz przejść do rozpatrzenia różnych kształtów, jakie może przybierać cyklida.

Najprzód, jeżeli jedna z prostych (D'') lub (E'') odsuwa się w nieskończoność, to druga przechodzi przez środek kuli, odwzorowanie kuliste składa się z południków i równoleżników — i powierzchnia jest *pierścieniem kołowym*.

W przypadku ogólnym niech będą (P) i (Q) dwie płaszczyzny opisane rzeczywiste, przecinające się według osi pierwiastnej (R). Druga oś pierwiastna (T) jest prostopadła do osi (R). Przyjmijmy, że nie przecina osi (R). Przecina ona płaszczyzny (P) i (Q) w dwóch punktach A i B. Jeżeli punkty stożkowe, położone na osi (T), są A i B, wtedy cyklida sprowadza się do kuli stycznej do (P) i do (Q) w punktach A i B. Gdyby punkty stożkowe były zewnątrz odcinka AB, to wszystkie kule styczne do (P) i do (Q) byłyby urojone, i sama cyklida byłaby również urojona. Załóżmy więc teraz, że punkty stożkowe znajdują się między A i B. Miejscem punktów styczności płaszczyzny (P) z kulami, których obwiednią jest cyklida, jest koło o środku A. Gdy promień ρ tego koła jest dostatecznie mały, kule styczne do (P) przecinają prostą AB w dwóch punktach rzeczywistych, i cyklida ma kształt ściśniętego z jednej strony pierścienia kołowego z punktami stożkowemi rzeczywistemi. Gdy promień ρ rośnie, punkty A i B zbliżają się, i jak tylko koło o promieniu ρ stanie się stycznem do osi pierwiastnej (R), te dwa punkty stożkowe zlewają się w środku prostej AB. Wówczas cyklida jest analogiczna z pierścieniem kołowym, utworzonym przez koło, obracające się około jednej ze swoich stycznych.

Gdy promień ρ rośnie dalej, pozostając mniejszym od odległości punktu A od osi pierwiastnej (R), punkty stożkowe stają się urojone, i cyklida ma kształt pierścienia, cieńszego z jednej strony, niż z drugiej. Gdy koło o środku A staje się stycznem do osi pierwiastnej (R), zmniejszenie grubości pierścienia staje się takiem, że w punkcie styczności ta grubość sprowadza się do zera. Cyklida ma kształt wrzeciona, zagiętego wzdłuż swojej osi, tak że punkty końcowe się schodzą.

Kiedy wreszcie koło o środku A przecina oś pierwiastną (R), punkty stożkowe występują w rodzinie kul, posiadających tę oś pierwiastną, i cyklida ma kształt dwóch wrzecion zagiętych jedno i drugie tak, że ich punkty końcowe się schodzą.

Dodajmy jeszcze, że dwie osie pierwiastne przecinają się w punkcie, w którym zlewają się wówczas punkty A i B. Koło o środku A jest złożone z dwóch części równych, rozdzielonych przez oś pierwiastną (R); dwa wrzeciona zagięte są równe, i cyklida przybiera trzecią płaszczyznę symetryi, która jest płaszczyzną prostych (R) i (T).

11. O cyklidach rzędu trzeciego. Powierzchnie, któreśmy dotychczas badali, są to powierzchnie rzędu czwartego, ponieważ płaszczyzny, przechodzące przez jednę z osi pierwiastnych, przecinają je wzdłuż dwóch kół. Rozważmy teraz przypadek, kiedy odwzorowanie kuliste składa się z kół, których płaszczyzny przechodzą przez jednę lub drugą z dwóch prostych (D) i (E), prostokątnych i stycznych w jednym i tym samym punkcie kuli. Wtenczas dwie płaszczyzny opisane jednej i tej samej rodziny przystają do siebie, jak i dwie płaszczyzny styczne do kuli, poprowadzone przez prostą (D). W każdej rodzinie jest płaszczyzna opisana, i te dwie płaszczyzny są równoległe. Dwie osie pierwiastne (R) i (T), odpowiednio równoległe do (D) i do (E), są to dwie proste prostopadłe do siebie i położone każda w jednej z płaszczyzn opisanych, naprzykład, oś (R) w płaszczyźnie (P),

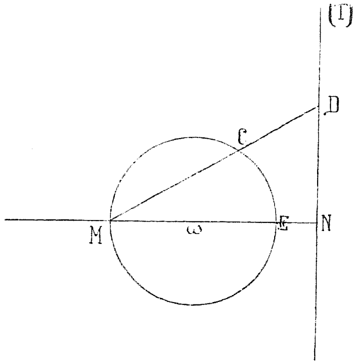

Fig. 1.

i oś (T) w płaszczyźnie (Q). Kule (S) przecinają oś pierwiastną (R) w dwóch punktach A i B i są styczne do płaszczyzny (Q). Miejscem ich punktów styczności jest linia przecięcia tej płaszczyzny z płaszczyzną, prostopadłą do osi (R) w środku prostej AB. Między temi kulami są dwie kule o promieniu zero, których środki są koniecznie położone na linii miejsca punktów styczności. Wynika stąd, że to miejsce jest osią pierwiastną (T). W ten sposób, każda z dwóch płaszczyzn opisanych dotyka cyklidy według osi pierwiastnej. Płaszczyzny symetryi są to płaszczyzny, przechodzące przez jednę z osi pierwiastnych i prostopadłe do drugiej osi.

Niech będzie MN prostopadła wspólna (Fig. 1) do dwóch osi pierwiastnych, [M na (R) i N na (T)]. Z pośród wszystkich kul (Σ), posiadających oś pierwiastną (T), jest jedna, mająca swój środek ω na prostej MN i przechodząca przez punkt M, w którym jest ona styczna do osi (R). Kula ta przecina według koła wielkiego płaszczyznę (V), przechodzącą przez prostą MN i przez oś (T) i którą obraliśmy za płaszczyznę figury. Kule (S) są podówczas kulami, mającemi swój środek w płaszczyźnie (V) i są styczne

jednocześnie do prostej (T) i do koła (ω), przyczem styczność z tem kołem pozostaje tego samego rodzaju o tyle, o ile kula pozostaje z jednej i tej samej strony płaszczyzny opisanej, przechodzącej przez oś (T), zmienia zaś rodzaj wtedy, kiedy kula przechodzi z drugiej strony płaszczyzny. Kule te muszą zawierać, jako przypadek graniczny, płaszczyznę prostopadłą do (V), przechodzącą przez (R). Miejscem środków tych kul jest parabola, mająca za ognisko ω i za kierownicę prostą równoległą do osi (T). Miejscem środków kul drugiej rodziny jest parabola ogniskowa pierwszej paraboli.

Niech będzie jedna z tych kul rodziny (S). Jest ona styczna do koła (ω) i do prostej (T) w dwóch punktach C i D, które, na mocy znanej własności elementarnej, są położone w jednej prostej z punktem M. Rozważana kula dotyka więc cyklidy według koła o średnicy CD, położonego na płaszczyźnie prostopadłej do (V), płaszczyźnie, istotnie zawierającej, jak to powinno być, oś pierwiastną (R), której spodek jest w punkcie M. Cyklida jest więc miejscem tych kół CD, które się otrzymują przez obrót prostej około punktu M. Powierzchnie, w ten sposób otrzymane, są rzędu trzeciego. Każda z nich jest w zupełności wyznaczona przez prostą (T) i koło (ω), które jest położone w jednej i tej samej płaszczyźnie, ze wskazaniem tego z dwóch końców średnicy koła (ω) prostopadłej do osi (T), który winien odgrywać rolę środka obrotu.

12. **Różne kształty cyklid rzędu trzeciego**. Załóżmy z początku, że koło (ω) nie przecina prostej (T) i że za środek obrotu jest obrany punkt koła, najbardziej odległy od prostej (T) (fig 1). Powierzchnia jest wówczas całkowicie zawarta pomiędzy dwiema płaszczyznami opisanemi, przechodzącemi przez punkty M i N. Ta powierzchnia ma kształt trąby podwójnej, mającej swoją część najwęższą wzdłuż koła o średnicy EN, zawartego w płaszczyźnie prostopadłej do (T), pomiędzy (ω) i (T), i rozszerzającej się z obu stron nieograniczenie. Możnaby jeszcze uważać tę powierzchnię, jako utworzoną przez koła drugiej rodziny, znajdujące się w płaszczyznach, przechodzących przez oś (T). Punkt M będzie zastąpiony przez punkt N, koło (ω) — przez koło o średnicy EN w płaszczyźnie, prostopadłej do (V), i prosta (T) — przez prostą (R). Tym sposobem znajdujemy powierzchnię, mającą kształt trąby podwójnej z częścią najwęższą wzdłuż koła (ω) i rozszerzającą się nieograniczenie z każdej strony płaszczyzny (V). Powierzchnia ta zawiera dwie proste (T) i (R).

Jeżeli koło (ω) jest styczne do prostej (T), to powierzchnia, mająca kształt trąby podwójnej, skurcza się w swojej najwęższej części tak, iż ta część w końcu staje się punktem stożkowym N. Jeżeli zaś rozpatrzymy koła tej samej rodziny, co i koło (ω), przekonamy się, że są one wszystkie styczne do prostej (T) w punkcie N. Stożek stycznych w punkcie stożkowym sprowadza się do tej prostej. Przypadek ten jest równoznaczny przypadkowi, w którym koło (ω) sprowadza się do punktu.

Jeżeli koło (ω) przecina prostą (T) w dwóch punktach A i B (fig. 2), powierzchnia zawierać będzie dwie części, mające kształt trąb, wychodzących z punktów stożkowych A i B, i prócz tego z części, mającej kształt wrzeciona, wgiętego wewnątrz kuli (ω) z drugiej strony (T).

Zakładając teraz, że koło (ω) nie przecina prostej (T), obierzmy za spo-

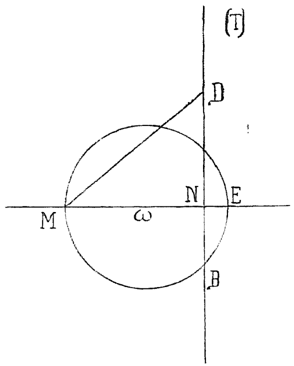

Fig. 2.

dek prostej (R) punkt, najbliżej położony prostej (T); niech to będzie punkt E (fig. 1). Wówczas, jeżeli rozpatrzymy koła drugiej rodziny, zajdzie potrzeba zastąpienia koła (ω) kołem o średnicy MN w płaszczyźnie prostopadłej do (V). Ponieważ ta ostatnia przecina oś pierwiastną (R), której spodkiem jest punkt E, cyklida będzie miała kształt, jak w przypadku poprzednim, — i dyskusya jest wyczerpana.

Wreszcie, jeżeli dwie płaszczyzny opisane przystają do siebie, cyklida sprowadza się do kuli, mającej przy sobie płaszczyznę dwóch osi pierwiastnych, jak to widzimy na figurze 2, zbliżając do siebie nieograniczenie punkty M i N.

13. Przekroje płaskie cyklid. Zajmiemy się teraz przekrojami płaskiemi cyklid. Wszystkie kule jednej i tej samej rodziny, będąc opisane na powierzchni, przecinają płaszczyznę sieczną (P) wzdłuż kół, stycznych do przecięcia płaskiego. Krzywe te są więc obwiednią wspólną dwu rodzin kół. Niech będzie A punkt, w którym jedna z osi pierwiastnych cyklidy przecina płaszczyznę sieczną (P). Punkt ten ma jednakową potęgę względem wszystkich kół odpowiednich, położonych w płaszczyźnie (P). Jeżeli ten punkt A obierzemy za biegun inwersyi o modulu równym potędze tego punktu, to koła nie

ulegną zmianie, i wskutek tego ich obwiednia również nie zmieni się. Ponieważ mamy dwie osie pierwiastne, to znaczy, że przekroje płaskie cyklid są krzywemi podwójnie analagmatycznemi.

Cyklida, będąc miejscem kół, zawiera również koło w nieskończoności. W cyklidach rzędu czwartego koło to jest linią podwójną powierzchni, ponieważ każda płaszczyzna, przechodząca przez jedną z osi pierwiastnych, zawiera dwa koła krzywizny, przecinające się w dwóch punktach cyklicznych tej płaszczyzny. Otóż widzimy, że wszystkie przekroje płaskie posiadają jako punkty podwójne punkty cykliczne płaszczyzny siecznej. W cyklidach rzędu trzeciego koło w nieskończoności jest linią pojedyńczą powierzchni, ponieważ każda płaszczyzna, przechodząca przez jedną z osi pierwiastnych, zawiera tylko jedno koło krzywizny; ale powierzchnia w nieskończoności przecina powierzchnię ponad to według prostej, położonej w płaszczyznach równoległych do płaszczyzn opisanych. Więc przekrój, dokonany przez płaszczyznę (P), ma za asymptoty dwie proste izotropowe płaszczyzny (P) i jedną równoległą do linii przecięcia płaszczyzny (P) z jedną z płaszczyzn opisanych. Punkty A i B, w których płaszczyzna sieczna przecina dwie osie pierwiastne, stanowią część przekroju; styczna w tych punktach jest położona w odpowiedniej płaszczyźnie opisanej, i wobec tego, jest równoległa do asymptoty.

Powróćmy do przypadku ogólnego: jeżeli płaszczyzna sieczna jest styczna w punkcie M do powierzchni, wtedy punkt M jest punktem podwójnym linii przecięcia, który, w ten sposób, przedstawia wraz z punktami cyklicznemi trzy punkty podwójne. Przekrój jest więc jednobieżny. Wniosek ten utrzymuje się w przypadku cyklid trzeciego rzędu. Kiedy wreszcie płaszczyzna jest podwójnie styczna do cyklidy, wówczas mamy cztery punkty podwójne na przekroju. Ten ostatni musi więc rozpadać się na dwie stożkowe, które są koniecznie kołami, ponieważ te stożkowe, jedna i druga, przechodzą przez punkty cykliczne. Wreszcie, inwersya wykazuje, że, tak samo, każda kula podwójnie styczna do cyklidy przecina się z nią według dwóch kół. Pozostałą część przecięcia stanowi koło w nieskończoności, uważane jako linia podwójna. W przypadku szczególnym, każda kula, przechodząca przez dwa punkty stożkowe, przecina cyklidę według dwóch kół.

Co się tyczy cyklid rzędu trzeciego, to zauważmy, że płaszczyzny, równoległe do płaszczyzn opisanych, przecinają powierzchnię według prostej w nieskończoności i według stożkowej; ta ostatnia, o ile jest rzeczywista, jest zawsze hyperbolą, jeżeli cyklida nie ma punktów stożkowych rzeczywistych (fig. 1). Jeżeli punkty stożkowe są rzeczywiste, przekrój jest hyperbolą, gdy płaszczyzna sieczna przechodzi między punktami M i N (fig. 2), — elipsą, jeżeli płaszczyzna sieczna jest położona z drugiej strony prostej (T). Jeżeli płaszczyzna sieczna przechodzi przez punkt E, to, ponieważ środek stożkowej znajduje się właśnie w tym punkcie E, stożkowa sprowadza się do dwóch prostych, które są rzeczywiste w przypadku figury 1 i urojone w przypadku figury 2. Przekonamy się zaraz, że, wyłączając osie pierwiastne, proste izotropowe i prostą w nieskończoności w płaszczyźnie równoległej do dwóch osi pierwiastnych, — powyższe dwie proste (do których sprowadza się stożkowa) są jedynemi prostemi, znajdującemi się na powierzchni. Istotnie, jeżeli cyklida zawiera prostą (D), to zawierać będzie również i prostą (D'), symetryczną z prostą (D) względem płaszczyzny (V) figury 1. Wówczas płaszczyzna (W) dwóch prostych (D) i (D') przetnie cyklidę według trzeciej prostej, która zawierać będzie punkty cykliczne płaszczyzny (W). Będzie to więc prosta w nieskończoności. Ale powierzchnia nie zawiera żadnej innej prostej w nieskończoności, ponad tę, która jest położona w płaszczyźnie równoległej do dwóch osi pierwiastnych. Więc płaszczyzna (W) jest równoległa do dwóch osi pierwiastnych, i dwie proste (D) i (D') są rzeczywiście takie, jak to wyżej powiedzieliśmy. Płaszczyzny podwójnie styczne do cyklidy są to płaszczyzny, przechodzące przez jednę lub drugą z tych prostych. Płaszczyzny te przecinają cyklidę według koła, oprócz tej prostej. Wreszcie kula podwójnie styczna przecina cyklidę według dwóch kół; pozostała część przecięcia jest kołem w nieskończoności.

