S. STRASZEWICZ.

Przyczynek do teoryi mnogości wypukłych.

Beitrag zur Theorie der convexen Punktmengen.

Prof. W. Sierpiński dowiódł niedawno pewnej własności najmniejszego obszaru wypukłego, zawierającego daną mnogość płaską. [1]

W artykule niniejszym podaję dowody kilku innych twierdzeń, dotyczących tegoż obszaru, które stanowiły treść referatu, wygłoszonego w styczniu 1914 w Colloquium matematycznem w Zurychu. Między innemi podaję dowód wspomnianego twierdzenia prof. Sierpińskiego również dla mnogości w przestrzeni.

Dla większej prostoty i jasności rozważam jedynie mnogości płaskie i trójwymiarowe; uogólnienie dla przestrzeni n-wymiarowej jest widoczne bezpośrednio.

Z tego samego względu zakładam, że mnogości dane są zamknięte i leżą w obszarze skończonym, co jednak nie stanowi istotnego ograniczenia.

Na wstępie przypominam kilka podstawowych określeń i twierdzeń o mnogościach wypukłych.

§ 1. Mnogości wypukłe na płaszczyźnie. [2]

Mnogość (M) punktów, leżących na płaszczyźnie, będziemy nazywali wypukłą, jeżeli posiada następujące trzy własności:

1°. Leży w obszarze skończonym, t. j. istnieje pewna skończona granica wyższa wzajemnych odległości punktów tego zbioru. Będziemy tę granicę wyższą oznaczali przez d i nazywali średnicą mnogości (M).

---

[1]) „Wektor", rok III, № 6, str. 268.

[2]) Por. H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen Bd. 2.

2^0. Jest zamknięta, t. zn. każdy punkt skupienia mnogości (M) należy do niej.

3^0. Jeżeli A i B są punktami mnogości (M), to wszystkie punkty odcinka $\overline{AB}$ należą również do (M).

Z określenia mnogości wypukłej wynika, że mnogość punktów wspólnych dowolnej prostej z mnogością wypukłą jest albo próżna (t. j. nie zawiera ani jednego punktu), albo zawiera jeden punkt, albo wreszcie jest pewnym skończonym odcinkiem.

Punkt A mnogości (M) nazywa się punktem wewnętrznym, jeżeli istnieje taki odcinek δ, że wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od A jest mniejsza od δ, należą również do mnogości (M).

Wszelki punkt mnogości (M), który tej własności nie posiada, nazywa się punktem brzegowym. W dowolnej bliskości punktu brzegowego istnieją zatem punkty, nie należące do mnogości (M).

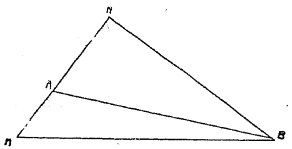
Zbiór punktów brzegowych mnogości (M) nazywa się brzegiem mnogości (M).

Twierdzenie 1. Mnogość wypukła, nie posiadająca punktów wewnętrznych, leży na jednej prostej, t. j. stanowi punkt albo odcinek.

W rzeczy samej, gdyby mnogość wypukła (M) zawierała trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej prostej, to musiałaby według określenia zawierać również wszystkie punkty pola trójkąta ABC, a więc zawierałaby punkty wewnętrzne wbrew założeniu.

Twierdzenie 2. Jeżeli A i B są punktami mnogości wypukłej (M) i przynajmniej jeden z nich, np. A, jest punktem wewnętrznym, to wszystkie punkty odcinka $\overline{AB}$, leżące pomiędzy A i B są również punktami wewnętrznemi.

Dowód. Przez punkt wewnętrzny A poprowadźmy dowolną prostą, różną od $\overline{AB}$ i obierzmy na niej po obu stronach punktu A dwa takie punty M i N, że wszystkie punkty odcinka MN należą do mnogości (M). Jest to możliwe na zasadzie określenia punktu wewnętrznego. Wówczas wszystkie punkty pola trójkąta MNB należą do mnogości (M), a więc wszystkie punkty, leżące na $\overline{AB}$ pomiędzy A i B są punktami wewnętrznemi mnogości (M).


