Wł. GĄSIOROWSKI.

# Über die Definitionsgleichungen der endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene.

O równaniach, określających skończone ciągłe grupy przekształceń stycznościowych w płaszczyźnie.

## Einleitung.

In seiner Habilitationsschrift [1] hat Prof. Engel eine allgemeine Methode entwickelt, vermittelst welcher die Definitionsgleichungen der continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen eines $n$-fach ausgedehnten Raumes aufgestellt werden können. Lie hatte schon damals erkannt, dass diese Methode alle continuirlichen Gruppen liefert. Einen Beweis dafür hat Prof. Engel später in den „Kleineren Beiträgen zur Gruppentheorie IX" (Leipz. Ber. 1894) veröffentlicht.

Die Gruppen einer $n$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zerfallen bekanntlich in Typen. Vermittelst der genannten Methode erhält man die allgemeine Form der Definitionsgleichungen aller demselben Typus angehörigen Gruppen. Die Definitionsgleichungen eines Repräsentanten des vorgelegten Typus ergeben sich durch Spezialisierung der bis auf die Integrabilitätsbedingungen willkürlichen Funktionen, welche in der allgemeinen Form der Definitionsgleichungen dieses Typus auftreten.

Lie hat (Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, dritter Abschnitt, Theorem 6, S. 71) alle Typen von Gruppen in der Ebene aufgestellt und je einen Repräsentanten für diese Typen angegeben.

Auf Grund der Lieschen Tabelle hat Herr A. G. Hall aus Michigan U. S. A. in seiner Inaugural-Dissertation: „Bestimmung der Definitionsglei-

[1]) F. Engel: „Über die Definitionsgleichungen der cont. Transformationsgruppen"; Habilitationsschrift, Leipzig 1885; Math Ann. Bd. **27**, 1886; Leipz. Ber. Bd. **46**, 1894.

chungen aller endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen in der Ebene“ (Leipzig, 1902) die Definitionsgleichungen aller mit den typischen Gruppen ähnlichen Gruppen und somit aller Gruppen der Ebene aufgestellt.

Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit der ähnlichen Aufgabe aus der Theorie der Berührungstransformationen.

Die von Herrn Hall und von mir angewandte Methode kommt im Wesentlichen auf das Verfahren zurück, welches von Herrn Prof. Engel in seiner Abhandlung über die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen (Leipz. Ber. 1894) auseinandergesetzt ist. Allerdings liess sich dieses Verfahren nicht ohne Weiteres auf die Berührungstransformationen übertragen. Vielmehr musste ich einige allgemeine von Lie herrührende Sätze erst auf eine Form bringen, welche für die Gruppen von Berührungsformationen am geeignetsten erschien. Die wesentliche Rolle spielt dabei die Einführung der Definitionsgleichungen für die s. g. charakteristische Funktion der infinitesimalen Transformationen einer Gruppe von Berührungstransformationen an Stelle der Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen selbst.

Die Möglichkeit dieser Darstellung hat Lie schon in seiner Abhandlung über unendliche Gruppen (Leipz. Ber. 1891, S. 392) angedeutet.

Die in der vorliegenden Arbeit begründete Methode ist im Folgenden nur auf die lineare, die allgemeine projektive und die irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene angewandt. Es bietet aber keine wesentlichen Schwierigkeiten, ganz dasselbe für alle Typen von reducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene durchzuführen und auf diese Weise die Definitionsgleichungen aller Gruppen von Berührungstransformationen in der Ebene aufzustellen.

---

## § 1. Die Eigenschaften der Operationen:

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial f}{\partial y}; \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y'}; \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Es sei eine beliebige Funktion $f$ der Veränderlichen $x, y, y'$ gegeben. (Im Folgenden wird immer vorausgesetzt, dass die in Frage kommenden Funktionen analytisch sind). Man bezeichne:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x} + y' \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}; \quad f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y'}; \quad f_3 = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ f_{ik} = (f_i)_k . \end{cases}$$



Dann wird:

$$(2)\qquad f_{12} - f_{21} = f_3, \quad f_{13} = f_{31}, \quad f_{23} = f_{32}.$$

Man sieht also, dass die Operationen $f_1$, $f_3$ und $f_2$, $f_3$ vertauschbar sind, dass dagegen die Operationen $f_1$, $f_2$ nicht vertauschbar sind. Die erste der Relationen (2) tritt an Stelle der Relation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$

im Falle einer Funktion zweier Veränderlichen $u$, $v$.

Mit Rücksicht auf den Pfaff'schen Ausdruck $dy - y' dx$, den man als isobar betrachten muss, kann man die Operationen $f_1$, $f_2$ als Operationen erster Stufe, dagegen $f_3$ als Operation zweiter Stufe bezeichnen. Die Ableitung

$$\frac{\partial^{m+n+p} f}{\partial x^m \partial y'^n \partial y^p},$$

die man durch $m$-malige Differentiation nach $x$, $n$-malige Differentiation nach $y'$ und $p$-malige Differentiation nach $y$ bekommt, wird man dann als eine Ableitung $s$-ter Stufe, wobei:

$$s = m + n + 2p,$$

bezeichnen müssen.

Zunächst sei nach der Zahl der Ableitungen einer gegebenen Stufe $s$ gefragt.

Da durch die Operationen $f_1$, $f_2$, $f_3$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ vollständig bestimmt sind, so ist die Zahl der unabhängigen Operationen $s$-ter Stufe gleich der Zahl der unabhängigen Ableitungen $s$-ter Stufe.

Aus der ersten der Relationen (2) folgt ferner, dass alle Operationen einer beliebigen Stufe, welche die Differentiation $f_3$ enthalten, durch solche Operationen derselben Stufe ausgedrückt werden können, welche durch fortschreitende Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ allein entstehen. Die letzteren Operationen kann man allgemein folgendermassen bezeichnen:

$$(3)\qquad f_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$$

unter $i_1, i_2, \ldots, i_s$ die Zahlen 1 oder 2 verstanden.

Die Zahl der unabhängigen Operationen $s$-ter Stufe von der Form (3) ist also auch gleich der Zahl der unabhängigen partiellen Ableitungen $s$-ter Stufe einer Funktion der Veränderlichen $x$, $y$, $y'$.

Bei Bestimmung dieser Zahl, die mit $\varepsilon_s$ bezeichnet werden möge, muss man zwei Fälle unterscheiden, jenachdem $s$ gerade oder ungerade ist.

Im ersten Falle sei gesetzt $s = 2t$; dann kann man schreiben:

$$\varepsilon_s = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots + N_t,$$

unter $N_i$ die Zahl derjenigen Ableitungen verstanden, in denen nach $y$ $i$-mal differenziert wird. Die Zahl $N_i$ ist zugleich die Zahl der partiellen Ableitungen $(s-2i)$-ter Ordnung einer Funktion zweier Veränderlichen. Es ist daher:

$$N_i = s - 2i + 1 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ t)$$

(4)
$$\varepsilon_s = \sum_{1}^{t}{}_i\ (s - 2i + 1) = \left(\frac{s+2}{2}\right)^2$$

oder:

$$\varepsilon_{2t} = (t+1)^2.$$

Ist nun $s$ ungerade, dann sei gesetzt: $s = 2t + 1$. Es ergibt sich dann analog:

(5)
$$\varepsilon_s = \sum_{0}^{t}{}_i\ (s - 2i + 1) = \frac{(s+1)(s+3)}{4}$$

oder:

$$\varepsilon_{2t+1} = (t+1)(t+2).$$

Die Anzahl aller Ausdrücke von der Form (3) beträgt offenbar $2^s$. Zwischen den durch diese symbolischen Ausdrücke dargestellten Operationen $s$-ter Stufe müssen daher gewisse Relationen bestehen, welche der Willkürlichkeit der Reihenfolge von Differentiationen im Falle gewöhnlicher partieller Ableitungen entsprechen. Die Zahl dieser Relationen möge mit $\eta_s$ bezeichnet werden. Sie drückt sich verschiedenartig durch $s$ aus, jenachdem $s$ gerade oder ungerade ist und zwar folgendermassen:

(6)
$$s = 2t: \quad \eta_s = 2^s - \left(\frac{s+2}{2}\right)^2$$

oder

$$\eta_{2t} = 2^{2t} - (t+1)^2;$$

(7)
$$s = 2t + 1: \quad \eta_s = 2^s - \frac{(s+1)(s+3)}{4}$$

oder

$$\eta_{2t+1} = 2^{2t+1} - (t+1)(t+2).$$

Mit Rücksicht auf das Weitere mögen die erwähnten Relationen für $s = 2,\ 3,\ 4$ wirklich aufgestellt werden.



Für $s = 1$ hat man:

$$\varepsilon_1 = 2, \qquad \eta_1 = 0.$$

Die unabhängigen und zugleich allein existierenden Operationen erster Stufe sind: $f_1,\ f_2$.

Ferner ergeben die Formeln (4), (6) für $s = 2$:

$$\varepsilon_2 = 4, \qquad \eta_2 = 0.$$

Die Operationen zweiter Stufe lauten:

$$f_{11},\quad f_{12},\quad f_{21},\quad f_{22}.$$

Sie sind voneinander unabhängig.

Für $s = 3$, $t = 1$ bekommt man aus (5) und (7):

$$\varepsilon_3 = 6, \qquad \eta_3 = 2.$$

Zwischen den acht Operationen dritter Stufe:

$$f_{111},\ f_{112},\ f_{121},\ f_{122},\ f_{211},\ f_{212},\ f_{221},\ f_{222}$$

bestehen die zwei folgenden Beziehungen:

(8)
$$\begin{cases} f_{112} + f_{211} = 2 f_{121}, \\ f_{221} + f_{122} = 2 f_{212}. \end{cases}$$

Diese Beziehungen bekommt man durch Anwendung der ersten der Relationen (2), darin an Stelle von $f$ der Reihe nach $f_1$ und $f_2$ gesetzt und durch Bildung der Relationen, die sich aus (2) durch Ausführung der Operationen $f_1,\ f_2$ ergeben.

Es möge endlich $s = 4$, $t = 2$ gesetzt werden. Dann ergibt sich aus (4) und (6):

$$\varepsilon_4 = 9, \qquad \eta_4 = 7.$$

Zwischen den 16 Operationen vierter Stufe bestehen zunächst 8 Relationen; vier von ihnen folgen aus den Relationen (8) durch Ausführung der Operationen $f_1,\ f_2$. Vier andere ergeben sich auf die Weise, dass man in den Relationen (8) $f$ durch bzw. $f_1$ und $f_2$ ersetzt. Von diesen acht Relationen sind aber nur sieben voneinander unabhängig. Die letzteren kann man folgendermassen schreiben:

$$
(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&f_{1121}+f_{2111}=2f_{1211},\\
&f_{1122}+f_{2112}=2f_{1212},\\
&f_{2211}+f_{1221}=2f_{2121},\\
&f_{2212}+f_{1222}=2f_{2122},\\
&f_{1112}+f_{1211}=2f_{1121},\\
&f_{2221}+f_{2122}=2f_{2212},\\
&\qquad f_{1221}=f_{2112}.
\end{aligned}\right.
$$

Die Relationen (8) einerseits und die Relationen (9) andererseits lassen sich paarweise derart anordnen, dass jede Relation eines jeden Paares durch Vertauschung der Indices 1, 2 aus der anderen Relation desselben Paares hervorgeht. Dieser Umstand lässt sich leicht erklären.

Alle vorstehenden Relationen sind nämlich eine Folge der Vertauschbarkeit der benachbarten Indices 1, 3 bzw. 2, 3. Die Indices 1, 2 erscheinen deswegen in ihnen gleichberechtigt.

Es lässt sich nun die allgemeine Gestalt der Relationen zwischen den Operationen $s$-ter Stufe angeben.

Zunächst sei bemerkt, dass die Beziehungen (2) mit den folgenden:

$$
(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
&f_{12}-f_{21}=f_3,\\
&f_{112}+f_{211}=2f_{121},\\
&f_{221}+f_{122}=2f_{212}
\end{aligned}\right.
$$

vollständig äquivalent sind, wie man sich unmittelbar überzeugen kann. Aus der ersten der Relationen (10) folgt nämlich:

$$
f_{13}=f_{112}-f_{121}, \qquad f_{23}=f_{212}-f_{221},
$$
$$
f_{31}=f_{121}-f_{211}, \qquad f_{32}=f_{122}-f_{212}.
$$

Bestehen ausserdem die zwei letzten der Relationen (10) oder die Relationen (8), so ist auch:

$$
f_{13}=f_{31}; \qquad f_{23}=f_{32}.
$$

Auf Grund dieser Bemerkung kann man weiter schliessen, dass alle Relationen zwischen den Operationen einer beliebigen Stufe aus den Relationen (10) allein erhalten werden können. Die Relationen zwischen den Operationen von der Form (3) müssen daher aus den Relationen (8) allein abgeleitet werden können.

Aus jeder Relation einer gewissen Stufe $s$ kann man vier Relationen $(s+1)$-ter Stufe ableiten, und zwar einerseits durch Ausführung der Operatio-



nen $f_1$, $f_2$, andererseits durch Anwendung dieser Relation $s$-ter Stufe auf $f_1$, $f_2$. Dies sind zugleich die einzig möglichen Wege zur Ableitung der Relationen von aufeinanderfolgenden Stufen aus den Relationen (8). Alle unabhängigen Relationen einer beliebigen Stufe können also aus den Relationen von der folgenden allgemeinen Form abgeleitet werden:

$$
(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&f_{i_1 i_2\ldots i_k 112\, i_{k+4}\ldots i_s}+f_{i_1 i_2\ldots i_k 211\, i_{k+4}\ldots i_s}=2f_{i_1 i_2\ldots i_k 121\, i_{k+4}\ldots i_1}\\
&f_{i_1 i_2\ldots i_k 221\, i_{k+4}\ldots i_s}+f_{i_1 i_2\ldots i_k 122\, i_{k+4}\ldots i_s}=2f_{i_1 i_2\ldots i_k 212\, i_{k+4}\ldots i_s}\\
&\qquad (k=0,\ 1,\ldots,\ s-3)
\end{aligned}\right.
$$

Einem jeden Werte von $k$ entsprechen $2^{s-3}$ verschiedene Komplexionen:

$$
i_1,\ i_2,\ldots,\ i_k,\ i_{k+4},\ldots,\ i_s;
$$

es gibt also im Ganzen:

$$
(12)\qquad P_s=2^{s-3}\,.\,(s-2)\,.\,2=(s-2)\,.\,2^{s-2}, \qquad s\geqq 3
$$

verschiedene Relationen von der Form (11), die aber nicht alle voneinander unabhängig zu sein brauchen. Insbesondere bekommt man:

$$
P_3=2, \qquad P_4=8, \qquad P_5=24.
$$

Für $s\geqq 6$ ist allgemein: $P_s\geqq 2^s>\eta_s$.

Es ist also immer: $\qquad P_s>\eta_s. \qquad (s>2)$.

Die Relationen (8) erscheinen als charakteristische Identitäten für die Operationen $f_1$, $f_2$, indem sie alle Relationen höherer Stufen nach sich ziehen.

Mit Rücksicht auf das Folgende möge noch bemerkt werden, dass die Relationen (11) gebildet für $s=3,\ 4,\ldots\infty$ die folgenden infinitesimalen Transformationen:

$$
(13)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\Omega_1 F=f_1\cdot\frac{\partial F}{\partial f}+f_{11}\cdot\frac{\partial F}{\partial f_1}+\cdots+\sum_{i_k=1,\,2} f_{i_1 i_2\ldots i_s 1}\cdot\frac{\partial F}{\partial f_{i_1 i_2\ldots i_s}}+\cdots,\\
&\Omega_2 F=f_2\cdot\frac{\partial F}{\partial f}+f_{12}\cdot\frac{\partial F}{\partial f_1}+\cdots+\sum_{i_k=1,\,2} f_{i_1 i_2\ldots i_s 2}\cdot\frac{\partial F}{\partial f_{i_1 i_2\ldots i_s}}+\cdots,\\
&\Omega_3 F=f_1\cdot\frac{\partial F}{\partial f}+f_{11}\cdot\frac{\partial F}{\partial f_1}+\cdots+\sum_{i_k=1,\,2} f_{1 i_1 i_2\ldots i_s}\cdot\frac{\partial F}{\partial f_{i_1 i_2\ldots i_s}}+\cdots,\\
&\Omega_4 F=f_2\cdot\frac{\partial F}{\partial f}+f_{21}\cdot\frac{\partial F}{\partial f_1}+\cdots+\sum_{i_k=1,\,2} f_{2 i_1 i_2\ldots i_s}\cdot\frac{\partial F}{\partial f_{i_1 i_2\ldots i_s}}+\cdots
\end{aligned}\right.
$$

gestatten.

## § 2. Systeme von partiellen Differentialgleichungen zwischen den Operationen $W(xyy')_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ deren allgemeinste Lösungen nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Konstanten abhängen.

Die nachstehenden Betrachtungen bilden das Analogon zu den Betrachtungen des Kapitels 10. des ersten Abschnitts der „Transformationsgruppen". Sie sind für das Folgende von ebenso ausschlaggebender Bedeutung, wie das genannte Kapitel für die Theorie der Punkttransformationsgruppen.

In den Veränderlichen $x, y, y'$ möge man sich ein System von partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung vorgelegt denken. Die partiellen Differentialquotienten der Funktion $W(xyy')$, welche in diesem System auftreten, mögen ferner durch die Operationen:

$$(1) \qquad W_{i_1 i_2 \ldots i_s}$$

ausgedrückt werden, wobei die Indices $i_k$ nur die Werte 1, 2 annehmen. Auf diese Weise bekommt man ein System von Differentialgleichungen zwischen den Operationen (1) und unter der Stufe dieses Systems möge die höchste Stufe der in ihm vorkommenden Operationen verstanden werden.

Dieses System soll gewisse besondere Eigenschaften besitzen. Es möge vorausgesetzt werden, dass es in der Form, in welcher es vorliegt, die folgenden Bedingungen erfüllt:

Erstens: Wenn $s$ die Stufe der höchsten in dem Systeme vorkommenden Differentialoperationen ist, so sollen sich vermöge der Gleichungen des Systems durch Auflösung sämtliche unabhängige Differentialoperationen $s$-ter Stufe durch die Differentialoperationen erster bis $(s-1)$-ter Stufe und durch $x, y, y', W$ ausdrücken lassen. Dagegen soll es nicht möglich sein, auf diese Weise sämtliche unabhängige Differentialoperationen $(s-1)$-ter Stufe durch die von niedrigerer Stufe und durch $x, y, y', W$ auszudrücken.

Zweitens: Durch einmalige und zweimalige Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ auf das vorgelegte System und durch Kombination der erhaltenen Gleichungen sollen sich nur solche Relationen zwischen $x, y, y', W$ und den Operationen erster bis $(s-1)$-ter Stufe ergeben, welche bereits ohne Differentiation aus dem vorgelegten Systeme folgen.

Diese speziellen Voraussetzungen über die Form des vorgelegten Gleichungensystems sind nur der Bequemlichkeit wegen gemacht worden. Selbstverständlich lassen sich die folgenden Betrachtungen überhaupt auf jedes System von Gleichungen zwischen den Differentialoperationen (1) anwenden, welches durch Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ und durch Eliminationen die eben beschriebene Form erhalten kann.



Es lässt sich beweisen, dass jedes System von Gleichungen, welches die vorhin beschriebenen Eigenschaften besitzt, integrabel ist und dass die allgemeinste Funktion $W$ von $x, y, y'$, welche dem Systeme genügt, nur von einer angebbaren endlichen Anzahl willkürlicher Konstanten abhängt.

Diesen Satz kann man in der Weise begründen, dass man das besprochene Integrationsproblem nach dem Vorgange von Lie auf das Problem zurückführt, ein Gleichungensystem zu finden, welches eine Anzahl von gegebenen infinitesimalen Transformationen gestattet. Das letztere Problem kann man auf Grund der Entwickelungen des Kap. 7. des ersten Abschnitts der „Transformationsgruppen" sofort erledigen.

Andererseits wird man noch zeigen können, dass der besprochene Satz sich umkehren lässt, dass nämlich jede Funktion $W(xyy'a_1 \ldots\ldots a_r)$ welche eine endliche Anzahl $r$ von willkürlichen Parametern $a_k$ enthält, die allgemeinste Lösung eines gewissen Systems von Gleichungen zwischen den Differentialoperationen darstellt.

