Schreibt man in den Gleichungen (14) an Stelle von α, β, γ, δ bzw. $-\zeta$, -3η, 3γ, ε, so bekommt man genau die vorhin gefundenen Gleichungen (10). Die durch die Gleichungen (10) bestimmte zehngliedrige Gruppe lässt also die folgende Differentialgleichung:

$$y''' + \zeta(x y y') + 3\eta(x y y') \cdot y'' - 3\gamma(x y y') \cdot y''^2 - \varepsilon(x y y') \cdot y''^3 = 0$$

invariant.

Die vorstehenden Entwickelungen zeigen zugleich, dass die Aufgabe, die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen (10) zu finden, auf die folgende Aufgabe hinauskommt:

Die Bedingungen zu finden, denen die Funktionen α, β, γ, δ der Veränderlichen x, y, y' genügen müssen, damit es eine Berührungstransformation gibt, welche die Differentialgleichung:

$$y''' = \alpha + \beta \cdot y'' + \gamma y''^2 + \delta \cdot y''^3$$

auf die Form $y''' = 0$ zurückführt.

In Anschluss daran möge erwähnt werden, dass Herr Karl Wünschmann in seiner Inaugural-Dissertation: „Über Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen" (Greifswald, 1905) den folgenden Satz ohne Beweis ausgesprochen hat (S. 13):

„Eine Differentialgleichung dritter Ordnung lässt sich dann und nur dann auf die Form $y''' = 0$ bringen (durch Berührungstransformation), wenn y''' eine ganze Funktion dritten Grades von y'' ist, also die Form hat:

$$y''' = \chi_0(x y y') + 3\chi_1(x y y') \cdot y'' + 3\chi_2(x y y') \cdot y''^2 + \chi_3(x y y') \cdot y''^3,$$

und wenn zugleich die Bedingung für die Berührung zweier benachbarter Integralkurven eine Monge'sche Gleichung zweiten Grades ist".

ALFRED ROSENBLATT.

Sur les variétés algébriques à trois dimensions.

O rozmaitościach algebraicznych trójwymiarowych.

Quand on passe des surfaces algébriques aux variétés algébriques à un nombre plus grand que deux de dimensions, alors le nombre des invariants par rapport aux transformations birationnelles augmente vite avec le nombre de dimensions. Étant données les variétés à m dimensions on est en embarras, lesquels de ses invariants on doit prendre comme éléments de classification, pour apporter de l'ordre dans la multitude des cas possibles à priori. Mais, si l'on procède par étapes, en employant d'abord, pour étudier les invariants des variétés V_3 à trois dimensions, les inégalités et les égalités connues qui existent entre les invariants des surfaces algébriques, en se servant ensuite des relations obtenues de cette façon entre les invariants des variétés algébriques V_3 pour étudier les variétés algébriques supérieures V_4 etc., alors non seulement le nombre des cas possibles à priori pour les variétés à un nombre m quelconque de dimensions se trouve très réduit, mais on trouve aussi vite le chemin à suivre pour classifier ces variétés d'une manière naturelle, analogue à celle qui est le résultat de longues recherches concernant les surfaces algébriques.

1. Donc il faut d'abord commencer par tirer parti des égalités et inégalités bien connues de la théorie des surfaces algébriques pour étudier les variétés à trois dimensions. Déjà M. Noether, dans un travail classique[1], a jeté les fondements de cette étude en introduisant les invariants géométriques. D'abord on a le nombre des variétés adjointes découpant sur la variété donnée les surfaces canoniques K. Le nombre p de ces variétés adjointes d'ordre $n-5$, si la variété donnée est, dans un R_4, de l'ordre n,

[1] „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde". Zweiter Aufsatz. Mathematische Annalen. 8, 1874.

à été appellé par M. Noether „Raumgeschlecht". Le genre (géométrique) des surfaces canoniques K a été nommé „Flächengeschlecht" et désigné par $p^{(1)}$, le genre d'une courbe variable (supposée irréductible), intersection de deux surfaces canoniques K, a été désigné par $p^{(3)}$. Ensuite on a le nombre de points communs à trois surfaces canoniques K, nombre désigné par M. Noether par $p^{(4)}$, et le genre d'une courbe canonique de la surface canonique, nombre désigné par $p^{(2)}$.