ROZDZIAŁ III.

14. Układ ortogonalny. Symetrya względem trzech płaszczyzn prostokątnych. Przechodzimy teraz do budowy układu odwracalnego potrójnie ortogonalnego. Będę zajmował się tylko układami rzeczywistemi. Rozważajmy z początku układy, składające się z cykiid rzędu czwartego, innemi słowy, te układy, które odpowiadają przypadkowi ogólnemu odwzorowania kulistego. Wiemy już z własności tego odwzorowania kulistego, że każda cyklida układu ma swoje dwie osie pierwiastne równoległe do dwóch z osi spółrzędnych, i wobec tego — swoje dwie płaszczyzny symetryi równoległe do dwóch płaszczyzn spółrzędnych.

Niech będzie (X) jedna z płaszczyzn symetryi cyklidy i (C) jedno z kół krzywizny tej cyklidy, którego płaszczyzna, prostopadła do (X), może nie być w założeniu równoległa do żadnej z płaszczyzn spółrzędnych. Przez koło (C) przechodzi cyklida drugiej rodziny, której jedna z płaszczyzn symetryi musi przechodzić przez oś koła (C), położoną w płaszczyźnie (X). Na mocy założenia ta oś nie jest równoległa do żadnej z płaszczyzn spółrzędnych, różnej od tej, która jest równoległa do (X). Więc płaszczyzna symetryi drugiej cyklidy jest również płaszczyzną (X). To samo zachodzi dla wszystkich innych cyklid drugiej rodziny.

Przekonamy się tak samo, że druga płaszczyzna symetryi pierwszej cy-

klidy również będzie płaszczyzną wspólną symetryi wszystkim cyklidom trzeciej rodziny. Stąd łatwo wnosimy, że:

Płaszczyzny symetryi wszystkich cyklid sprowadzają się do trzech płaszczyzn prostokątnych. Wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny są symetryczne względem dwóch z tych trzech płaszczyzn stałych. Każda z tych trzech płaszczyzn jest płaszczyzną symetryi, wspólną wszystkim cyklidom dwóch rodzin.

Obierzmy te trzy płaszczyzny za płaszczyzny spółrzędnych. Ponieważ istnieją dwie rodziny powierzchni symetrycznych względem płaszczyzny OXY, to zbiór całego układu jest symetryczny względem tej płaszczyzny, i ponieważ dla powierzchni trzeciej rodziny płaszczyzna ta nie jest płaszczyzną symetryi, przeto jest konieczne, by te powierzchnie były parami symetryczne względem tej płaszczyzny.

15. Dwanaście pierścieni kołowych: sześć rzeczywistych i sześć urojonych. Odwzorowanie kuliste jednej z cyklid składa się z kół, których płaszczyzny przechodzą przez dwie proste prostokątne (D'') i (E''). Jeżeli jedna z tych prostych jest odsunięta w nieskończoność, odpowiednia cyklida jest pierścieniem kołowym. Każdemu położeniu prostych (D'') i (E'') odpowiadają dwie cyklidy równe i symetryczne względem płaszczyzny OXY; ponieważ każda z dwóch prostych (D'') i (E'') może być odsunięta w nieskończoność, to każda rodzina zawiera cztery pierścienie kołowe, parami symetryczne względem jednej z płaszczyzn spółrzędnych. Wykażemy, że z tych czterech pierścieni kołowych dwa są rzeczywiste i dwa urojone.

Uważajmy cyklidę symetryczną względem płaszczyzny OXY i załóżmy, że płaszczyzna dwóch osi pierwiastnych (R), przez które przechodzą dwie płaszczyzny opisane rzeczywiste, znajduje się w płaszczyźnie OXY i jest równoległa do OY. Te dwie płaszczyzny dotykają cyklidy według kół, przez każde z których przechodzi cyklida drugiej rodziny. Ale ta druga cyklida musi być normalna do płaszczyzny (P), opisanej na pierwszej cyklidzie. Więc kula, która przechodzi przez koło, położone w płaszczyźnie (P) i jest opisana na drugiej cyklidzie, musi mieć swój środek w płaszczyźnie (P), i rozpatrywane koło jest to koło wielkie tej kuli. Jeżeli teraz uprzytomnimy sobie to, co było powiedziane w §§ 7 i 8 o tworzeniu się cyklid, przekonamy się, że dlatego, aby kula dotykała cyklidy według koła wielkiego, jest konieczne, by płaszczyzna tego koła wielkiego była płaszczyzną symetryi cyklidy. Otóż płaszczyzna (P) jest to płaszczyzna symetryi drugiej cyklidy, a ponieważ płaszczyzna ta nie jest równoległa do żadnej z płaszczyzn spółrzędnych, przeto jest konieczne, aby ta druga cyklida była pierścieniem kołowym, utworzonym przez obrót koła, położonego w płaszczyźnie (P) około prostej, położonej w tej samej płaszczyźnie i równoległej do jednej z osi spółrzędnych, innemi słowy — około prostej, równoległej do prostej (R), która sama jest równoległa do OY. Oprócz tego, ponieważ ta oś pierścienia kołowego znajduje się w jednej z płaszczyzn spółrzędnych, przeto będzie ona linią przecięcia płaszczyzny opisanej (P) z płaszczyzną OYZ. Druga płaszczyzna opisana (Q) daje początek drugiemu pierścieniowi kołowemu symetrycznemu z pierwszym względem płaszczyzny OXY.

W ten sposób otrzymujemy: miejsce kół styczności płaszczyzn opisanych na cyklidach jednej i tej samej rodziny składa się z dwóch pierścieni kołowych symetrycznych, dla których te koła są liniami południkowemi. Wnosimy stąd, że wszystkie te koła są sobie równe.

Płaszczyzny opisane urojone na pierwszej cyklidzie dadzą początek, zupełnie w ten sam sposób, dwóm pierścieniom kołowym, należącym do trzeciej rodziny cyklid, skąd więc wynika, że każda rodzina cyklid posiada dwa pierścienie kołowe rzeczywiste i dwa urojone.

16. Budowa układu ortogonalnego. Budowa układu ortogonalnego nie przedstawia teraz żadnej trudności. Uważajmy dwa równe pierścienie kołowe,

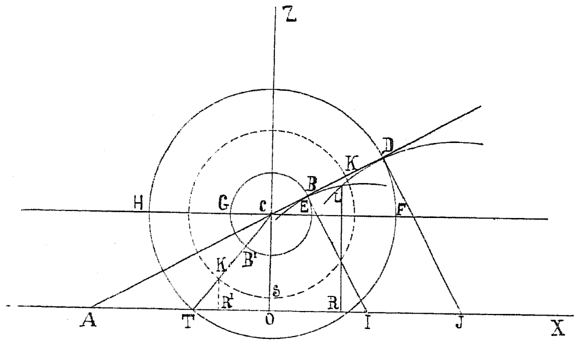

Fig. 3.

mające swe środki C i C' na osi OZ, osie równoległe do OY i symetryczne względem punktu początkowego. Połączmy punkty C i C' z punktem A osi OX. Przez A poprowadźmy linię równoległą (R) do osi OY i uważajmy dwie płaszczyzny (P) i (P'), przechodzące przez (R) i C i C', które przecinają pierścienie kołowe według kół BD i $B'D'$. Cyklida drugiej rodziny będzie obwiednią kul, dotykających dwóch płaszczyzn P i P' wzdłuż kół BD i BD' (fig. 3, na której jest przedstawiony tylko jeden z dwóch pierścieni ko-

łowych, rzucony na płaszczyznę OXZ). Druga rodzina składa się ze wszystkich cyklid, które otrzymują się przez nadanie promieniowi CBD obrotu zupełnego. Z pośród tych cyklid występują dwa pierścienie kołowe, które otrzymujemy, odsuwając punkt A w nieskończoność. Te ostatnie są symetryczne względem płaszczyzny OZY i posiadają jako koła stateczne dwa koła o średnicach EF i $E'F'$, albo GH, $G'H'$, których płaszczyzny są równoległe do płaszczyzny OXY.

Trzecia para pierścieni kołowych otrzymuje się przez obrót każdego z kół statecznych pierwszego pierścienia kołowego około śladu swojej płaszczyzny na płaszczyźnie OXY, śladu, który jest równoległy do osi X; dwie inne rodziny cyklid wywodzą się z tych dwóch par pierścieni kołowych tak samo, jak druga rodzina otrzymana była z dwóch pierścieni kołowych pierwotnych.

17. Układ w ten sposób wyznaczony jest rzeczywiście ortogonalny. Pozostaje wykazać, że cyklidy w ten sposób otrzymane, istotnie przecinają się pod kątem prostym.

Cyklida, rozpatrywana na początku i mająca za płaszczyzny symetryi płaszczyzny OXZ i OXY, przecinała według koła BD pierścień kołowy (C), którego oś jest równoległa do OY. W płaszczyźnie OXZ prowadzimy styczne w punktach B i D do kół o promieniach CB i CD, które to styczne przecinają oś OX odpowiednio w punktach I i J; z tych dwóch punktów, jako ze środków, zakreślamy koła o promieniu IB i JD. Te koła należą do cyklidy omawianej i przecinają się w dwóch punktach L i L', które są dwoma punktami stożkowemi tej cyklidy. Przez prostą LL' przechodzi płaszczyzna, równoległa do płaszczyzny OYZ, przecinająca cyklidę według dwóch kół (S) i (S'). Każde z tych kół przecina pod kątem prostym koło BD w punkcie, którego rzut jest w środku K odcinka BD i który, wobec tego, znajduje się na kole statecznem pierścienia kołowego (C). Oprócz tego, punkty przecięcia koła (S) z kołami BD i $B'D'$ są końcami średnicy koła (S), ponieważ linie styczne w tych punktach do (S), położone w płaszczyznach (P) i (Q), są równoległe do osi OY. Więc koło (S), które ma za oś prostą, równoległą do OX, położoną na przecięciu płaszczyzny OXY z płaszczyzną stateczną pierścienia kołowego (C), jest równoleżnikiem pierścienia kołowego, mającego za oś tę samą prostą, równoległą do OX, pierścienia, należącego do trzeciej rodziny.

Oprócz tego, wykażemy, że cyklida przecina ten pierścień kołowy pod kątem prostym. W samej rzeczy, kąt dwóch powierzchni pozostaje niezmiennym wzdłuż całego koła przecięcia, które jest wspólną linią krzywizny; w punkcie zaś, którego rzutem jest punkt K, płaszczyzną styczną do cyklidy jest płaszczyzna (P), która jest normalną do drugiego pierścienia kołowego, ponieważ ona jest normalną do koła statecznego pierwszego pierścienia, które to koło jest linią południkową drugiego.

Zupełnie tak samo, koło (S') jest równoleżnikiem drugiego pierścienia trzeciej rodziny.

Wnosimy stąd, że każda z cyklid, wyznaczona, jak to wyżej było wyłożone, przecina ortogonalnie każdy z pierścieni kołowych rodziny, do której ta cyklida nie należy, według linii południkowej, i każdy z pierścieni kołowych trzeciej rodziny—według równoleżnika. Niech będą teraz dwie cyklidy, należące do dwóch różnych rodzin. Te cyklidy przetną jeden z pierścieni kołowych trzeciej rodziny: jedna według linii południkowej, druga według równoleżnika. W punkcie M, w którym przecinają się dwa koła, trzy powierzchnie są ortogonalne, dlatego że każda z cyklid przecina pierścień kołowy pod kątem prostym, i dwie krzywe przecięcia są do siebie prostokątne.

Pozostaje wykazać, że te cyklidy przecinają się według koła.

Dla ustalenia uwagi, załóżmy, że pierścień kołowy ma za oś prostą, równoległą do OY i środek położony na OZ, jak to pokazuje figura 3. Pierścienia tego płaszczyznami symetryi są płaszczyzny OYZ i OZX i należy on do rodziny, której osie pierwiastne są równoległe do OY i do OX. Cyklida, która przecina ten pierścień według linii południkowej, ma jednę ze swoich osi pierwiastnych równoległą do OY i położoną w płaszczyźnie OXY, a drugą — równoległą do OZ i położoną w płaszczyźnie OYZ. Cyklida, przecinająca ten pierścień kołowy według równoleżnika, jest symetryczna względem płaszczyzn OYZ i OXY. Jedna z jej osi pierwiastnych jest równoległa do OX i położona w płaszczyźnie OXY, druga jest równoległa do OZ i położona w płaszczyźnie OXZ. Pierwsza cyklida przecina pierścień kołowy według koła, którego płaszczyzna przechodzi przez oś pierwiastną, równoległą do OX (której rzut jest w A na figurze 3). Więc drugie koło cyklidy, przechodzące przez punkt M, leży na płaszczyźnie, która zawiera oś pierwiastną, równoległą do OZ. Środek tego koła jest więc położony na płaszczyźnie OXY. Tak samo, druga cyklida przecina pierścień kołowy według równoleżnika, którego płaszczyzna, równoległa do OXY według prostej, równoległej do OX, która jest jedną z osi pierwiastnych cyklidy. Więc drugie koło tej cyklidy, przechodzące przez punkt M, znajduje się w płaszczyźnie, zawierającej oś pierwiastną, równoległą do OZ. Środek tego koła jest więc również położony w płaszczyźnie OXY. W ten sposób, dwa koła muszą być styczne do normalnej pierścienia kołowego w punkcie M, położone w płaszczyźnie równoległej do OZ, przechodzącej przez tę normalną, i wreszcie muszą mieć swoje środki w płaszczyźnie OXY. Koła te zatem przystają do siebie, i dwie cyklidy przecinają się według koła, które jest linią krzywizny wspólną obu powierzchniom. Ponieważ te ostatnie są ortogonalne w punkcie M, to będą ortogonalne wzdłuż całego koła przecięcia.

18. Miejsce punktów podwójnych. Przekroje, utworzone przez płaszczyzny spółrzędnych. Zbiór całego układu jest symetryczny względem trzech płaszczyzn spółrzędnych, ponieważ cyklidy jednej i tej samej rodziny są symetryczne każda względem dwóch z tych płaszczyzn i symetryczne parami względem trzeciej. Z pośród wszystkich tych cyklid jednej i tej samej rodziny występuje płaszczyzna, względem której te cyklidy są symetryczne parami. Naprzykład, na figurze 3-ej, cyklida, wyznaczona przez koło BD, sprowadza się do płaszczyzny OYZ, jeżeli promień OBD zlewa się z osią OZ.

Cyklida, symetryczna względem płaszczyzny OXY, przecina tę płaszczyznę według dwóch kół, które przecinają się w dwóch punktach G i G', będących punktami stożkowemi tej cyklidy. Przez każde z tych kół powinna przechodzić cyklida drugiej rodziny, która to cyklida właśnie sprowadza się do płaszczyzny OXY. Punkty G i G' są to koła o promieniu równym zeru rodziny linij krzywizny, różnej od rodziny dwóch kół poprzednich. Te punkty muszą więc być również kołami o promieniu równym zeru trzeciej rodziny cyklid, skąd wnosimy, że dwie rodziny cyklid, symetrycznych względem tej samej płaszczyzny spółrzędnych, mają w tej płaszczyźnie jednakowe miejsca swoich punktów stożkowych. Z drugiej strony, cyklida drugiej rodziny musi przecinać pierwszą omawianą cyklidę według koła, należącego do tej samej rodziny, co i dwa koła, położone w płaszczyźnie OXY; ale wszystkie te koła przechodzą przez punkty G i G'; a więc wszystkie cyklidy drugiej rodziny przechodzą przez punkty G i G' i, wskutek tego — przez miejsce punktów stożkowych wszystkich cyklid dwóch innych rodzin. Odwrotnie, każdy punkt przecięcia jednej z cyklid drugiej rodziny z płaszczyzną OXY znajduje się na kole krzywizny, wspólnem tej cyklidzie i jednej z cyklid pierwszej rodziny; jest to więc jeden z punktów G lub G', przez który przechodzą wszystkie koła omawianej rodziny na cyklidzie rodziny pierwszej.