Rys. 1.

Wniosek. Mnogość punktów wspólnych dowolnej prostej z brzegiem mnogości wypukłej jest albo próżna, albo zawiera jeden punkt, albo dwa punkty (pomiędzy któremi leżą wówczas punkty wewnętrzne mnogości wypukłej), albo pewien skończony odcinek.

Określenie. Wszelka prosta, która posiada punkty wspólne z brzegiem mnogości (M), lecz nie zawiera żadnego punktu wewnętrznego mnogości (M) nazywa się prostą podpierającą mnogości (M).

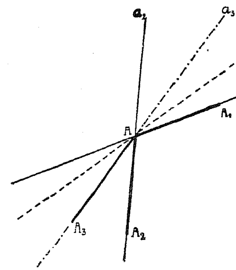
Twierdzenie 3. Jeżeli prosta a jest prostą podpierającą mnogości wypukłej (M), która nie jest punktem, ani odcinkiem, to cała mnogość (M) leży po jednej stronie prostej a (z wyjątkiem, oczywiście, punktów leżących na a).

Dowód. W rzeczy samej, gdyby po obu stronach prostej a znajdowały się punkty mnogości (M), to łącząc dowolny punkt wewnętrzny A z dowolnym punktem B mnogości (M), leżącym po przeciwnej stronie prostej a, otrzymalibyśmy w przecięciu z prostą a punkt wewnętrzny, co przeczy założeniu.

Twierdzenie 4. Przez każdy punkt brzegowy A mnogości wypukłej (M) można wykreślić przynajmniej jednę prostą podpierającą.

Dowód. Poprowadźmy przez A dwie dowolne proste a_1 i a_2; jeżeli żadna z nich nie jest prostą podpierającą, to na każdej z nich po jednej stronie punktu A mamy pewien odcinek (AA_1 i AA_2) składający się z punktów mnogości (M), po drugiej zaś niema punktów mnogości (M).

Z czterech więc kątów, utworzonych przez a_1 i a_2, dwa kąty wierzchołkowe są takie, że jedno ramię każdego z nich zawiera punkty mnogości (M), drugie zaś nie. Podzielmy te kąty na połowy, zapomocą dwusiecznej a_3. Jeżeli a_3 nie jest prostą podpierającą, to jedna para nowopowstałych kątów wierzchołkowych posiada tę samą własność, co kąty poprzednie. Dzieląc znowu te kąty na połowy, otrzymujemy prostą a_4. Jeżeli a_4 nie jest prostą podpierającą, to w ten sam sposób postępujemy dalej i otrzymujemy proste a_5, $a_6, \ldots$ i t. d. Wówczas albo jedna z prostych tego ciągu, np. a_n będzie prostą podpierającą, albo też otrzymamy ciąg nieskończony prostych $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ Z konstrukcyi użytej wynika, że ciąg ten dąży do pewnej prostej granicznej a. Jestto prosta podpierająca, gdyż w dowolnej bliskości każdego jej punktu istnieją punkty, nie należące do (M), a więc może mieć ona z (M) jedynie punkty brzegowe wspólne.


Rys. 2.

§ 2. Mnogości wypukłe w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozważania § 1 dają się bezpośrednio rozciągnąć na przestrzeń trójwymiarową. A więc tak samo, jak poprzednio (z nieznacznemi jedynie zmianami wyrazowemi), określimy pojęcie mnogości wypukłej, punktu wewnętrznego, punktu brzegowego.

Przecięcie mnogości wypukłej przestrzennej z dowolną płaszczyzną jest mnogością wypukłą płaską.

Twierdzenie 1. Mnogość wypukła, nie posiadająca punktów wewnętrznych, leży na jednej płaszczyźnie, t. j. jest punktem, odcinkiem lub mnogością wypukłą płaską.