Es möge nun für die Differentialoperationen $k$-ter Stufe die folgende Bezeichnung:

$$W_{i_1 i_2 \ldots i_k} = W_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2^k)$$

eingeführt werden. Ausserdem setze man:

$$(W_i^{(k)})_1 = W_{i1}^{(k)}; \qquad (W_i^{(k)})_2 = W_{i2}^{(k)},$$

so dass also $W_{i1}^{(k)}$, $W_{i2}^{(k)}$ die Differentialoperationen $(k+1)$-ter Stufe bedeuten.

Nach diesen Festsetzungen sei das zu untersuchende System von Differentialgleichungen folgendermassen geschrieben:

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{l} F_1(xyy'WW^{(1)} \ldots W^{(s-1)}) = 0, \ldots, F_q = 0, \\ F_{q+1}(W^{(3)} \ldots W^{(s-1)}) = 0, \ldots, F_{q+r} = 0, \\ W_i^{(s)} = \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_s}(xyy'W, \ldots W^{(s-1)}). \end{array} \right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots 2^s; \quad i_k = 1, 2; \quad k = 1, 2 \ldots, s).$$

Die Gleichungen $F_{q+j} = 0$ $(j = 1, \ldots r)$ stellen die Relationen zwischen den Differentialoperationen dritter bis mit $(s-1)$-ter Stufe von der Form (11) § 1 dar. Bezeichnet man also mit $\varepsilon_k$ die Zahl der unabhängigen Differentialoperationen $k$-ter Stufe, mit $\eta_k$ die Zahl der unabhängigen Relationen zwischen den Operationen $k$-ter Stufe (diese Zahlen sind in § 1 bestimmt worden), so wird:

$$r = \sum_{k=3}^{s-1} \eta_k = \sum_{k=3}^{s-1} (2^k - \varepsilon_k).$$

Diese $r$ Relationen soll man sich also zu dem gegebenen Gleichungensystem hinzugefügt denken. Das gegebene Gleichungensystem

$$\begin{cases} F_1 = 0, \ldots, F_q = 0, \\ W^{(s)} = \Phi \end{cases}$$

möge mit (2′) bezeichnet werden.

Die Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ sind hier als voneinander unabhängig vorausgesetzt. Die $2^s$ Gleichungen $W^{(s)} = \Phi$ sind allerdings von den $F = 0$ unabhängig, aber nicht untereinander, da unter den $2^s$ Ausdrücken $W_i^{(s)}$ nur $\varepsilon_s < 2^s$ voneinander unabhängige Differentialoperationen darstellen. Es müssen also zunächst die folgenden Relationen

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi_{i_1 \ldots i_k 112 i_{k+4} \ldots i_s} + \Phi_{i_1 \ldots i_k 211 i_{k+4} \ldots i_s} = 2\Phi_{i_1 \ldots i_k 121 i_{k+4} \ldots i_s}, \\ \Phi_{i_1 \ldots i_k 221 i_{k+4} \ldots i_s} + \Phi_{i_1 \ldots i_k 122 i_{k+4} \ldots i_s} = 2\Phi_{i_1 \ldots i_k 212 i_{k+4} \ldots i_s} \\ \qquad (k = 0, 1 \ldots s-3) \end{cases}$$

vermöge der Gleichungen $F = 0$ identisch bestehen.

Das Gleichungensystem (2′) hat nun nach Voraussetzung die Eigenschaft, bei einmaliger und bei zweimaliger Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ keine neuen Relationen zwischen den $x, y, y', W, \ldots, W^{(s-1)}$ zu liefern. Alle Relationen zwischen den $x, y, y', W, \ldots, W^{(s-1)}$, welche sich bei einmaliger und bei zweimaliger Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ aus (2′) ergeben, müssen also eine Folge von $F = 0$ sein.

Man findet die betreffenden Relationen, indem man auf die Gleichungen (2) die Operationen $f_1, f_2$ zweimal aufeinander ausführt und sodann alle Differentialoperationen von $(s+1)$-ter und $(s+2)$-ter Stufe wegschafft und alle von $s$-ter Stufe durch ihre Werte aus (2) ersetzt.

Man bezeichne:

$$(4) \qquad \Phi_{j_1 \ldots j_k j_{k+1} \ldots j_s} = \Phi^{(s-k)}_{i\, i_1 \ldots i_{s-k}}.$$

Durch Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ auf die Gleichungen $F_k = 0$ $(k = 1, 2 \ldots q)$ und nachherige Elimination der Differentialoperationen $s$-ter Stufe bekommt man die Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} F_{k1} + \dfrac{\partial F_k}{\partial W} \cdot W_1 + \ldots\ldots + \sum\limits_1^{2^{s-2}} {}_i \dfrac{\partial F_k}{\partial W_i^{(s-2)}} \cdot W_{i1}^{(s-2)} + \sum\limits_1^{2^{s-1}} {}_i \dfrac{\partial F_k}{\partial W_i^{(s-1)}} \cdot \Phi_{i1}^{(s-1)} = 0, \\ F_{k2} + \dfrac{\partial F_k}{\partial W} \cdot W_2 + \ldots\ldots + \sum\limits_1^{2^{s-2}} {}_i \dfrac{\partial F_k}{\partial W_i^{(s-2)}} \cdot W_{i2}^{(s-2)} + \sum\limits_1^{2^{s-1}} {}_i \dfrac{\partial F_k}{\partial W_i^{(s-1)}} \cdot \Phi_{i2}^{(s-1)} = 0 \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots, q). \end{cases}$$



Nach der Voraussetzung sind die Gleichungen (5) eine Folge von $F_k = 0$ $(k = 1, \ldots, q+r)$. Bezeichnet man:

$$(9) \quad \begin{cases} \Omega_1 f = f_1 + W_1 \cdot \dfrac{\partial f}{\partial W} + \ldots + \sum\limits_1^{2^{s-2}} {}_i W_{i1}^{(s-2)} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial W_i^{(s-2)}} + \sum\limits_1^{2^{s-1}} {}_i \Phi_{i1}^{(s-1)} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial W_i^{(s-1)}}, \\ \Omega_2 f = f_2 + W_2 \cdot \dfrac{\partial f}{\partial W} + \ldots + \sum\limits_1^{2^{s-2}} {}_i W_{i2}^{(s-2)} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial W_i^{(s-2)}} + \sum\limits_1^{2^{s-1}} {}_i \Phi_{i2}^{(s-1)} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial W_i^{(s-1)}}, \end{cases}$$

so sind die Gleichungen

$$\Omega_1 F_k = 0, \qquad \Omega_2 F_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

nach der Voraussetzung eine Folge von $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$.

Die beiden infinitesimalen Transformationen (6) führen die Relationen dritter bis $(s-2)$-ter Stufe unter den Relationen: $F_{q+1} = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ in gewisse Relationen über, welche unter den Relationen vierter bis $(s-1)$-ter Stufe enthalten sind. Die Relationen $(s-1)$-ter Stufe werden in gewisse unter den Relationen (3) übergeführt. Die letzteren bestehen identisch vermöge der Gleichungen $F = 0$; dasselbe gilt auch für die Relationen, welche sich aus (3) durch Ausführung der infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ ergeben. Da die Relationen (3) eine Folge der Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ sind, so kann man mit Rücksicht auf das Vorhergehende sagen, dass das ganze Gleichungensystem: $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ die beiden infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ gestattet.

Führt man andererseits die Operationen $f_1, f_2$ auf die Gleichungen $W_i^{(s)} = \Phi_i^{(s)}$ aus und eliminiert sodann alle Differentialoperationen $s$-ter Stufe, so bekommt man:

$$(7) \qquad W_{i1}^{(s)} = \Omega_1 (\Phi_i^{(s)}); \qquad W_{i2}^{(s)} = \Omega_2 (\Phi_i^{(s)}).$$

Aus diesen Gleichungen sind jetzt noch alle Differentialoperationen $(s+1)$-ter Stufe wegzuschaffen. Dazu muss man die zwischen den Differentialoperationen $(s+1)$-ter Stufe $W_i^{(s+1)}$ bestehenden Relationen benutzen. Es kommen aber dabei nur die folgengen Relationen in Betracht:

$$(8) \quad \begin{cases} W_{i\,112}^{(s-2)} + W_{i\,211}^{(s-2)} = 2\, W_{i\,121}^{(s-2)}, \\ W_{i\,221}^{(s-2)} + W_{i\,122}^{(s-2)} = 2\, W_{i\,212}^{(s-2)}. \end{cases}$$

Die übrigen Relationen liefern nichts neues, weil sie nur solche Gleichungen zwischen den $x, y, y', \ldots, W^{(s-1)}$ ergeben, welche aus den Gleichungen (3) durch Ausführung der infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ folgen.

Setzt man nun die Ausdrücke (7) in die Relationen (8) ein, so bekommt man die Gleichungen:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega_2(\Phi^{(s-2)}_{i\,11}) + \Omega_1(\Phi^{(s-2)}_{i\,21}) = 2\,\Omega_1(\Phi^{(s-2)}_{i\,12}),\\ &\Omega_1(\Phi^{(s-2)}_{i\,22}) + \Omega_2(\Phi^{(s-2)}_{i\,12}) = 2\,\Omega_2(\Phi^{(s-2)}_{i\,21}).\end{aligned}\right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 2^{s-2}).$$

Dieselben müssen nach der Voraussetzung vermöge der Gleichungen $F = 0$ identisch bestehen.

Es bleibt noch übrig, diejenigen Relationen zwischen den $x, y, y', W, \ldots, W^{(s-1)}$ aufzustellen, welche sich aus (2′) durch zweimalige Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ und Elimination der Operationen $s$-ter, $(s+1)$-ter und $(s+2)$-ter Stufe ergeben.

Dabei liefern die Gleichungen $F = 0$ nichts neues. Die Gleichungen:

$$\Omega_1 F_k = 0, \qquad \Omega_2 F_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, q+r)$$

bestehen identisch vermöge der Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ und dasselbe gilt von den Gleichungen, welche sich aus den obigen durch Ausführung der beiden infinitesimalen Transformationen (6) ergeben.

Durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ auf die Gleichungen (7) und nachherige Elimination der Differentialoperationen $s$-ter Stufe bekommt man die Gleichungen:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &W^{(s)}_{i\,11} = \Omega_1(\Omega_1(\Phi^{(s)}_i)); \qquad W^{(s)}_{i\,12} = \Omega_2(\Omega_1(\Phi^{(s)}_i))\\ &W^{(s)}_{i\,21} = \Omega_1(\Omega_2(\Phi^{(s)}_i)); \qquad W^{(s)}_{i\,22} = \Omega_2(\Omega_2(\Phi^{(s)}_i)).\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen sind jetzt alle Differentialoperationen $(s+2)$-ter Stufe wegzuschaffen. Dazu muss man die zwischen den Differentialoperationen $(s+2)$-ter Stufe $W^{(s+2)}_i$ bestehenden Relationen benutzen. Es kommen analog wie vorhin, nur die folgenden Relationen in Betracht:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &W^{(s-1)}_{i\,112} + W^{(s-1)}_{i\,211} = 2\,W^{(s-1)}_{i\,121},\\ &W^{(s-1)}_{i\,221} + W^{(s-1)}_{i\,122} = 2\,W^{(s-1)}_{i\,212}.\end{aligned}\right.$$

Die übrigen Relationen $(s+2)$-ter Stufe liefern nichts neues, weil sie nur solche Gleichungen zwischen den $x, y, y', W, \ldots, W^{(s-1)}$ ergeben, welche



aus den Gleichungen (3) und (9) durch zweimalige bzw. einmalige Ausführung der infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ folgen.

Setzt man nun die Ausdrücke (10) in die Relationen (11) ein, so bekommt man die Gleichungen:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega_2(\Omega_1(\Phi^{(s-1)}_{i\,1})) + \Omega_1(\Omega_1(\Phi^{(s-1)}_{i\,2})) = 2\,\Omega_1(\Omega_2(\Phi^{(s-1)}_{i\,1})),\\ &\Omega_1(\Omega_2(\Phi^{(s-1)}_{i\,2})) + \Omega_2(\Omega_2(\Phi^{(s-1)}_{i\,1})) = 2\,\Omega_2(\Omega_1(\Phi^{(s-1)}_{i\,2})).\end{aligned}\right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 2^{s-1}).$$

Dieselben müssen nach der Voraussetzung ebenfalls vermöge der Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ identisch bestehen.

Die in der Einleitung geforderten Eigenschaften des Systems (2′) kann man also analytisch folgendermassen formulieren:

1) das Gleichungensystem $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ gestattet die beiden infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$;

2) die Gleichungen (3), (9), (12) bestehen vermöge der Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$.

Es möge nun irgend eine Lösung

$$W = \varphi(x y y')$$

der Differentialgleichungen (2′) vorgelegt sein. Sie ist dann auch die Lösung des Systems (2).

Durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ erhält man die $W^{(1)}, W^{(2)} \ldots \ldots W^{(s-1)}$ als Funktionen von $x, y, y'$ dargestellt:

$$W^{(1)}_{i_1} = \varphi^{(1)}_{i_1}(x y y'), \ldots \ldots \; W^{(s)}_{i_s} = \varphi^{(s)}_{i_s}(x y y')$$

$$(i_k = 1, 2, \ldots, 2^k; \qquad k = 1, 2, \ldots, s)$$

und wenn man diese Ausdrücke sowie den Ausdruck für $W$ in die Gleichungen (2) einsetzt, so bekommt man lauter Identitäten.

Hieraus geht hervor, dass die Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ ihrerseits bei der Substitution:

$$(13)\quad W = \varphi(x y y'), \quad W^{(1)}_{i_1} = \varphi^{(1)}_{i_1}(x y y'); \;\ldots\; W^{(s-1)}_{i_{s-1}} = \varphi^{(s-1)}_{i_{s-1}}(x y y')$$

sich in Identitäten verwandeln. Das kann man auch folgendermassen ausdrücken: das Gleichungensystem (13) umfasst die Gleichungen:

$$F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$$

Es lässt sich ferner beweisen, dass das Gleichungensystem (13) die beiden oben besprochenen infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ gestattet.

In der Tat, es verschwinden zunächst alle Ausdrücke:

$$\Omega_\nu (W - \varphi) = W_\nu^{(1)} - \varphi_\nu^{(1)},$$

$$\Omega_\nu (W_{i_1}^{(1)} - \varphi_{i_1}^{(1)}) = W_{i_1,\nu}^{(1)} - \varphi_{i_1,\nu},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_\nu (W_{i_{s-2}}^{(s-2)} - \varphi_{i_{s-2}}^{(s-2)}) = W_{i_{s-2},\nu}^{(s-2)} - \varphi_{i_{s-2},\nu}^{(s-2)}$$

$$(\nu = 1, 2;\ i_k = 1, 2, \ldots, 2^k,\ k = 1, \ldots, s-2)$$

vermöge (13), denn die Gleichungen (13) sind aus $W - \varphi = 0$ durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ hervorgegangen. Aber auch die Ausdrücke

$$\Omega_\nu (W_{i_{s-1}}^{(s-1)} - \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}) = \Phi_{i_{s-1},\nu}^{(s-1)} - \varphi_{i_{s-1},\nu}^{(s-1)}$$

$$(\nu = 1, 2;\ i_{s-1} = 1, 2, \ldots, 2^{s-1})$$

verschwinden vermöge (13), denn die Gleichungen:

$$W_{i_{s-1},\nu}^{(s-1)} = \Phi_{i_{s-1},\nu}^{(s-1)} \qquad (\nu = 1, 2)$$

werden, wie schon auf S. 147 (13) gesagt, durch die Substitution:

$$W = \varphi, \quad W_{i_1}^{(1)} = \varphi_{i_1}^{(1)}, \ldots, \quad W_{i_s}^{(s)} = \varphi_{i_s}^{(s)}$$

identisch befriedigt.

Damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen.

Es möge jetzt umgekehrt ein Gleichungensystem von der Form (13) vorliegen, über welches man weiter nichts weiss, als dass es die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ gestattet, und die Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$ umfasst. Das vorgelegte System muss dann auch die infinitesimale Transformation $(\Omega_1 \Omega_2)$ gestatten. Die Gleichungen (13) entstehen alle aus der Gleichung $W = \varphi(xyy')$ durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$. Da ausserdem unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen

$$\Omega_\nu (W_{i_{s-1}}^{(s-1)} - \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}) = \Phi_{i_{s-1},\nu}^{(s-1)} - \varphi_{s_{i-1},\nu}^{(s-1)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2)$$

eine Folge von (13) sind und die Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ ebenfalls,



so wird das Gleichungensystem (2) identisch befriedigt, wenn man die Substitution (13) darauf ausführt und sodann noch setzt:

$$W_{i_{s-1},\nu}^{(s-1)} = \varphi_{i_{s-1},\nu}^{(s-1)} \qquad (\nu = 1, 2).$$

Die Gleichung $W = \varphi(xyy')$ stellt also eine Lösung des Systems (2) oder (2′) dar. Man ersieht daraus: jede Lösung $W = \varphi(xyy')$ der Differentialgleichungen (2) liefert ein ganz bestimmtes Gleichungensystem von der Form (13), welches die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ gestattet und die Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ umfasst. Umgekehrt liefert jedes Gleichungensystem von der Form (13), welches die eben angegebenen Eigenschaften besitzt, eine ganz bestimmte Lösung der Differentialgleichungen (2). Folglich ist das Problem, alle Lösungen der Differentialgleichungen (2) zu bestimmen, äquivalent mit dem Problem, alle Gleichungensysteme von der Form (13) zu finden, welche die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ gestatten und ausserdem die Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_{q+r} = 0$ umfassen. Kennt man die allgemeinste Lösung des einen dieser beiden Probleme, so ist zugleich die allgemeinste Lösung des anderen gegeben.

Dieses neue Problem lässt sich auf Grund der Entwickelungen in Kap. 7, S. 118 ff. des ersten Abschnitts der „Transformationsgruppen“ sofort erledigen.

Jedes der gesuchten Gleichungensysteme gestattet mit $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$ zugleich auch die infinitesimale Transformation:

$$\Omega_3 f = (\Omega_2 \Omega_1) = f_3 + (W_{12} - W_{21}) \cdot \frac{\partial f}{\partial W} + \cdots + \sum_1^{2^{s-3}} {}^i (W_{i12}^{(s-3)} - W_{i21}^{(s-3)}) \cdot \frac{\partial f}{\partial W_i^{(s-3)}}$$

$$+ \sum_1^{2^{s-1}} {}^i (\Phi_{i12}^{(s-2)} - \Phi_{i21}^{(s-2)}) \cdot \frac{\partial f}{\partial W_i^{(s-2)}} + \sum_1^{2^{s-1}} {}^i [\Omega_2 (\Phi_{i1}^{(s-1)}) - \Omega_1 (\Phi_{i2}^{(s-1)})] \cdot \frac{\partial f}{\partial W_i^{(s-1)}}.$$

Zunächst ist hervorzuheben, dass die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$, $\Omega_3 f$ voneinander linear unabhängig sind, weil die Operationen $f_1$, $f_2$, $f_3$ voneinander unabhängig sind.