Stąd wnosimy: *wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny przecinają płaszczyznę spółrzędnych, względem której nie są symetryczne, według jednej i tej samej krzywej, która jest miejscem punktów stożkowych cyklid dwóch innych rodzin, które to punkty są położone w powyższej płaszczyźnie.*

Istnieją trzy z tych krzywych, po jednej w każdej z płaszczyzn spółrzędnych. Ponieważ każda rodzina zawiera dwa pierścienie kołowe, przeto krzywe te stanowią część krzywych rzędu czwartego, które otrzymują się w przekroju pierścienia kołowego przez płaszczyznę, równoległą do osi; są one symetryczne względem dwóch osi spółrzędnych, położonych w płaszczyźnie tych krzywych.

Darboux spostrzegł, że każda z tych krzywych jest ogniskową dwóch innych, ponieważ wszelki punkt stożkowy cyklidy, będąc kulą o promieniu równym zeru, opisaną na cyklidzie, jest ogniskiem każdego przekroju płaskiego tej powierzchni.

ROZDZIAŁ IV.

19. **Rozważanie różnych przypadków.** Mając na celu rozważanie różnych przypadków, mogących się przedstawić, zajmiemy się badaniem możliwych rozmieszczeń trzech par pierścieni kołowych i ich przecięć z płaszczyznami spółrzędnych.

Przypomnijmy sobie, że każdy pierścień kołowy przecina pierścień trzech płaszczyzn spółrzędnych, względem którego nie jest symetryczny, wzdłuż krzywej czwartego rzędu, będącej miejscem punktów stożkowych, wspólnych cyklidom dwóch innych rodzin. Kształty tych trzech krzywych wyznaczają każde z rozmieszczeń, jakie mogą się przedstawiać.

Oznaczmy przez a promień środkowy pierścienia kołowego, innemi słowy, promień koła statecznego; przez r promień koła południkowego i przez h odległość środka pierścienia kołowego od punktu początkowego. Pierścień kołowy ma punkty stożkowe rzeczywiste, jeżeli a jest mniejsze od r, i nie ma tych punktów, jeżeli a jest większe od r. Przekrój tego pierścienia przez płaszczyznę, równoległą do jego osi, położoną w odległości h od jego środka, może przedstawiać dość znaczną rozmaitość kształtów.

Niezależnie od kształtu, jaki może przybierać pierścień kołowy, przekrój bywa:

urojony, jeżeli . . . . $h > a + r$;

punktem, jeżeli . . . . $h = a + r$;

krzywą owalną bez falistości, jeżeli $a \leqq h < a + r$ i $h > r - a$.

Poza tem należy uwydatnić, czy pierścień kołowy ma punkty stożkowe rzeczywiste czy urojone, i w przypadku punktów stożkowych rzeczywistych, czy koło stateczne jest większe lub mniejsze od koła wewnętrznego równika.

Jeżeli punkty stożkowe są urojone, mamy

$$a > r,$$

i przekrój

jest: owalem falistym, jeżeli . . . . $a - r < h < a$;

„ kształtu 8, jeżeli . . . . $h = a - r$;

stanowią dwa owale rozdzielone, jeżeli . . . . . $h < a - r$.

Jeżeli punkty stożkowe są rzeczywiste i jeżeli koło stateczne jest większe od wewnętrznego koła równika, innemi słowy, jeżeli

$$a < r \quad \text{i} \quad r - a < a, \quad \text{albo} \quad a > \frac{r}{2},$$

przekrój

jest: owalem falistym, jeżeli . . . . $r - a < h < a$;

„ owalem z punktem odosobnionym w środku, jeżeli . . . . $h = r - a$;

„ owalem falistym z owalem pojedyńczym wewnątrz, jeżeli . . . . $h < r - a$;

stanowią dwa koła, przecinające się, jeżeli . . . $h = 0$.

Jeżeli, wreszcie, koło stateczne jest mniejsze od koła wewnętrznego równika, innemi słowy, jeżeli

$$a < r - a, \quad \text{albo} \quad a < \frac{r}{2},$$

przekrój

jest: owalem bez falistości z punktem odosobnionym w środku, jeżeli . . . . $h = r - a$;

„ owalem bez falistości z owalem pojedyńczym wewnątrz, jeżeli . . . . $a \leqq h < r - a$;

„ owalem falistym z owalem pojedyńczym wewnątrz, jeżeli . . . . $h < a$;

stanowią dwa koła, przecinające się, jeżeli . . . $h = 0$.

Rozpatrzmy dwa pierścienie kołowe, których osie równoległe do OY są położone w płaszczyźnie OYZ. Druga para jest złożona z dwóch pierścieni kołowych, których osie są równoległe do OZ i które mają za koła stateczne koła południkowe pierwszych pierścieni, położone w płaszczyznach, równoległych do OXY: EF i GH na figurze 3-ej.

Oznaczając przez a_1, r_1, h_1 długości dla tych pierścieni kołowych, odpowiadające długościom a, r, h, będziemy mieli

$$a_1 = r, \qquad r_1 = h, \qquad h_1 = a.$$

Dla trzeciej pary rozumujemy w ten sam sposób, wychodząc z drugiej pary, wobec czego możemy ułożyć tabelkę następującą:

	a, a_1, a_2	r, r_1, r_2	h, h_1, h_2
1-sza para.	a	r	h
2-a para	r	h	a
3-a para	h	a	r

Pomijając na razie przypadek równości, powiadamy, że z trzech długości istnieje zawsze jedna, która jest większa od każdej z dwóch innych; niech tą długością większą będzie a:

$$a > r\,, \qquad a > h.$$

Zawsze istnieje para pierścieni kołowych bez punktów stożkowych rzeczywistych, przecinająca odpowiednią płaszczyznę spółrzędnych wzdłuż krzywej rzeczywistej.

Należy odróżniać naogół cztery możliwe przypadki:

1° $\qquad h > a - r \quad \text{i} \quad h > r;$

2° $\qquad r < h < a - r,$

co zakłada zachodzenie nierówności

$$a > 2r;$$

3° $\qquad a - r < h < r,$

co zakłada zachodzenie nierówności

$$a < 2r;$$

4° $\qquad h < a - r \quad \text{i} \quad h < r.$

Przypadek pierwszy

$$h > a - r\,, \qquad h > r.$$

Pierścienie kołowe pierwszej pary nie mają punktów stożkowych rzeczywistych i przecinają odpowiednią płaszczyznę spółrzędnych wzdłuż krzywej falistej.

Dla drugiej pary mamy

$$r < h\,, \qquad r < a < r + h\,, \qquad a > h > h - r\,,$$

albo

$$a_1 < r_1\,, \qquad a_1 < h_1 < a_1 + r_1\,, \qquad h_1 > r_1 - a_1.$$

Więc pierścienie kołowe drugiej pary mają punkty stożkowe rzeczywiste i przecinają odpowiednią płaszczyznę spółrzędnych wzdłuż owalu bez falistości.

Przypadek drugi:

$$r < h < a - r.$$

Pierwsza krzywa składa się z dwóch owali rozdzielonych.

Dla drugiej pary mamy:

$$r < h \quad \text{i} \quad a > r + h,$$

albo

$$a_1 < r_1 \quad \text{i} \quad h_1 > a_1 + r_1.$$

Pierścienie kołowe drugiej pary mają punkty stożkowe rzeczywiste i ich przecięcie z odpowiednią płaszczyzną spółrzędnych jest urojone.

Dla trzeciej pary mamy:

$$h < a\,, \qquad r < a - h\,, \qquad r < h\,,$$

albo

$$a_2 < r_2\,, \qquad h_2 < r_2 - a_2\,, \qquad h_2 < a_2.$$

Pierścienie kołowe mają punkty stożkowe rzeczywiste, i krzywa płaska odpowiadająca składa się z dwóch owali wewnętrznych, przyczem większy jest falisty.

Przypadek trzeci:

$$a - r < h < r.$$

Pierwsza krzywa jest falista.

Dla drugiej pary mamy:

$$r > h \quad \text{i} \quad r < a < r + h.$$

albo

$$a_1 > r_1 \quad \text{i} \quad a_1 < h_1 < a_1 + r_1.$$

Pierścienie kołowe nie mają punktów stożkowych rzeczywistych, i krzywa płaska odpowiadająca jest owalem bez falistości.

Dla trzeciej pary:

$$h < a\,, \qquad r < h\,, \qquad a - h < r < a + h,$$

albo

$$a_2 < r_2\,, \qquad h_2 > a_2\,, \qquad r_2 - a_2 < h_2 < r_2 + a_2.$$

Pierścienie kołowe mają swoje punkty stożkowe rzeczywiste, i krzywa płaska jest owalem bez falistości.

Przypadek czwarty:

$$h < a - r\,, \qquad h < r.$$

Pierwsza krzywa składa się z dwóch owali rozdzielonych.

Dla drugiej pary:

$$r > h, \qquad a > r + h,$$

albo

$$a_1 > r_1, \qquad h_1 > a_1 + r.$$

Pierścienie kołowe nie mają punktów stożkowych rzeczywistych, i krzywa płaska odpowiadająca jest urojona.

Dla trzeciej pary

$$h < a, \qquad r < a - h, \qquad r > 2,$$

albo

$$a_2 < r_2, \qquad h_2 < r_2 - a_2, \qquad h_2 > a_2,$$

Pierścienie kołowe mają swoje punkty stożkowe rzeczywiste, i krzywa płaska odpowiadająca jest owalem bez falistości z owalem pojedyńczym wewnątrz.

Zbierając to, co wyżej powiedziano, znajdujemy dla wszystkich czterech przypadków:

1°. Para pierścieni kołowych bez punktów stożkowych rzeczywistych i dwie pary z punktami stożkowemi rzeczywistemi.

Krzywe płaskie: trzy krzywe rzeczywiste, z których dwa owale faliste, i jeden bez falistości.

2°. Para pierścieni kołowych bez punktów stożkowych rzeczywistych i dwie pary z punktami stożkowemi rzeczywistemi.

Krzywe płaskie: dwa owale rozdzielone, jeden owal falisty z owalem pojedyńczym wewnątrz, krzywa urojona.

3°. Dwie pary pierścieni kołowych bez punktów stożkowych rzeczywistych, jedna para z punktami stożkowemi rzeczywistemi.

Krzywe płaskie: trzy owale, z których jeden jest falisty.

4°. Dwie pary pierścieni kołowych bez punktów stożkowych rzeczywistych, jedna para z punktami stożkowemi rzeczywistemi.

Krzywe płaskie: dwa owale rozdzielone, jeden owal bez falistości z owalem wewnętrznym, krzywa urojona.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że nie istnieje nigdy więcej, jak jedna krzywa płaska urojona. Wnosimy stąd, że żadna z trzech rodzin cyklid nie może składać się z cyklid, których wszystkie punkty stożkowe są urojone, ponieważ, gdyby to istotnie miało miejsce, miejsca punktów stożkowych cyklid tej rodziny, położone w dwóch płaszczyznach spółrzędnych, byłyby urojone. W ten sposób, każda z trzech rodzin układu ortogonalnego składa się bądź to z cyklid, które wszystkie mają punkty stożkowe rzeczywiste, bądź to z cyklid, z których jedne mają punkty stożkowe rzeczywiste, a inne mają tylko punkty stożkowe urojone.

20. Przypadek, kiedy wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny mają swe punkty stożkowe rzeczywiste. Znajdziemy teraz warunek, przy którym

wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny mają swoje punkty stożkowe rzeczywiste. Można łatwo zrozumieć, że wszystkie te punkty stożkowe rzeczywiste znajdują się na osiach pierwiastnych, równoległych do jednej i tej samej osi spółrzędnych, albo też jedne znajdują się na tych osiach pierwiastnych, a drugie na osiach pierwiastnych, równoległych do innej osi spółrzędnych.

Uprzytomnijmy sobie konstrukcyę, wskazaną w N° 16 (fig. 3). Cyklida mająca za płaszczyznę opisaną płaszczyznę (P), ma za osie pierwiastne linię równoległą do OY, której rzut jest w A, i równoległą do OZ, poprowadzoną przez punkt K, środek linii BD; niech to będzie prosta KLR, przecinająca oś OX w punkcie R. Punkty stożkowe, położone na pierwszej z tych osi pierwiastnych, znajdują się na przecięciu tej osi z pierścieniem kołowym. Gdy obracamy prostą CA około punktu C, punkt A przebiega w zupełności oś OX, z tem jednak zastrzeżeniem, żeby środek pierścienia kołowego nie znajdował się na osi OX. Jest więc niemożliwe, aby prosta, której rzut jest w A, zawsze spotykała pierścień kołowy w dwóch punktach rzeczywistych. Otóż, jeśli punkty stożkowe są zawsze rzeczywiste na osiach pierwiastnych równoległych, to one będą znajdowały się na prostej KR. Te punkty stożkowe są to punkty przecięcia L i L' kół o promieniu IB i JD, stycznych do prostej AC. Oś pierwiastna tych dwóch kół jest prosta KR, a potęga punktu K względem tych dwóch kół jest równa $\overline{KB}^2$, i również $KL \cdot KL' = \overline{KR}^2 - \overline{RL}^2$, skąd

$$\overline{RL}^2 = \overline{KR}^2 - \overline{KB}^2.$$

Otóż, aby punkty L i L' były rzeczywiste, wystarcza, by KR było większe od KB. Trzeba najprzód, by KR nie było zerem, innemi słowy, oś OX nie powinna przecinać koła statecznego pierścienia kołowego. Wreszcie, jeżeli będziemy obracali prostą CA, KR będzie miało wartość najmniejszą, kiedy CB będzie skierowane w kierunku CO, i ta wartość najmniejsza będzie $SO = h - a$. Warunek szukany jest więc:

$$h - a > r \quad \text{albo} \quad h > a + r,$$

czyli, że pierścień kołowy, niezależnie od swojego kształtu, nie może przecinać płaszczyzny OXY. Ta okoliczność występuje w przypadkach 2° i 4°, gdy obierzemy należycie parę pierścieni kołowych. W ten sposób, jeżeli jedna z rodzin składa się z cyklid, mających wszystkie swoje punkty stożkowe rzeczywiste na osiach pierwiastnych równoległych, to jedna z trzech krzywych płaskich jest urojona, co zresztą było oczywiste, ponieważ punkty stożkowe pierwszej rodziny, położone na drugiej osi pierwiastnej, są wszystkie urojone. Jeśli zwrócimy się do N°-ów 2 i 4 powyższego rozważania, spostrzeżemy, że jest to druga para pierścieni kołowych, która nie przecina płaszczyzny odpowiadającej spółrzędnych. Więc jest to trzecia rodzina cyklid, która ma wszystkie swoje punkty stożkowe rzeczywiste, i miejscem tych punktów jest przekrój płaski pierwszej rodziny, składający się z dwóch owali rozdzielonych, opisanych jeden przez punkt L, drugi przez punkt L'.

Wreszcie, przypadek, kiedy wszystkie punkty stożkowe jednej i tej samej rodziny byłyby rzeczywiste, ale z których jedne byłyby położone na osi pierwiastnej, równoległej do jednej z osi spółrzędnych, a inne na drugiej osi pierwiastnej,— jest niemożliwy. Istotnie, zwracając się zawsze do figury 3-ej spostrzegamy, że trzebaby, że kiedy punkty stożkowe znikają na osi pierwiastnej, równoległej do OZ, te punkty występowały na osi pierwiastnej, równoległej do OY. W ten sposób otrzymalibyśmy dla tego przypadku granicznego cyklidę, której dwa punkty stożkowe zlewają się na jednej z tych osi pierwiastnych, a dwa inne — na drugiej. Otóż taka cyklida istnieć nie może. Można zresztą zdać sobie sprawę z tej niemożliwości na figurze 3-ej, gdzie oś OX przecina kontur widoczny zewnętrzny pierścienia kołowego w punkcie T. Punkty stożkowe występują na osi pierwiastnej cyklidy, której rzut znajduje się w S wtenczas, kiedy prosta CBD przybiera kierunek CT; ale wówczas długość RK, która staje się długością $K'R'$, jest mniejsza od pochyłej $K'T$, która to pochyła jest równa r, — tak że, jeśli przeniesiemy nieznacznie punkt na lewą część figury, otrzymamy cyklidę bez punktów stożkowych rzeczywistych.