Twierdzenie 2. Jeżeli A i B są punktami mnogości wypukłej (M) i przynajmniej jeden z tych punktów jest punktem wewnętrznym, to wszystkie punkty, leżące pomiędzy A i B, są również punktami wewnętrznemi.

Dowody tych twierdzeń otrzymamy przez bezpośrednie uogólnienie odpowiednich dowodów w § 1.

Wniosek 1. Mnogość punktów wspólnych dowolnej prostej z brzegiem mnogości wypukłej jest albo próżna, albo zawiera jeden punkt, albo dwa punkty, albo odcinek skończony.

Wniosek 2. Mnogość punktów wspólnych dowolnej płaszczyzny z brzegiem mnogości wypukłej jest albo identyczna z brzegiem przecięcia tej płaszczyzny z daną mnogością wypukłą, albo też jest identyczna z samem przecięciem mnogości wypukłej z tą płaszczyzną.

Określenia. Wszelka prosta, która posiada punkty wspólne z brzegiem mnogości wypukłej (M), lecz nie zawiera punktów wewnętrznych tej mnogości, nazywa się prostą podpierającą mnogości (M).

Wszelka płaszczyzna, posiadająca tę samą własność nazywa się płaszczyzną podpierającą mnogości (M).

Twierdzenie 3. Mnogość wypukła (M), która nie leży całkowicie na jednej płaszczyźnie, znajduje się po jednej stronie płaszczyzny podpierającej.

Dowód taki sam jak przy tw. 3 § 1.

Twierdzenie 4. W każdej płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt brzegowy A mnogości wypukłej (M), można wykreślić przez A przynajmniej jednę prostą podpierającą tej mnogości.

Dowód. Przeciągnijmy przez punkt A dowolną płaszczyznę α i oznaczmy przez (M_α) przecięcie mnogości (M) z płaszczyzną α. Punkt A może być punktem wewnętrznym mnogości wypukłej (M_α), rozważanej jako mnogość płaska, wówczas M_α składa się z samych punktów brzegowych mnogości (M) i α jest płaszczyzną podpierającą, a wszelka prosta, przechodząca przez A i leżąca w α, jest prostą podpierającą. Lub też A jest punktem brzegowym mnogości wypukłej płaskiej (M_α); w tym przypadku w punkcie A istnieje w płaszczyźnie α prosta podpierająca mnogości (M_α), która jest oczywiście również prostą podpierającą mnogości (M).

Twierdzenie 5. W każdym punkcie brzegowym A mnogości wypukłej (M) istnieje przynajmniej jedna płaszczyzna podpierająca.

Dowód. Wykreślmy w punkcie A dowolną prostą podpierającą a mnogości (M) i rozważmy pęk płaszczyzn, przechodzących przez prostą a. Jeżeli płaszczyzna α tego pęku nie jest płaszczyzną podpierającą, to z dwóch obszarów α_1, α_2, na jakie prosta a dzieli płaszczyznę α, tylko jeden może zawierać punkty mnogości (M). Możemy więc zastosować tę samę metodę co przy tw. 4 w § 1, t. j. przez kolejny dwudział kątów dwuściennych otrzymać płaszczyznę podpierającą.

§ 3. Najmniejsza mnogość wypukła, zawierająca daną mnogość płaską.

Niech (P) oznacza zamkniętą mnogość punktów, leżących na pewnym skończonym obszarze płaszczyzny, np. wewnątrz pewnego okręgu. Oznaczmy przez $C(P)$ mnogość punktów wspólnych wszystkich mnogości wypukłych, zawierających mnogość (P). Zbiór $C(P)$ nie jest próżny, albowiem zawiera napewno wszystkie punkty mnogości (P). Z definicyi wynikają wprost dwie następujące własności mnogości $C(P)$.

1⁰. Mnogość $C(P)$ jest wypukła. Jeżeli bowiem A i B są punktami mnogości $C(P)$, to należą one do każdej mnogości wypukłej, zawierającej (P); wszystkie zatem punkty odcinka $\overline{AB}$ należą również do każdej z tych mnogości, a więc i do $C(P)$.