Durch Ausrechnung ergibt sich ferner:

$$(\Omega_1 \Omega_3) = f_{31} - f_{13} + [W_{121} - W_{211} - (W_{112} - W_{121})] \cdot \frac{\partial f}{\partial W} + \cdots$$

$$+ \sum_1^{2^{s-4}} {}^i [W_{i121}^{(s-4)} - W_{i211}^{(s-4)} - (W_{i112}^{(s-4)} - W_{i121}^{(s-4)})] \cdot \frac{\partial f}{\partial W_i^{(s-4)}}$$

$$+\sum_{1}^{2^{s-3}} {}^{i}\,[\Phi_{i\,121}^{(s-3)} - \Phi_{i\,211}^{(s-3)} - (\Phi_{i\,112}^{(s-3)} - \Phi_{i\,121}^{(s-3)})] \cdot \frac{\partial f}{\partial W_i^{(s-3)}}$$

$$+\sum_{1}^{2^{s-2}} {}^{i}\,\{\Omega_1\,(\Phi_{i\,12}^{(s-2)} - \Phi_{i\,21}^{(s-2)}) - [\Omega_2\,(\Phi_{i\,11}^{(s-2)}) - \Omega_1\,(\Phi_{i\,12}^{(s-2)})]\} \cdot \frac{\partial f}{\partial W_i^{(s-2)}}$$

$$+\sum_{1}^{2^{s-1}} {}^{i}\,\{\Omega_1\,[\Omega_2(\Phi_{i\,1}^{(s-1)}) - \Omega_1\,(\Phi_{i\,2}^{(s-1)})] - (\Omega_2\,\Omega_1)\,\Phi_{i\,1}^{(s-1)}\} \cdot \frac{\partial f}{\partial W_i^{(s-1)}}\,.$$

Die Koeffizienten von $\frac{\partial f}{\partial W}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial W_i^{(s-4)}}$ verschwinden identisch infolge der Relationen zwischen den Operationen dritter bis $(s-1)$-ter Stufe. Die Koeffizienten der drei letzten Summen verschwinden vermöge der Gleichungen $F_1=0, \ldots, F_{q+r}=0$, wie die Gleichungen (3), (9), (12) zeigen. Folglich besteht für die Wertsysteme $x$, $y$, $y'$, $W, \ldots, W^{(s-1)}$ des Gleichungensystems $F_1=0, \ldots, F_{q+r}=0$ die Relation

$$(\Omega_1\,\Omega_3) = 0\,.$$

Ganz analog kann man sich überzeugen, dass für die Wertsysteme $x, y, y', W, \ldots, W^{(s-1)}$ des Gleichungensystems $F_1=0, \ldots, F_{q+r}=0$ die Relation

$$(\Omega_2\,\Omega_3) = 0$$

besteht. Ausserdem besteht die Relation

$$\Omega_3 f + (\Omega_1\,\Omega_2) = 0$$

identisch.

Man hat hier also den speziellen Fall, dessen Erledigung durch das Theorem 19 in Kap. 7, S. 132 gegeben ist. Mit Hilfe dieses Theorems kann man überhaupt alle Gleichungensysteme aufstellen, welche $\Omega_1 f$, $\Omega_2 f$, $\Omega_3 f$ gestatten und die Gleichungen $F_1=0, \ldots, F_{q+r}=0$ umfassen. Es hat keine Schwierigkeit darunter diejenigen Gleichungensysteme anzugeben, welche die Form (13) erhalten können.

Setzt man nun weiter die Untersuchung genau in derselben Weise fort, wie es in den „Transformationsgruppen" (erster Abschnitt; Kap. 10, S. 176 ff) geschieht, so gelangt man zu dem folgenden Satze:

**Theorem I.**

Besitzt ein System von partiellen Differentialgleichungen $s$-ter Stufe



$$F_k(x, y, y', W^{(1)}, \ldots, W^{(s)}) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

die Eigenschaft, dass alle unabhängigen Differentialoperationen $s$-ter Stufe $W_i^{(s)}$ durch die Differentialoperationen niedrigerer Stufen, durch $W$ und $x$, $y$, $y'$ ausgedrückt werden können, während das entsprechende jedenfalls nicht für alle unabhängigen Differentialoperationen $(s-1)$-ter Stufe gilt, liefert ausserdem das vorgelegte System bei einmaliger und bei zweimaliger Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ nur solche Relationen zwischen $x$, $y$, $y'$, $W$ und den Differentialoperationen erster bis $(s-1)$-ter Stufe, welche aus dem Systeme selbst folgen, so enthält die allgemeinste Lösung: $W=\varphi(x\,y\,y')$ des betreffenden Systems von Differentialgleichungen nur eine endliche Anzahl von willkürlichen Konstanten.

Die Zahl dieser willkürlichen Konstanten ist gleich:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{s-1} - q\,,$$

wo mit $\varepsilon_k$ die Zahl der unabhängigen Differentialoperationen $k$-ter Stufe bezeichnet ist und mit $q$ die Anzahl der unabhängigen Relationen, welche das betreffende System zwischen $x$, $y$, $y'$ und den Differentialoperationen erster bis $(s-1)$-ter Stufe liefert.

Die allgemeinste Lösung $W=\varphi\,(x y y')$ selbst findet man durch Integration eines dreigliedrigen vollständigen Systems in

$$3 - q + 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{s-1}$$

unabhängigen Veränderlichen.

Ebenso kann man, ohne eine Kleinigkeit ändern zu müssen, die Analoga zu den beiden folgenden Sätzen des zitierten Kap. 10 (S. 183) beweisen.

Die entsprechenden Sätze lauten:

**Satz 1:**

Ist $W$ eine gegebene Funktion der Veränderlichen $x, y, y'$ und einer endlichen Anzahl von Parametern $a_1, \ldots, a_r$:

$$W = \varphi\,(x\,y\,y'\,a_1 \ldots a_r),$$

so gibt es stets ein integrables System von partiellen Differentialgleichungen $W$, $W^{(1)}$, $W^{(2)} \ldots$, welches $W$ als Funktion von $x, y, y'$ bestimmt und dessen allgemeinste Lösung eben durch die Gleichung $W = \varphi(xyy'a_1 \ldots a_r)$ dargestellt wird.

Verbindet man diesen Satz mit dem Theorem I, so erhält man sofort den

**Satz 2.**

Ist ein integrables System von partiellen Differentialgleichungen

$$F_\sigma(x,\ y,\ y',\ W,\ W^{(1)}, \ldots .\ W^{(s)}) = 0 \qquad (\sigma = 1,\ 2, \ldots)$$

so beschaffen, dass seine allgemeinste Lösung nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Konstanten abhängt, so lässt es sich stets durch Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ und durch Eliminationen auf eine Form bringen, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

Erstens sind alle unabhängigen Differentialoperationen von einer gewissen, etwa von der $s$-ten Stufe durch die von niedrigerer Stufe und durch $W, x, y, y'$ ausgedrückt, während das entsprechende jedenfalls nicht für alle unabhängigen Differentialoperationen $(s-1)$-ter Stufe gilt.

Zweitens ergeben sich durch einmalige und durch zweimalige Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ nur solche Relationen zwischen den $x, y, y', W$ und den Differentialoperationen erster bis $(s-1)$-ter Stufe, welche bereits ohne Differentiation aus den vorhandenen Gleichungen folgen.

## § 3. Verallgemeinerung der bisherigen Betrachtungen.

Die Betrachtungen der beiden ersten Paragraphen lassen sich sofort verallgemeinern.

Es möge eine Funktion $f$ der $2n+1$ Veränderlichen:

(1) $$x_1 \ldots . x_n,\quad z,\quad p_1 \ldots . p_n$$

vorliegen.

An Stelle der partiellen Ableitungen mögen folgende Differentialoperationen:

(2) $$f_{\binom{1}{\nu}} = \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + p_\nu . \frac{\partial f}{\partial z}; \quad f_{\binom{2}{\nu}} = \frac{\partial f}{\partial p_\nu}; \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

eingeführt werden. Ferner bezeichne man:

$$\left[ f_{\binom{1}{\nu}} \right]_{\binom{2}{\mu}} = f_{\binom{1\,2}{\nu\,\mu}}.$$



Dann bestehen die Relationen:

(3) $$\left| \begin{array}{l} f_{\binom{1\ 3}{\nu\ }} = f_{\binom{3\ 1}{\ \nu}}; \quad f_{\binom{2\ 3}{\nu\ }} = f_{\binom{3\ 2}{\ \nu}}, \\ f_{\binom{1\,2}{\nu\,\nu}} - f_{\binom{2\,1}{\nu\,\nu}} = f_3, \\ f_{\binom{1\,2}{\mu\,\nu}} = f_{\binom{2\,1}{\nu\,\mu}}, \qquad \nu \neq \mu. \end{array} \right.$$

Mit Ausnahme von $f_{\binom{1}{\nu}}, f_{\binom{2}{\nu}}$, wo $\nu$ dieselbe Zahl in beiden Operationen bedeutet, sind alle Operationen (2) vertauschbar, d. h. ihre Reihenfolge gleichgültig.

Man kann ferner analog, wie im § 1. beweisen, dass alle Relationen zwischen den Operationen:

$$f_{\binom{i_1 i_2 \ldots i_s}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s}},$$

wobei $i_1, \ldots, i_s$ Zahlen aus der Reihe 1, 2 und $\nu_1, \ldots, \nu_s$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ bedeuten, aus folgenden Relationen:

(4) $$\left\{ \begin{array}{l} f_{\binom{1\,2}{\nu\,\mu}} = f_{\binom{2\,1}{\mu\,\nu}}, \qquad (\mu \neq \nu), \\ f_{\binom{112}{\nu\nu\nu}} + f_{\binom{211}{\nu\nu\nu}} = 2 f_{\binom{121}{\nu\nu\nu}}, \\ f_{\binom{221}{\nu\nu\nu}} + f_{\binom{122}{\nu\nu\nu}} = 2 f_{\binom{212}{\nu\nu\nu}}, \end{array} \right.$$

allein durch Ausführung der Operationen $f_{\binom{1}{\nu}}, f_{\binom{2}{\nu}}$ abgeleit werden können. Die letzteren mögen wie vorhin die Differentialoperationen erster Stufe genannt werden. Dann wird man die Operationen $f_{\binom{i_1 \ldots i_s}{\nu_1 \ldots \nu_s}}$ in denen die $i$ die Zahlen 1, 2 und die $\nu$ Zahlen $1, 2, \ldots n$ repräsentieren, als die Differentialoperationen $s$-ter Stufe bezeichnen müssen.

Nach diesen Vorbereitungen kann man ohne Weiteres den folgenden Satz aussprechen:

**Theorem Ia.**

Besitzt ein System von partiellen Differentialgleichungen $s$-ter Stufe:

$$F_k(x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_n,\ z,\ W,\ W^{(1)}, \ldots W^{(s)}) = 0$$
$$(k = 1,\ 2, \ldots)$$

die Eigenschaft, dass alle unabhängigen Differentialoperationen $s$-ter Stufe $W^{(s)}$ durch die Differentialoperationen niedrigerer Stufe und durch $W$, $x_1 \dots x_n$, $z$, $p_1 \dots p_n$ ausgedrückt werden können, während das entsprechende jedenfalls nicht für alle unabhängigen Differentialoperationen $(s-1)$-ter Stufe gilt, — liefert ausserdem das vorgelegte System bei einmaliger sowie bei zweimaliger Ausführung der Operationen $f_{\binom{1}{\nu}}$, $f_{\binom{2}{\nu}}$ nur solche Relationen zwischen $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$, $z$ und den Differentialoperationen erster bis $(s-1)$-ter Stufe, welche aus dem Systeme selbst folgen, so enthält die allgemeinste Lösung:

$$W = \varphi\,(x_1 \dots x_n,\ z,\ p_1 \dots p_n)$$

des betreffenden Systems von Differentialgleichungen nur eine endliche Anzahl von willkürlichen Konstanten. Die Zahl dieser willkürlichen Konstanten ist gleich

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{s-1} - q\,,$$

wo mit $\varepsilon_k$ die Zahl der unabhängigen Differentialoperationen $k$-ter Stufe bezeichnet ist und mit $q$ die Anzahl der unabhängigen Relationen, welche das betreffende System zwischen $x_1 \dots, x_n$, $z$, $p_1 \dots p_n$, $W$ und allen Differentialoperationen erster bis $(s-1)$-ter Stufe liefert. Die allgemeinste Lösung $W = \varphi\,(z, x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n)$ selbst findet man durch Integration eines $(2n+1)$-gliedrigen vollständigen Systems in

$$2n + 1 - q + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{s-1}$$

unabhängigen Veränderlichen.

Der Beweis dieses Satzes ist fast identisch mit dem Beweise des entsprechenden Satzes im Falle dreier Veränderlichen $x$, $y$, $y'$. Am zweckmässigsten ist es dabei, nicht nur die unabhängigen, sondern alle Differentialoperationen mitzunehmen und zu dem gegebenen System von Differentialgleichungen die Relationen zwischen den Differentialoperationen, welche den Relationen (11) in § 1 entsprechen, hinzuzufügen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass der oben ausgesprochene Satz sich auch auf den Fall übertragen lässt, wo nicht nur eine unbekannte Funktion, sondern mehrere unbekannte Funktionen $U$, $V$, $W, \dots$ der Veränderlichen $z$, $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ in dem gegebenen Systeme von Differentialgleichungen vorkommen.



Diese weitere Verallgemeinerung wird aber im Folgenden nicht benutzt, da man nur mit einer einzigen Funktion zu tun haben wird, nämlich der s. g. charakteristischen Funktion der infinitesimalen Berührungstransformationen.

## § 4. Relationen zwischen den Ableitungen der durch eine Berührungstransformation transformierten Veränderlichen.

Es sei eine beliebige Berührungstransformation in der Ebene vorgelegt:

(1) $$\mathfrak{x} = X\,(x y y')\,; \quad \mathfrak{y} = Y\,(x y y')\,; \quad \mathfrak{y}' = P\,(x y y')\,.$$

Die Forderung der Invarianz der Pfaff'schen Gleichung $dy - y'.dx = 0$ zieht bekanntlich die folgenden Relationen nach sich:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial x} - P\,.\dfrac{\partial X}{\partial x} = -\rho\,.\,y', \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial y} - P\,.\dfrac{\partial X}{\partial y} = \rho\,, \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial y'} - P\,.\dfrac{\partial X}{\partial y'} = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man den Faktor $\rho$, so bekommt man:

(2) $$Y_1 = P\,.\,X_1\,; \qquad Y_2 = P\,.\,X_2\,.$$

Berechnet man ferner die Differentialoperationen dritter Stufe von $Y$ und setzt die erhaltenen Werte in die Relationen

$$Y_{112} + Y_{211} = 2\,Y_{121}\,,$$
$$Y_{221} + Y_{122} = 2\,Y_{212}\,,$$

ein, so ergeben sich die folgenden Relationen zwischen den Ableitungen von $X$, $P$ allein:

(3) $$\begin{cases} P_{11} X_2 + P_{12} X_1 + 2 P_1 X_{21} = X_{11} P_2 + X_{12} P_1 + 2 X_1 P_{21}, \\ P_{22}\,.\,X_1 + P_{21}\,.\,X_2 + 2\,P_2\,.\,X_{12} = X_{22}\,.\,P_1 + X_{21}\,.\,P_2 + 2\,P_2\,.\,P_{12}\,. \end{cases}$$

Analog ergeben sich aus den Gleichungen (2) mit Rücksicht auf die Identitäten vierter Stufe (Formeln (9) in § 1.) die Relationen:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 2P_{111}.X_2+(P_{112}-3P_{211}).X_1+2P_{11}.(3X_{21}-X_{12}) \\
& =2X_{111}.P_2+(X_{112}-3X_{211}).P_1+2X_{11}.(3P_{21}-P_{12}), \\
& P_{221}.X_1-P_{112}.X_2+P_{22}.X_{11}+2P_{21}.X_{12} \\
& =X_{221}.P_1-X_{112}.P_2+X_{22}.P_{11}+2X_{21}.P_{12}, \\
& 2P_{222}.X_1+(P_{221}-3P_{122}).X_2+2P_{22}.(3X_{12}-X_{21}) \\
& =2X_{222}.P_1+(X_{221}-3X_{122}).P_2+2X_{22}.(3P_{12}-P_{21}).
\end{aligned}
\right.
$$

Die 4 Ableitungen erster Stufe der $X$, $P$ sind unabhängig. Unter den 8 Ableitungen zweiter Stufe der $X$, $P$ sind nur 6 unabhängig, unter den 12 Ableitungen dritter Stufe der $X$, $P$ sind nur 9 unabhängig, — also so viele, wie es Ableitungen dritter bzw. vierter Stufe einer einzigen Funktion der Veränderlichen $x$, $y$, $y'$ gibt.

Diese Bemerkung lässt sich verallgemeinern; man kann nämlich den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

**Satz 3.**

Bestimmen die Gleichungen

$$x_1 = X(xyy'); \quad y_1 = Y(xyy'); \quad y_1' = P(xyy')$$

die allgemeinste Berührungstransformation in der Ebene, so sind unter den Ableitungen $s$-ter Stufe der beiden Funktionen $X(xyy')$ und $P(xyy')$ genau $\varepsilon_{s+1}$ und nicht mehr durch keine Relation verknüpft, wenn $\varepsilon_{s+1}$ die Zahl der unabhängigen Ableitungen $(s+1)$-ter Stufe einer beliebigen Funktion der Veränderlichen $x$, $y$, $y'$ bedeutet.

Die Richtigkeit dieses Satzes wurde vorhin für $s=2$ und $s=3$ unmittelbar verifiziert. Es ist nämlich in der Tat $\varepsilon_3=6$, $\varepsilon_4=9$.

Der Satz gilt zunächst, wie man sich unmittelbar überzeugen kann, für eine infinitesimale Berührungstransformation. In der Tat lassen sich dann sämtliche Ableitungen $s$-ter Stufe der beiden Funktionen $X$ und $P$ durch die Ableitungen $(s+1)$ ter Stufe einer einzigen Funktion, nämlich der charakteristischen Funktion, die zu der infinitesimalen Transformation gehört, ausdrücken.

Für die allgemeinste endliche Berührungstransformation kann es somit unter den Ableitungen $s$-ter Stufe der beiden Funktionen $X$ und $P$ jedenfalls nicht weniger als $\varepsilon_{s+1}$ solche geben, die durch keine Relation verknüpft sind.

Um nun den Satz ganz allgemein zu beweisen, bemerke man, dass die Relationen, welche man aus (2) durch aufeinanderfolgende Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ bekommt, die folgende Gestalt haben:



$$
(5)\qquad Y_{i_1 i_2 \dots i_{s+1}} - P.X_{i_1 i_2 \dots i_{s+1}} = \sum_{1}^{2^s}{}^{k} (\pi_k . X_k^{(s)} + \xi_k . P_k^{(s)}) + \Phi_{i_1 i_2 \dots i_{s+1}}.
$$

Darin bedeuten die $X_k^{(s)}$, $P_k^{(s)}$ die Ableitungen $s$-ter Stufe von $X$, $P$; $\pi_k$, $\xi_k$ bedeuten die Ableitungen $P_1$, $P_2$; $X_1$, $X_2$ multipliziert mit gewissen Zahlenkoeffizienten, welche nicht sämtlich verschwinden; $\Phi_{i_1 i_2 \dots i_{s+1}}$ ist eine Summe von isobaren Produkten je zweier der Ableitungen zweiter bis $(s-1)$-ter Stufe der $X$, $P$. Das gemeinsame Gewicht dieser Produkte beträgt $(s+1)$.

In den Gleichungen (5) treten alle $2^{s+1}$ Ableitungen $s$-ter Stufe von $X$, $P$ auf. Zwischen den auf der linken Seite stehenden $2^{s+1}$ Differenzen

$$Y_{i_1 i_2 \dots i_{s+1}} - P.X_{i_1 i_2 \dots i_{s+1}}$$

bestehen gewisse $\eta_{s+1}$ Relationen, deren Zahl in § 1 bestimmt worden ist. Diese Relationen liefern $\eta_{s+1}$ Relationen zwischen den $2^{s+1}$ Ableitungen $s$-ter Stufe von $X$, $P$ und den Ableitungen niedrigerer Stufe.

Gelingt es nun zu beweisen, dass diese Relationen zwischen den Ableitungen von $X$, $P$, die man der Kürze halber als „Relationen $s$-ter Stufe" bezeichnen möge, nach $\eta_{s+1}$ unter den Ableitungen $s$-ter Stufe von $X$, $P$ auflösbar sind, so wird damit gezeigt, dass die Zahl der unabhängigen Ableitungen $s$-ter Stufe von $X$, $P$ gleich ist:

$$2^{s+1} - \eta_{s+1} = \varepsilon_{s+1}$$

und dass sich die übrigen Ableitungen $s$-ter Stufe von $X$, $P$ durch die letzteren und durch die Ableitungen niedrigerer Stufe ausdrücken lassen. Damit wäre also der Beweis des Satzes geliefert.