Les idées de M. Noether sont restées longtemps sans provoquer des recherches ultérieures. Ce n'est que dans ces dernières années que les géomètres italiens, après avoir établi la théorie des surfaces algébriques, ont abordé l'étude des variétés algébriques supérieures. Il paraît que c'est M. Pannelli qui est, le premier, dans deux Notes de l'Académie dei Lincei[1] revenu aux recherches de M. Noether. M. Pannelli a défini arithmétiquement ces invariants au moyen d'un système linéaire de surfaces dans la variété V_3 et de son système adjoint de surfaces. Il est parvenu aux invariants numériques Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$, entre lesquels il a établi la relation:

$$\Delta^{(1)} + \Delta^{(3)} - \Delta^{(4)} = \Delta - 4. \tag{1}$$

Il a démontré que Δ est un invariant **absolu** vis à vis des transformations birationnelles des variétés algébriques, mais $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$ sont des invariants **relatifs**, c'est à dire qu'ils changent de valeur, si l'on transforme la variété donnée en une autre variété de façon que des points et des courbes de la variété donnée V_3 (points et courbes fondamentaux) viennent d'être changés en courbes et surfaces de la variété transformée V_3'.

Enfin M. Pannelli a établi entre les nombres Δ les relations que voici:

$$\Delta^{(2)} - 1 = 4\Delta^{(3)}, \tag{2}$$

$$2\Delta^{(4)} - 2 = 3\Delta^{(3)}. \tag{3}$$

Les invariants $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$ de M. Pannelli coincident avec le genre arithmétique de la surface canonique K de la variété V_3, avec le genre de la courbe canonique C située sur la surface canonique K, avec le nombre de points communs à trois surfaces canoniques K, c'est à dire avec le nombre de points communs à deux courbes caractéristiques D du système canonique linéaire $|K|$, enfin avec le genre de ces courbes D. Donc on a

1) „Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni". Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. Ser. 5. T. **15**, 1 sem. 1906.
„Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali" Ibidem Ser. 5. T. **15**, 1 sem. 1906.

$$\Delta^{(3)} = p^{(4)}, \quad \Delta^{(4)} = p^{(3)}, \quad \Delta^{(2)} = p^{(2)}.$$

Quant au nombre $\Delta^{(1)}$, c'est le genre superficiel arithmétique et non géométrique, $p^{(1)}$ de M. Noether. Ce sont les genres et degrés **virtuels** du système canonique sur une surface K irréductible, et si la surface canonique K est réductible, alors son genre arithmétique doit être calculé virtuellement au moyen de la formule de M. Severi[1], de même on doit calculer virtuellement les nombres $p^{(2)}$, $p^{(3)}$, $p^{(4)}$. Si le système canonique linéaire

$$|K| = |S_a| - |S| = |S_a - S|,$$

différence d'un système linéaire $|S|$ de surfaces et de son système adjoint, est virtuel, c'est à dire qu'il n'existe pas, ou bien qu'il est égal à zéro, alors on doit calculer ces invariants virtuellement encore au moyen des formules de M. Pannelli et de M. Severi.

La signification de l'invariant absolu Δ de M. Pannelli a été ensuite donnée par M. Severi[2] qui, au moyen de considérations très élégantes, venait de démontrer la relation capitale

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4. \tag{4}$$

Dans cette formule P_a signifie le genre arithmétique de la variété V_3 donnée, Ω_0, Ω_1, Ω_2 sont respectivement les nombres $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$, $\Delta^{(1)}$ de M. Pannelli, ou bien les nombres $p^{(4)}$, $p^{(3)}$ et le genre arithmétique de la surface canonique K. Nous nous servirons, dans la suite, de ces notations de M. Severi.

Enfin, si la surface canonique K est composée, ou bien si elle contient des parties fixes, on peut aussi définir le genre géométrique virtuel de cette surface[3]. C'est, par définition, la somme du genre arithmétique virtuel de la surface et du nombre $\frac{r-1}{2}$, où r est la connexion linéaire virtuelle de la surface, c'est à dire la connexion linéaire de cette surface, où l'on auparavant résolu celles des singularités que la surface donnée possède outre les singularités de la surface générale du systeme linéaire, auquel la surface donnée appartient.