2⁰. Żadna wypukła podmnogość mnogości $C(P)$ nie może zawierać wszystkich punktów mnogości (P).

W przeciwnym bowiem razie nie wszystkie punkty mnogości $C(P)$ byłyby wspólne wszystkim mnogościom wypukłym, zawierającym (P), co byłoby sprzeczne z określeniem mnogości $C(P)$.

Z tego względu nazwiemy mnogość $C(P)$ najmniejszą mnogością wypukłą, zawierającą zbiór (P).

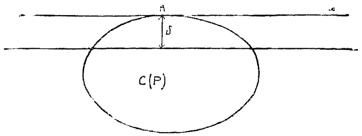
Twierdzenie 1. Jeżeli mnogość (P) zawiera mnogość (Q), to również mnogość $C(P)$ zawiera $C(Q)$.

Gdyż $C(P)$ zawiera (Q) i jest mnogością wypukłą.

Twierdzenie 2. Niech a oznacza dowolną prostą podpierającą mnogości $C(P)$. Końce odcinka wspólnego prostej a i mnogości $P(C)$ (które mogą się zbiegać w jednym punkcie) są punktami mnogości (P).

Dowód. Rozróżnimy dla większej jasności dwa przypadki.

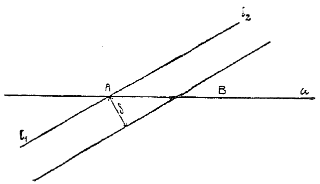
1⁰. Prosta podpierająca a posiada tylko jeden punkt wspólny A z mnogością $C(P)$. Punkt ten należy do mnogości (P). W przeciwnym razie bowiem prosta a posiadałaby od mnogości zamkniętej (P) pewną dodatnią odległość δ. Przesuńmy równolegle prostą a w tę stronę, po której leży mnogość (P) o długość δ. Prosta otrzymana a' rozcina mnogość $C(P)$ na dwie podmnogości wypukłe, z których jedna zawiera wszystkie punkty mnogości (P), a nie zawiera punktu A mnogości $C(P)$, co jest niemożliwe.



Rys. 3.

2^0. Prosta a posiada z mnogością $C(P)$ wspólny odcinek $\overline{AB}$.

Przypuśćmy, że jeden z końców tego odcinka, np. A nie należy do mnogości (P), lecz posiada od niej odległość $\delta>0$. Cała mnogość (P) leży po jednej stronie prostej a, np. po prawej, jeżeli kierunek dodatni jest od A do B.



Rys. 4.

Poprowadźmy przez prostą a dowolną prostą l, różną od a i oznaczmy przez l_1 tę jej część, która leży po prawej stronie prostej a. Pozostała część l_2 nie zawiera wówczas punktów mnogości (P). Obracając prostę l około punktu A tak, aby promień l_2 dążył do promienia AB, musimy otrzymać takie położenie prostej l, w którym promień l_1 również nie zawiera żadnego punktu mnogości (P). Gdyby bowiem takiego promienia nie było, to na prostej a na lewo od punktu A leżałyby punkty mnogości (P), co jest przeciwne założeniu. Otrzymana w ten sposób prosta l nie zawiera zatem żadnego punktu mnogości (P) i możemy dalej rozumować tak samo jak w punkcie pierwszym.

Twierdzenie 2 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Utwórzmy obecnie mnogość $(P_1)=\varphi(P)$, składającą się z punktów odcinków, łączących punkty mnogości (P), brane po dwa, t. j. taką, że każdy punkt mnogości (P_1) albo należy do (P), albo leży wewnątrz odcinka, łączącego dwa punkty mnogości (P).

Twierdzenie 3. M n o g o ś ć $(P_1)=\varphi(P)$ z a w i e r a b r z e g m n o g o ś c i $C(P)$.