Im Falle einer infinitesimalen Berührungstransformation müssen die $\eta_{s+1}$ „Relationen $s$-ter Stufe" nach $\eta_{s+1}$ unter den Ableitungen $s$-ter Stufe von $X$ und $P$ auflösbar sein, weil in diesen Relationen alle Ableitungen $s$-ter Stufe auftreten und weil es von vornherein sicher ist, dass unter diesen Ableitungen genau $\varepsilon_{s+1} = 2^{s+1} - \eta_{s+1}$ durch keine Relation verknüpft sind.

Daraus folgt aber, dass „die Relationen $s$ ter Stufe" auch im Falle der allgemeinsten endlichen Berührungstransformation nach $\eta_{s+1}$ unter den Ableitungen $s$-ter Stufe der beiden Funktionen $X$ und $P$ auflösbar sein müssen und damit ist der Beweis geliefert.

Der Satz 3 sagt zugleich aus, dass zwischen den $2\varepsilon_s$ unabhängigen Ableitungen $s$-ter Stufe von $X$, $P$ gerade $(2\varepsilon_s - \varepsilon_{s+1})$ Relationen bestehen. Man kann sich ferner überzeugen, dass alle diese Relationen aus den Relationen (3) allein durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ abgeleitet werden können.

Die Identitäten, welche zwischen den Differentialoperationen einer beliebigen Stufe bestehen, können (wie in § 1 gezeigt wurde) aus den Identitäten dritter Stufe allein abgeleitet werden und zwar durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ und andererseits durch Bildung dieser Identitäten für $f_1$, $f_2$. Die so erhaltenen Identitäten der zweiten Art sind dadurch gekennzeichnet, dass alle drei in ihnen vorkommenden Differentialoperationen denselben ersten Index haben. Diese Identitäten liefern keine neuen Relationen zwischen den Ableitungen von $X$, $P$ (ausser den bereits für jede Funktion der Veränderlichen $x, y, y'$ bestehenden), weil die in ihnen vorkommenden Ausdrücke $Y_{i_1 \ldots i_s}$ derselben der Gleichungen (2) entnommen sind. Sie sind also vermöge der bestehenden Relationen identisch erfüllt und es bleiben nur diejenigen übrig, welche aus den Identitäten dritter Stufe durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ folgen.

Damit ist die vorhin ausgesprochene Behauptung bewiesen.

## § 5. Die Differentialinvarianten und Definitionsgleichungen einer Gruppe von Berührungstransformationen in der Ebene.

Der Untersuchung der Differentialinvarianten muss man einige Bemerkungen über infinitesimale Transformationen, welche aus einer infinitesimalen Berührungstransformation durch Erweiterung entstehen, vorausschicken.

In den Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ sei eine infinitesimale Berührungstransformation vorgelegt:

$$Bf = \xi(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \zeta(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'}. \tag{1}$$

Nach dem Theorem 39, S. 253 des zweiten Abschnittes der „Transformationsgruppen" existiert eine Funktion $W(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}')$, die s. g. charakteristiche Funktion, von solcher Beschaffenheit, dass

$$\xi = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{y}'}; \quad \eta = \mathfrak{y}' \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{y}'} - W; \quad \zeta = -\left(\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{y}' \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{y}}\right).$$

Bei Benutzung der in § 1 eingeführten Bezeichnungen kann man also schreiben

$$B\mathfrak{x} = W_2; \quad B\mathfrak{y} = \mathfrak{y}' \cdot W_2 - W; \quad B\mathfrak{y}' = -W_1. \tag{2}$$

Die Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ mögen nun als Funktionen der durch die Transformation (1) nicht transformierten Veränderlichen $x$, $y$, $y'$ betrachtet werden und zwar sollen die Gleichungen, welche die Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ als Funktionen von $x$, $y$, $y'$ darstellen, wieder eine Berührungstransformation bestimmen, d. h. es soll sein:



$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}' \cdot d\mathfrak{x} = \rho \cdot (dy - y' \cdot dx). \tag{3}$$

Es mögen ferner die Bezeichnungen:

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}; \qquad \mathfrak{x}_2 = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y'}; \qquad \mathfrak{x}_3 = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}$$

eingeführt werden. Das widerspricht nicht den analogen Bezeichnungen für die Funktion $W(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}')$, denn man kann sich die Indices 1, 2, 3 mit dem charakteristischen Symbol der Funktion fest verbunden denken, also unter $f_1$, $f_2$, $f_3$ die entsprechenden Operationen in bezug auf die in $f$ vorkommenden Veränderlichen verstehen.

Die Bedingung (3) ergibt bekanntlich:

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}' \cdot \mathfrak{x}_1; \qquad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}' \cdot \mathfrak{x}_2. \tag{4}$$

Die infinitesimale Berührungstransformation (1) kann man nun erweitern durch Mitnahme aller Ableitungen $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_1'$, $\mathfrak{y}_2'$, ... bis zu einer gewissen Stufe $N$. Die Ableitungen von $\mathfrak{y}$ braucht man bei dieser Erweiterung nicht hinzuzufügen, da sie sich auf Grund der Formeln (4) durch die Ableitungen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}'$ ausdrücken lassen.

Ist $\varphi$ eine beliebige Funktion der Veränderlichen $x$, $y$, $y'$, so kann man schreiben:

$$d\varphi = \varphi_1 \cdot dx + \varphi_2 \cdot dy' + \varphi_3 \cdot (dy - y'\,dx). \tag{5}$$

Die infinitesimalen Transformationen, welche durch Erweiterung aus (1) entstehen, sind dadurch definiert, dass sie das System der Pfaff'schen Gleichungen:

$$d\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1\,dx - \mathfrak{x}_2\,dy' - \mathfrak{x}_3 \cdot (dy - y'\,dx) = 0,$$

$$d\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}_1'\,dx - \mathfrak{y}_2'\,dy' - \mathfrak{y}_3' \cdot (dy - y'\,dx) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

invariant lassen sollen. Man bekommt z. B. aus der ersten der obigen Gleichungen, wenn man darauf die Transformation $Bf$ ausführt und sodann setzt

$$Bx = 0, \quad By = 0, \quad By' = 0,$$

die folgende Relation:

$$dB\mathfrak{x} - [B\mathfrak{x}_1 \cdot dx + B\mathfrak{x}_2 \cdot dy' + B\mathfrak{x}_3 \cdot (dy - y'\,dx)] = 0.$$

Sie lautet ausführlich geschrieben:

$$\frac{\partial W_2}{\partial \mathfrak{x}} \cdot [\mathfrak{x}_1 . dx + \mathfrak{x}_2 . dy' + \mathfrak{x}_3 . (dy - y' . dx)]$$

$$+ \frac{\partial W_2}{\partial \mathfrak{y}'} \cdot [\mathfrak{y}_1' . dx + \mathfrak{y}_2' . dy' + \mathfrak{y}_3' . (dy - y' . dx)]$$

$$+ \frac{\partial W_2}{\partial \mathfrak{y}} \cdot [\mathfrak{y}_1 . dx + \mathfrak{y}_2 . dy' + \mathfrak{y}_3 . (dy - y' . dx)]$$

$$= B\mathfrak{x}_1 . dx + B\mathfrak{x}_2 . dy' + B\mathfrak{x}_3 . (dy - y' . dx).$$

Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Relationen (4):

$$B\mathfrak{x}_1 = W_{21} \cdot \mathfrak{x}_1 + W_{22} \cdot \mathfrak{x}_1'; \quad B\mathfrak{x}_2 = W_{21} \cdot \mathfrak{x}_2 + W_{22} \cdot \mathfrak{y}_2'. \tag{6}$$

In derselben Weise bekommt man:

$$B\mathfrak{y}_1' = -(W_{11} \cdot \mathfrak{x}_1 + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_1'); \quad B\mathfrak{y}_2' = -(W_{11} \cdot \mathfrak{x}_2 + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_2'). \tag{6a}$$

Das System der Pfaff'schen Gleichungen:

$$d\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_{11} . dx + \mathfrak{x}_{12} . dy' + \mathfrak{x}_{13} . (dy - y' . dx)$$

$$d\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_{21} . dx + \mathfrak{x}_{22} . dy' + \mathfrak{x}_{23} . (dy - y' . dx)$$

$$d\mathfrak{y}_1' = \mathfrak{y}_{11}' . dx + \mathfrak{y}_{12}' . dy' + \mathfrak{y}_{13}' . (dy - y' . dx)$$

$$d\mathfrak{y}_2' = \mathfrak{y}_{21}' . dx + \mathfrak{y}_{22}' . dy' + \mathfrak{y}_{23}' . (dy - y' . dx)$$

liefert die Formeln für die Erweiterungen zweiter Stufe der infinitesimalen Berührungstransformation (1). Diese Formeln lauten:

$$(7) \left\{ \begin{aligned}
B\mathfrak{x}_{11} &= W_{211} \cdot \mathfrak{x}_1^2 + (W_{212} + W_{221}) \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1' + W_{222} \cdot \mathfrak{y}_1'^2 + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{11} + W_{22} \cdot \mathfrak{y}_{11}' \\
B\mathfrak{x}_{12} &= W_{211} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 + W_{212} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_2' + W_{221} \cdot \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1' + W_{222} \cdot \mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_2' + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{12} + W_{22} \cdot \mathfrak{y}_{12}', \\
B\mathfrak{x}_{21} &= W_{211} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 + W_{212} \cdot \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1' + W_{221} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_2' + W_{222} \cdot \mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_2' + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{21} + W_{22} \cdot \mathfrak{y}_{21}', \\
B\mathfrak{x}_{22} &= W_{211} \cdot \mathfrak{x}_2^2 + (W_{212} + W_{221}) \cdot \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2' + W_{222} \cdot \mathfrak{y}_2'^2 + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{22} + W_{22} \cdot \mathfrak{y}_{22}', \\
B\mathfrak{y}_{11}' &= -[W_{111} \cdot \mathfrak{x}_1^2 + (W_{121} + W_{112}) \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1' + W_{122} \cdot \mathfrak{y}_1'^2 + W_{11} \cdot \mathfrak{x}_{11} + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{11}'], \\
B\mathfrak{y}_{12}' &= -[W_{111} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 + W_{112} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_2' + W_{121} \cdot \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1' + W_{122} \cdot \mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_2' + W_{11} \cdot \mathfrak{x}_{12} + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{12}'], \\
B\mathfrak{y}_{21}' &= -[W_{111} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 + W_{112} \cdot \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1' + W_{121} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_2' + W_{122} \cdot \mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_2' + W_{11} \cdot \mathfrak{x}_{21} + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{21}'], \\
B\mathfrak{y}_{22}' &= -[W_{111} \cdot \mathfrak{x}_2^2 + (W_{112} + W_{121}) \cdot \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2' + W_{122} \mathfrak{y}_2'^2 + W_{11} \cdot \mathfrak{x}_{22} + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{22}'].
\end{aligned} \right.$$



Ebenso kann man die Erweiterungen höherer Stufen bilden und es leuchtet ein, dass sich die aus der infinitesimalen Berührungstransformation (1) abgeleiteten Transformationen der Ableitungen $N$-ter Stufe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}'$ linear und homogen durch die Ableitungen der charakteristischen Funktion bis zur $(N+1)$-ten Stufe mit Koeffizienten, die von den Ableitungen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}'$ bis zur $N$-ten Stufe abhängen, ausdrücken werden.

Die infinitesimale Transformation:

$$B^{(N)}f = W_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + (\mathfrak{y}' . W_2 - W) . \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} - W_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'} + (W_{21} \cdot \mathfrak{x}_1 + W_{22} \cdot \mathfrak{y}_1') . \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \ldots,$$

welche aus der infinitesimalen Berührungstransformation $Bf$ durch Erweiterung entsteht, kann daher in der folgenden Gestalt dargestellt werden:

$$(8) \left\{ \begin{aligned}
& B^{(N)}f = W . Af + \sum_1^{\varepsilon_1}{}^i \, W_i^{(1)} . A_{i1} f + \sum_1^{\varepsilon_2}{}^i \, W_i^{(2)} . A_{i2} f + \ldots \\
& \ldots + \sum_1^{\varepsilon_N}{}^i \, W_i^{(N)} . A_{iN} f + \sum_1^{\varepsilon_{N+1}}{}^i \, W_i^{(N+1)} . A_{i,\, N+1} f.
\end{aligned} \right.$$

Darin bedeuten $Af$, $A_{ik}f$ ganz bestimmte infinitesimale Transformationen in den Veränderlichen, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1'$, ....

Von nun an möge vorausgesetzt werden, dass man unter diesen Veränderlichen irgend ein System von solchen ausgewählt hat, die unabhängig voneinander sind und dass man die übrigen durch diese ausgedrückt hat und nachher aus der infinitesimalen Transformation weglässt. Dann wird die Zahl der unabhängigen Veränderlichen betragen:

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N+1},$$

wobei $\varepsilon_k$ die Zahl der unabhängigen Ableitungen $k$-ter Stufe einer Funktion $\varphi(xyy')$ bezeichnet.

Die Zahl der infinitesimalen Transformationen $Af$, $A_{ik}f$ ist auch gleich der Summe $1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{N+1}$.

Nun möge ein Satz über die Gestalt der Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen einer Gruppe von Berührungstransformationen erwähnt werden.

Einer jeden $r$-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen entspricht bekanntlich eine Funktion, die s. g. charakteristische Funktion der infinitesimalen Transformationen, welche $r$ willkürliche Konstanten enthält und durch welche die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe bestimmt ist. Aus dem Satz 1 in § 2 folgt also ohne Weiteres der

**Satz 4.**

Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen einer Gruppe von Berührungstransformationen kann man immer auf solche Form bringen, dass sie ein integrables System von linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen zwischen $W$ und den Operationen $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots W^{(s)}, \ldots$ darstellen. Dabei bedeutet $W$ die charakteristiche Funktion der allgemeinen infinitesimalen Transformation der vorgelegten Gruppe.

Ausserdem kann man auf Grund des Theorems I den folgenden wichtigen Satz aussprechen:

**Satz 5.**

Jedes System von linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen, welches ausser den im Theorem I (§ 2) ausgesprochenen noch die folgende Eigenschaft besitzt:

Sind $U(xyy')$, $V(xyy')$ irgend zwei Lösungen, so ist auch die Funktion

$$\{UV\} = [UV] - \left(U \cdot \frac{\partial V}{\partial y} - V \cdot \frac{\partial U}{\partial y}\right) = U_1 \cdot V_2 - U_2 \cdot V_1 - (UV_3 - VU_3)$$

eine Lösung dieses Systems,—definiert die charakteristische Funktion der allgemeinen infinitesimalen Transformation einer gewissen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene.

Es wird sich später Gelegenheit finden, diesen wichtigen Satz als Teil eines Theorems noch einmal auszusprechen.

Nun sei eine beliebige endliche Gruppe von Berührungstransformationen in der Ebene gegeben und zwar durch die Definitionsgleichungen ihrer infinitesimalen Transformationen. Es wird im Folgenden immer vorausgesetzt, dass diese Definitionsgleichungen als Definitionsgleichungen für die charakteristische Funktion der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe vorliegen. (Das Folgende liesse sich leicht auf unendliche Gruppen von Berührungstransformationen übertragen).

Nach dem Satze 4 müssen diese Definitionsgleichungen die folgende Form haben:

$$(9) \quad \alpha_k(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot W + \sum_1^{\varepsilon_1}{}^i \alpha_{ki1}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot W_i^{(1)} + \ldots + \sum_1^{\varepsilon_s}{}^i \alpha_{kis}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot W_i^{(s)} = 0$$

$$(k = 1, 2 \ldots g).$$



(Man braucht nicht vorauszusetzen, dass in dem obigen Gleichungensysteme nur die unabhängigen Operationen vorkommen; will man alle Operationen zulassen, so muss man zu diesem Gleichungensysteme die in § 1 besprochenen Relationen zwischen den Operationen hinzufügen, wie bei dem Beweise des Theorems I in § 2 gemacht worden ist).

Ist das Gleichungensystem (9) von der $s$-ten Stufe, so muss man voraussetzen, dass alle Operationen $s$-ter Stufe $W_i^{(s)}$ durch die Operationen niedrigerer Stufe, durch $W$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ ausgedrückt werden können, während das entsprechende jedenfalls nicht für alle Operationen $(s-1)$-ter Stufe gilt, dass ausserdem das vorgelegte System bei einmaliger und zweimaliger Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ nur solche Relationen zwischen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $W$ und den Operationen erster bis $(s-1)$-ter Stufe liefert, welche aus dem Systeme selbst ohne Differentiation folgen.

Ist die vorgelegte Gruppe $r$-gliedrig, so wird die allgemeinste Lösung des Systems (9) von:

$$r = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{s-1} - q$$

willkürlichen Konstanten abhängen.

Ferner sei $N$ irgend eine positive ganze Zahl, die auch grösser als $s$ sein kann. Ist $N > s$, so muss man zu (9) alle durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ entstehenden Gleichungen $(s+1)$-ter, ..., $N$-ter Stufe hinzufügen. Das erhaltene System möge man sich dann aufgelöst denken nach je $m_1, m_2, \ldots m_N$ von den Ableitungen erster bis $N$-ter Stufe und zwar so, dass jedesmal $m_\nu$ von den $\varepsilon_\nu$ Ableitungen $\nu$-ter Stufe durch die $\varepsilon_\nu - m_\nu$ übrigen und durch solche von niederer Stufe ausgedrückt sind. Es ist offenbar:

$$\nu \geqq 1, \quad m_s = \varepsilon_s.$$

Nunmehr betrachte man $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ als Funktionen von gewissen Veränderlichen $x$, $y$, $y'$, die gar nicht transformiert werden und setze voraus, dass die folgende Bedingung:

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}' . d\mathfrak{x} = \rho . (dy - y' dx)$$

erfüllt ist. Es werden alle Funktionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1'$, $\mathfrak{y}_2'$, .... gesucht, die bei allen durch (9) definierten infinitesimalen Transformationen invariant bleiben.

Man erweitere die infinitesimale Berührungstransformation $Bf$ durch Mitnahme aller Ableitungen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1'$, $\mathfrak{y}_2'$, .... bis zur $N$-ten Stufe. Dann bekommt man die infinitesimale Transformation von der Form (8). In dieser infinitesimalen Transformation $B^{(N)} f$ drücke man jetzt vermöge (9) jedesmal $m_\nu$ Ableitungen $\nu$-ter Stufe von $W$ durch die $\varepsilon_\nu - m_\nu$ übrigen und durch die von niederer Stufe aus; dann bekommt man eine verkürzte infinitesimale Transformation:

$$(10)\qquad \overline{B_i^{(X)}} = W . \overline{Af} + \sum_1^{\varepsilon_1 - m_1} {}^i\, W_i^{(1)} . \overline{A_{i1} f} + \ldots + \sum_1^{\varepsilon_{s-1} - m_{s-1}} {}^i\, W_i^{(s-1)} . \overline{A_{i,\,s-1} f},$$

in welcher überhaupt von den Ableitungen $\nu$-ter Stufe von $W$ nur noch $\varepsilon_\nu - m_\nu$ vorkommen. Die $\overline{Af}$, $\overline{A_{ik} f}$ sind dann linear und homogen aus den $Af$, $A_{ik} f$ zusammengesetzt mit Koeffizienten, welche nur von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ abhängen. Man kann also schreiben:

$$(11)\qquad \overline{A_{ik} f} = A_{ik} f + \Sigma \varphi_{i\mu} (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}\, \mathfrak{y}') . A_{i\mu} f . \qquad (\mu \geqq k)$$

Setzt man:

$$(12)\qquad \mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y, \quad \mathfrak{y}' = y',$$

so wird:

$$(13)\qquad \mathfrak{x}_1 = 1, \quad \mathfrak{x}_2 = 0, \quad \mathfrak{y}_1' = 0, \quad \mathfrak{y}_2' = 1, \quad \mathfrak{x}_{11} = 0, \quad \mathfrak{x}_{12} = 0, \ldots.$$

Um einzusehen, welche Werte dann die $\overline{A_{ik} f}$ annehmen, führe man die Substitution (12) und (13) auf die Koeffizienten von $B^{(X)} f$ aus. Deutet man diese Substitution durch Einschliessung in die Klammer () an, so bekommt man zunächst aus den Formeln (6) und (7):

$$(B\mathfrak{x}_1) = W_{21}; \quad (B\mathfrak{x}_2) = W_{22}; \quad (B\mathfrak{y}_1') = -W_{11}; \quad (B\mathfrak{y}_2') = -W_{12};$$

$$(B\mathfrak{x}_{11}) = W_{211}; \quad (B\mathfrak{x}_{12}) = W_{212}; \quad (B\mathfrak{x}_{21}) = W_{221}; \quad (B\mathfrak{x}_{22}) = W_{222};$$

$$(B\mathfrak{y}_{11}') = -W_{111}; \quad (B\mathfrak{y}_{12}') = -W_{112}; \quad (B\mathfrak{y}'_{21}) = -W_{121}; \quad (B\mathfrak{y}_{22}') = -W_{122}.$$

Man kann beweisen, dass allgemein wird:

$$(14)\qquad \begin{cases} (B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_t}) = W_{2 i_1 i_2 \ldots i_t} \\ (B\mathfrak{y}'_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_t}) = -W_{1 i_1 i_2 \ldots i_t}. \end{cases}$$

Der Beweis ist sehr einfach. Man kann ihn natürlich nur mit Hilfe der Induktion durchführen.