2. Si les surfaces K sont irréductibles, sans parties fixes et si elles se coupent deux à deux en des courbes D irréductibles et sans parties fixes, et

1) „Su alcune questioni di postulazione". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. **17**.

2) „Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. **28**. 1909.

3) Severi: „Fondamenti etc." l. c.

si enfin ces courbes D se coupent elles mêmes en un certain nombre de points, alors on peut établir de suite les formules (2) et (3) de M. Pannelli. Supposons donc le genre géométrique P_g de la variété V_3 an moins égal à trois. Alors on a au moins ∞^2 surfaces K, donc au moins ∞^1 courbes D. S'il n'y a pas de courbes caractéristiques D, alors le système

$$|K'| = |2K|,$$

adjoint au système canonique $|K|$, découpe sur les surfaces K des courbes d'ordre zéro, c'est à dire qu' on a, dans ce cas, $p_g = 1$, où p_g est le genre géométrique de la surface K. On a alors, comme on le sait, $p_a = 1$, ou bien $p_a = -1$, c'est à dire que les surfaces canoniques K sont ou bien hyperelliptiques, ou bien elles ont tous leurs genres $p_g = p_a = P_i = p^{(1)}$ égaux à 1. Les surfaces K peuvent aussi être composées de surfaces hyperelliptiques, ou bien de surfaces à genres 1 variables dans un faisceau linéaire sans courbes-base, ou bien dans un faisceau irrationnel.

Deux surfaces canoniques K découpent sur une surface K une courbe $2\,D$, qui donne une courbe C canonique de la surface K. Donc on a de suite

$$\Delta^{(2)} = p^{(2)} = 2\,\Omega_1 + \Omega_0 - 1.$$

Deux courbes canoniques C se coupent en $4\,\Omega_0$ points, donc on a, comme on sait

$$p^{(2)} - 1 = 4\,\Omega_0.$$

Il s'en suit que l'on a

$$3\,\Omega_0 = 2\,\Omega_1 - 2, \tag{5}$$

et il vient aussi

$$p^{(2)} = 4\,\Omega_0 + 1. \tag{6}$$

Donc le nombre Ω_0 est nécessairement pair $= 2\,\Omega_0'$, et le nombre Ω_1 est $\equiv 1$ (mod 3).

Nous pouvons maintenant appliquer les inégalités connues, qui existent entre les nombres p_g, Ω_2 et $p^{(2)}$ d'une surface canonique K, savoir l'inégalité de M. Noether[1]), la formule de M. Picard[2]), qui lie l'irrégularité $p_g - p_a$ au nombre ρ de systèmes-base et au nombre ρ_0 des intégrales doubles de seconde espèce de la surface

$$\rho + \rho_0 = I + 4\,(p_g - p_a) + 2. \tag{7}$$

[1]) „Zur Theorie etc." l. c.

[2]) Picard-Simart: „Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes". Tome II.

où I est l'invariant de Zeuthen-Segre de la surface, et enfin les inégalités que j'ai établies en me servant des résultats de M. Castelnuovo et qu' on trouve démontrées dans les travaux suivants: „Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g \geqq 2\,(p_a + 2)$", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. 35. 1913. „Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre deux". Prace matematyczno-fizyczne. T. **26**, et énoncées, sans démonstration, dans trois Notes des Comptes Rendus de l'Académie de Paris, savoir du 3/VI 1912, du 6/I 1913 et du 27/I 1913.