Dowód. Niech A oznacza dowolny punkt brzegu mnogości $C(P)$, zaś a prostą podpierającą w tym punkcie. Z tw. 2 wynika, że A jest albo punktem mnogości (P), albo też leży wewnątrz odcinka, łączącego dwa punkty mnogości (P), czyli że punkt A należy do mnogości (P_1).

Twierdzenie 4. M n o g o ś ć $C(P)$ z a w i e r a m n o g o ś ć (P_1).

Dowód. Jeżeli A_1 jest punktem mnogości (P_1) to leży on na pewnym odcinku AB, którego końce należą do (P), a więc i do $C(P)$. Cały odcinek $\overline{AB}$ należy więc do $C(P)$.

Twierdzenie 5. M n o g o ś ć $C(P_1)$ j e s t i d e n t y c z n a z m n o g o ś c i ą $C(P)$.

Dowód. Ponieważ (P_1) zawiera (P), więc $C(P_1)$ zawiera $C(P)$; z drugiej strony, ponieważ $C(P)$ zawiera (P_1), więc $C(P)$ zawiera $C(P_1)$, stąd $C(P_1)\equiv C(P)$.

Stosując konstrukcyę, prowadzącą od (P) do (P_1) do mnogości (P_1), otrzymamy mnogość $(P_2)=\varphi(P)=\varphi\varphi(P)$.

Twierdzenie 6. M n o g o ś ć $P_2=\varphi(P_1)=\varphi\varphi(P)$ j e s t i d e n t y c z n a z n a j m n i e j s z ą m n o g o ś c i ą w y p u k ł ą, $C(P)$, z a w i e r a j ą c ą m n o g o ś ć (P).

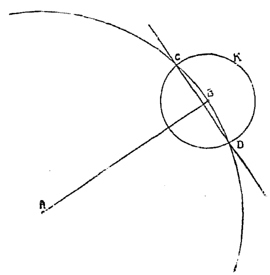
Dowód. a) Mnogość $(P_2)=\varphi\varphi(P)$ jest zawarta w mnogości $C(P)$. Gdyż (tw. 4) mnogośc (P_2) jest zawarta w mnogości $C(P_1)$.

b) Każdy punkt A mnogości $C(P)$ należy do mnogości $(P_2)=\varphi\varphi(P)$.

Gdyż jeżeli punkt A należy do brzegu mnogości $C(P)$, to należy do (P_1) (tw. 3), a więc i do (P_2); jeżeli zaś punkt A jest punktem wewnętrznym mnogości $C(P)$, to prowadząc przez A dowolną prostą, otrzymamy dwa punkty przecięcia A_1 i B_1 z brzegiem mnogości $C(P)$, pomiędzy któremi leży A. Ponieważ A_1 i B_1 należą do (P_1), więc A należy do (P_2), c. n. u.

Twierdzenie 7. M n o g o ś ć $C(P)$ p o s i a d a t ę s a m ą ś r e d n i c ę, c o m n o g o ś ć (P).

Dowód. Oznaczmy przez d_1 średnicę (t. zn. największą odległość pomiędzy dwoma punktami) mnogości $C(P)$, zaś przez d średnicę mnogości (P). Ponieważ mnogość $C(P)$ zawiera (P), więc $d_1 \geqslant d$. Przypuśćmy, że $d_1>d$ i niech A i B będą dwoma takiemi punktami mnogości $C(P)$, że długość $AB=d_1$. Wówczas conajmniej jeden z tych punktów, np. B, nie należy do mnogości (P). Możemy zatem z punktu B, jako środka, zatoczyć koło K o tak małym promieniu, że w nim również nie będzie punktów mnogości (P). Z drugiej strony wiadomo, że wszystkie punkty mnogości (P) leżą w kole, zakreślonem z punktu A promieniem AB. Przypuśćmy, że ten nowy okrąg przecina okrąg K w punktach C i D. Wówczas prosta CD rozcina mnogość $C(P)$ na dwie podmnogości wypukłe, z których jedna zawiera wszystkie punkty mnogości (P), a nie



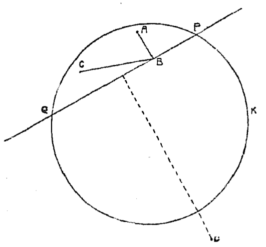
Rys. 5.

zawiera punktu B mnogości $C(P)$. Założenie $d_1 > d$ doprowadziło więc do sprzeczności.