Für $t = 1$ und $t = 2$ verifiziert man die Formeln (14) unmittelbar.

Es möge vorausgesetzt werden, dass (14) auch noch für alle Werte von $t$, welche der Ungleichung:

$$t \leqq k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3 \ldots)$$

genügen, bewiesen sei (in dieser Ungleichung bedeutet $k$ eine bestimmte positive ganze Zahl).

Dann kann man schreiben:



$$(15)\qquad \begin{cases} B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = W_{2 i_1 i_2 \ldots i_k} . \mathfrak{x}_1^m . \mathfrak{y}_2'^{\,n} + \ldots. \\ B\mathfrak{y}'_{i_1 i_2 \ldots i_k} = -W_{1 i_1 i_2 \ldots i_k} . \mathfrak{x}_1^\mu . \mathfrak{y}_2'^{\,\nu} + \ldots. \end{cases}$$

Darin bedeuten $m$, $n$, $\mu$, $\nu$ gewisse positive, ganze Zahlen, auf deren Werte es gar nicht ankommt, welche auch (allerdings nicht alle) gleich Null sein können. Die fortgelassenen Glieder verschwinden alle bei der Substitution (13) und liefern bei der Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ lauter solche Glieder, welche bei der Substitution (13) ebenfalls sämtlich verschwinden.

Die Erweiterungen $B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_k i_{k+1}}$ sind nun durch das identische Bestehen der folgenden Pfaff'schen Gleichung bestimmt:

$$(16)\qquad \begin{cases} dB_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_k} - [B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_k 1}\, dx + B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_k 2} . dy' + \\ \qquad + B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_k 3} . (dy - y'\, dx)] = 0. \end{cases}$$

Auf Grund der Formeln (4) und (5) kann man schreiben:

$$(17)\qquad \begin{cases} dB\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_k} = (B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_k})_1 . \mathfrak{x}_1\, dx + (B\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_k})_1 . \mathfrak{x}_2\, dy' \\ \qquad + (B\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_k})_2 . (\mathfrak{y}_1' . dx + \mathfrak{y}_2' . dy') + \ldots. \end{cases}$$

Die weggelassenen Glieder haben den gemeinsamen Faktor $(dy - y'dx)$, kommen also hier nicht in Betracht. Die Pfaff'sche Gleichung (16) liefert mit Rücksicht auf (17):

$$(18)\qquad \begin{cases} B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} = (B\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_k})_1 . \mathfrak{x}_1 + (B\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_k})_2 . \mathfrak{y}_1', \\ B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots i_k 2} = (B\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_k})_1 . \mathfrak{x}_2 + (B\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_k})_2 . \mathfrak{y}_2'. \end{cases}$$

(Hier bedeutet natürlich die Einschliessung in Klammer nicht die Substitution, sondern die Ausführung der Operationen $f_1$ bzw. $f_2$ auf den in Klammer eingeschlossenen Ausdruck).

Aus den Formeln (18) folgt nun:

$$(19)\qquad (B\mathfrak{x}_{i_1 \ldots\ldots i_k i_{k+1}}) = ([B\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_k}]_{i_{k+1}}).$$

Dabei bedeutet die eckige Klammer die Ausführung der Operation $f_{i_{k+1}}$ $(i_{k+1} = 1, 2)$; die runde Klammer dagegen die Substitution (13). Vergleicht man endlich die Formeln (15) und (19) miteinander, so bekommt man sofort:

$$(B\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_{k+1}}) = W_{2 i_1 i_2 \ldots i_{k+1}}.$$

Damit ist die Richtigkeit der ersten der Formeln (14) bewiesen. Den Beweis für die zweite dieser Formeln bekommt man, indem man einfach in den Formeln (16), (17), (18), (19) überall $\mathfrak{y}'_{i_1 \ldots i_k}$ an Stelle von $\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_k}$ schreibt.

Nun kehre man zu den Formeln (10) zurück. In den $(\overline{A_{ik} f})$ treten, wie die Formeln (14) zeigen, an der ersten Stelle die Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots i_t}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'_{i_1 i_2 \ldots i_t}}$$

auf mit dem Koeffizienten $+1$ bzw. $-1$. Da nach der Voraussetzung die in $B^{(N)} f$ auftretenden Ableitungen $\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_t}$, $\mathfrak{y}'_{i_1 \ldots i_t}$ voneinander unabhängig sind, so sind auch die infinitesimalen Transformationen $(\overline{A_{ik} f})$ und also auch $(\overline{A_{ik} f})$ voneinander unabhängig.

Die gesuchten Differentialinvarianten sind nun offenbar die gemeinsamen Lösungen der $1 + \varepsilon_1 - m_1 + \ldots + \varepsilon_{s-1} - m_{s-1}$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(20) \qquad \overline{Af} = 0, \quad \overline{A_{i_1 1} f} = 0, \ldots, \quad \overline{A_{i_{s-1}, s-1} f} = 0. \quad (i_k = 1, 2 \ldots \varepsilon_k - m_k)$$

Da die Gleichungen (9) eine Gruppe definieren sollen, so müssen die Gleichungen (20) ein vollständiges System bilden. Bedeutet nämlich $W$ die allgemeinste Lösung von (19), so stellt der Ausdruck $B^{(N)} f$ die allgemeinste infinitesimale Transformation dar, die eine gewisse Gruppe in den Veränderlichen: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ erzeugt. Sind daher:

$$B_k f = \xi_k (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta_k (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \zeta_k (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'} \qquad (k = 1, 2)$$

irgend zwei infinitesimale Transformationen der durch (9) definierten Gruppe und setzt man:

$$(B_1 B_2) = Cf,$$

so stehen die drei infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{B_1^{(N)} f}, \qquad \overline{B_2^{(N)} f}, \qquad \overline{C^{(N)} f}$$

in der Beziehung:

$$(\overline{B_1^{(N)} f}, \quad \overline{B_2^{(N)} f}) = \overline{C^{(N)} f}.$$

Mit anderen Worten: der Inbegriff aller linearen partiellen Differentialgleichungen, die man erhält, wenn man sich in:

$$\overline{B^{(N)} f} = 0$$



für $W$ alle Lösungen von (9) eingesetzt denkt, bildet ein vollständiges System in den Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_1', \ldots$

Da aber die Operationen

$$W, \quad W^{(1)}_{i_1}, \quad W^{(2)}_{i_2}, \ldots \quad W^{(s-1)}_{i_{s-1}}, \qquad (i_k = \varepsilon_k - m_k)$$

die in $\overline{B^{(N)} f}$ vorkommen, durch keine lineare homogene Relation verknüpft sein können, solange $W$ eine beliebige Lösung von (9) ist, so müssen sich die Ausdrücke

$$(\overline{A}, \overline{A}_{ik}), \qquad (\overline{A}_{i\mu}, \overline{A}_{j\nu})$$

sämtlich linear und homogen durch die $\overline{Af}$, $\overline{A_{ik} f}$ ausdrücken lassen mit Koeffizienten, die Funktionen der Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}', \mathfrak{x}_1 \ldots$ sind. Das heisst aber nichts anderes als: die Gleichungen (20) bilden ein vollständiges System, das höchstens $(1 + \varepsilon_1 - m_1 + \ldots + \varepsilon_{s-1} - m_{s-1})$ — gliedrig ist. Die Gleichungen (20) sind überdies, wie vorhin gezeigt wurde, voneinander unabhängig, also bilden sie ein $(1 + \varepsilon_1 - m_1 + \ldots + \varepsilon_{s-1} - m_{s-1})$ — gliedriges vollständiges System und da sie $(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N+1})$ unabhängige Veränderliche enthalten, so haben sie gerade $(m_1 + \ldots + m_{N+1})$ unabhängige Lösungen gemein. Es ist offenbar:

$$m_s = \varepsilon_s, \quad m_{s+1} = \varepsilon_{s+1}, \ldots \quad m_{N+1} = \varepsilon_{N+1}.$$

Das Gesagte gilt für jeden Wert von $N$, also besitzt die vorgelegte Gruppe die folgenden Differentialinvarianten von der verlangten Beschaffenheit:

Gerade $(m_1 = 0, 1, 2)$ also höchstens zwei Differentialinvarianten nullter Stufe:

$$Y^{(0)}_\mu (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'), \qquad (\mu = 0, \ldots m_1)$$

gerade $m_2$ voneinander und von den $Y^{(0)}_\mu$ unabhängige Differentialinvarianten erster Stufe:

$$Y^{(1)}_\mu (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1'\mathfrak{y}_2'), \qquad (\mu = 1, 2 \ldots m_2)$$

überhaupt $m_{N+1}$ Differentialinvarianten $N$-ter Stufe, die voneinander und von denen niedrigerer Stufe unabhängig sind.

Die besprochenen Differentialinvarianten besitzen folgende Eigenschaften:

I. Man kann aus jeder von ihnen durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ beliebig viele neue Differentialinvarianten von höherer Stufe ableiten.

II. Zweitens kann man, sobald alle Differentialinvarianten $(s-1)$-ter Stufe gegeben sind, überhaupt alle Differentialinvarianten $s$-ter und höherer Stufe durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ herstellen.

III. Der Inbegriff aller Differentialinvarianten nullter bis $(s-1)$-ter und höherer Stufe bleibt nur bei den durch das System (9) definierten, sonst aber bei keinen infinitesimalen Transformationen in den Veränderlichen $x$, $y$, $y'$ invariant.

Das erste lässt sich folgendermassen einsehen. Ist

$$I(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\ldots)$$

irgend eine Differentialinvariante $(N-1)$-ter Stufe von der angegeben Beschaffenheit, so genügt $I$ als Funktion von $x$, $y$, $y'$ der Pfaff-schen Gleichung:

$$dI-\left(\frac{\partial I}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial I}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial I}{\partial y'}\cdot dy'\right)=0.$$

Es ist ferner:

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}}\cdot\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{y}}\cdot\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial \mathfrak{y}'}\cdot\frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial x}+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}_1}\cdot\frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x}+\ldots,$$

$$\frac{\partial I}{\partial y}=\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}}\cdot\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{y}}\cdot\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{y}'}\cdot\frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial y}+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}_1}\cdot\frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial y}+\ldots;$$

daher:

$$\frac{\partial I}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial I}{\partial y}=\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}}\cdot\mathfrak{x}_1+\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{y}}\cdot\mathfrak{y}_1+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{y}'}\cdot\mathfrak{y}_1'+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}_1}\cdot\mathfrak{x}_{11}+\ldots$$

Auf Grund der Gleichungen (4) bekommt man ferner:

$$\frac{\partial I}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial I}{\partial y}=I_1\cdot\mathfrak{x}_1+I_2\cdot\mathfrak{y}_1'+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}_1}\cdot\mathfrak{x}_{11}+\ldots,$$

$$\frac{\partial I}{\partial y'}=\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}}\cdot\mathfrak{x}_2+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{y}}\cdot\mathfrak{y}_2+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{y}'}\cdot\mathfrak{y}_2'+\ldots$$

$$=I_1\cdot\mathfrak{x}_2+I_2\cdot\mathfrak{y}_2'+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}_1}\cdot\mathfrak{x}_{12}+\ldots,$$

$$\frac{\partial I}{\partial y}=\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{x}}\cdot\mathfrak{x}_3+\frac{\partial I}{\partial \mathfrak{y}}\cdot\mathfrak{y}_3+\ldots$$

$$=I_1\cdot\mathfrak{x}_3+I_2\cdot\mathfrak{y}_3'+I_3\cdot(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1')+\ldots$$

und daher:

$$dI=\left(\frac{\partial I}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial I}{\partial y}\right)\cdot dx+\frac{\partial I}{\partial y'}\cdot dy'+\frac{\partial I}{\partial y}\cdot(dy-y'dx)$$

$$\text{(21)}\qquad =(I_1\cdot\mathfrak{x}_1+I_2\cdot\mathfrak{y}_1')\cdot dx+(I_1\cdot\mathfrak{x}_2+I_2\cdot\mathfrak{y}_2')\cdot dy'$$

$$+[I_1\cdot\mathfrak{x}_3+I_2\cdot\mathfrak{y}_3'+I_3\cdot(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1')]\cdot(dy-y'dx)+\ldots$$



Ist nun $Bf$ eine beliebige infinitesimale Transformation der durch (9) definierten Gruppe, so ist $B^{(N)}I\equiv 0$ und ebenso:

$$B^{(N)}\left(\frac{\partial I}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial I}{\partial y}\right)=0,\qquad B^{(N)}\left(\frac{\partial I}{\partial y'}\right)=0,$$

denn $B^{(N)}f$ muss das aus der Gleichung (21) und den Gleichungen

$$d\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_1dx+\mathfrak{x}_2dy'+\mathfrak{x}_3\cdot(dy-y'dx),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d\mathfrak{x}_1=\mathfrak{x}_{11}dx+\mathfrak{x}_{12}dy'+\mathfrak{x}_{13}\cdot(dy-y'dx),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gebildete System von Pfaff'schen Gleichungen invariant lassen. Demnach sind

$$\frac{\partial I}{\partial x}-y'\cdot\frac{\partial I}{\partial y};\ \frac{\partial I}{\partial y'}$$

wirklich Differentialinvarianten $N$-ter Stufe.

Man bezeichne:

$$f=f(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2'\mathfrak{y}_2'\ldots),$$

$$\text{(22)}\qquad f_{\mathrm{I}}=\frac{\partial f}{\partial x}+y'\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}+\mathfrak{y}'\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}\right)\cdot\mathfrak{x}_1+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'}\cdot\mathfrak{y}_1'+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1}\cdot\mathfrak{x}_{11}+\ldots,$$

$$f_{\mathrm{II}}=\frac{\partial f}{\partial y'}=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}+\mathfrak{y}'\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}\right)\cdot\mathfrak{x}_2+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'}\cdot\mathfrak{y}_2'+\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1}\cdot\mathfrak{x}_{12}+\ldots$$

Dann gilt der folgende Satz:

**Satz 6:**

Ist $I(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1'\ldots)$ irgend eine Differentialinvariante $(N-1)$-ter Stufe von der vorhin angegebenen Beschaffenheit, so sind die Funktionen $I_{\mathrm{I}}$, $I_{\mathrm{II}}$, die man aus $I$ durch Ausführung der Operationen $f_{\mathrm{I}}$, $f_{\mathrm{II}}$ bekommt, ebenfalls Differentialinvarianten und zwar von der $N$-ten Stufe.

Die beiden anderen Eigenschaften kann man genau in derselben Weise begründen, wie es in der Abhandlung Lie's (Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuierlichen Transformationsgruppen II; Leipz. Ber. Bd. 43, 1891; S. 383 ff.) im Falle einer unendlichen Gruppe von infinitesimalen Transformationen geschieht.

Die gefundenen Differentialinvarianten kann man nun dazu benutzen, die Definitionsgleichungen der endlichen Berührungstransformationen der durch (9) bestimmten Gruppe aufzustellen. Man gelangt dann zum folgenden Satze, welcher dem Theorem VII. S. 391 der zitierten Abhandlung entspricht:

**Theorem II.**

Es sei ein System von $q$ unabhängigen linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen vorgelegt:

$$\text{(D)} \qquad \alpha_k(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \,.\, W + \sum_1^{\varepsilon_1} i\, \alpha_{ki1}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \,.\, W_i^{(1)} + \ldots + \sum_1^{\varepsilon_s} i\, \alpha_{kis}(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \,.\, W_i^{(s)} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, q)$$

das die folgenden Eigenschaften besitzt: es soll von der $s$-ten Stufe sein und soll zunächst den im Theorem I ausgesprochenen Bedingungen genügen; dann hängt seine allgemeinste Lösung von einer endlichen Anzahl $r$ willkürlicher Konstanten ab. Ferner soll stets, wenn $U$ und $V$ zwei Lösungen von (D) sind, auch:

$$U_1 \,.\, V_2 - U_2 \,.\, V_1 - (U \,.\, V_3 - V \,.\, U_3)$$

seine Lösung sein.

Unter diesen Voraussetzungen definiert das System (D) die charakteristische Funktion $W$ der allgemeinen infinitesimalen Berührungstransformation $Bf$ einer gewissen $r$-gliedrigen Gruppe in der Ebene. Die endlichen Transformationen dieser Gruppe sind bestimmt durch

$$q = m_1 + m_2 + \ldots + m_{s-1}$$

unabhängige partielle Differentialgleichungen $(s-1)$-ter Stufe von der Form

$$\text{(I)} \qquad I_k(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \ldots) = \alpha_k(xyy'), \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

welche bei der Substitution: $\mathfrak{x} = x$, $\mathfrak{y} = y$, $\mathfrak{y}' = y'$ in lauter Identitäten übergehen. Die Funktionen $I_k$ haben die Eigenschaft, bei einer Berührungstransformation:

$$\text{(T)} \qquad \begin{gathered} \bar{\mathfrak{x}} = f(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'); \quad \bar{\mathfrak{y}} = \varphi(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'), \quad \bar{\mathfrak{y}}' = \psi(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \\ \bar{x} = x; \quad \bar{y} = y; \quad \bar{y}' = y' \end{gathered}$$

dann und nur dann sämtlich invariant zu bleiben, wenn diese



Transformation der betreffenden Gruppe angehört. Sind die Gleichungen (D) gegeben, so kann man die Gleichungen (I) durch Integration eines vollständigen Systems finden. Die Zahl $q$ ist so gross, dass jede Funktion von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_i^{(s)}$, welche bei allen Berührungstransformationen (T) der betreffenden Gruppe invariant bleibt, als Funktion von $I_1, I_2, \ldots, I_q$ allein darstellbar ist.

Endlich bleibt das Gleichungensystem (I) bei einer (endlichen oder infinitesimalen) Berührungstransformation von der Form:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}, \quad \bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}, \quad \bar{\mathfrak{y}}' = \mathfrak{y}',$$

$$\bar{x} = f(xyy'); \quad \bar{y} = \varphi(xyy'); \quad \bar{y}' = \psi(xyy')$$

invariant ebenfalls dann und nur dann, wenn die letztere Transformation der betreffenden Gruppe angehört.

## § 6. Die Definitiosgleichungen der infinitesimalen Transformationen aller mit einer vorgelegten Gruppe von Berührungstransformationen in der Ebene vermöge einer Brührungstransformation ähnlichen Gruppen.

In diesem Paragraphen wird für die Gruppen von Berührungstransformationen eine Untersuchung angestellt, welche ein Analogon zu den vom Prof. Engel in den Leipziger Berichten (Bd. 46, 1894, S. 25 ff.) unter dem Titel: „Die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen" veröffentlichten Betrachtungen bildet.

Den Ausgangspunkt bildet diese Form der Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen einer continuirlichen Gruppe von Berührungstransformationen, in welcher sie im letzten Theorem als Gleichungen (I) auftreten.