Le système linéaire canonique $|K|$ coupe sur une courbe D une série linéaire g_n^r, où l'on a

$$n = \Omega_0, \qquad r = P_g - 3.$$

Cette série linéaire est spéciale, et de plus trois groupes de cette série donnent un groupe canonique $g_{2\Omega_1 - 2}$ de la courbe D. Donc, comme cette série ne doit nullement être complète, on a certainement toujours l'inégalité

$$\Omega_0 \geqq 2\,(P_g - 3), \tag{8}$$

donc on a aussi l'inégalité

$$\Omega_1 - 1 \geqq 3\,(P_g - 3). \tag{9}$$

Ensuite, envisageons la serie caractéristique du système canonique C de courbes canoniques C sur les surfaces canoniques K. Alors on a, d'après M. Noether,

$$p^{(2)} - 1 \geqq 2\,(p_g - 2). \tag{10}$$

Ici on a sur une courbe C une série linéaire, découpée par les courbes D telle que quatre groupes de cette série composent un groupe de la série canonique de la courbe C, et deux groupes de la série caractéristique du système C forment un groupe canonique d'une courbe C.

Si l'on exclue le cas, où les groupes caractéristiques du système linéaire D, qui passent par un point d'une courbe D, passent eo ipso par un certain nombre d'autres points, ce qui arrive par exemple, quand les courbes D sont hyperelliptiques, alors on peut se servir d'un résultat remarquable, du à M. Bertini[1]). D'après ce résultat, si k groupes d'une série linéaire g_n^r forment un groupe canonique de $2\pi - 2$ points, on a

[1]) „Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica". Atti della Reale Accademia di Torino. T. **26**.

$$n \geqq (k+1)\, r - (k-1).$$

donc, comme on a

$$n\, k = 2\pi - 2,$$

on a aussi

$$2\pi - 2 \geqq k\,(k+1)\, r - k\,(k-1).$$

Donc on a alors d'abord l'inégalité:

$$\Omega_0 \geqq 4\,(P_g - 3) - 2,$$

(11)

$$\Omega_0 \geqq 4\,P - 14.$$

Ensuite on a pour la série caractéristique du système canonique linéaire:

$$p^{(2)} - 1 \geqq 3\,(p_g - 2) - 1,$$

(12)

$$4\,\Omega_0 \geqq 3\,p_g - 7.$$

Enfin en envisageant la série decoupée par les courbés D sur une courbe C, on a:

$$2\,\Omega_0 \geqq 5\,(P_g - 3) - 3,$$

$$\Omega_0 \geqq \frac{5}{2}\, P_g - 9,$$

mais cela donne moins que l'inégalité (11).

3. Maintenant envisageons la formule (4) de M. Severi. Nous avons

$$\Omega_0 - \Omega_1 = -\frac{1}{3}\,(\Omega_1 + 2) = -\frac{1}{2}\,(\Omega_0 + 2),$$

donc

$$2\,P_a = \Omega_2 - \frac{1}{3}\,(\Omega_1 + 2) + 4 = \Omega_2 - \frac{\Omega_1}{3} + \frac{10}{3},$$

et

$$2\,P_a = \Omega_2 - \frac{1}{2}\,(\Omega_0 + 2) + 4 = \Omega_2 - \frac{\Omega_0}{2} + 3,$$

donc on a certainement

$$2\,P_a \leqq \Omega_2 - P_g + 6,$$

(13)

$$P_g + 2\,P_a \leqq \Omega_2 + 6.$$

Si l'on peut employer la formule (10), alors on a

$$2\,P_a \leqq \Omega_2 - 2\,P_g + 10,$$

donc il vient l'inégalité

(14)
$$P_g + P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} + \frac{5}{2}.$$

D'autre part, on a toujours l'inégalité

(15)
$$p_g \geqq \Omega_2,$$

donc on a de (10)

$$4\,\Omega_0 \geqq 2\,\Omega_2 - 4, \qquad 2\,\Omega_0 \geqq \Omega_2 - 2,$$

donc

$$2\,P_a \leqq \Omega_2 - \frac{\Omega_2}{4} + \frac{7}{2},$$

et ensuite

(16)
$$P_a \leqq \frac{3}{8}\,\Omega_2 + \frac{7}{4}.$$

Si l'on peut employer l'inégalité (12), on a

$$2\,P_a \leqq \Omega_2 - \frac{3}{8}\,\Omega_2 + \frac{31}{8},$$

donc il vient

(17)
$$P_a \leqq \frac{5}{16}\,\Omega_2 + \frac{31}{16}.$$

On a aussi

(18)
$$P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} - \frac{p_g}{8} + \frac{31}{16},$$

et si l'on emploie la formule (11), il vient

(19)
$$P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} - \frac{3}{16}\, p_g + \frac{31}{16}.$$