Zatem $d_1 = d$. c. b. d. d.

Twierdzenie 8. Mnogość $C(P)$ jest identyczna z mnogością punktów wspólnych wszystkich kół, zawierających mnogość (P).[1]

Dowód. Oznaczmy przez $C_1(P)$ mnogość punktów wspólnych wszystkich kół, zawierających mnogość (P). Ponieważ koło jest też mnogością wypukłą, więc $C_1(P)$ zawiera mnogość $C(P)$. Udowodnimy, że również odwrotnie mnogość $C(P)$ zawiera mnogość $C_1(P)$. Przypuśćmy, że istnieje punkt A mnogości $C_1(P)$, nie należący do $C(P)$. Wykreślmy koło K, zawierające mnogość (P), a więc również $C(P)$ i $C_1(P)$. Oznaczmy przez B najbliższy do A punkt mnogości $C(P)$.



Rys. 6.

Wykreślmy cięciwę $PQ \perp AB$. Wówczas wewnątrz tego odcinka kołowego, który zawiera punkt A, niema punktów mnogości $C(P)$. Gdyby bowiem np. punkt C należał do $C(P)$, to cały odcinek CB należałby również do $C(P)$ i AB nie byłoby najkrótszą odległością punktu A od $C(P)$.

Jeżeli teraz wykreślimy prostopadłą ze środka PQ, to możemy na niej znaleść taki punkt O, że koło, zakreślone z punktu O promieniem OP, nie zawiera punktu A. Lecz koło to na zasadzie powyższego zawiera całą mnogość (P), więc A nie może być punktem mnogości $C_1(P)$, co przeczy założeniu.

§ 4. Mnogości w przestrzeni trójwymiarowej.

Niech (P) oznacza mnogość zamkniętą, położoną w pewnym skończonym obszarze przestrzeni trójwymiarowej. Podobnie jak w § 3, możemy określić najmniejszą mnogość wypukłą $C(P)$, zawierającą mnogość (P).

Twierdzenie 1. Przecięcie $C_\alpha(P)$ mnogości $C(P)$ z dowolną płaszczyzną podpierającą α mnogości $C(P)$ jest identyczne z najmniejszą mnogością wypukłą $C(P_\alpha)$ zawierającą przecięcie (P_α) mnogości (P) z płaszczyzną α.

[1]) Por. S. Straszewicz, O kole, opisanem na danym zbiorze punktów. „Wektor" rok 3 (1913). Z twierdzenia powyższego wynika, że mnogość $C(P)$ posiada tę samą funkcyę $r(A)$ (patrz cyt. artykuł), co mnogość (P), oraz odwrotnie, wszelka mnogość, posiadająca tę własność, zawiera się w $C(P)$.

Dowód. a) Ponieważ (P) zawiera (P_α) więc $C_\alpha(P)$ zawiera $C(P_\alpha)$.

b) Odwrotnie mnogość $C(P_\alpha)$ musi zawierać mnogość $C_\alpha(P)$. Gdyż w przeciwnym razie istniałby w płaszczyźnie α punkt A mnogości $C_\alpha(P)$, nie należący do $C(P_\alpha)$. Punkt ten posiadałby wówczas od $C(P_\alpha)$ pewną najkrótszą odległość δ i moglibyśmy wyznaczyć taki punkt B mnogości $C(P_\alpha)$, że $AB = \delta$. Poprowadźmy przez środek AB w płaszczyźnie α prostą a, prostopadłą do AB. Prosta ta dzieli płaszczyznę α na dwa obszary α_1 i α_2, z których jeden, np. α_1 zawiera punkt A, lecz nie zawiera żadnego punktu mnogości $C(P_\alpha)$.