Zbierając to, co wyżej powiedziano, wnosimy, że, wyjąwszy przypadek, w którym jeden z pierścieni kołowych ma swój środek w punkcie początkowym spółrzędnych, nie istnieje nigdy więcej niż jedna rodzina cyklid, których wszystkie punkty stożkowe są rzeczywiste. Te punkty stożkowe są położone na osiach pierwiastnych równoległych, i cyklidy tej samej rodziny należą do typu pierścienia kołowego zniekształconego, z punktami stożkowemi rzeczywistemi.

21. Przypadki szczególne. Przypadki graniczne są dość liczne; wyliczenie ich jednak byłoby zmudne i mało ciekawe. Zresztą łatwo jest widzieć, czem stają się konfiguracye poprzednie, kiedy zastąpimy jednę lub więcej z nierówności równościami. Ograniczę się tutaj do rozważenia kilku przypadków szczególnych:

Jeśli jedna z długości jest równa zeru, to ta długość może być r albo h. Niech to będzie h. Wówczas pierwsza para pierścieni kołowych składa się z dwóch pierścieni, do siebie przystających, bez punktów podwójnych rzeczywistych, i przecinających płaszczyznę OXY według dwóch kół równych, nie przecinających się. Druga para sprowadza się do kół EF i GH (fig. 3, na której oś OX powinna być przeniesiona na prostą HF). Trzecia para sprowadza się do dwóch kul, utworzonych przez obracanie się każdego z kół stycznych pierwszego pierścienia kołowego około ich średnicy, równoległej do OX. Te dwie kule przecinają płaszczyznę OXZ według jednego i tego samego koła rzeczywistego. Rodzina cyklid, zawierająca te dwie kule, otrzymuje się przez zastosowanie konstrukcyi N⁰ 16 z pary pierścieni kołowych, sprowadzonej do dwóch kół EF i GH. Rodzina ta składa się z kul, przechodzących przez koło, położone w płaszczyźnie OXZ. Rodzina, która otrzymuje się z jednego tylko pierścienia kołowego, przedstawia tę osobliwość, że wszystkie cyklidy, z których składa się ta rodzina, mają oś pierwiastną wspólną, której rzut znajduje się w C, i mają przeto dwa jednakowe punkty stożkowe urojone w punkcie, w którym ta oś przecina pierścień kołowy. Wreszcie, trzecia rodzina składa się z cyklid, przechodzących przez dwa koła EF i GH. Wszystkie cyklidy, z których składa się ta rodzina, mają również dwa jednakowe punkty stożkowe urojone na osi OY, której rzut jest w C.

Jeśli r będzie równe zeru, wówczas pierwsza para pierścieni kołowych sprowadza się do dwóch kół, przecinających płaszczyznę OXY w dwóch punktach odosobnionych na osi OX. Druga para sprowadza się do dwóch kul, nie przecinających płaszczyzny OXZ, i trzecia para — do jednego pierścienia kołowego, z punktami stożkowemi rzeczywistemi, przecinającego płaszczyznę OXZ wzdłuż dwóch kół równych, które zastępują pierwsze pierścienie kołowe. Rodzina, którą otrzymujemy z dwóch kół, przez zastosowanie konstrukcyi N⁰ 16, składa się z kul ortogonalnych do tych dwóch kół i mających za płaszczyznę pierwiastną wspólną płaszczyznę OYZ, którą te kule przecinają wzdłuż jednego i tego samego koła urojonego. Rodzina, pochodząca z dwóch kul, składa się z cyklid, przechodzących przez dwa koła i posiadających wskutek tego jako punkty stożkowe wspólne dwa punkty przecięcia tych kół z osią OX. Jest to rodzina, zawierająca pierścień kołowy, i wszystkie cyklidy, z których ta rodzina się składa, należą do typu pierścienia kołowego zniekształconego. Wreszcie, trzecia rodzina, pochodząca z pierścienia kołowego i zawierająca dwa koła równe, składa się z cyklid kształtu wrzeciona podwójnego, mających za wspólne punkty stożkowe dwa te same punkty osi OX.

Jeśli dwie długości są równe zeru jednocześnie, $h=r=0$, to pierwsza para pierścieni kołowych sprowadza się do koła, położonego w płaszczyźnie OXZ i mającego swój środek w punkcie początkowym; druga para sprowadza się do dwóch punktów na osi OX, trzecia zaś do jednej tylko kuli, mającej swój środek w punkcie początkowym. Rodziny, które otrzymują się z koła i z dwóch punktów, są złożone z kul, i trzecia rodzina składa się z cyklid, mających trzy płaszczyzny symetryi.

Jest to zresztą jedyny przypadek, w którym spotyka się ta osobliwość; aby cyklida miała trzy płaszczyzny symetryi, jest konieczne, by dwie jej osie pierwiastne przecinały się. Na mocy konstrukcyi N⁰ 16 (fig. 3), będzie więc konieczne, aby punkt A zlewał się z punktem R, a zatem i z punktem K, co spełni się, jeżeli oś OX przecina koło środkowe pierścienia kołowego, i jeżeli prosta AC przechodzi przez punkt przecięcia. Ale okoliczność ta może zachodzić dla wszystkich położeń prostej AC jedynie wtedy, kiedy pierścień kołowy sprowadza się do kuli, mającej swój środek na osi OX, to jest, kiedy $h = r = 0$.

Najbardziej godnym uwagi jest przypadek, w którym trzy długości są sobie równe: $a = r = h$. Wtedy wszystkie pierścienie kołowe są równe; te pierścienie mają za linię południkową dwa równe koła styczne, i miejsca punktów podwójnych są to owale Cassini'ego, mające swoje ogniska w odległości, równej promieniowi tych kół od środka, oś małą, równą odległości ognisk, i promień krzywizny nieskończony w końcach tej małej osi.

W rozważanym przypadku najbardziej interesujące jest to, że wszystkie cyklidy jednej rodziny są odpowiednio równe cyklidom dwóch pozostałych rodzin. Pomiędzy temi cyklidami jedne są z punktami stożkowemi rzeczywistemi, typu zniekształconego pierścienia kołowego, drugie są bez punktów podwójnych rzeczywistych, trzecie zaś są z punktami podwójnemi rzeczywistemi, typu, mającego kształt wrzeciona podwójnego.

22. Rozmieszczenie cyklid jednej i tej samej rodziny. Powróćmy do przypadku ogólnego. Cyklidy jednej i tej samej rodziny przedstawiają godne uwagi rozmieszczenia, którym należy poświęcić słów kilka.

Są dwie rodziny cyklid, które składają się z powierzchni, mających płaszczyznę OXY za płaszczyznę symetryi. Cyklidy jednej z tych rodzin przecinają tę płaszczyznę każda wzdłuż dwóch kół (ω) i (φ), mających swój środek na osi OX. Ale te cyklidy są parami symetryczne względem płaszczyzny OYZ. W ten sposób mamy dwie rodziny kół—rodzinę kół (ω) i rodzinę kół (φ), przyczem koła każdej rodziny są symetryczne parami względem punktu początkowego O. Cyklidy drugiej rodziny również przecinają płaszczyznę OXY wzdłuż dwóch rodzin kół (ω') i (φ'), mających swój środek na osi OY, przyczem koła każdej rodziny są również symetryczne parami względem punktu początkowego.

Trzeba, prócz tego, aby koła (ω') były ortogonalne do kół (ω), albo do kół (φ): dajmy, że do kół (ω). Wówczas koła (φ) będą ortogonalne do kół (φ'). W ten sposób będziemy mieli na płaszczyźnie OXY dwie sieci kół ortogonalnych (ω) i (ω') z jednej strony, (φ) i (φ') z drugiej strony. Stąd wnosimy, że punkt początkowy O będzie miał jednakową potęgę m względem wszystkich kół (ω), jednakową potęgę $-m$ względem wszystkich kół (ω'), jednakową potęgę n względem wszystkich kół (φ) i jednakową potęgę $-n$ względem wszystkich kół (φ').

Cyklida jest w zupełności wyznaczona przez koła (ω) i (φ) przy zachowaniu warunku, że obierzemy jeden ze środków podobieństwa tych dwóch kół, S. Ta cyklida będzie miejscem kół opisanych w płaszczyznach, prostopadłych do płaszczyzny tych dwóch kół i mających za średnice odcinki EF, łączące dwa punkty antihomologiczne. Niech będą (fig. 4) A, B, C, D punkty przecięcia dwóch kół z prostą, łączącą środki tych kół, wziętą za oś OX, przyczem punkty antihomologiczne są to punkty A i D, B i C.

Na mocy powyższego, dla wszystkich cyklid tej samej rodziny będziemy mieli

$$OA \,.\, OB = m, \qquad OC \,.\, OD = n.$$

Ale rozważana cyklida przecina płaszczyznę OZX wzdłuż kół, mających za średnicę AD i BC. Więc dla wszystkich cyklid tej samej rodziny będziemy mieli jeszcze:

$$OA \,.\, OD = m', \qquad OB \,.\, OC = n',$$

przy zachowaniu warunku

$$mn = m'n' = OA \,.\, OB \,.\, OC \,.\, OD.$$

W ten sposób widzimy, że wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny i wobec tego, układ ortogonalny w całości jest zupełnie wyznaczony przez

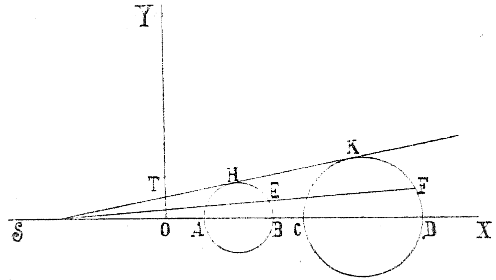

Fig. 4.

trzy liczby m, n, m', tak samo, jak był wyżej wyznaczony przez trzy liczby a, r, h. Wartość m istotnie pozwala wyznaczyć koło AB, jeżeli jest dany środek; wartość m' pozwala wyznaczyć położenie punktu D na osi OX i wartość n — wyznaczyć położenie punktu C, co w zupełności wyznacza figurę. Dla otrzymania całej rodziny należy przemieszczać środek koła AB.

Otóż, tak samo *układ w całości jest zupełnie wyznaczony, jeżeli jest dana jedna cyklida i punkt O na jednej z osi pierwiastnych tej cyklidy.*

Łatwo jest zbudować wówczas jeden z pierścieni kołowych, którémi posługiwaliśmy się w konstrukcyi N° 16.

Istotnie, rozpatrzmy (fig. 4) dwie płaszczyzny, opisane na cyklidzie danej, które przecinają się wzdłuż prostej, której rzut znajduje się w S, i z których jedna dotyka kół (AB) i (CD) odpowiednio w punktach H i K. Prosta SHK przecina OY w punkcie T. Wykreślamy w płaszczyźnie OXY dwa koła o środku (T) i o promieniu TH i TK, odpowiednio ortogonalne do kół (AB) i (CD). Pierścień kołowy szukany ma swoją oś, równoległą do OZ, której rzut znajduje się w T. Równik tego pierścienia składa się z kół TH i TK, a jego linia południkowa jest kołem, mającem za średnicę HK, i położonem w płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny OXY.

23. **Układy ortogonalne, składające się z cyklid rzędu trzeciego.** Zajmiemy się teraz układami ortogonalnemi, których odwzorowanie kuliste składa się z kół, które wszystkie przechodzą przez jeden i ten sam punkt kuli. W tym przypadku wszystkie powierzchnie jednej i tej samej rodziny mają jednakowe odwzorowanie kuliste, składające się z kół, przechodzących przez punkt kuli i stycznych w tym punkcie do jednej lub do drugiej z dwóch prostych prostokątnych, położonych w płaszczyźnie stycznej do kuli i przechodzących przez punkt styczności. Widzieliśmy już (N⁰ 11), że cyklidy odpowiednie są rzędu trzeciego i że posiadają one każda dwie płaszczyzny, opisane wzdłuż prostej i równoległe do płaszczyzny stycznej do kuli w punkcie, przez który przechodzą wszystkie koła odwzorowania kulistego. Te dwie proste są równoległe do prostych (D) i (E), około których obracają się płaszczyzny kół odwzorowania kulistego i wszystkie linie krzywizny cyklid rodziny odpowiedniej są kołami, których płaszczyzny przechodzą przez jednę z tych prostych. W odwzorowaniu kulistem układu ortogonalnego istnieją trzy sieci kół ortogonalnych, po jednej dla każdej rodziny, i sześć prostych odpowiednich są równoległe do trzech osi spółrzędnych, przyczem dwie proste, odpowiadające jednej i tej samej rodzinie, są styczne do kuli w jednym z końców jednej ze średnic kuli, równoległych do osi spółrzędnych.

Stąd już z łatwością wynika, że wszystkie płaszczyzny, opisane na cyklidach, są równoległe do jednej z płaszczyzn spółrzędnych i wszystkie proste stateczne są równoległe do jednej z osi spółrzędnych. Następnie można będzie dowieść, jak to w N⁰ 14, że wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny są symetryczne, każda względem dwóch z płaszczyzn spółrzędnych i symetryczne parami względem trzeciej płaszczyzny. Układ tedy może być zbudowany w sposób następujący:

Nakreślmy w płaszczyźnie OXY prostą MN (fig. 5), równoległą do OY i przecinającą OX w punkcie C, i koło, mające swój środek na osi OX i przecinające tę oś w punktach A i B. Jedna z cyklid pierwszej rodziny będzie wyznaczona przez to koło i tę prostą, jeżeli obierzemy A lub B za spodek innej prostej, statecznej. Te proste stateczne są jednocześnie osiami pierwiastnemi cyklidy. Naprzykład, jeżeli poprowadzimy prostą ADE, przecinającą koło AB w punkcie D i prostą MN w punkcie E, to cyklida będzie miejscem kół, mających swoje płaszczyzny, prostopadłe do płaszczyzny

OXY i mających DE za średnicę — jeżeli prosta ADE obraca się około punktu A. Ta sama cyklida mogłaby jeszcze być wyznaczona przez koło płaszczyzny OXZ, mające CB za średnicę, prostą równoległą, poprowadzoną przez punkt A do osi OZ, i punkt C, jako środek obrotu.

Jedna z cyklid drugiej rodziny przejdzie przez koło o średnicy ED i bę-

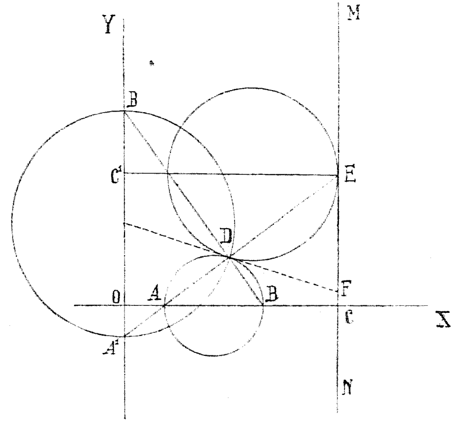

Fig. 5.

dzie symetryczna względem płaszczyzny OXY. Ale pierwsza cyklida jest obwiednią kul, których koła wielkie, położone w płaszczyźnie OXY, są styczne do koła AB i do prostej MN. Jedna z tych kul ma za koło wielkie koło, styczne w punkcie D do koła AB i w punkcie E do prostej MN. Wówczas kula ortogonalna, opisana na drugiej cyklidzie, będzie miała swój środek w punkcie F przecięcia prostej MN ze styczną w punkcie D do koła AB. Ta druga cyklida, zawierająca koło DE, będzie miała jednę ze swych osi pierwiastnych w płaszczyźnie, przechodzącej przez prostą DE i prostopadłej do płaszczyzny figury, a ponieważ ta oś pierwiastna powinna być równoległa do jednej z osi spółrzędnych i położona w jednej z płaszczyzn spółrzędnych, przeto osią tą będzie prosta, równoległa do OZ, mająca rzut w punkcie A' przecięcia prostej DE z osią OY. Druga oś pierwiastna będzie równoległa do osi OX. Więc ta druga cyklida będzie wyznaczona przez oś pierwiastną, równoległą do OX, środek obrotu A', położony na osi OY, i koło, położone w płaszczyźnie OXY, przechodzące przez A' i mające swój środek na osi OY. Cyklida jest wówczas w zupełności wyznaczona.