Maintenant nous allons nous servir de la formule de M. Picard. Comme l'invariant I de Zeuthen-Segre est égal à

$$12\,\Omega_2 + 9 - p^{(2)},$$

et comme $\rho + \rho_0$ est au moins égal à 1, on a certainement

$$p^{(2)} \leqq 4\,(p_g - \Omega_2) + 12\,\Omega_2 + 10,$$

donc on a l'inégalité

(20)
$$4\,\Omega_0 \leqq 4\,p_g + 8\,\Omega_2 + 9.$$

Or j'ai établi, dans les travaux cités, qu'on a toujours l'inégalité

(21)
$$p_g \leqq 2\,\Omega_2 + 4,$$

à l'exception des surfaces, qui possèdent un fasceau irrationnel de courbes rationnelles (surfaces reglées) ou de courbes elliptiques. Mais, dans ces cas, les hypothèses que nous avons admises, savoir ques les courbes canoniques des surfaces canoniques existent et se coupent, ne sont pas satisfaites. Donc nous avons, dans notre cas, l'inégalité (21). Nous avons alors les inégalités

$$\Omega_0 \leqq p_g + 2\Omega_2 + 2, \tag{22}$$

$$\Omega_0 \leqq 4\Omega_2 + 6. \tag{23}$$

4. Des formules (8), (22), (8) et (23), résultent alors les inégalités suivantes

$$2(P_g - 3) \leqq p_g + 2\Omega_2 + 2,$$

donc

$$P_g \leqq \Omega_2 + \frac{p_g}{2} + 4, \tag{24}$$

et

$$P_g \leqq 2\Omega_2 + 6. \tag{25}$$

Ensuite, la formule de M. Severi (4) nous donne

$$2P_a \geqq \Omega_2 - \frac{p_g}{2} - \Omega_2 + 2,$$

donc

$$P_a \geqq -\frac{p_g}{4} + 1, \tag{26}$$

et aussi

$$P_a \geqq -\frac{\Omega_2}{2}. \tag{27}$$

Si l'on peut employer la formule (11), alors il vient

$$4P_g - 14 \leqq p_g + 2\Omega_2 + 2,$$

donc

$$P_g \leqq \frac{\Omega_2}{2} + \frac{p_g}{4} + 4, \tag{28}$$

et aussi

$$P_g \leqq \Omega_2 + 5. \tag{29}$$

Enfin des formules (24) et (26), respectivement de (25) et (27), on tire les deux formules

$$P_g - P_a \leqq \Omega_2 + \frac{3}{4}p_g + 3, \tag{30}$$

$$P_g - P_a \leqq \frac{5}{2}\Omega_2 + 6. \tag{31}$$

Si l'on peut employer la formule (11), alors on a de même

$$P_g - P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} + \frac{p_g}{2} + 3, \tag{32}$$

donc

$$P_g - P_a \leqq \frac{3}{2}\Omega_2 + 5. \tag{33}$$

En résumé, nous avons les formules suivantes:

Toujours:

$$\mathrm{I.}\ \begin{cases} P_g + 2P_a \leqq \Omega_2 + 6 \\ P_g - P_a \leqq \Omega_2 + \frac{3}{4}p_g + 3, \\ P_g \leqq \Omega_2 + \frac{p_g}{2} + 4, \\ P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} - \frac{p_g}{8} + \frac{7}{4}, \\ P_a \geqq -\frac{p_g}{4} + 1, \end{cases} \quad \text{donc I}^a \begin{cases} P_g + 2P_a \leqq \Omega_2 + 6, \\ P_g - P_a \leqq \frac{5}{2}\Omega_2 + 6, \\ P_g \leqq 2\Omega_2 + 6, \\ P_a \leqq \frac{3}{8}\Omega_2 + \frac{7}{4}, \\ P_a \geqq -\frac{\Omega_2}{2}. \end{cases}$$