Przypuśćmy, że mnogość (P) znajduje się po prawej stronie płaszczyzny α (po obraniu kierunku obiegu dodatniego w tej płaszczyźnie). Przesuńmy przez prostą a płaszczyznę β, i obracajmy ją dokoła prostej a tak, aby ten jej obszar β_1, który znajduje się po prawej stronie płaszczyzny α, dążył do α_1. Musimy wówczas otrzymać takie położenie płaszczyzny β (różne od płaszczyzny α), że kąt dwuścienny pomiędzy α_1 i β_1 nie zawiera żadnego punktu mnogości (P). Gdyby bowiem takiej płaszczyzny nie było, to obszar α_1 musiałby zawierać przynajmniej jeden punkt mnogości (P), a więc i mnogości $C(P_\alpha)$, co jest niemożliwe.

Płaszczyzna β rozcina wówczas mnogość $C(P)$ na dwie podmnogości wypukłe, z których jedna zawiera całą mnogość (P), a nie zawiera punktu A mnogości $C(P)$. Sprzeczność ta dowodzi naszego twierdzenia

Podobnie jak w § 3 możemy określić mnogości $(P_1) = \varphi(P)$, $(P_2) = \varphi(P_1) = \varphi\varphi(P)$ i t. d.

Twierdzenie 2. Mnogość $(P_1) = \varphi(P)$ jest zawarta w mnogości $C(P)$.

Dowód taki sam jak przy tw. 4 w § 3.

Twierdzenie 3. Mnogość $C(P_1)$ jest identyczna z mnogością $C(P)$.

Dowód patrz twierdzenie 5 w § 3.

Twierdzenie 4. Mnogość $(P_2) = \varphi\varphi(P)$ jest identyczna z mnogością $C(P)$.

Dowód. 1°. Mnogość $C(P)$ zawiera mnogość (P_2) ponieważ $C(P_1)$ zawiera $\varphi(P_1) = \varphi\varphi(P)$, zaś $C(P)_1 \equiv C(P)$.

2°. Odwrotnie mnogość (P_2) zawiera mnogość $C(P)$.

Niech A oznacza dowolny punkt mnogości $C(P)$. Jeżeli A należy do brzegu mnogości $C(P)$, to, prowadząc przez A płaszczyznę podpierającą α, sprowadzimy twierdzenie na zasadzie twierdzenia 1 do twierdzenia 6 w § 3.

Jeżeli A jest punktem wewnętrznym mnogości $C(P)$, to połączmy A z dowolnym punktem M mnogości (P) i oznaczmy przez N taki punkt brzegu mnogości $C(P)$, leżący na prostej AM, że A leży pomiędzy N i M.

Jeżeli N należy do (P) lub (P_1), to oczywiście A należy do (P_2). W przeciwnym razie poprowadźmy przez N płaszczyznę podpierającą ν i połączmy N z dowolnym punktem L mnogości (P), leżącym w płaszczyźnie ν. Na prostej NL znajduje się jeszcze jeden punkt brzegu K mnogości $C(P_\nu)$, przyczem N leży pomiędzy K i L Na zasadzie twierdzenia 1-go punkt L należy do (P_1). Zatem w trójkącie MLK, zawierającym punkt A, dwa wierzchołki należą do (P), trzeci zaś do (P_1). Stąd wynika, że wszystkie punkty tego trójkąta, a więc i A, należą do (P_2), co należało udowodnić.[1]

Podobnie, jak w § 1 możemy jeszcze dowieść dwóch własności mnogości $C(P)$.

Twierdzenie 5. Mnogość $C(P)$ posiada tę samą średnicę, co mnogość (P).

Twierdzenie 6. Mnogość $C(P)$ jest identyczna z mnogością punktów wspólnych wszystkich kul, zawierających mnogość (P).

Zusammenfassung.