Istotnie, środek obrotu A' jest, jak to już widzieliśmy, w przecięciu prostej ED z OY. Ponieważ oś pierwiastna jest styczna do kuli o środku F

w punkcie położonym na kole DE, to ta oś przechodzi koniecznie przez punkt E; jest to prosta, równoległa do osi OX, przeprowadzona przez E i przecinająca OY w punkcie C'. Wreszcie, koło przechodzące przez A' w płaszczyźnie OXY, musi przechodzić również przez punkt D, ponieważ ED jest średnicą jednego z kół cyklidy, którego płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny OXY. Więc koło to przetnie OY w drugim punkcie B', który powstaje z przecięcia osi OY z prostą BD, prostopadłą do ED. Koło to, jak to być powinno, jest istotnie styczne do koła o środku F, ponieważ jest ortogonalne do koła AB, a to dlatego, że te koło jest opisane na trójkącie $A'DB'$, którego boki są odpowiednio prostopadłe do boków trójkąta ADB, na którym jest opisane koło AB; wynika stąd, że można przejść od jednego do drugiego przez homotetyę, po której następuje obrót na kąt prosty.

Obracając prostą $A'DE$ około punktu A', zbudujemy w ten sposób wszystkie cyklidy drugiej rodziny. Cyklidy trzeciej rodziny otrzymamy w ten sam sposób, zastępując odpowiednio koło AB prostą MN i środek obrotu A w płaszczyźnie OXY, przez koło BC, prostą równoległą do OZ, przeprowadzoną przez punkt A, i środek obrotu C w płaszczyźnie OXZ. Wreszcie cyklidy pierwszej rodziny można zbudować w ten sam sposób, wychodząc z jednej z cyklid drugiej lub trzeciej rodziny.

24. Układ jest istotnie ortogonalny. Żeby stwierdzić, że układ, w ten sposób utworzony, jest rzeczywiście ortogonalny, uważajmy punkt M cyklidy początkowej. Przez ten punkt przechodzą dwa koła krzywizny DE i $\delta\varepsilon$. Jedna cyklida drugiej rodziny przechodzi przez DE, jedna cyklida trzeciej rodziny przez $\delta\varepsilon$, i te dwie cyklidy przecinają ortogonalnie, na mocy tej samej konstrukcyi, powierzchnię początkową. Poza tem są one do siebie ortogonalne w punkcie M, ponieważ ich przecięcia DE i $\delta\varepsilon$ na cyklidzie początkowej są prostopadłe.

Otóż, powtarzając, z łatwemi modyfikacyami, rozumowanie, którem się kończy N° 17, dowiedziemy, że każda cyklida drugiej rodziny przecina każdą cyklidę trzeciej rodziny ortogonalnie według koła krzywizny, i odwrotnie.

Załóżmy teraz, że pierwsza rodzina była zbudowana zapomocą cyklidy (C_2) rodziny drugiej. Ta cyklida (C_2) przecina jednę z cyklid (C_3) rodziny trzeciej wzdłuż koła krzywizny (S_1). Niech będzie N punkt koła (S_1). Przez ten punkt N przechodzą na dwóch cyklidach (C_2) i (C_3) dwa inne koła krzywizny (S_3) i (S_2), i styczne do tych trzech kół w punkcie N tworzą trójścian o trzech ścianach prostopadłych dlatego, że cyklidy (C_2) i (C_3) są ortogonalne i że koła krzywizny jednej i tej samej cyklidy są ortogonalne. Jedna z cyklid (C_1) rodziny pierwszej przechodzi przez koło (S_3) i jest ortogonalna do cyklidy (C_2). Więc jej płaszczyzna styczna zawiera styczną do (S_3) i jest prostopadła do płaszczyzny stycznych do kół (S_3) i (S_1). Jest to więc jedna

ze ścian trójścianu o trzech ścianach prostopadłych, i trzy cyklidy są ortogonalne w punkcie N.

Rozumowanie N° 17 wykazuje, że cyklidy (C_1) i (C_3) przecinają się według koła i że wzdłuż tego koła są one ortogonalne. W ten sposób, wszystkie cyklidy rodziny pierwszej przecinają ortogonalnie cyklidy rodziny trzeciej.

Uważajmy wreszcie dwie cyklidy (C_1') i (C_3') rodzin pierwszej i trzeciej, przecinające się ortogonalnie według koła (S_2') i posiadające dwa inne koła krzywizny (S_3') i (S_1'). Wiemy już, że przez koło (S_1'), położone na cyklidzie (C_3'), przechodzi cyklida drugiej rodziny, ortogonalna do (C_3'). Powtarzając rozumowanie poprzednie, dowiedziemy, że jest ona ortogonalna do (C_1'), tak że każda cyklida drugiej rodziny jest ortogonalna do wszystkich cyklid pierwszej rodziny. W ten sposób dowód jest ukończony.

Konstrukcya, wskazana w N° 23, wykazuje, że druga cyklida jest w zupełności wyznaczona przez koło DE, położone na pierwszej cyklidzie, skąd wynika, że rodzina druga jest wyznaczona w zupełności przez jednę i tylko jednę cyklidę rodziny pierwszej; lecz ponieważ wszystkie cyklidy drugiej rodziny są ortogonalne do wszystkich cyklid rodziny pierwszej, przeto znowu możemy znaleść tę samą drugą rodzinę, jeżeli zastosujemy konstrukcyę N° 23 do jednej dowolnej z cyklid rodziny pierwszej i, ogólniej — układ zupełny może być wyprowadzony, zapomocą konstrukcyi powyższej, z jednej i tylko jednej cyklidy, jeżeli tylko będzie dany jednocześnie początek spółrzędnych na prostopadłej wspólnej do osi pierwiastnych tej cyklidy.

25. Rozmieszczenie cyklid. Rzeczywistość punktów stożkowych. Nasuwają się dwie ważne uwagi, dotyczące kształtów cyklid i ich przecięć z płaszczyznami spółrzędnych.

Rozważania N° 18, dotyczące punktów stożkowych cyklid rzędu czwartego, stosują się bez zmiany do cyklid rzędu trzeciego, ale te ostatnie przecinają wzdłuż krzywych stożkowych płaszczyzny, równoległe do płaszczyzn, opisanych na cyklidach. A zatem:

Wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny przecinają wzdłuż jednej i tej samej stożkowej tę z trzech płaszczyzn spółrzędnych, względem której te cyklidy nie są symetryczne. Stożkowa ta jest miejscem punktów stożkowych dwóch innych rodzin, położonych w powyższej płaszczyźnie. Istnieją w ten sposób trzy stożkowe, położone każda w jednej z płaszczyzn spółrzędnych, z których każda jest ogniskową dwu innych. Jedna jest elipsą rzeczywistą, położoną, naprzykład, w płaszczyźnie OYZ i mającą swe ogniska rzeczywiste na osi OZ; druga — hyperbolą, położoną w płaszczyźnie OXZ, mającą za wierzchołki rzeczywiste ogniska poprzedniej elipsy, i za ogniska rzeczywiste wierzchołki tej samej elipsy na osi OZ. Trzecią stożkową jest elipsa urojona, położona w płaszczyźnie OXY i mająca jako wierzchołki ogniska urojone poprzednich elipsy i hyperboli.

Wnosimy stąd, że żadna z cyklid układu nie ma punktów stożkowych rzeczywistych w płaszczyźnie OYZ.

Będziemy nazywali rodziną pierwszą cyklid tę rodzinę cyklid, które mają płaszczyzny opisane, równoległe do płaszczyzny OYZ. Te cyklidy wszystkie przechodzą przez elipsę, położoną w powyższej płaszczyźnie, i mają swe punkty stożkowe rzeczywiste na hyperboli, położonej w płaszczyźnie OZX i mającej za oś poprzeczną oś OZ. Dwie osie pierwiastne tych cyklid są równoległe do OY i do OZ. Ta ostatnia przecina zawsze hyperbolę. Otóż cyklidy pierwszej rodziny mają wszystkie swe punkty stożkowe rzeczywiste na osiach pierwiastnych równoległych, co zresztą wynika również z tego faktu, że te cyklidy dają w przecięciu płaszczyzną OYZ przekrój eliptyczny.

Cyklidy drugiej rodziny będą te, których płaszczyzny opisane są równoległe do płaszczyzny OZX. Przechodzą one przez hyperbolę powyższą i mają swe punkty stożkowe na elipsie; ale oś pierwiastna równoległa do osi OX może zajmować wszystkie możliwe położenia, jak to wynika z konstrukcyi N° 23; a więc oś ta przecina elipsę, lub nie przecina jej w dwóch punktach rzeczywistych. Otóż cyklidy drugiej rodziny mają swe punkty stożkowe już to urojone, już to rzeczywiste na osiach pierwiastnych równoległych. Pomiędzy temi cyklidami są dwie, których punkty stożkowe się zlewają.

Wreszcie, trzecia rodzina zawiera cyklidy, których osie pierwiastne są równoległe do OX i do OY; cyklidy te przecinają płaszczyznę OXY wzdłuż elipsy urojonej, i mają swoje punkty stożkowe jedne na elipsie, inne na hyperboli. Ponieważ cyklida ma nie więcej niż dwa punkty stożkowe rzeczywiste, jeżeli oś pierwiastna, równoległa do OX, przecina hyperbolę,— przeto oś pierwiastna równoległa do OY nie przetnie hyperboli. Ale może się zdarzyć, że żadna z tych dwóch prostych nie przecina stożkowej odpowiedniej, i to musi zachodzić koniecznie dla niektórych cyklid rodziny, ponieważ, w przeciwnym razie, mielibyśmy przypadek graniczny, w którym jedna z prostych byłaby styczna do elipsy, a druga do hyperboli, to jest mielibyśmy cyklidę, mającą dwa punkty stożkowe podwójne, co jest niemożliwe.

W ten sposób, nie istnieje rodzina, złożona wyłącznie z cyklid bez punktów stożkowych rzeczywistych, wyjąwszy jeden przypadek szczególny, o którym niżej pomówimy.

ROZDZIAŁ V.

26. Związki metryczne. Oznaczmy przez a, b, c odcięte odpowiednie trzech punktów A, B, C, położonych na osi OX (fig. 5); przez a', b', c'— rzędne punktów A', B', C', położonych na osi OY odgrywających role jednakowe w jednej z cyklid drugiej rodziny; wreszcie przez a'', b'', c''

oznaczmy położenie punktów analogicznych A'', B'', C'', położonych na osi OZ i odpowiadających jednej z cyklid trzeciej rodziny.

1°. Wszystkie koła o średnicy $A'B'$, będąc ortogonalne do koła AB i do koła symetrycznego z niem względem osi OY, mają oś OX za oś pierwiastną; oprócz tego, potęga wspólna w punkcie O względem wszystkich tych kół ma tę samą wartość bezwzględną, co i potęga tego samego punktu O względem koła AB, lecz różni się znakiem:

$$OA'.OB' = -OA.OB, \quad \text{albo} \quad a'b' = -ab.$$

2°. Na mocy twierdzenia Thalesa, mamy:

$$\frac{OC'}{OA'} = \frac{AE}{AA'} = \frac{AC}{AO},$$

co dowodzi, że stosunek $\frac{OC'}{OA'}$ pozostaje niezmiennym dla wszystkich cyklid drugiej rodziny. Z ostatnich równości wyprowadzamy:

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c-a}{-a},$$

co, po pomnożeniu przez równanie powyższe, daje:

$$b'c' = bc - ab.$$

Wynika stąd, że iloczyny $a'b'$ i $b'c'$ pozostają stałemi dla wszystkich cyklid drugiej rodziny. Podobnież dla każdej rodziny otrzymamy dwa iloczyny, które pozostaną niezmienne.

Kładziemy

(1) $$ab = m, \qquad bc = n.$$

Dla drugiej rodziny będziemy mieli:

(2) $$a'b' = -m, \qquad b'c' = n - m.$$

Tak samo, dla trzeciej rodziny otrzymamy:

(3) $$a''b'' = m - n, \qquad b''c'' = -n.$$

Weźmy pod uwagę również, że każdy z trzech stosunków

(4) $$\frac{OC}{OA}, \quad \frac{OC'}{OA'}, \quad \frac{OC''}{OA''}$$

zachowuje wartość stałą.

Powrócimy jeszcze nieco dalej do związków, zachodzących pomiędzy wartościami tych trzech stosunków.

Widzimy, że układ ortogonalny jest w zupełności wyznaczony przez dwie liczby m i n. Jest on również wyznaczony, jak to widzieliśmy wyżej, przez jednę z trzech stożkowych ogniskowych, będących miejscami punktów stożkowych; wyznaczenie zależy również od dwóch parametrów.

27. Przypadki szczególne. Jeden z parametrów m lub n jest zastąpiony w jednej z dwóch drugich rodzin przez $m-n$. Przypadki szczególne, któremi obecnie zamierzamy się zająć, są to przypadki, w których jeden z tych parametrów staje się zerem: $m=0$, $n=0$ lub $m=n$. Lecz, ponieważ zawsze można założyć, że rodzina, mająca jeden parametr równy zeru, jest rodziną pierwszą, i że można zamienić wzajemnie punkty A i B, uwa-

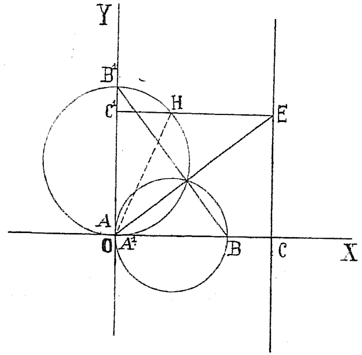

Fig. 6.

żając jeden lub drugi, jako pochodzący z dwóch sposobów generacyi cyklidy przez swoje linie krzywizny kołowe – to wystarcza założyć

$$m = ab = 0.$$

Wtedy zerem może być albo a, albo b.

Załóżmy z początku, że

$$a = 0.$$

Figura 5 przybiera wówczas postać figury 6. Widzimy, że punkt A zlewa się z punktem A', co jest zgodne z równaniem

$$a' a' = -m = 0.$$

Co do cyklid rodziny trzeciej, to one otrzymują się, zastępując w konstrukcyi punkt A przez punkt C, oś OY przez oś OZ, i prostą CM przez oś OZ. Figura 6 przybiera wówczas postać figury 7.

Widzimy, że A'' zlewa się z C'', co jest zgodne z równaniami (3), które przybierają postać

$$a''b'' = b''c'' = -n,$$

skąd:

$$a'' = c'',$$

przyczem n jest różne od zera. Środkiem obrotu jednej z cyklid (C_3) jest punkt A''.

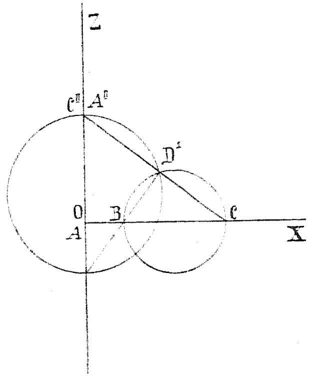

Fig. 7.

Otóż cyklidy rodziny trzeciej, których płaszczyzny opisane zlewają się, sprowadzają się do kul ortogonalnych z kołem o średnicy BC, położonem w płaszczyźnie OXY, mających swoje środki na osi OZ i przechodzących koniecznie przez jedno i to samo koło płaszczyzny OXY.