Dans le cas général:

$$\mathrm{II.}\ \begin{cases} P_g + P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} + \frac{5}{2}, \\ P_g - P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} + \frac{p_g}{2} + 3, \\ P_g \leqq \frac{\Omega_2}{2} + \frac{p_g}{4} + 4, \\ P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} - \frac{3}{16}p_g + \frac{31}{16}, \\ P_a \geqq -\frac{p_g}{4} + 1. \end{cases} \quad \text{donc II}^a \begin{cases} P_g + P_a \leqq \frac{\Omega_2}{2} + \frac{5}{2}, \\ P_g - P_a \leqq \frac{3}{2}\Omega_2 + 5, \\ P_g \leqq \Omega_2 + 5, \\ P_a \leqq \frac{5}{16}\Omega_2 + \frac{31}{16}, \\ P_a \geqq -\frac{\Omega_2}{2}. \end{cases}$$

5. Appliquons de suite ces formules. M. Comessati a établi récemment[1] que, si l'on a l'inégalité

[1] „Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti". Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. Ser. 5. Vol. **22**, 2 sem. 1913.

$$(34) \qquad P_g - P_a \leqq p_g - p_a - 4,$$

alors la variété possède un faisceau irrationnel de surfaces. On peut facilement préciser les résultats de M. Comessati et on peut montrer que le genre de ce faisceau n'est pas plus petit que

$$(35) \qquad \frac{p_g - p_a + P_a - P_g}{2}.$$

Ensuite M. Comessati a établi que, si la variété satisfait à l'inégalité

$$(36) \qquad P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3),$$

alors on a ou bien une congruence irrationnelle de courbes, ou bien un faisceau irrationnel de surfaces.

Donc, pour que la variété V_3 ne possède pas ni un faisceau irrationnel de surfaces, ni une congruence irrationnelle de courbes, il faut nécessairement qu'on ait à la fois vérifiées les deux inégalités

$$(37) \qquad P_g - P_a > p_g - p_a - 4,$$

$$(38) \qquad P_g > 3(p_g - p_a - 3);$$

ici p_g et p_a sont les genres superficiels de la variété, ce qu'on peut admettre, d'apres M. M. Castelnuovo-Enriques[1] et d'après nos conventions. Donc il faut qu'on ait

$$3(p_g - p_a - 3) < p_a + \frac{p_g}{2} + 4,$$

$$\frac{5}{2} p_g < 4p_a + 13,$$

$$(39) \qquad p_g < \frac{8}{5} p_a + \frac{26}{5},$$

et dans le cas général,

$$3(p_g - p_a - 3) < \frac{p_a}{2} + \frac{p_g}{4} + 4,$$

$$(40) \qquad p_g \leqq \frac{14}{11} p_a + \frac{52}{11}.$$

[1]) „Sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica". 2. Notes. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. Ser. 5. Vol. **22**. 2 sem. 1913.

„Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions". Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Sér. 3. T. **23**. 1906.

Ce résultat est sans doute très intéressant, et l'on peut soupçonner que les inégalités (39), (40) sont toujours valables, si la surface algébrique ne possède pas de faisceaux irrationnels de courbes, mais on ne peut, à priori, exclure la supposition que les surfaces canoniques d'une variété ne sont pas quelconques, c'est à dire que les genres p_g, p_a ne peuvent pas prendre toutes les valeurs compatibles avec la non-existence de faisceaux irrationnels, dont sont composées les courbes canoniques.

Si l'inégalité (34) est satisfaite, on a toujours

$$P_g \leqq p_g - p_a - 4 + \frac{p_a}{2} - \frac{p_g}{8} + \frac{7}{4},$$

$$P_g \leqq \frac{7}{8} p_g - \frac{\Omega_2}{2} - \frac{9}{4}, \qquad P_g \leqq \frac{5}{4} \Omega_2 + \frac{5}{4},$$

et, dans le cas général,

$$P_g \leqq p_g - p_a + \frac{p_a}{2} - \frac{3}{16} p_g - \frac{33}{16},$$

$$P_g \leqq \frac{13}{16} p_g - \frac{\Omega_2}{2} - \frac{33}{16},$$

$$P_g \leqq \frac{9}{8} \Omega_2 + \frac{19}{16}.$$

Cracovie 13/I. 1914.