Es sei nun:

$$\text{(1)} \qquad Cf = m(xyy') \,.\, \frac{\partial f}{\partial x} + n(xyy') \,.\, \frac{\partial f}{\partial y} + p(xyy') \,.\, \frac{\partial f}{\partial y'}$$

eine ganz beliebige infinitesimale Berührungstransformation; $M(xyy')$ möge ihre charakteristische Funktion bedeuten, so dass also:

$$\text{(2)} \qquad m = Cx = M_2; \quad n = Cy = y' \,.\, M_2 - M; \quad p = Cy' = -M_1$$

ist. Mit $C^{(s)}f$ möge ferner diejenige infinitesimale Transformation bezeichnet werden, die män erhält, wenn man $Cf$ durch Hinzunahme der unabhängigen

Ableitungen von $\mathfrak{x}(xyy')$; $\mathfrak{y}'(xyy')$ erster bis mit $s$-ter Stufe erweitert. Da nun die infinitesimale Transformation $Cf$ die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ nicht transformiert so ist:

$$(3) \qquad C\mathfrak{x} = 0, \quad C\mathfrak{y} = 0, \quad C\mathfrak{y}' = 0.$$

Man kann schreiben:

$$(4) \qquad \begin{cases} C(dy - y'dx) = -M_3 \,.\, (dy - y' \,.\, dx), \\ d\varphi = \varphi_1 dx + \varphi_2 dy' + \varphi_3 \,.\, (dy - y'dx), \end{cases}$$

und durch Anwendung der letzteren Formel auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1'$, $\mathfrak{y}_2'$ ergeben sich die folgenden Formeln für die gewünschten Erweiterungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} C\mathfrak{x}_1 = -\mathfrak{x}_1 \,.\, M_{21} + \mathfrak{x}_2 \,.\, M_{11}; & C\mathfrak{y}_1' = -\mathfrak{y}_1' \,.\, M_{21} + \mathfrak{y}_2' \,.\, M_{11}, \\ C\mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{x}_1 \,.\, M_{22} + \mathfrak{x}_2 \,.\, M_{12}; & C\mathfrak{y}_2' = -\mathfrak{y}_1' \,.\, M_{22} + \mathfrak{y}_2' \,.\, M_{12}. \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} C\mathfrak{x}_{11} = -2\mathfrak{x}_{11} \,.\, M_{21} + (\mathfrak{x}_{12} + \mathfrak{x}_{21}) \,.\, M_{11} - \mathfrak{x}_1 \,.\, M_{211} + \mathfrak{x}_2 \,.\, M_{111}, \\ C\mathfrak{x}_{12} = -\mathfrak{x}_{11} \,.\, M_{22} + \mathfrak{x}_{12} \,.\, (M_{12} - M_{21}) + \mathfrak{x}_{22} \,.\, M_{11} - \mathfrak{x}_1 \,.\, M_{212} + \mathfrak{x}_2 \,.\, M_{112}, \\ C\mathfrak{x}_{21} = -\mathfrak{x}_{11} \,.\, M_{22} + \mathfrak{x}_{21} \,.\, (M_{12} - M_{21}) + \mathfrak{x}_{22} M_{11} - \mathfrak{x}_1 \,.\, M_{221} + \mathfrak{x}_2 \,.\, M_{121}, \\ C\mathfrak{x}_{21} = -(\mathfrak{x}_{12} + \mathfrak{x}_{21}) \,.\, M_{22} + 2\mathfrak{x}_{22} \,.\, M_{12} - \mathfrak{x}_1 \,.\, M_{222} + \mathfrak{x}_2 \,.\, M_{122}. \end{cases}$$

Allgemein ist die Erweiterung $C\mathfrak{x}_{i_1 i_2 \ldots i_s}$, $C\mathfrak{y}'_{j_1 \ldots j_s}$ eine lineare homogene Funktion der Ableitungen zweiter bis mit $(s+1)$-ter Stufe der charakteristischen Funktion $M$ mit Koeffizienten, welche ebenfalls lineare und homogene Funktionen der Ableitungen von $\mathfrak{x}$ resp. $\mathfrak{y}'$ sind und zwar erster bis mit $s$-ter Stufe. Die Ausdrücke $C\mathfrak{x}_i^{(s)}$, $C\mathfrak{y}_i'^{(s)}$ sind isobar, weil alle in ihnen auftretenden Glieder das gemeinsame Gewicht $(s+2)$ haben.

Es sei nun:

$$Bf = \xi(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \,.\, \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \,.\, \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \xi(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}') \,.\, \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'}$$

irgend eine infinitesimale Berührungstransformation der durch die Gleichungen $(I)$ definierten Gruppe und $B^{(s)}f$ die zu ihr gehörige erweiterte Transformation. Unter diesen Voraussetzungen ist zunächst:

$$B^{(s)} I_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

Führt man nun in $I_k$ und $B^{(s)}f$ die neuen Veränderlichen vermöge der infinitesimalen Transformation $C^{(s)}f$ ein, so muss die Funktion, in welche



dann $I_k$ übergeht, bei der infinitesimalen Transformation, in welche zugleich $C^{(s)}f$ übergeht, invariant bleiben. Daraus ergibt sich die Identität:

$$(7) \qquad B^{(s)} C^{(s)} I_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Die infinitesimale Transformation $C^{(s)} I_k$ muss man jetzt ausführlich hinschreiben; es ist:

$$C^{(s)} I_k = \frac{\partial I_k}{\partial \mathfrak{x}_1} \,.\, C\mathfrak{x}_1 + \frac{\partial I_k}{\partial \mathfrak{x}_2} \,.\, C\mathfrak{x}_2 + \ldots + \sum \frac{\partial I_k}{\partial \mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_s}} \,.\, C\mathfrak{x}_{i_1 \ldots i_s},$$

was man offenbar auch folgendermassen schreiben kann:

$$C^{(s)} I_k = \sum_1^{\varepsilon_2}{}^i M_i^{(2)} \,.\, \Psi_{i2}^{(k)} + \sum_1^{\varepsilon_3}{}^i M_i^{(3)} \,.\, \Psi_{i3}^{(k)} + \ldots + \sum_1^{\varepsilon_{s+1}}{}^i M_i^{(s+1)} \,.\, \Psi_{i,s+1}^{(k)};$$

darin bedeutet, wie gewöhnlich $\varepsilon_j$ die Zahl der unabhängigen Ableitungen $j$-ter Stufe einer Funktion $f(xyy')$; $M_i^{(j)}$ repräsentiert die Ableitungen $j$-ter Stufe der charakteristischen Funktion $M$ und $\Psi_{ij}$ sind gewisse Funktionen der Veränderlichen: $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1'$, ....

Man kann auch kurz schreiben:

$$(8) \qquad C^{(s)} I_k = \sum_1^{s+1}{}^j \sum_1^{\varepsilon_j}{}^i M_i^{(j)} \,.\, \Psi_{ij}^{(k)}.$$

Da nun $B^{(s)}f$ die $x$, $y$, $y'$ gar nicht transformiert, so kann die Identität (7) nur dann bestehen, wenn alle

$$(9) \qquad B^{(s)} \Psi_{ij}^{(k)} = 0$$

identisch verschwinden. Das gilt, welche infinitesimale Transformation der durch (1) definierten Gruppe auch $Bf$ sein mag, also müssen sich die $\Psi_{ij}^{(k)}$ als Funktionen von $I_1, I_2, \ldots, I_q$ allein ausdrücken lassen, das heisst, es wird:

$$(10) \qquad C^{(s)} I_k = \sum_1^{s+1}{}^j \sum_1^{\varepsilon_j}{}^i M_i^{(j)} \,.\, \alpha_{ij}^{(k)} (I_1, I_2, \ldots, I_q)$$

bei ganz beliebiger Wahl der Funktion $M(xyy')$.

Die Gleichung (10) gibt an, wie $I_1, \ldots, I_q$ bei einer beliebigen infinitesimalen Berührungstransformation $Cf$ transformiert werden. Denkt man sich daher $Cf$ als die allgemeine infinitesimale Transformation der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene und setzt zur Abkürzung:

$$\sum_{k}^{q} \alpha_{ij}^{(k)} (I_1 I_2 \dots I_q) \cdot \frac{\partial f}{\partial I_k} = A_{ij} f,$$

so stellt der Ausdruck:

$$Cf + \sum_{1}^{s+1}{}_{j} \sum_{1}^{\varepsilon_j}{}_{i} M_i^{(j)} \cdot A_{ij} f \tag{11}$$

die allgemeine infinitesimale Transformation einer unendlichen Gruppe in den Veränderlichen $x$, $y$, $y'$, $I_1, \dots, I_q$ dar.

Es sei nun eine bestimmte Gruppe von Berührungstransformationen durch die Definitionsgleichungen $(I)$ gegeben; will man die Differentialgleichungen aufstellen, in welchen alle mit der durch $(I)$ definierten ähnlichen Gruppen stecken, so braucht man nur alle diejenigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe (11) aufzusuchen, welche das Gleichungensystem:

$$I_k = \omega_k (x y y') \qquad (k = 1,\ 2 \dots q)$$

invariant lassen. Diese infinitesimalen Transformationen, die sicher die infinitesimalen Transformationen einer continuirlichen Gruppe sind, werden durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{s+1}{}_{j} \sum_{1}^{\varepsilon_j}{}_{i} M_i^{(j)} (x y y') \cdot \alpha_{ij}^{(k)} (\omega_1, \omega_2 \dots \omega_q) &= M_2 \cdot \frac{\partial \omega_k}{\partial x} \\ + (y' M_2 - M) \cdot \frac{\partial \omega_k}{\partial y} - M_1 \cdot \frac{\partial \omega_k}{\partial y'} &= M_2 \cdot (\omega_k)_1 - M_1 \cdot (\omega_k)_2 - M \cdot (\omega_k)_3 \end{aligned} \tag{12}$$

$$(k = 1,\ 2, \dots, q)$$

definiert und da in (12) die Veränderlichen $I_1, \dots, I_q$ nicht mehr vorkommen, so müssen die Differentialgleichungen (12) zugleich die infinitesimalen Berührungstransformationen einer gewissen Gruppe von Berührungstransformationen in den Veränderlichen $x$, $y$, $y'$ allein definieren. In den Gleichungen (12) stecken die Definitionsgleichungen aller Gruppen, welche mit der durch die Gleichungen $I_k = \omega_k$ bestimmten Gruppe vermöge einer Berührungstransformation ähnlich sind. Diese Gruppen ergeben sich aus (12) für spezielle Wahl der Funktionen $\omega$.

Die Gleichungen (12) sind im Allgemeinen nach den in ihnen vorkommenden Ableitungen $(s+1)$-ter Stufe $M_i^{(s+1)}$ auflösbar. Führt man diese Auf-



lösung wirklich aus, wendet dann die Operationen $f_1$, $f_2$ zweimal aufeinander an und benutzt die Relationen, welche zwischen den $M_i^{(s+2)}$ und den $M_i^{(s+3)}$ bestehen, so bekommt man die Integrabilitätsbedingungen, denen die Funktionen $\omega$ genügen müssen.

Wählt man in den Gleichungen (12) als $\omega$ die in den Gleichungen $(I)$ auftretenden Funktionen $\alpha$, so werden die Gleichungen (12) zu Definitionsgleichungen der durch $(I)$ definierten Gruppe.

Die infinitesimale Berührungstransformation $Cf$ gehört nämlich dann und nur dann der durch $(I)$ definierten Gruppe an, wenn sie als Transformation in den Veränderlichen $x$, $y$, $y'$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ aufgefasst, das Gleichungensystem $(I)$ invariant lässt. Dazu ist aber notwendig und hinreichend, dass die Funktion $M$ den Differentialgleichungen (12) genügt, also sind die Gleichungen (12) wirklich die Definitionsgleichungen für die charakteristische Funktion der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe, deren endliche Gleichungen durch $(I)$ definiert werden.

## § 7. Die Differentialinvarianten und Definitionsgleichungen der linearen Gruppe, aufgefasst als einer Gruppe von Berührungstransformationen.

Die charakteristische Funktion der allgemeinen infinitesimalen Transformation der linearen Gruppe lautet:

$$W = a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y} + d\mathfrak{y}' + e\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + f\mathfrak{y}\mathfrak{y}'.$$

Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen sind daher:

$$\begin{gathered} W_{11} = 0, \quad W_{22} = 0, \\ W_{111} = W_{112} = W_{211} = W_{221} = W_{222} = 0, \\ W_{1111} = W_{1112} = W_{2111} = W_{1122} = W_{2211} = W_{2112} = W_{2221} = W_{1222} = W_{2222} = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Für die lineare Gruppe sind alle Ableitungen vierter Stufe der charakteristischen Funktion bestimmt; es ist also:

$$s = 4; \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 5, \quad m_4 = \varepsilon_4 = 9.$$

Die sämtlichen Definitionsgleichungen (1) können aus den folgenden:

$$W_{11} = 0, \quad W_{22} = 0, \quad W_{211} = 0 \tag{1'}$$

durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ abgeleitet werden.

Die Ableitungen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}'$, welche als Funktionen von $x$, $y$, $y'$ zu betrachten sind, werden mit Rücksicht auf (1) folgendermassen transformiert:

$$\overline{B\mathfrak{x}_{11}} = W_{212} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1' + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{11}, \qquad \overline{B\mathfrak{y}_{11}'} = -(W_{122} \cdot \mathfrak{y}_1'^2 + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{11}'),$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{12}} = W_{212} \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_2' + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{12}, \qquad \overline{B\mathfrak{y}_{12}'} = -(W_{122} \mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_2' + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{12}'),$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{21}} = W_{212} \cdot \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1' + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{21}, \qquad \overline{B\mathfrak{y}_{21}'} = -(W_{122} \mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_2' + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{21}'),$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{22}} = W_{212} \cdot \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1' + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{22}, \qquad \overline{B\mathfrak{y}_{22}'} = -(W_{122} \cdot \mathfrak{y}_2'^2 + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{22}'),$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{111}} = W_{212} \cdot (2\mathfrak{x}_{11} \mathfrak{y}_1' + \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_{11}') + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{111},$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{112}} = W_{212} \cdot (\mathfrak{x}_{11} \cdot \mathfrak{y}_2' + \mathfrak{x}_{12} \cdot \mathfrak{y}_1' + \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_{12}') + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{112},$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{211}} = W_{212} \cdot (2\mathfrak{x}_{21} \cdot \mathfrak{y}_1' + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_{11}) + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{211},$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{122}} = W_{212} \cdot (2\mathfrak{x}_{12} \cdot \mathfrak{y}_2' + \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_{22}') + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{122},$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{221}} = W_{212} \cdot (\mathfrak{x}_{21} \cdot \mathfrak{y}_2' + \mathfrak{x}_{22} \cdot \mathfrak{y}_1' + \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_{21}') + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{221},$$

$$\overline{B\mathfrak{x}_{222}} = W_{212} \cdot (2\mathfrak{x}_{22} \cdot \mathfrak{y}_2' + \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_{22}') + W_{21} \cdot \mathfrak{x}_{222},$$

$$\overline{B\mathfrak{y}_{111}'} = -(W_{122} \cdot 3\mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_{11}' + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{111}'),$$

$$\overline{B\mathfrak{y}_{112}'} = -[W_{122} \cdot (2\mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_{12}' + \mathfrak{y}_{11}' \cdot \mathfrak{y}_2') + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{112}'],$$

$$\overline{B\mathfrak{y}_{211}'} = -[W_{122} \cdot (\mathfrak{y}_{11}' \cdot \mathfrak{y}_2' + 2\mathfrak{y}_1' \cdot \mathfrak{y}_{21}') + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{211}'],$$

$$\overline{B\mathfrak{y}_{122}'} = -[W_{122} \cdot (2\mathfrak{y}_2' \cdot \mathfrak{y}_{12}' + \mathfrak{y}_{22}' \cdot \mathfrak{y}_1') + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{122}'],$$

$$\overline{B\mathfrak{y}_{221}'} = -[W_{122} \cdot (2\mathfrak{y}_2' \cdot \mathfrak{y}_{21}' + \mathfrak{y}_1' \cdot \mathfrak{y}_{22}') + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{221}'],$$

$$\overline{B\mathfrak{y}_{222}'} = -(W_{122} \cdot 3\mathfrak{y}_2' \cdot \mathfrak{y}_{22}' + W_{12} \cdot \mathfrak{y}_{222}').$$

Nach der allgemeinen, in beiden vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzten Methode müsste man nun unter den $\mathfrak{x}_i^{(2)}$, $\mathfrak{y}_i'^{(2)}$ sechs unabhängige, unter den $\mathfrak{x}_i^{(3)}$, $\mathfrak{y}_i'^{(3)}$ neun unabhängige wählen und die übrigen unter den $\mathfrak{x}_i^{(2)}$, $\mathfrak{y}_i'^{(2)}$, $\mathfrak{x}_i^{(3)}$, $\mathfrak{y}_i'^{(3)}$ durch die ausgewählten vermöge der Relationen (3) und (4) in § 4 ausdrücken. Es ist aber zweckmässiger die Grössen $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i'$ zunächst als voneinander unabhängig zu betrachten, d. h. alle mitzunehmen. Das Gleichungensystem (20) in § 5 ändert dann nicht seine Gliederzahl und bleibt auch ein vollständiges System, liefert aber mehrere Lösungen, da es nun mehrere Veränderliche enthält. Zwischen diesen Lösungen, welche die gesuchten Differentialinvarianten vorstellen, bestehen dann gewisse Relationen,



welche man leicht mit Hilfe der Relationen zwischen den Ableitungen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}'$ (s. Relationen (3) u. (4) in § 4) finden kann. Man braucht nur unter den Ableitungen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}'$ so viele als möglich durch die gefundenen Differentialinvarianten auszudrücken und nachher in die genannten Relationen einzusetzen. Dies gelingt besonders leicht, wenn man die Hauptlösungen des Gleichungensystems (20) in § 5 als Differentialinvarianten angenommen hat.

Für die in Frage kommende erweiterte infinitesimale Transformation bekommt man im Falle der linearen Gruppe mit Rücksicht auf die jetzt bestehende Relation $W_{122} = 2W_{212}$ den folgenden Ausdruck:

$$B^{(3)} f = W_2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \mathfrak{y}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}\right) - W_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'} - W \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + W_{21} \cdot \left(\mathfrak{x}_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \mathfrak{x}_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_2}\right.$$

$$+ \mathfrak{x}_{11} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{11}} + \mathfrak{x}_{12} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{12}} + \mathfrak{x}_{21} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{21}} + \mathfrak{x}_{22} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{22}} + \mathfrak{x}_{111} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{111}} + \mathfrak{x}_{112} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{112}}$$

$$\left. + \mathfrak{x}_{211} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{211}} + \mathfrak{x}_{122} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{122}} + \mathfrak{x}_{221} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{221}} + \mathfrak{x}_{222} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{222}}\right)$$

$$- W_{12} \cdot \left(\mathfrak{y}_1' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_1'} + \mathfrak{y}_2' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_2'} + \mathfrak{y}_{11}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{11}'} + \mathfrak{y}_{12}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{12}'} + \mathfrak{y}_{21}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{21}'}\right.$$

$$+ \mathfrak{y}_{22}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{22}'} + \mathfrak{y}_{111}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{111}'} + \mathfrak{y}_{112}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{112}'} + \mathfrak{y}_{211}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{211}'} + \mathfrak{y}_{122}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{122}'}$$

$$\left. + \mathfrak{y}_{221}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{221}'} + \mathfrak{y}_{222}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{222}'}\right) + W_{212} \cdot \left\{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{11}} + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{12}} + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{21}}\right.$$

$$+ \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{22}} - 2 \cdot \left[\mathfrak{y}_1'^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{11}'} + \mathfrak{y}_1' \cdot \mathfrak{y}_2' \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{12}'} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{21}'}\right) + \mathfrak{y}_2'^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{22}'}\right]$$

$$+ (2\mathfrak{x}_{11} \mathfrak{y}_1' + \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_{11}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{111}} + (\mathfrak{x}_{11} \mathfrak{y}_2' + \mathfrak{x}_{12} \mathfrak{y}_1' + \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_{12}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{112}}$$

$$+ (2\mathfrak{x}_{21} \mathfrak{y}_1' + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_{11}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{211}} + (2\mathfrak{x}_{12} \cdot \mathfrak{y}_2' + \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{y}_{22}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{122}}$$

$$+ (\mathfrak{x}_{21} \cdot \mathfrak{y}_2' + \mathfrak{x}_{22} \cdot \mathfrak{y}_1' + \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_{21}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{221}} + (2\mathfrak{x}_{22} \cdot \mathfrak{y}_2' + \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{y}_{22}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{222}}$$

$$- 2\left[3\mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_{11}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{111}'} + (2\mathfrak{y}_1' \cdot \mathfrak{y}_{12}' + \mathfrak{y}_{11}' \cdot \mathfrak{y}_2') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{112}'} + (\mathfrak{y}_{11}' \cdot \mathfrak{y}_2' + 2\mathfrak{y}_1' \mathfrak{y}_{21}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{211}}\right.$$

$$\left.\left. + (2\mathfrak{y}_2' \cdot \mathfrak{y}_{12}' + \mathfrak{y}_{22}' \cdot \mathfrak{y}_1') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{122}'} + (2\mathfrak{y}_2' \cdot \mathfrak{y}_{21}' + \mathfrak{y}_1' \cdot \mathfrak{y}_{22}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{221}'} + 3\mathfrak{y}_2' \cdot \mathfrak{y}_{22}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{222}'}\right]\right\}$$

Die gewünschten Differentialinvarianten ergeben sich aus dem vollständigen System, welches man durch Nullsetzen der Koeffizienten von $W$, $W_1$, $W_2$, $W_{21}$, $W_{12}$, $W_{212}$ in $B^{(3)}f$ bekommt. Dieses vollständige System möge kurz in der folgenden Form geschrieben werden:

$$A_1 f=0,\quad A_2 f=0,\quad A_3 f=0,\quad A_4 f=0,\quad A_5 f=0,\quad A_6 f=0.$$

Die drei ersten Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}+\mathfrak{y}'\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}=0$$

und sagen aus, dass es keine Invariante nullter Stufe gibt, was mit der Tatsache $m_1=0$ auf Grund der allgemeinen Theorie übereinstimmt.