Es bezeichne (P) eine abgeschlossene, in einem endlichen Bereiche des dreidimensionalen Raumes gelegene Punktmenge. Sei ferner $C(P)$ die Menge der gemeinsamen Punkte aller konvexen Punktmengen, welche die Punktmenge (P) enthalten. $C(P)$ ist also die kleinste konvexe welche die Punktmenge (P) enthält.

Über die Menge $C(P)$ werden folgende Sätze bewiesen.

1. Die Menge $C(P)$ ist identisch mit der Menge der gemeinsamen Punkte aller Kugeln welche die Punktmenge (P) enthalten.

2. Die Menge $C(P)$ besitzt den gleichen Durchmesser, wie die Menge (P), unter dem Durchmesser einer Punktmenge die obere Grenze der gegenseitigen Abstände ihrer Punkte verstanden.

3. Der Schnitt der Menge $C(P)$ mit einer ihrer Stützebenen α ist identisch mit der kleinsten konvexen Punktmenge, welche den Schnitt von (P) mit α enthält.

4. Bezeichnet $(P_1) = \varphi(P)$ die Menge der Punkte aller Strecken, die je zwei Punkte von P verbinden (Endpunkte mitgezählt), so ist die Menge $C(P)$ identisch mit der Menge $(P_2) = \varphi(P_1) = \varphi\varphi(P)$.

Alle obigen Sätze lassen eine unmittelbare Ausdehnung auf den Raum von n Dimensionen zu.

[1] Dla przestrzeni n-wymiarowej twierdzenie to brzmi: Jeżeli n czyni zadość nierówności $2^k \leqq n < 2^{k+1}$, to $P_{k+1} = \varphi^{(k+1)}(P)$ jest identyczne z $C(P)$, zaś $\varphi^{(k)}(P)$ jest naogół podmnogością właściwą mnogości $C(P)$. Patrz S. Straszewicz, Beiträge zur Theorie der konvexen Punktmengen. Dissertation, Zürich 1914.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

Przykład zbioru domkniętego, punktokształtnego, mającego punkty wspólne z każdą prostą, przecinającą pewien obszar domknięty.

Sur un ensemble fermé, punctiforme, qui rencontre toute droite passant par un certain domaine.

Przykłady zbiorów płaskich, domkniętych i punktokształtnych, mających punkty wspólne z każdą prostą, przecinającą pewien obszar, a więc zbiorów, których rzut na którąkolwiek prostą płaszczyzny zawiera odcinek, zostały podane przez Zoretti'ego i Denjoy[1]. Celem noty niniejszej jest podanie nowego przykładu takiego zbioru.

Wprowadzamy oznaczenia następujące:

Jeżeli A, B są zbiorami, wówczas symbol $A \times B$ oznacza zbiór elementów wspólnych zbiorom A i B; symbole

$$A = B, \quad A \mathrel{\ne} B, \quad A < B, \quad A \nless B$$

znaczą odpowiednio: A i B są identyczne, nie są identyczne, A zawarte jest w B, nie jest zawarte w B.

Jeżeli $\{A_i\}$, $i = 1, 2\ldots$, jest ciągiem zbiorów, wówczas $D(A_i)$ oznacza zbiór elementów wspólnych wszystkim A_i. Jeżeli wreszcie A jest zbiorem punktów, wówczas $\Gamma(A)$ oznacza zbiór prostych, mających punkty wspólne ze zbiorem A, zaś $\delta(A)$ — średnicę zbioru A, t. zn. górną granicę wzajemnych odległości jego punktów.

Twierdzenie: Niech będzie L linia łamana, zamknięta, bez punktów wielokrotnych, W — zbiór punktów, leżących na L

[1] L. Zoretti, Comptes rendus 142 p. 763 (1906); Leçons sur le prolongement analytique p. 23—24 (1911); A. Denjoy, Comptes rendus 149 p. 726 (1909); A. Schoenfliess, Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen I. p. 323—324 (1913).