Jedna z krzywych ogniskowych jest tem właśnie kołem o środku O, położonem w płaszczyźnie OXY, co łatwo stwierdzić bezpośrednio na figurze 6, gdzie H jest to jeden z punktów stożkowych cyklidy (C_2). Mamy: $\overline{OH}^2 = OC'.OB' = b'c' = \text{const.}$, jak to widzieliśmy wyżej.

Ponieważ wszystkie cyklidy dwóch pierwszych rodzin muszą przecinać ortogonalnie wszystkie kule pęku, który stanowi rodzinę trzecią, wnosimy stąd, że wszystkie te cyklidy przechodzą przez dwa wierzchołki tego pęku, które to punkty w ten sposób są dwoma punktami stożkowemi wspólnemi wszystkim tym cyklidom. Są to właśnie te dwa punkty stożkowe, do których sprowadzają się dwie pozostałe ogniskowe.

Mamy

$$bc = b'c' = n.$$

Jeżeli n jest dodatnie, B i C znajdują się z jednej strony punktu O, który zlewa się z punktem A (fig. 6). Cyklidy pierwszych dwóch rodzin będą miały punkty stożkowe urojone w płaszczyznach, różnych od płaszczyzny OXY, i w takiej to płaszczyźnie jedne cyklidy będą miały punkty stożkowe urojone, drugie — punkty stożkowe rzeczywiste, w zależności od tego, czy punkty A, B, C lub A', B', C' następują po sobie w porządku ABC czy czy ACB. Ponieważ istnieją punkty stożkowe rzeczywiste, to kule trzeciej rodziny przecinają płaszczyznę OXY wzdłuż koła rzeczywistego. Łatwo znajdziemy, że promień tego koła jest równy $\sqrt{n}$.

Jeżeli n jest ujemne, punkty B i C znajdują się po jednej i po drugiej stronie punktu A; kule przecinają płaszczyznę OXY wzdłuż koła urojonego, i cyklidy dwóch innych rodzin mają wszystkie punkty stożkowe rzeczywiste na osi OZ.

Jeżeli teraz założymy, że $b = 0$, z równań (1) otrzymamy, że m i n są równe zeru, przeto na mocy równań (2) i (3), że b' i b'' są również równe zeru. To wyraża ten fakt, że wszystkie cyklidy układu przechodzą przez punkt początkowy.

Na figurze 5-ej punkt B musi zlewać się z punktem O. Otóż, ponieważ stosunek $\frac{OC}{OA}$ jest niezmienny, wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny są homotetyczne, i, ponieważ jest to prawdą dla trzech rodzin, przeto układ cały nie zmienia się, jeżeli poddamy go przekształceniu homotetycznemu, mającemu za środek punkt O.

Cyklida dowolna mieć będzie swe punkty stożkowe urojone, jeżeli punkty A i C znajdują się po obydwóch stronach punktu B, i — rzeczywiste — jeżeli A i C znajdują się po jednej stronie punktu B. Wskutek homotetyi, to samo rozmieszczenie będzie zachowane dla wszystkich cyklid jednej i tej samej rodziny, tak że każda rodzina składa się bądź to z cyklid bez punktów stożkowych rzeczywistych, bądź to z cyklid z punktami stożkowemi rzeczywistemi na jednej i tej samej osi pierwiastnej.

Niech będą w płaszczyźnie OXY (fig. 8) punkty A i C, położone po obu stronach punktu początkowego na osi OX, i koło o średnicy OA. To koło i punkt C wyznaczają cyklidę rodziny pierwszej, której punkty stożkowe są urojone. Cyklida ta przecina płaszczyznę OYZ wzdłuż dwóch prostych OU i OU', i, ponieważ wszystkie cyklidy pierwszej rodziny są homotetyczne względem punktu O, to przechodzą wszystkie przez te dwie proste, jak to istotnie być powinno, ponieważ te cyklidy przecinać muszą płaszczyznę OYZ wzdłuż jednej i tej samej stożkowej, sprowadzającej się tu do dwóch prostych OU i OU'.

Stosując tedy konstrukcyę N⁰ 23, należy poprowadzić przez punkt A sieczną dowolną ADE, która przecina koło w punkcie D, i w punkcie E równoległą do osi OY, poprowadzoną przez punkt C. Punkt A' znajduje się na przecięciu prostych DE i OY, punkt C' jest rzutem punktu E na

oś OY. Wówczas jedna z cyklid drugiej rodziny będzie wyznaczona przez koło o średnicy $A'B$ w płaszczyźnie OXY i prostą EC'. Cyklida ta będzie miała swoje punkty stożkowe rzeczywiste na prostopadłej do płaszczyzny OXY, poprowadzonej przez punkt A'; miejsce punktów stożkowych cyklid tej drugiej rodziny składać się będzie z prostych OU i OU'. Wreszcie, zu-

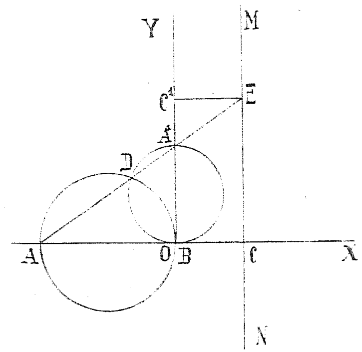

Fig. 8.

pełnie tak samo przekonamy się, że cyklidy rodziny trzeciej również mieć będą swoje punkty stożkowe rzeczywiste na tychże prostych. Zbierając to, powiemy, że układ składać się będzie z jednej rodziny bez punktów stożkowych rzeczywistych i z dwóch rodzin z punktami stożkowemi rzeczywistemi.

Gdybyśmy założyli, że pierwsza rodzina ma punkty stożkowe rzeczywiste, to doszlibyśmy do tego samego wniosku, ponieważ byłoby to równoznaczne obraniu za pierwszą rodzinę tej rodziny, którą my nazywamy drugą.

28. Związki pomiędzy trzema stosunkami. Do tego samego wyniku można dojść, szukając związków, zachodzących pomiędzy trzema stosunkami

$$\frac{OC}{OA}, \quad \frac{OC'}{OA'}, \quad \frac{OC''}{OA''}.$$

Kładziemy

$$\frac{OC}{OA} = h, \quad \text{skąd} \quad \frac{OA}{OC} = \frac{1}{h}.$$

Rysunek 5 daje dla przypadku ogólnego

$$\frac{OC'}{OA'} = \frac{AE}{AA'} = \frac{AC}{AO} = \frac{AO + OC}{AO} = 1 - h.$$

Dla rodziny trzeciej, należy zastąpić C przez A, czyli h przez $\frac{1}{h}$; otrzymamy więc

$$\frac{OC''}{OA''} = 1 - \frac{1}{h}.$$

Ostatecznie, dla stosunków, odpowiadających trzem rodzinom, mamy:

$$h \quad \text{i} \quad \frac{1}{h},$$

$$1-h \quad \text{i} \quad \frac{1}{h-1},$$

$$\frac{h-1}{h} \quad \text{i} \quad \frac{h}{h-1}.$$

Jeżeli założymy

$$h' = \frac{1}{1-h}, \qquad h'' = \frac{h-1}{h},$$

to będzie

$$h h' h'' = -1,$$

co dowodzi, że co najmniej jeden stosunek jest ujemny. Niech tym stosunkiem będzie h; wówczas h' i h'' są dodatnie. Istnieje przeto zawsze jeden stosunek ujemny i dwa dodatnie.

W przypadku szczególnym, kiedy punkt początkowy znajduje się w pnnkcie B, wartości ujemnej liczby h odpowiadają cyklidy bez punktów podwójnych rzeczywistych, i odwrotnie. Więc, w tym przypadku szczególnym, istnieje jedna rodzina cyklid bez punktów podwójnych rzeczywistych i dwie inne — z punktami stożkowemi rzeczywistemi.

29. Układy odwracalne, składające się ze stożków i walców. Pozostaje uwydatnić przypadek, kiedy odwzorowanie kuliste jest jednakowe dla wszystkich powierzchni jednej i tej samej rodziny i kiedy trójścian pozostaje nieruchomym, gdy będziemy zmieniali jeden z parametrów, naprzykład w. Przy zmienianiu wielkości w, płaszczyzny, styczne do każdej z dwóch powierzchni $u = \text{const.}$ i $v = \text{const.}$, pozostają te same, i linia odpowiadająca jest prostą, ponieważ jej styczna pozostaje niezmienną. Każda z tych dwóch powierzchni jest więc rozwijalna; poza tem jest stożkiem albo walcem obrotowym, ponieważ linie krzywizny drugiej rodziny są kołowe. Ostatecznie, układ składa się z dwóch rodzin stożków obrotowych ortogonalnych o wspólnym wierzchołku i z kul współśrodkowych, mających swój środek w wierzchołku wspólnym, albo z dwóch rodzin walców obrotowych ortogonalnych około jednej i tej samej osi i płaszczyzn, przez tę oś przechodzących.

30. Wszystkie układy ortogonalne, składające się z cyklid, powstają przez inwersyę z układów odwracalnych. Zauważmy najprzód, że, przekształcając przez inwersyę układ odwracalny, otrzymujemy istotnie układ ortogonalny, złożony z cyklid, który w ogólności nie będzie już odwracalny. Powiadam, że, stosując inwersyę, można otrzymać wszystkie układy ortogonalne, składające się z cyklid.

W samej rzeczy, niech będzie dany taki układ. Widzieliśmy już w N⁰ 18, że każdy punkt stożkowy cyklidy, będąc kołem o promieniu równym zeru, jest również punktem stożkowym cyklidy drugiej rodziny i że należy do wszystkich cyklid trzeciej rodziny jako punkt zwyczajny. Te uwagi i wnioski, które z nich wyprowadzamy, mianowicie, że wszystkie cyklidy jednej i tej samej rodziny przechodzą przez jednę i tą samą krzywą, i że trzy krzywe, w ten sposób otrzymane, są ogniskowemi jedna drugiej, stosują się zarówno do układów nieodwracalnych.

Jeżeli rozważymy dwie cyklidy, przecinające się ortogonalnie wzdłuż koła w sąsiedztwie punktu stożkowego, to stożki, opisane na tych cyklidach wzdłuż tego koła, będą również ortogonalne. Stożki te są obrotowe, ich osią obrotu jest oś koła przecięcia tych stożków. Więc, w granicy, stożki stycznych w punkcie stożkowym dwóch cyklid będą stożkami obrotowemi dodatkowemi, mającemi przeto oś jednakową.

Niech będzie S_1 (fig. 9) punkt stożkowy wspólny dwóm cyklidom (C_2) i (C_3) dwóch ostatnich rodzin; S_1' drugi punkt stożkowy cyklidy drugiej rodziny i S_1'' punkt stożkowy cyklidy trzeciej rodziny. Zakładamy, że proste S_1S_1' i S_1S_1'' są różne. Niech będzie również S_1X oś wspólna dwóm stożkom stycznych. Nakreślmy dwa koła SS_1' i S_1S_1'', styczne do prostej S_1X. Każde z nich tworzy kąt jednakowy ze wszystkiemi kołami cyklidy odpowiedniej, przechodzącemi przez punkty S_1 i S_1' albo przez punkty S_1 i S_1''. Będziemy nazywali te koła „k o ł a m i o s i o w e m i".

Przez każde koło cyklidy (C_2), przechodzące przez S_1 i S_1', przechodzi cyklida (C_1) pierwszej rodziny, przecinająca cyklidę (C_3) wzdłuż koła, przechodzącego przez punkty S_1 i S_1'' i ortogonalnego do koła poprzedniego. Otóż, ponieważ dwa stożki stycznych o wspólnym wierzchołku S_1 są dodatkowe, to dwie tworzące prostopadłe tych dwóch stożków są w jednej płaszczyźnie z osią wspólną S_1X. Niech (ω_2) będzie jedno z kół cyklidy (C_2), przechodzące przez punkty S_1 i S_1'. Płaszczyzna, przechodząca przez prostą S_1X i styczna w punkie S_1 do koła (ω_2), przecina stożek stycznych cyklidy (C_3) wzdłuż dwóch tworzących, z których jedna jest prostopadła do stycznej koła (ω_2). Kołu (ω_2) odpowiada więc na cyklidzie (C_3) jedno jedyne koło (ω_3), przechodzące przez punkty S_1 i S_1'' i styczne do tej tworzącej, istnieje zatem cyklida (C_1), przechodząca przez koła (ω_2) i (ω_3).

Dwa koła osiowe, będąc styczne do siebie, są położone na jednej i tej samej kuli (Σ), która może sprowadzać się do płaszczyzny, i której płaszczyzna styczna w punkcie S_1 przechodzi przez prostą S_1X. Kula ta, jako przechodząca przez dwa punkty stożkowe każdej z dwóch cyklid (C_2) i (C_3), przecina każdą z nich wzdłuż dwóch kół (N° 13): (ω_2'), (ω_2''); (ω_3'), (ω_3''), które są parami ortogonalne, ponieważ płaszczyzna styczna do kuli (Σ) przechodzi przez prostą S_1X. Naprzykład, koło (ω_2') jest ortogonalne do koła (ω_3') i koło (ω_2'') do koła (ω_3''). Oprócz tego, ponieważ płaszczyzna styczna do kuli (Σ) przechodzi przez prostą S_1X, to kula ta jest ortogonalna w punkcie S_1 do każdego z dwóch stożków stycznych, a przeto ortogonalna do każdej z dwóch cyklid (C_2) i (C_3) wzdłuż całej długości kół (ω'). Wynika stąd, że kula (Σ) jest podwójnie opisana na każdej z dwóch cyklid (C_1') i (C_1''), z których jedna przechodzi przez koła (ω_2') i (ω_3'), druga — przez koła (ω_2'') i (ω_3''). Ale cyklida nie może być opisana na jednej i tej samej kuli wzdłuż dwóch kół krzywizny różnych rodzin, nie stając się sama kulą. Więc dwie cyklidy (C_1') i (C_1'') sprowadzają się do kuli (Σ).

W ten sposób, każda z trzech rodzin cyklid zawiera jednę kulę. Te trzy kule są ortogonalne i każda z nich jest ortogonalna do wszystkich cyklid każdej z dwóch rodzin, do której sama nie należy. Linie ogniskowe, miejsca punktów stożkowych, są położone na każdej z tych kul.

Weźmy tedy za biegun inwersyi jeden z punktów wspólnych trzem kulom. Kule te przekształcają się wówczas na trzy płaszczyzny prostokątne, z których każda jest ortogonalna do dwóch rodzin cyklid. Są to więc płaszczyzny symetryi. Ponieważ osie cyklid są do nich prostopadłe, to one będą równoległe do krawędzi trójścianu o trzech ścianach prostopadłych, utworzonego przez te trzy płaszczyzny symetryi. Odwzorowanie kuliste układu będzie tedy odwzorowaniem kulistem układu odwracalnego, i układ sam będzie odwracalny względem samego siebie, ponieważ, dlatego, żeby układ był odwracalny, wystarcza, by jego odwzorowanie kuliste posiadało tę własność, że wszystkie linie krzywizny są kołami (N° 5).

Godzi się zauważyć, że jeżeli trzy kule mają swe punkty wspólne urojone, inwersya i układ odwracalny są również urojone.

31. Przypadki szczególne. Załóżmy teraz, że trzy punkty S_1, S_1', S_1'' są w linii prostej i że osią wspólną dwóch stożków stycznych o wierzchołku S_1 jest prosta S_1X, różna od prostej S_1, S_1', S_1''. Stożek stycznych w punkcie S_1 jest symetryczny względem płaszczyzny symetryi, zawierającej oś pierwiastną $S'S_1'$. Więc jego oś OX jest położona w tej płaszczyźnie. Otóż płaszczyzna (P), zawierająca dwie proste $S_1S_1'S_1''$ i S_1X, jest płaszczyzną symetryi, wspólną dwóm cyklidom (C_2) i (C_3), i dwa koła osiowe są położone w tej płaszczyźnie, która zastępuje kulę ustępu poprzedniego. Rezultat nie uległ zmianie.