Die zwei nächstfolgenden Gleichungen beweisen, dass die gesuchten Differentialinvarianten die Verhältnisse der Veränderlichen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1'$, …, $\mathfrak{y}_{222}'$ als Argumente enthalten. Führt man die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\xi_2=\frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1},\quad \xi_{11}=\frac{\mathfrak{x}_{11}}{\mathfrak{x}_1},\ \ldots\ldots\ \xi_{222}=\frac{\mathfrak{x}_{222}}{\mathfrak{x}_1},$$

$$\eta_1=\frac{\mathfrak{y}_1'}{\mathfrak{y}_2'},\quad \eta_{11}=\frac{\mathfrak{y}_{11}'}{\mathfrak{y}_2'},\ \ldots\ldots\ \eta_{222}=\frac{\mathfrak{y}_{222}'}{\mathfrak{y}_2'},$$

so lautet die Gleichung $A_6 f=0$:

$$\eta_1\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{11}}+\frac{\partial f}{\partial \xi_{12}}+\xi_2\eta_1\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{21}}+\xi_2\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{22}}-2\left[\eta_1^2\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta_{11}}+\eta_1\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial \eta_{12}}+\frac{\partial f}{\partial \eta_{21}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f}{\partial \eta_{22}}\right]+(2\xi_{11}\eta_1+\eta_{11})\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{111}}+(\xi_{11}+\xi_{12}\eta_1+\eta_{12})\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{112}}$$

$$+(2\xi_{21}\eta_1+\xi_2\eta_{11})\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{211}}+(2\xi_{12}+\eta_{22})\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{122}}+(\xi_{21}+\xi_{22}\eta_1+\xi_2\eta_{21})\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{221}}$$

$$+(2\xi_{22}+\xi_2\eta_{22})\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_{222}}-2\cdot\left[3\eta_1\eta_{11}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta_{111}}+(2\eta_1\eta_{12}+\eta_{11})\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta_{112}}\right.$$

$$+(\eta_{11}+2\eta_1\eta_{21})\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta_{211}}+(2\eta_{12}+\eta_1\eta_{22})\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta_{122}}+(2\eta_{21}+\eta_1\cdot\eta_{22})\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta_{221}}$$

$$\left.+3\eta_{22}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta_{222}}\right]=0.$$

Ausserdem ergeben die Relationen (3) und (4) in § 4:



$$\text{(2)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi_{11}+\xi_{12}\eta_1+2\eta_{21}=\eta_{11}\xi_2+\eta_{12}+2\eta_1\xi_{21},\\ &\xi_{22}\cdot\eta_1+\xi_{21}+2\eta_{12}\cdot\xi_2=\eta_{22}+\eta_{21}\cdot\xi_2+2\xi_{12};\end{aligned}\right.$$

$$\text{(3)}\qquad \left\{\begin{aligned} &2\xi_{111}+\eta_1\cdot(\xi_{112}-3\xi_{211})+2\xi_{11}\cdot(3\eta_{21}-\eta_{12})\\ &=2\eta_{111}\cdot\xi_2+\eta_{112}-3\eta_{211}+2\eta_{11}\cdot(3\xi_{21}-\xi_{12});\\ &\xi_{221}\cdot\eta_1-\xi_{112}+\xi_{22}\cdot\eta_{11}+2\xi_{21}\cdot\eta_{12}\\ &=\eta_{221}-\eta_{112}\cdot\xi_2+\eta_{22}\cdot\xi_{11}+2\xi_{12}\cdot\eta_{21};\\ &2\xi_{222}\cdot\eta_1+(\xi_{221}-3\xi_{122})+2\xi_{22}\cdot(3\eta_{12}-\eta_{21})\\ &=2\eta_{222}+\xi_2\cdot(\eta_{221}-3\eta_{122})+2\eta_{22}\cdot(3\xi_{12}-\xi_{21}).\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen $A_4 f=0$, $A_5 f=0$, $A_6 f=0$ sind nach den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1}$, $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_2'}$, $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{12}}$ auflösbar und die Koeffizienten der aufgelösten Gleichungen verhalten sich regulär in der Umgebung des Wertsystems: $\mathfrak{x}_1=1$, $\mathfrak{y}_2'=1$, $\mathfrak{x}_{12}=0$. Als unabhängige Invarianten kann man daher die Hauptlösungen des vorhin besprochenen vollständigen Systems in bezug auf dieses Wertsystem annehmen. Sie haben die folgende Form:

1. Stufe: $\quad i_1^{(1)}=\xi_2,\qquad i_2^{(1)}=\eta_1$

2. Stufe: $\quad i_1^{(2)}=\xi_{11}-\eta_1\xi_{12},\qquad i_2^{(2)}=\xi_{21}-\xi_2\eta_1\xi_{12},$

$$i_3^{(2)}=\xi_{22}-\xi_2\xi_{12},\qquad i_4^{(2)}=\eta_{11}+2\eta_1^2\cdot\xi_{12},$$

$$i_5^{(2)}=\eta_{12}+2\eta_1\xi_{12},\qquad i_6^{(2)}=\eta_{21}+2\eta_1\xi_{12},$$

$$i_7^{(2)}=\eta_{22}+2\xi_{12}.$$

3. Stufe:

$$i_1^{(3)}=\xi_{111}-\xi_{12}\cdot(2\xi_{11}\eta_1+\eta_{11}),\quad i_2^{(3)}=\xi_{112}-\xi_{12}\cdot(\xi_{11}+\eta_1\xi_{12}+\eta_{22}),$$

$$i_3^{(3)}=\xi_{211}-\xi_{12}\cdot(2\xi_{21}\eta_1+\eta_{11}),\quad i_4^{(3)}=\xi_{122}-\xi_{12}\cdot(2\xi_{12}+\eta_{22}),$$

$$i_5^{(3)}=\xi_{221}-\xi_{12}\cdot(\xi_{21}+\eta_1\xi_{22}+\xi_2\eta_{21}),\quad i_6^{(3)}=\xi_{222}-\xi_{12}\cdot(2\xi_{22}+\xi_2\eta_{22}),$$

$$i_7^{(3)}=\eta_{111}+6\eta_1\xi_{12}\cdot(\eta_{11}+\eta_1^2\xi_{12}),\quad i_8^{(3)}=\eta_{112}+2\xi_{12}\cdot(\eta_{11}+2\eta_1\eta_{12}+3\eta_1^2\xi_{12}).$$

$$i_9^{(3)}=\eta_{211}+2\xi_{12}\cdot(\eta_{11}+2\eta_1\eta_{21}+3\eta_1^2\xi_{12}),\quad i_{10}^{(3)}=\eta_{122}+2\xi_{12}\cdot(\eta_1\eta_{22}+2\eta_{12}+3\eta_1\xi_{12}),$$

$$i_{11}^{(3)}=\eta_{221}+2\xi_{12}\cdot(\eta_1\eta_{22}+2\eta_{21}+3\eta_1\xi_{12}),\quad i_{12}^{(3)}=\eta_{222}+6\xi_{12}\cdot(\eta_{22}+\xi_{12}).$$

Auf Grund der allgemeinen Theorie weiss man von vornherein, dass es $m_2 = 2$ unabhängige Differentialinvarianten erster Stufe geben muss, ferner $m_3 = 5$ Differentialinvarianten zweiter Stufe, die voneinander und von denen erster Stufe unabhängig sind, endlich $m_4 = 9$ Differentialinvarianten dritter Stufe, welche voneinander und von denen niedrigerer Stufe unabhängig sind.

Die oben aufgestellen Differentialinvarianten erster Stufe $i_1^{(1)}$, $i_2^{(1)}$ sind unabhängig.

Zwischen den Differentialinvarianten zweiter Stufe $i_1^{(2)}, \ldots, i_7^{(2)}$ müssen zwei Relationnen bestehen. Diese Relationen findet man unmittelbar mit Hilfe der Relationen (2). Sie haben die folgende Form:

$$
(4) \qquad \begin{cases} i_4^{(2)} \cdot i_1^{(1)} + i_5^{(2)} + 2\, i_2^{(2)} \cdot i_2^{(1)} = i_1^{(2)} + 2\, i_6^{(2)}, \\ i_7^{(2)} + i_6^{(2)} \cdot i_1^{(1)} = i_3^{(2)} \cdot i_2^{(1)} + i_2^{(2)} + 2\, i_5^{(2)} \cdot i_1^{(1)}. \end{cases}
$$

Zwischen den 12 Differentialinvarianten dritter Stufe $i_1^{(3)}, \ldots, i_{12}^{(3)}$ müssen drei Relationen bestehen. Diese Relationen findet man ebenfalls sehr leicht mit Hilfe der Relationen (2) und (3). Sie lauten:

$$
(5) \qquad \begin{cases} 2\, i_1^{(3)} + i_2^{(1)} \cdot \left(i_2^{(3)} - 3\, i_3^{(3)}\right) + 2\, i_1^{(2)} \cdot \left(3\, i_6^{(2)} - i_5^{(2)}\right) \\ \qquad\qquad = 2\, i_1^{(1)} \cdot i_7^{(3)} + i_8^{(3)} - 3\, i_9^{(3)} + 6\, i_4^{(2)} \cdot i_2^{(2)}; \\ i_2^{(1)} \cdot i_5^{(3)} - i_2^{(3)} + i_3^{(2)} \cdot i_4^{(2)} + 2\, i_2^{(2)} \cdot i_5^{(2)} = i_{11}^{(3)} - i_8^{(3)} \cdot i_1^{(1)} + i_1^{(2)} \cdot i_7^{(2)}; \\ 2\, i_6^{(3)} \cdot i_2^{(1)} + i_5^{(3)} - 3\, i_4^{(3)} + 2\, i_3^{(2)} \cdot \left(3\, i_5^{(2)} - i_6^{(2)}\right) \\ \qquad\qquad = 2\, i_{12}^{(3)} + i_1^{(1)} \cdot \left(i_{11}^{(3)} - 3\, i_{10}^{(3)}\right) - 2\, i_7^{(2)} \cdot i_2^{(2)}. \end{cases}
$$

Für das Wertsystem: $\mathfrak{x}_1 = 1$, $\mathfrak{y}_2' = 1$, $\mathfrak{x}_{12} = 0$ nehmen die gefundenen Differentialinvarianten die Werte: $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1'$, $\mathfrak{x}_{11}$, $\mathfrak{x}_{12}, \ldots \mathfrak{x}_{222}$, $\mathfrak{y}_{11}'$, $\mathfrak{y}_{12}', \ldots, \mathfrak{y}_{222}'$. Die Relationen (4) und (5) ebenso wie die Relationen (2) und (3) nehmen dann die Form an, welche sich aus den Relationen (3) bzw. (4) in § 4 ergibt.

Nun ist für $\mathfrak{x} = x$, $\mathfrak{y}' = y'$, $\mathfrak{y} = y$:

$$
\mathfrak{x}_1 = 1, \quad \mathfrak{y}_2' = 1, \quad \mathfrak{x}_2 = 0, \quad \mathfrak{y}_1' = 0; \quad \mathfrak{x}_{11} = \mathfrak{x}_{12} = \ldots \mathfrak{y}_{22}' = 0.
$$

Um z. B. die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen der linearen Gruppe zu bekommen, muss man die Gleichungen:

$$
i_j^{(k)} = \alpha_{jk}\,(x\,y\,y')
$$



ausfstellen. Darin bedeuten die $\alpha_{jk}$ diejenigen Funktionen, in welche die $i_j^{(k)}$ vermöge der Substitution: $\mathfrak{x} = x$, $\mathfrak{y}' = y'$, $\mathfrak{y} = y$ übergehen. Man bekommt also die folgenden Definitionsgleichungen:

$$
(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_2 = 0, \quad \mathfrak{y}_1' = 0 \\ \mathfrak{x}_{11} = 0, \quad \mathfrak{x}_{21} = 0, \quad \mathfrak{x}_{22} = 0 \\ \mathfrak{y}_{11}' = 0, \quad \mathfrak{y}_{22}' \cdot \mathfrak{x}_1 + 2\,\mathfrak{x}_{12} \cdot \mathfrak{y}_2' = 0. \end{cases}
$$

Alle Ableitungen dritter Stufe sind gleich Null mit Ausnahme von $\mathfrak{y}_{222}'$, für die sich ergibt:

$$
\mathfrak{y}_{222}' \cdot \mathfrak{x}_1^2 - 6\,\mathfrak{y}_2' \cdot \mathfrak{x}_{12}^2 = 0.
$$

Die Gleichungen dritter Stufe gehen also aus den Gleichungen zweiter Stufe durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ hervor.

Die Richtigkeit der Definitionsgleichungen (6) kann man unmittelbar verifizieren. Die endlichen Gleichungen der linearen Gruppe aufgefasst als Gruppe von Berührungstransformationen lauten nämlich:

$$
\mathfrak{x} = a + b\,x + c\,y; \quad \mathfrak{y} = d + e\,x + f\,y; \quad \mathfrak{y}' = \frac{d + e\,y'}{b + c\,y'}.
$$

Daher:

$$
\mathfrak{x}_1 = b + c\,y'; \quad \mathfrak{x}_{12} = c
$$

$$
\mathfrak{y}_2' = \frac{e\,b - c\,d}{(b + c\,y')^2}; \quad \mathfrak{y}_{22}' = -\frac{2\,c\,(e\,b - c\,d)}{(b + c\,y')^3}
$$

$$
\frac{\mathfrak{y}_{22}'}{\mathfrak{y}_2'} = -\frac{2\,c}{b + c\,y'} = -\frac{2\,\mathfrak{x}_{12}}{\mathfrak{x}_1},
$$

oder:

$$
\mathfrak{y}_{22}' \cdot \mathfrak{x}_1 + 2\,\mathfrak{x}_{12} \cdot \mathfrak{y}_2' = 0.
$$

Man kann ferner die gefundenen Differentialinvarianten dazu benutzen, um nach der Methode des letzten Paragraphen gewisse Differentialgleichungen aufzustellen, in welchen die Definitionsgleichungen aller mit der linearen Gruppe vermöge einer Berührungstransformation ähnlichen Gruppen stecken. Zu diesem Zwecke braucht man aber nicht alle vorhin aufgestellten Differentialinvarianten zu berücksichtigen. Durch Ausführung der Operationen $f_{\mathrm{I}}$, $f_{\mathrm{II}}$ auf die Differentialinvarianten erster Stufe bekommt man nämlich vier voneinander unabhängige Differentialinvarianten zweiter Stufe; durch Ausführung der Operationen $f_{\mathrm{I}}$, $f_{\mathrm{II}}$ auf die Differentialinvarianten zweiter Stufe kann man schon sämtliche Differentialinvarianten dritter Stufe bekommen. Man braucht also nur die beiden Differentialinvarianten erster Stufe und diejenige der fünf unabhängigen zweiter Stufe zu berücksichtigen, welche sich aus denen erster Stufe durch Ausführung der Operationen $f_{\mathrm{I}}, f_{\mathrm{II}}$ nicht ableiten lässt. Mit Rücksicht auf die nachher durchzuführenden Rechnungen mögen aber ausser der genannten noch zwei andere einfachste Differentialinvarianten zweiter Stufe mitgenommen werden.

Man bezeichne:

$$I_1 = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1}; \qquad I_2 = \frac{\mathfrak{y}_1'}{\mathfrak{y}_2'};$$

$$I_3 = \frac{\mathfrak{x}_{11}}{\mathfrak{x}} - \frac{\mathfrak{x}_{12}}{\mathfrak{x}_1} \cdot \frac{\mathfrak{y}_1'}{\mathfrak{y}_2'}; \quad I_4 = \frac{\mathfrak{x}_{21}}{\mathfrak{x}_1} - \frac{\mathfrak{x}_{12}}{\mathfrak{x}_1} \cdot \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1} \cdot \frac{\mathfrak{y}_1'}{\mathfrak{y}_2'}; \quad I_5 = \frac{\mathfrak{x}_{22}}{\mathfrak{x}_1} - \frac{\mathfrak{x}_{12}}{\mathfrak{x}_1} \cdot \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1}.$$

Mit Hilfe der Formeln (5), (6) in § 6 kann man nun die Ausdrücke $C^{(2)} I_k$ $(k = 1, 2, 3)$ berechnen. Es ergibt sich:

$$C^{(2)} I_1 = I_1 \,.\, (M_{12} + M_{21}) - I_1^2 \,.\, M_{11} - M_{22}$$

$$C^{(2)} I_2 = -I_2 \ (M_{12} + M_{21}) + I_2^2 \,.\, M_{22} + M_{11}$$

$$C^{(2)} I_3 = M_{11} \,.\, (I_4 - I_2 \,.\, I_5 - I_1 \,.\, I_3) - M_{21} \,.\, I_3$$
$$+ M_{22} \,.\, I_2 \,.\, I_3 + M_{111} \,.\, I_1 - M_{211} - I_2 \,.\, (M_{112}\, I_1 - M_{212}).$$

Andererseits hat man:

$$I_4 = (I_1)_1 + I_1 \,.\, I_3; \quad I_5 = (I_1)_2.$$

Setzt man nun:

$$I_k = \omega^{(k)}\,(x\,y\,y'), \qquad (k = 1, 2, 3)$$

so bilden die Differentialgleichungen:

$$[C^{(2)} I_k]_{I_i = \omega^{(i)}} = M_2 \,.\, \omega_1^{(k)} - M_1 \,.\, \omega_2^{(k)} - M \,.\, \omega_3^{(k)} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

das gewünschte System, in dem alle mit der linearen Gruppe vermöge einer Berührungstransformation ähnlichen Gruppen stecken. Dieses System lautet:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} -\omega^{(1)^2} \,.\, M_{11} + \omega^{(1)} \,.\, (M_{12} + M_{21}) - M_{22} = M_2 \,.\, \omega_1^{(1)} - M_1 \,.\, \omega_2^{(1)} - M \,.\, \omega_3^{(1)} \\ \omega^{(2)^2} \,.\, M_{22} - \omega^{(2)} \,.\, (M_{12} + M_{21}) + M_{11} = M_2 \,.\, \omega_1^{(2)} - M_1 \,.\, \omega_2^{(2)} - M \,.\, \omega_3^{(2)}, \\ \left(\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} \,.\, \omega^{(2)}\right) . M_{11} - \omega^{(3)} \,.\, M_{21} + \omega^{(2)} \,.\, \omega^{(3)} \,.\, M_{22} + \omega^{(1)} \,.\, M_{111} - M_{211} \\ - \omega^{(2)} \,.\, (M_{111} \,.\, \omega^{(1)} - M_{212}) = M_2 \,.\, \omega_1^{(3)} - M_1 \,.\, \omega_2^{(3)} - M \,.\, \omega_3^{(3)}. \end{cases}$$

Die Definitionsgleichungen der linearen Gruppe ergeben sich aus $(I)$ wenn man darin: $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \omega^{(3)} = 0$ setzt, in der Form:

$$M_{11} = 0, \quad M_{22} = 0, \quad M_{211} = 0.$$



Man muss dann noch alle Gleichungen dritter und vierter Stufe hinzufügen, welche aus den obigen durch Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ folgen. Überhaupt bekommt man durch Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ auf die beiden ersten der Gleichungen $(I)$ vier Gleichungen dritter Stufe. Sie müssen voneinander unabhängig sein, weil sie unmittelbar nach den vier voneinander unabhängigen Differentialoperationen: $M_{111}, M_{112}, M_{221}, M_{222}$ auflösbar sind. Es leuchtet ein, dass sich die dritte der Gleichungen $(I)$ durch Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ aus den beiden ersten nicht ableiten lässt. Wäre es nämlich der Fall, dann müsste dasselbe für $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \omega^{(3)} = 0$ gelten; dies ist aber nicht möglich, da die Gleichung $M_{211} = 0$ aus den beiden $M_{11} = 0$, $M_{22} = 0$ sich durch Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ nicht ableiten lässt.