Przyjmijmy wreszcie, że oś S_1X zlewa się z prostą $S_1S_1'S_1''$ i że ta osobliwość zachodzi dla dwóch cyklid dowolnych dwóch ostatnich rodzin, aby uniknąć powtórzenia rozumowania poprzedniego przez obranie dwóch innych cyklid.

Widzimy wówczas bezpośrednio, że dwa koła osiowe są zastąpione przez prostą $S_1S_1'S_1''$. Koła nieskończenie małe, położone w sąsiedztwie z punktem S_1, mają swoje płaszczyzny równoległe, co odsuwa w nieskończoność jednę z osi pierwiastnych cyklidy. Otóż, wszystkie cyklidy dwóch ostatnich rodzin są obrotowe i obrót ten dokonywać się winien około tej samej osi, ponieważ cyklidy te przecinają się wzdłuż równoleżników. Rodzina trzecia składa się z płaszczyzn południkowych.

Jeżeli dokonamy inwersyi dowolnej, płaszczyzny południkowe stają się kulami, przechodzącemi przez koło stałe i tworzącemi przeto pęk. Równoleżniki stają się kołami ortogonalnemi do kul pęku. Te równoleżniki przechodzą więc wszystkie przez dwie kule pęku o promieniu równym zeru, i wszystkie cyklidy dwóch ostatnich rodzin mają dwa punkty stożkowe wspólne. Tę samą własność posiadały więc i cyklidy pierwotne; wówczas inwersya, mająca za biegun jeden z tych punktów stożkowych, daje dwie rodziny stożków obrotowych ortogonalnych i kule spółśrodkowe, co w gruncie rzeczy stanowi jeszcze układ odwracalny.

32. Układy ortogonalne, posiadające jednę rodzinę kul i dwie rodziny cyklid. Jeżeli zastosujemy inwersyę, wychodząc z układu odwracalnego ogólnego, znajdziemy układ ortogonalny, złożony z trzech rodzin cyklid z trzema krzywemi ogniskowemi, położonemi na trzech kulach, z których jedna, dwie lub trzy mogą stawać się płaszczyznami. Jedyne przypadki szczególne, które należy rozpatrzyć, są te, w których jedna albo dwie rodziny sprowadzają się do kul lub do płaszczyzn. Zamiast otrzymywania ich przez inwersyę z układu ortogonalnego, dogodniej badać je wprost. Zważmy z początku, że wszystkie kule jednej i tej samej rodziny tworzą pęk, ponieważ każda z nich jest ortogonalna do nieskończonej liczby kul, z których każda jest opisana na jednej z cyklid dwóch innych rodzin. Poza tem, każde koło krzywizny cyklidy dowolnej musi być ortogonalne do wszystkich kul pęku, i wskutek tego musi przechodzić przez dwa wierzchołki tego pęku; wynika stąd, że wszystkie cyklidy mają za płaszczyznę symetryi płaszczyznę pierwiastną pęku kul. Wreszcie, cyklidy muszą przecinać tę płaszczyznę pierwiastną wzdłuż sieci ortogonalnej. Można więc zbudować układ ortogonalny, jak następuje:

Nakreślmy w płaszczyźnie (P) sieć ortogonalną, złożoną bądź z kół, bądź z prostych, i weźmy dwa punkty A i B rzeczywiste lub urojone, symetryczne względem płaszczyzny P. Jakakolwiek cyklida jednej z dwóch pierwszych rodzin będzie miejscem kół, przechodzących przez punkty A i B i opierających się na jednej z linij sieci. Rodzina trzecia jest to pęk kul, zawierający punkty A i B, jako kule o promieniu równym zeru. Zauważyć należy, że cyklidy dwóch pierwszych rodzin przecinają płaszczyznę (P) wzdłuż drugiej sieci, która jest odwrotnością pierwszej względem spodka H prostej AB na płaszczyźnie P według modułu, równego $-\overline{HA}^2$.

Jeżeli sieć składa się z dwóch pęków kół, to, biorąc za biegun inwersyi jeden z wierzchołków tego pęku, przekształcimy ją na sieć, składającą się z kół spółśrodkowych z ich promieniami, i otrzymamy rodzinę cyklid rzędu trzeciego. Jeżeli sieć jest utworzona z prostych prostokątych, to wszystkie cyklidy będą rzędu trzeciego; otrzymamy przypadek szczególny układu odwracalnego, omówiony już w ust. 27.

Uwydatnijmy teraz inwersye rzeczywiste i urojone, czego dotychczas nie uczyniliśmy.

Jeżeli punkty A i B są rzeczywiste, będziemy mogli obrać jeden z nich za biegun inwersyi i układ przekształci się na układ rzeczywisty, utworzony ze stożków obrotowych ortogonalnych o wspólnym wierzchołku i z kul spółśrodkowych.

Jeżeli punkty A i B zlewają się w punkcie H, każda cyklida jest miejscem rodziny kół stycznych w punkcie H do prostej, prostopadłej do płaszczyzny (P), i inwersya daje układ walców obrotowych ortogonalnych, których tworzące są równoległe z płaszczyznami prostopadłemi do tych tworzących.

Jeżeli, wreszcie, punkty A i B są urojone, to wszystkie kule pęku przecinają płaszczyznę (P) wzdłuż jednego i tego samego koła. Biorąc za biegun inwersyi punkt tego koła, przekształcimy układ na inny układ, zawierający dwie rodziny cyklid obrotowych około tej samej osi (pierścienie kołowe lub stożki) z ich płaszczyznami południkowemi.

33. Układy, zawierające dwie rodziny kul. Podobny układ otrzymamy, jeżeli oś pierwiastna jednego z pęków kół ortogonalnych przechodzi przez punkt H, i jeżeli potęga tego punktu H względem kół pęku jest równa $-\overline{HA}^2$. Ten układ wynika wogóle w inwersyi układu, składającego się: 1^0 ze stożków obrotowych około tej samej osi, mających wspólny wierzchołek S; 2^0 z płaszczyzn, przechodzących przez tę oś; 3^0 z kul o środku S. Ale inwersya przeciwna jest rzeczywista tylko wtedy, kiedy punkty A i B są rzeczywiste. Jeżeli te punkty są urojone, układ przekształca się na układ obrotowy, wyznaczony przez obrót sieci dwóch pęków kół ortogonalnych około osi jednego z tych pęków. Jeden z pęków kół daje kule, drugi pierścienie kołowe, i układ uzupełnia się przez płaszczyzny południkowe.

Jeżeli, wreszcie, punkty A i B zlewają się, układ odwrotny zawiera walce obrotowe o wspólnej osi, ich płaszczyzny południkowe i płaszczyzny ich przekrojów prostych.

ROZDZIAŁ VI.

34. Oś stożka stycznych w punkcie stożkowym cyklidy, stanowiącej część układu potrójnie ortogonalnego, jest styczna do krzywej ogniskowej, przechodzącej przez ten punkt. Kończę pracę niniejszą kilkoma uwagami, dotyczącemi układów ortogonalnych, składających się z cyklid.

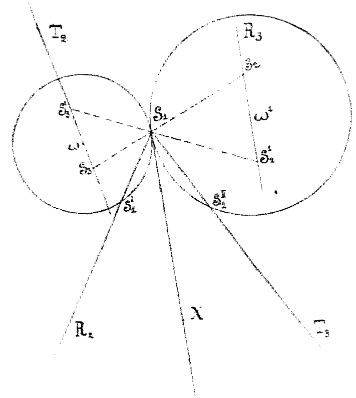

Fig. 9.

Niech będzie S_1 (fig. 9 i 10) punkt stożkowy, wspólny dwóm cyklidom (C_2) i (C_3) drugiej i trzeciej rodzin; (R_2)-oś pierwiastna cyklidy (C_2), przechodząca przez punkt S_1, na której znajduje się inny punkt stożkowy S_1'; (T_3)-oś pierwiastna cyklidy (C_3), przechodząca przez punkt S_1, na której znajduje się inny punkt stożkowy S_1''. Koła osiowe dwóch cyklid przechodzą odpowiednio przez punkty S_1 i S_1' i przez punkty S_1 i S_1'' i są styczne do jednej i tej samej prostej S_1X, która jest osią wspólną dwóch stożków obrotowych, stycznych do każdej z dwóch cyklid w punkcie S_1. Kula, która je zawiera, stanowi część pierwszej rodziny; ta kula jest styczna do prostej S_1X i zawiera ogniskową, przez którą przechodzą wszystkie cyklidy tej pierwszej rodziny, z których to cyklid każda przecina cyklidy (C_2) i (C_3) odpowiednio wzdłuż dwóch kół ortogonalnych, przechodzących jedno przez punkt S_1 i S_1', drugie — przez punkty S_1 i S_1''.

Płaszczyzna styczna w punkcie S_1 do jednej z tych cyklid (C_1) musi być normalna do każdego z dwóch stożków o wierzchołku S_1, odpowiednio stycznych do dwóch cyklid (C_2) i (C_3). Więc ta płaszczyzna przechodzi przez ich oś wspólną S_1X. Otóż, prosta S_1X jest styczna do wszystkich cyklid (C_1), a więc i do ogniskowej, przez którą przechodzą wszystkie te cyklidy.

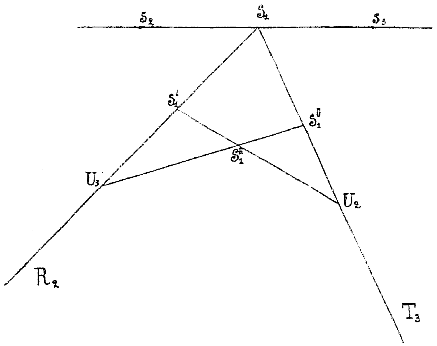

Fig. 10.

35. Miejsca osi pierwiastnych; obwiednia płaszczyzn symetryi cyklid jednej i tej samej rodziny. Płaszczyzna (P), prostopadła do prostej S_1X w punkcie S_1, zawiera koło o promieniu zero S_1, wspólne obu cyklidom (C_2) i (C_3). więc ta płaszczyzna zawiera również drugą oś pierwiastną (T_2) cyklidy (C_2); (fig. 9 i 10). Ale oś (T_2) znajduje jeszcze w płaszczyźnie, prostopadłej do prostej S_1S_1', w środku tej ostatniej, i płaszczyzna ta przechodzi, jak i płaszczyzna (P), przez środek ω koła osiowego cyklidy (C_1). Więc oś (T_2) jest prostopadła do płaszczyzny $S_1S_1'X'$ tego koła osiowego i przechodzi przez jego środek ω. Dla tej samej przyczyny druga oś pierwiastna (R_3) cyklidy (C_3) przechodzi przez środek ω' koła osiowego S_1S_1'' i jest prostopadła do jego płaszczyzny. Więc te dwie osie przechodzą przez środek kuli (U_1), która zawiera dwa koła osiowe i która jest kulą, należącą do pierwszej rodziny.

Tak samo, oś pierwiastna (R_2) przechodzi przez środek kuli (U_3), należącej do trzeciej rodziny. Na tej osi pierwiastnej znajdują się dwa punkty stożkowe S_1 i S_1', które oba leżą na ogniskowej (F_1), położonej na kuli (U_1). Ta ogniskowa jest krzywą rzędu czwartego, ponieważ jest linią przecięcia kuli i cyklidy. Proste (R_2), przechodząc wszystkie przez środek kuli (U_3), tworzą stożek, którego każda tworząca przecina krzywą ogniskową w dwóch punktach. Więc ten stożek jest rzędu drugiego i krzywa ogniskowa (F_1) jest linią przecięcia kuli (U_1) i stożka.

Ta sama krzywa ogniskowa jest również linią przecięcia kuli (U_1) i stożka, utworzonego przez oś (T_3), który ma swój wierzchołek w środku kuli (U_2).

Wynika stąd, że te dwa stożki mają swe płaszczyzny symetryi równoległe i nawet, że mają swoje cztery tworzące izotropowe odpowiednio równoległe.

Płaszczyzna symetryi cyklidy (C_2), przechodząca przez oś pierwiastną (R_2), zawiera oś stożka stycznych S_1X; ale prosta S_1X jest styczna do krzywej ogniskowej (F_1), położonej na stożku, utworzonym przez oś pierwiastną (R_2). Więc płaszczyzna symetryi, o której jest mowa, jest styczna do stożka, utworzonego przez oś (R_2).

Z tej samej przyczyny, płaszczyzna symetryi cyklidy (C_2), przechodząca przez (T_2), obwija stożek opisany przez oś (T_2), który ma swój wierzchołek w środku kuli (U_1). Oprócz tego, ta płaszczyzna symetryi jest prostopadła do osi (R_2). Więc stożek, który ta płaszczyzna obwija, jest stożkiem dodatkowym stożka (R_2), mającym swój wierzchołek w środku kuli (U_1). Dwa stożki (R_2) i (T_2) są więc dodatkowe, mają przeto płaszczyzny symetryi równoległe. Ostatecznie:

Miejsca osi pierwiastnych cyklid składają się z sześciu stożków rzędu drugiego, po dwa dla każdej z trzech rodzin. Te stożki mają parami jednakowy wierzchołek, który jest środkiem jednej z trzech kul układu. Dwa stożki, które odpowiadają jednej i tej samej rodzinie cyklid, są dodatkowe. Te stożki w liczbie sześciu mają płaszczyzny symetryi równoległe. Wreszcie, płaszczyzny symetryi cyklid są to płaszczyzny styczne do sześciu stożków, każda wzdłuż tworzącej odpowiadającej.

36. Kierownice krzywych ogniskowych. Wszelki punkt G jednej z trzech ogniskowych (F_1) jest ogniskiem każdej z dwu innych; innemi słowy, kula o promieniu równym zeru G jest podwójnie styczna do każdej z ogniskowych (F_2) i (F_3). Nazywam „kierownicą" ogniskowej (F_2), odpowiadającą ognisku G, prostą, łączącą punkty styczności tej kuli z ogniskową (F_2).

Uważajmy punkt S_1 (fig. 9) za ognisko krzywej ogniskowej (F_2), położonej na kuli (U_2) i zawierającej punkty stożkowe S_2 i S_2' cyklidy (C_3), położone na osi pierwiastnej (R_3). i szukajmy kierownicy, odpowiadającej temu ognisku.

Kula o promieniu równym zeru S_1 dotyka cyklidy (C_3) wzdłuż koła o promieniu równym zeru, którego płaszczyzna jest prostopadła do prostej S_1X. Kula (U_2) przecina to koło w dwóch punktach, które są szukanemi punktami styczności. Otóż koło o promieniu równym zeru S_1 należy do rodziny kół krzywizny cyklidy (C_3), które mają za oś pierwiastną (R_3). Koło to przechodzi więc przez dwa punkty stożkowe S_2 i S_2'' (fig. 9, na której przedstawiono schematycznie elementy urojone), położone na tej osi. Te punkty, będąc położone na kuli (U_2), są szukanemi punktami styczności, kierownicą jest prosta (R_3). Tak samo przekonamy się, że drugiemu punktowi stożkowemu S_1'' cyklidy (C_3), położonemu na osi (T_3), odpowiada ta sama oś pierwiastna (R_3). Więc:

Każdemu z punktów stożkowych jednej i tej samej cyklidy, położonych na jednej i tej samej osi pierwiastnej, odpowiada na krzywej ogniskowej, zawierającej dwa inne punkty stożkowe tej samej cyklidy, jedna i ta sama kierownica, która jest drugą osią pierwiastną tej samej cyklidy.

Zauważmy, że koło o promieniu równym zeru S_1 składa się z dwóch prostych izotropowych S_1S_2, S_1S_1', prostopadłych do prostej S_1X. Tak samo, oś S_2X_2 stożka, stycznego do cyklidy (C_3) w punkcie S_2, jest również prostopadła do prostej S_1S_2. Wreszcie, prosta izotropowa jest prostopadła do siebie samej. Więc proste S_1X_1, S_2X_2 i S_1S_2 leżą w jednej i tej samej płaszczyźnie, co dowodzi, że osie dwóch stożków spotykają się. Rozważając dwa inne punkty stożkowe cyklidy (C_3), wnosimy z łatwością, że cztery osie stożków obrotowych, stycznych do cyklidy w czterech punktach stożkowych, przechodzą przez jeden i ten sam punkt linii przecięcia dwóch płaszczyzn symetryi.

37. Grupa sześciu cyklid. Wszystkie cyklidy układu ortogonalnego dzielą się na grupy, z sześciu cyklid każda, tak że dwie cyklidy jakiekolwiek jednej i tej samej grupy mają punkt stożkowy wspólny.

Rozważajmy zawsze punkt stożkowy S_1, wspólny dwóm cyklidom (C_2) i (C_3). Cyklida (C_2) posiada dwa inne punkty stożkowe S_3 i S_3', położone na jej osi pierwiastnej (T_2). Tak samo cyklida (C_3) posiada na swojej drugiej osi pierwiastnej (R_3) dwa punkty stożkowe S_2 i S_2'. Koło o promieniu równym zeru S_1, wspólne dwóm cyklidom (C_2) i (C_3), musi przechodzić przez cztery punkty stożkowe S_3, S_3', S_2 i S_2'; ale ono składa się z dwóch prostych izotropowych, przechodzących przez punkt S_1. Jest więc konieczne, aby te cztery punkty były parami w jednej prostej z punktem S_1. Naprzykład, jedna z prostych izotropowych jest $S_1S_2S_3$, a druga $S_1S_2'S_3'$.

Rozpatrzmy teraz cyklidę (C_1), która ma jeden punkt stożkowy w S_3, wspólny z cyklidą (C_2). Ta cyklida posiada na swojej drugiej osi pierwiastnej dwa inne punkty stożkowe σ_2 i σ_2'; dowiedziemy, jak wyżej, że jeden z tych punktów, σ_2, naprzykład, jest położony na prostej izotropowej S_1S_3. Ale S_1 leży na ogniskowej (F_1), S_2 — na ogniskowej (F_2), S_3 — na ogniskowej (F_3) i σ_2 — na ogniskowej (F_2); punkty σ_2 i S_2 leżą więc oba na kuli (U_2). Otóż, prosta izotropowa S_1S_3 spotyka kulę (U_2) tylko w jednym punkcie. w odległości skończonej; punktem tym jest punkt S_2. Więc σ_2 zlewa się z S_2, i cyklida (C_1), która już miała punkt stożkowy wspólny z cyklidą (C_2), ma inny punkt wspólny z cyklidą (C_3). Wogóle, jeżeli dwie cyklidy różnych rodzin mają punkt stożkowy wspólny, to każda cyklida trzeciej rodziny, mająca punkt stożkowy wspólny z jedną z dwóch cyklid, ma również punkt wspólny z drugą cyklidą.

Albo jeszcze: Jeżeli dwie cyklidy różnych rodzin mają każda punkt stożkowy wspólny z cyklidą trzeciej rodziny, to one mają punkt stożkowy wspólny.

Zanim pójdziemy dalej, zauważmy, że dwie cyklidy tej samej rodziny nie mogą mieć punktu stożkowego wspólnego, należącego do tej samej rodziny linij krzywizny. Istotnie, osie pierwiastne dwóch cyklid, mających punkt wspólny S_1, musiałyby przechodzić przez środek jednej i tej samej kuli; więc przystawałyby do siebie. Ale ta oś pierwiastna spotyka tylko w dwóch punktach kulę U_1; na tej to osi znajdują się punkty stożkowe o wskaźniku 1. Więc dwie cyklidy miałyby nie jeden, ale dwa punkty stożkowe wspólne na tej samej osi; wówczas, wskutek ortogonalności z cyklidami dwóch innych rodzin, stożki stycznych w każdym z tych punktów stożkowych byłyby identyczne i dwie cyklidy przystawałyby do siebie.

Istnieją dwie cyklidy rodziny pierwszej (C_1) i (C_1'), które mają punkt stożkowy wspólny z cyklidą (C_2), naprzykład, cyklida (C_1) ma punkt stożkowy wspólny S_3, i cyklida (C_1') — punkt S_3'. Te dwie cyklidy mają również punkt stożkowy wspólny z cyklidą (C_3), mianowicie: cyklida (C_1) ma punkt S_2, i cyklida (C_1') ma punkt S_2'. Rozpatrzmy teraz dwie cyklidy (C_1) i (C_2), które mają punkt stożkowy wspólny S_3. Istnieje druga cyklida (C_2'), która ma punkt stożkowy wspólny S_3'' z cyklidą (C_1), i, ponieważ cyklida (C_1) ma punkt wspólny z cyklidą (C_3), to cyklida (C_2') ma również punkt wspólny z cyklidą (C_3), który, będąc położony na ogniskowej (F_1), może być tylko albo punktem S_1, albo punktem S_1''. Ale to nie może być punkt S_1, ponieważ wówczas cyklidy (C_2) i (C_2') miałyby punkt stożkowy wspólny.

Tak samo rozpatrujemy dwie cyklidy (C_1) i (C_3), które mają punkt stożkowy wspólny S_2. Istnieje druga cyklida (C_3'), która ma punkt stożkowy S_2'', wspólny z cyklidą (C_1), i, ponieważ cyklida (C_1) ma punkt stożkowy wspólny z cyklidą (C_2), to cyklida (C_3') ma punkt stożkowy wspólny z cyklidą (C_2), którym to punktem może być tylko punkt S_1'.

Można tedy ułożyć tabelkę poniższą, w której dla skrócenia pomijamy nawiasy, i w której symbol $\longrightarrow$ oznacza: „mają punkt stożkowy wspólny, którym jest":

$$
\begin{array}{llll}
C_2C_3 \longrightarrow S_1, & C_2'C_3 \longrightarrow S_1, & C_2'C_3 \longrightarrow S_1'', & C_2C_3' \longrightarrow S_1', \\
C_3C_1 \longrightarrow S_2, & C_3C_1' \longrightarrow S_2', & C_3'C_1 \longrightarrow S_2, & C_3'C_1 \longrightarrow S_2'', \\
C_1C_2 \longrightarrow S_3, & C_1'C_2 \longrightarrow S_3', & C_1C_2' \longrightarrow S_3'', & C_1C_2 \longrightarrow S_3.
\end{array}
$$

Widzimy, że cyklidy (C_2') i (C_3') mają każda punkt stożkowy wspólny z cyklidą (C_1). Więc te cyklidy mają punkt stożkowy wspólny, który oznaczmy przez S_1''' co pozwala uzupełnić tabelkę powyższą w ten sposób:

$$C_2' C_3' \longrightarrow S_1''',$$
$$C_3' C_1 \longrightarrow S_2'',$$
$$C_1 C_2' \longrightarrow S_3''.$$

Rozpatrzmy wreszcie cyklidę (C_1') która z cyklidą (C_2) ma punkt stożkowy wspólny S_3'. Istnieje druga cyklida (C_2''), która z cyklidą (C_1') ma inny punkt stożkowy wspólny S_3; ponieważ cyklida (C_1') ma z cyklidą (C_3) punkt wspólny, to cyklida (C_2'') ma również punkt wspólny z cyklidą (C_3). Tym punktem może być tylko punkt S_1 albo S_1'; ale to nie może być punkt S_1, ponieważ wówczas cyklida (C_2'') zlewałaby się z cyklidą (C_2), i ta cyklida (C_2) miałaby z cyklidą (C_1) dwa punkty stożkowe wspólne S_3' i S_3. Więc to jest punkt S_1', i cyklida (C_2'') zlewa się z cyklidą (C_2').

Tak samo dowiedlibyśmy, że wszelka cyklida, mająca punkt stożkowy wspólny z jedną z trzech cyklid (C') i różna od cyklid (C), zlewa się z inną z cyklid (C').

Otóż, grupę stanowi sześć cyklid (C_1), (C_2), (C_3), (C_1'), (C_2'), (C_3'), i można uzupełnić tabelki powyższe, jak następuje:

$$\begin{array}{lll} C_2' C_3 \longrightarrow S_1'', & C_2 C_3' \longrightarrow S_1', & C_2' C_3' \longrightarrow S_1''', \\ C_3 C_1' \longrightarrow S_2', & C_3' C_1' \longrightarrow S_2''', & C_3' C_1' \longrightarrow S_2''', \\ C_1' C_2' \longrightarrow S_3''', & C_1' C_2 \longrightarrow S_3', & C_1' C_2' \longrightarrow S_3''', \end{array}$$

co istotnie pokazuje, że sześć cyklid tworzy grupę, dzielącą się na osiem podgrup trzech cyklid. Trzy punkty S, należące do jednej i tej samej podgrupy, są położone na jednej i tej samej prostej izotropowej.

38. Dwanaście osi pierwiastnych i trzy czworoboki płaskie. Sześć cyklid grupy posiada dwanaście osi pierwiastnych.

Wszystkie te osie pierwiastne muszą przechodzić przez jeden lub drugi ze środków trzech kul (U_1), (U_2), (U_3). Chociaż proste izotropowe są urojone, przedstawiamy je schematycznie na figurze 10. Jeżeli rozważymy punkty stożkowe o wskaźniku 1, wspólne dwom cyklidom o wskaźnikach 2 i 3, jako to punkty S_1, S_1', S_1'', S_1''', przekonamy się, że cztery osie pierwiastne $S_1 S_1'$, $S_1'' S_1'''$, należące do cyklid (C_2) i (C_2'), i osie $S_1 S_1''$, $S_1' S_1'''$, należące do cyklid (C_3) i (C_3'), są położone w jednej i tej samej płaszczyźnie. Cztery punkty S_1, S_1', S_1'', S_1''' są w ten sposób czterema wierzchołkami

czworoboku płaskiego, wpisanego w ogniskową (F_1), którego boki przeciwległe przecinają się w środkach kul (U_2) i (U_3). W ten sposób istnieją trzy takie czworokąty. Przez każdy z wierzchołków każdego z tych czworokątów przechodzą dwie proste izotropowe, z których każda przechodzi przez dwa wierzchołki pozostałych czworokątów, co stanowi osiem prostych izotropowych, zawierających dwanaście punktów stożkowych.

Przez środek kuli U_1 przechodzą cztery osie pierwiastne, z których dwie należą do jednej rodziny i dwie do jednej innej. Tworząc możliwe kombinacye z temi, które nie należą do jednej i tej samej rodziny, zaajdujemy cztery płaszczyzny, zawierające każda dwie proste izotropowe. W ten sposób istnieje dwanaście płaszczyzn, z których każda zawiera dwie proste izotropowe.

Styczna do krzywej ogniskowej, która zawiera punkt S_1, jest w tym punkcie, jak to widzieliśmy w ust. 35, prostopadła do każdej z dwóch prostych izotropowych, przechodzących przez punkt S_1. Ponieważ prosta izotropowa jest prostopadła do siebie samej, wnioskujemy stąd, że styczne do krzywych ogniskowych w trzech punktach w linii prostej S_1, S_2, S_3 są położone w jednej i tej samej płaszczyźnie.

Każda z trzech ogniskowych jest linią podwójną powierzchni liniowej, miejscem prostych izotropowych S_1, S_2, S_3, ponieważ w każdym punkcie S_1 jednej z tych ogniskowych powierzchnia liniowa posiada dwie płaszczyzny styczne, które są wyznaczone przez styczną do ogniskowej i każdą z tworzących izotropowych. Otóż można wyznaczyć rząd tej powierzchni liniowej, rozumiejąc, jak następuje.

Linia przecięcia powierzchni z płaszczyzną w nieskończoności sprowadza się do koła w nieskończoności; lecz, ponieważ rząd powierzchni koniecznie musi być większy od 2, przeto koło to jest linią wielokrotną. Stopień szukany jest więc parzysty. Załóżmy, że jest on równy $2n$. Koło w nieskończoności jest linią n-krotną. Powierzchnia musi przecinać kulę U_1 wzdłuż krzywej rzędu $4n$. Otóż przecięcie składa się: 1° z krzywej ogniskowej, linii podwójnej powierzchni liniowej; ta linia, jako krzywa stopnia czwartego, musi w rachunku być uwzględniona jako krzywa stopnia ósmego; 2° z koła w nieskończoności, które w rachunku stopnia musi liczyć $2n$ jedności, ponieważ jest stopnia drugiego i zarazem linią n-krotną. Mamy więc równanie

$$8 + 2n = 4n,$$

skąd $2n = 8$. Powierzchnia liniowa, miejsce prostych izotropowych, jest rzędu ósmego.

Jeżeli układ jest odwracalny, to trzy kule są zastąpione przez trzy płaszczyzny prostokątne, które obierzemy za płaszczyzny spółrzędnych. Wobec symetryi układu, trzy czworokąty punktów stożkowych stają się prostokątami, położonemi w tych płaszczyznach spółrzędnych, mającemi swój środek w punkcie początkowym i boki, równoległe do osi spółrzędnych. Grupa sześciu cyklid składa się z trzech cyklid i z cyklid symetrycznych z powyższemi, każda względem płaszczyzny spółrzędnych, która to płaszczyzna nie jest dla tej cyklidy płaszczyzną symetryi. Sześć pierścieni kołowych, które służyły nam za punkt wyjścia przy budowie układu odwracalnego, stanowi jednę z tych grup.

RÉSUMÉ.

Sur les systèmes réversibles des surfaces triplement orthogonales.

Les systèmes réversibles des surfaces triplement orthogonales ce sont ceux pour lesquels le mouvement relatif du trièdre des axes de coordonnées par rapport au trièdre des trois normales engendre un nouveau système orthogonal dont les axes ainsi déplacés sont les trois normales. Les surfaces qui constituent ce système sont des cyclides de Dupin. Les systèmes réversibles ont été étudiés pour la première fois par M. G. Darboux qui a publié vers la fin de 1913 dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences quelques Notes relatives à ces systèmes.

Je me suis proposé dans ce travail d'étudier la même question par les procédés de la géométrie pure, et je suis parvenu à retrouver par ce moyen, et sans aucun calcul, un grand nombre des résultats obtenus par M. Darboux. J'ai fait la discussion des différentes formes que peut affecter le système réversible, et j'ai démontré que tous les systèmes orthogonaux composés exclusivement de cyclides dérivent par inversion d'un système réversible. J'ai ajouté quelques remarques sur ces systèmes.

J'emploie la méthode Darboux-Combescure qui consiste, comme on le sait, à partager le problème en deux parties. On étudie d'abord le mouvement à trois paramètres, autour d'un sommet fixe, d'un trièdre trirectangle dont les arrêtes sont parallèles aux normales aux trois surfaces, et ensuite on cherche à déterminer la translation de ce trièdre de manière que, dans la variation de chacun des trois paramètres, le sommet engendre une des surfaces du système.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ IV.

ROZDZIAŁ V.

ROZDZIAŁ VI.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=x_0}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$.

Sur la relation entre l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=x_0}$ et la continuité de la fonction $f(x)$.

Zadaniem noty niniejszej jest dowód następującego twierdzenia:

Dla każdego naturalnego $n>2$ znaleść można funkcyę $f(x)$ mierzalną i ograniczoną, nieciągłą w punkcie x_0, a przytem taką, że granica:

$$\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x}\right)_{x=x_0} \tag{I}$$

istnieje.

Zagadnienie istnienia takiej funkcyi zostało postawione przez p. Sierpińskiego[1] i rozwiązane dla szczególnych przypadków, mianowicie dla $n=2$ przecząco przez p. Sierpińskiego[2], zaś dla $n=3$ twierdząco przezemnie.[3]

Pomijając przypadek $n=3$, zakładamy, że

$$p_1=2,\quad p_2,\quad p_3,\ldots,\quad p_m \tag{1}$$

jest ciągiem liczb pierwszych nie większych od n, uporządkowanych według wielkości. Każdej liczbie naturalnej $k\leqq n$ można przyporządkować jeden i tylko jeden ciąg liczb nieujemnych, całkowitych:

---

[1]) Prace mat.-fiz. t. **26**, str. 127.
[2]) l. c.
[3]) Prace mat.-fiz. **26**, str. 215