Jeder Gruppe von Berührungstransformationen, welche mit der linearen Gruppe vermöge einer Berührungstransformation ähnlich ist, entspricht ein System von drei Funktionen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$, das in $(I)$ eingesetzt die Definitionsgleichungen der betreffenden Gruppe liefert.

## § 8. Die Definitionsgleichungen aller mit der allgemeinen projektiven Gruppe vermöge einer Berührungstransformation ähnlichen Gruppen.

Die charakteristische Funktion der allgemeinen infinitesimalen Transformation der projektiven Gruppe lautet:

$$(1) \quad W = a + bx + cy' + dy + exy' + fyy' + gx\,.\,(xy' - y) + hy\,(xy' - y).$$

Alle Definitionsgleichungen, welche diese Funktion bestimmen, lassen sich aus den beiden folgenden:

$$(2) \qquad W_{11} = 0, \quad W_{22} = 0$$

durch Ausführung der Operationen $f_1, f_2$ ableiten.

Dieses Ergebnis kann man unmittelbar verifizieren. Man kann sich ferner überzeugen, dass es mit den Eigenschaften der projektiven Gruppe, betrachtet als Gruppe von Punkttransformationen übereinstimmt.

Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen der letzteren lauten:

$$(3) \qquad \xi_{xx} = 2\,\eta_{xy}; \quad \xi_{yy} = 0; \quad \eta_{xx} = 0; \quad \eta_{yy} = 2\,\xi_{xy}.$$

Alle Ableitungen dritter Ordnung sind gleich Null; dies ergibt sich durch Differentiation der Gleichungen (3). Alle Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen der projektiven Gruppe, aufgefasst als Gruppe von Punkttransformationen, lassen sich also aus den Gleichungen (3) allein durch Differentiation ableiten. Ist also die obige Bemerkung richtig, so müssen in den Gleichungen (2) alle Gleichungen (3) stecken.

Es ist in der Tat:

$$W = y' \cdot \xi - \eta ,$$

$$W_{11} = - \eta_{xx} + y' \cdot (\xi_{xx} - 2\eta_{xy}) + y'^2 \cdot (2\xi_{xy} - \eta_{yy}) - y'^3 \cdot \xi_{yy} ,$$

$$W_{22} = 0 .$$

Die Gleichungen (2) und (3) sind vollständig gleichbedeutend. Aus der Tatsache, dass sich alle Definitionsgleichungen der allgemeinen projektiven Gruppe, aufgefasst als Gruppe von Berührungstransformationen, aus den beiden Gleichungen (2) durch Differentiation ableiten lassen, folgt ohne Weiteres, dass die projektive Gruppe zwei Differentialinvarianten erster Stufe in den Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, .... besitzt und dass alle Differentialinvarianten höherer Stufe aus den beiden letzteren durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ abgeleitet werden können.

Auf Grund dieser Bemerkung kann man die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen aller mit der allgemeinen projektiven Gruppe vermöge einer Berührungstransformation ähnlichen Gruppen noch einfacher, als im Falle der linearen Gruppe, aufstellen.

Zunächst kann man sich leicht überzeugen, dass die vorhin gefundenen Differentialinvarianten $I_1$, $I_2$ erster Stufe der linearen Gruppe zugleich Differentialinvarianten der projektiven Gruppe sind. Man braucht dazu bloss die Invarianz der genannten Ausdrücke:

$$I_1 = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1}; \qquad I_2 = \frac{\mathfrak{y}_1'}{\mathfrak{y}_2'}$$

gegenüber denjenigen infinitesimalen Berührungstransformationen $B_1 f$, $B_2 f$ zu beweisen, welche den beiden charakteristischen Funktionen

$$W^{(1)} = \mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) ; \qquad W^{(2)} = \mathfrak{y} \cdot (\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) .$$

genügen.

Mit Rücksicht auf die Formeln (6) in § 5 ist allgemein:

$$B I_1 = - \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1{}^2} \cdot (W_{21}\mathfrak{x}_1 + W_{22}\mathfrak{y}_1') + \frac{1}{\mathfrak{x}_1} \cdot (W_{21}\mathfrak{x}_2 + W_{22}\mathfrak{y}_2') ;$$

$$B I_2 = \frac{\mathfrak{y}_1'}{\mathfrak{y}_2'^2} \cdot (W_{11}\mathfrak{x}_2 + W_{12}\mathfrak{y}_2') - \frac{1}{\mathfrak{y}_2'} \cdot (W_{11}\mathfrak{x}_1 + W_{12}\mathfrak{y}_1') .$$

Da nun:

$$W_{11}^{(1)} = W_{22}^{(1)} = W_{11}^{(2)} = W_{22}^{(2)} = 0$$

ist, so ist auch:

$$B_1 I_1 = 0, \quad B_1 I_2 = 0, \quad B_2 I_1 = 0, \quad B_2 I_2 = 0,$$



wenn man mit $B_1 f$, $B_2 f$ die den charakteristischen Funktionen $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ entsprechenden infinitesimalen Berührungstransformationen bezeichnet.

Entnimmt man dem Systeme (I) der Definitionsgleichungen die beiden ersten:

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \omega^{(1)2} \cdot M_{11} - \omega^{(1)} \cdot (M_{12} + M_{21}) + M_{22} + M_2 \cdot \omega_1^{(1)} - (M_1 \cdot \omega_2^{(1)} + M \cdot \omega_3^{(1)}) = 0, \\ & \omega^{(2)2} \cdot M_{22} - \omega^{(2)} \cdot (M_{12} + M_{21}) + M_{11} - M_2 \cdot \omega_1^{(2)} + M_1 \cdot \omega_2^{(2)} + M \cdot \omega_3^{(2)} = 0, \end{aligned} \right.$$

so stecken in den Gleichungen (II) die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen aller Gruppen, welche mit der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene, aufgefasst als Gruppe von Berührungstransformationen, vermöge einer Berührungstransformation ähnlich sind. Die letzteren ergeben sich für

$$\omega^{(1)} = 0 , \qquad \omega^{(2)} = 0$$

in der Form:

$$M_{11} = 0 , \qquad M_{22} = 0 .$$

Um nun die Integrabilitätsbedingungen zu finden, denen die in den Gleichungen (II) auftretenden Funktionen $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ genügen sollen, müsste man durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ die Gleichungen fünfter Stufe aufstellen, dieselben nach den Operationen fünfter Stufe auflösen, sodann noch zweimal die Operationen $f_1$, $f_2$ ausführen und die zwischen den Operationen sechster und siebenter Stufe bestehenden Identitäten benutzen. Die dazu notwendigen Rechnungen sind aber praktisch schwer durchführbar. Die gewünschten Integrabilitätsbedingungen lassen sich trotzdem aufstellen, allerdings auf anderem Wege.

Die projektive Gruppe der Ebene lässt bekantlich die Gesamtheit der Punkte und die Gesamtheit der Geraden der Ebene invariant und diese Eigenschaft ist für die projektive Gruppe charakteristisch.

Führt man nun vermöge einer Berührungstransformation neue Veränderliche ein, so geht die projektive Gruppe in eine Gruppe von Berührungstransformationen über, die diejenigen beiden Kurvenscharen der Ebene:

$$\text{(4)} \qquad y'' = \alpha(x, y, y'); \qquad \mathfrak{y}'' = \beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$$

invariant lässt, in welche jene Berührungstransformation die Punkte und die Geraden der Ebene überführt.

Die Aufgabe, die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen (II) zu finden, ist also mit der folgenden Aufgabe gleichbedeutend:

Die Bedingungen zu finden, denen die Funktionen $\alpha(xyy')$; $\beta(xyy')$ genügen müssen, damit es eine Berührungstransformation gibt, welche die eine der beiden durch die Differentialgleichungen: $y'' = \alpha$, $\mathfrak{y}'' = \beta$ bestimmten

Kurvenscharen in die Geraden und zu gleicher Zeit die andere in die Punkte der Ebene überführt, oder, analytisch ausgedrückt, die eine der Differentialgleichungen (4) auf die Form: $y''=0$ und gleichzeitig die andere auf die Form: $y''=\infty$ bringt.

Denkt man sich die Differentialgleichungen (4) integriert, so stellen die Gleichungen

$$y=f(x, a, b); \qquad \mathfrak{y}=\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \tag{5}$$

die in Rede stehenden Kurvenscharen dar.

Jeder Kurve der ersten Kurvenschar entsprechen $\infty^1$ Kurven der zweiten Kurvenschar, welche die erstere berühren. Die Berührungsbedingung ist eine Gleichung von der Form:

$$\omega(a, b, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})=0. \tag{6}$$

Da nun die gegebenen Kurvenscharen durch eine Berührungstransformation in die Punkte und die Geraden übergeführt werden sollen, so muss die Berührungsbedingung (6) durch geeignete Wahl der Parameter $a$, $b$ und der Parameter $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die folgende Form erhalten können:

$$b=a\,.\,\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \tag{7}$$

und zwar ist die letztere Bedingung notwendig und hinreichend dafür, dass diese Überführung möglich ist.

In der Tat: die eine der beiden gegebenen Kurvenscharen, z. B. die erste $y=f(x, a, b)$ kann immer durch eine Berührungstransformation in die Schar der Punkte $x=a$, $y=b$ übergeführt werden. Die Berührungstransformation, welche diese Überführung vollzieht, ist durch folgende Gleichung:

$$\Omega(x, y, x_1, y_1)=y-f(x, x, y_1)=0,$$

als aequatio directrix, bestimmt. Dabei geht zugleich die zweite Kurvenschar in eine gewisse Kurvenschar über, welche durch die folgende Gleichung:

$$\mathfrak{y}=\bar{\varphi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

bestimmt sein möge. Die Berührungsbedingung lautet jetzt:

$$b=\bar{\varphi}(a, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Ist es nun möglich durch Transformation der Parameter $a$, $b$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ diese Bedingung auf die Form zu bringen:

$$\mathfrak{b}_1=a_1\mathfrak{a}_1+b_1$$

wobei:

$$a_1=\chi(a, b), \quad b_1=\psi(a, b)$$



ist, so kann man die Gleichung der zweiten Kurvenschar folgendermassen darstellen:

$$\psi(x, y)+\mathfrak{a}_1\,.\,\chi(x, y)=\mathfrak{b}_1.$$

Mit anderen Worten: die zweite Kurvenschar geht bei der vorhin erwähnten Berührungstransformation in eine Kurvenschar über, die durch Punkttransformation in die Geraden der Ebene übergeführt werden kann.

Die Aufgabe kommt somit darauf hinaus, zu untersuchen, wann die Berührungsbedingung (6) durch geeignete Transformation der Parameter $a$, $b$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf die Form (7) zurückgeführt werden kann.

In der Gleichung (6) mögen die $a$, $b$ als Parameter, die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ als Veränderliche betrachtet werden. Dann bestimmt diese Gleichung die Veränderliche $\mathfrak{b}$ als Funktion der Veränderlichen $\mathfrak{a}$ und diese Funktion wird durch eine gewisse Differentialgleichung zweiter Ordnung definiert:

$$\mathfrak{b}''=\gamma(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'). \tag{8}$$

Die Parametertransformation, welche die Berührungsbedingung (6) auf die Form (7) bringt, muss zugleich die Differentialgleichung (8) auf die Form $\mathfrak{b}''=0$ zurückführen.

Nun kann man natürlich die Rollen der beiden Parameterpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$; $a$, $b$ vertauschen. Man kann nämlich in der Gleichung (6) die $a$, $b$ als Veränderliche und die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ als Parameter betrachten. Dann definiert diese Gleichung eine der Veränderlichen $a$ und $b$ als Funktion der anderen, z. B. $b$ als Funktion von $a$ und diese Funktion wird durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$b''=g(a, b, b') \tag{9}$$

bestimmt. Die Parametertransformation, welche die Berührungsbedingung (6) auf die Form (7) und zugleich die Differentialgleichung (8) auf die Form $\mathfrak{b}''=0$ bringt, muss also ausserdem noch die Differentialgleichung (9) auf die Form $b''=0$ zurückführen.

In seiner Inaugural Dissertation: „Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ (Greifswald, 1905) hat Herr Alfred Koppisch den folgenden Satz bewiesen (S. 17):

Soll sich eine Differentialgleichung $y''=\omega(xyy')$ durch eine Punkttransformation auf die Form $y''=0$ bringen lassen, so ist notwendig und hinreichend, dass sie die Form:

$$y''=\omega_0-3\omega_1\,.\,y'+3\omega_2\,.\,y'^2-\omega_3\,.\,y'^3$$

hat und dass ausserdem, wenn $y=Y(x, a, b)$ die allgemeine Lösung der

Differentialgleichung $y''=\omega$ ist, $b$ als Funktion von $a$ betrachtet einer Differentialgleichung zweiter Ordnung von eben dieser Form genügt.

Die Differentialgleichung $\mathfrak{b}''=\gamma(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}')$ muss also entsprechend die folgende Form haben:

$$\mathfrak{b}''+\varphi_0(\mathfrak{a},\mathfrak{b})+\varphi_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,.\,\mathfrak{b}'+\varphi_2(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,.\,\mathfrak{b}'^2+\varphi_3(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,.\,\mathfrak{b}'^3=0, \tag{10}$$

und die Differentialgleichung $b''=g(a\,b\,b')$ analoge Form:

$$b''+\psi_0(a,b)+\psi_1(a,b)\,.\,b'+\psi_2(a,b)\,.\,b'^2+\psi_3(a,b)\,.\,b'^3=0. \tag{11}$$

Es genügt natürlich, eine der beiden Differentialgleichungen (10) und (11) zu betrachten. Die Bedingungen für die Funktionen $\alpha$, $\beta$, welche man etwa aus der Untersuchung der Gleichung (10) bekommt, werden sich durch Vertauschung von $\alpha$ und $\beta$ unmittelbar in die entsprechenden Bedingungen verwandeln, die aus der Betrachtung der Gleichung (11) hervorgehen.

Die Gleichung (10) kann man auch folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{a}\,.\,d^2\mathfrak{b}-d\mathfrak{b}\,.\,d^2\mathfrak{a}+\varphi_0(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,.\,d\mathfrak{a}^3+\varphi_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}^2\,.\,d\mathfrak{b}& \\ +\varphi_2(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{b}^2+\varphi_2(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,.\,d\mathfrak{b}^3&=0, \end{aligned} \tag{12}$$

wodurch die Parameter $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ als gleichberechtigt erscheinen.

Im Folgenden wird eine von Prof. Engel angegebene Methode verfolgt.

Es möge nämlich die folgende Operation eingeführt werden:

$$\partial f(x\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})=\frac{\partial f}{\partial\mathfrak{a}}\,.\,d\mathfrak{a}+\frac{\partial f}{\partial\mathfrak{b}}\,.\,d\mathfrak{b}=f_{\mathfrak{a}}\,.\,d\mathfrak{a}+f_{\mathfrak{b}}\,.\,d\mathfrak{b}. \tag{13}$$

Die Berührungsbedingung (6) geht aus den beiden Gleichungen:

$$y-\mathfrak{y}=0; \qquad y'-\mathfrak{y}'=0 \tag{14}$$

durch Elimination der Veränderlichen $x$ hervor, wobei $y=f(x,a,b)$ und $\mathfrak{y}=\varphi(x,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ zu setzen ist.

Durch Differentiation der Gleichungen (14) ergibt sich, wenn man $x$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ als Veränderliche und $a$, $b$ als Parameter auffasst:

$$\left\{\begin{aligned} &(y'-\mathfrak{y}')\,dx-\partial\mathfrak{y}=0, \\ &\partial\mathfrak{y}=0, \\ &[\alpha(x\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}')-\beta(x\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}')]\,dx-\partial\mathfrak{y}'=0, \\ &\partial\mathfrak{y}'\,.\,dx+\partial^2\mathfrak{y}=0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$



Eliminiert man $dx$ aus den beiden letzten der Gleichungen (15), so bekommt man:

$$\left\{\begin{aligned} &\partial\mathfrak{y}=0, \\ &[\alpha(x\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}')-\beta(x\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}')]\,.\,\partial^2\mathfrak{y}+\partial\mathfrak{y}'^2=0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Nun ist auf Grund der Bezeichnung (13):

$$\left\{\begin{aligned} \partial\mathfrak{y}&=\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}}\,.\,d\mathfrak{a}+\mathfrak{y}_{\mathfrak{b}}\,.\,d\mathfrak{b}, \\ \partial\mathfrak{y}'&=\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}}'\,.\,d\mathfrak{a}+\mathfrak{y}_{\mathfrak{b}}'\,.\,d\mathfrak{b}, \\ \partial^2\mathfrak{y}&=\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}\,.\,d\mathfrak{a}^2+2\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,.\,d\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{b}+\mathfrak{y}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}\,.\,d\mathfrak{b}^2+\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}}\,.\,d^2\mathfrak{a}+\mathfrak{y}_{\mathfrak{b}}\,.\,d^2\mathfrak{b}, \\ \partial^2\mathfrak{y}'&=\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}'\,.\,d\mathfrak{a}^2+2\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}'\,.\,d\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{b}+\mathfrak{y}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}'\,.\,d\mathfrak{b}^2+\mathfrak{y}_{\mathfrak{a}}'\,.\,d^2\mathfrak{a}+\mathfrak{y}_{\mathfrak{b}}'\,.\,d^2\mathfrak{b}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Löst man die Gleichungen (17) nach $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d^2\mathfrak{a}$, $d^2\mathfrak{b}$ auf und setzt die erhaltenen Ausdrücke in die linke Seite der Gleichung (12) ein, so bekommt man:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{a}\,.\,d^2\mathfrak{b}-d\mathfrak{b}\,.\,d^2\mathfrak{a}+\varphi_0(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}^3+\varphi_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}^2\,.\,d\mathfrak{b}+\varphi_2(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{b}^2& \\ +\varphi_3(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,.\,d\mathfrak{b}^3=\lambda\,.\,(\partial\mathfrak{y}\,.\,\partial^2\mathfrak{y}'-\partial^2\mathfrak{y}\,.\,\partial\mathfrak{y}')+\mu_0\,.\,\partial\mathfrak{y}^3+\mu_1\,.\,\partial\mathfrak{y}^2\,.\,\partial\mathfrak{y}'& \\ +\mu_2\,.\,\partial\mathfrak{y}\,.\,\partial\mathfrak{y}'^2+\mu_3\,.\,\partial\mathfrak{y}'^3&, \end{aligned} \tag{18}$$

worin $\lambda$, $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ gewisse Funktionen von $x$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bedeuten. Die linke Seite der Relation (18) enthält die Veränderliche $x$ nicht, während sie auf der rechten Seite scheinbar vorkommt. Differenziert man also die Relation (18) nach $x$, so bekommt man identisch Null, d. h. es müssen alle Koeffizienten einzeln verschwinden.

Diese Differentiation ergibt:

$$\begin{aligned} &\lambda\,.\,(\partial\mathfrak{y}\,.\,\partial^2\beta-\partial\beta\,.\,\partial^2\mathfrak{y})+\lambda'(\partial\mathfrak{y}\,.\,\partial^2\mathfrak{y}'-\partial^2\mathfrak{y}\,.\,\partial\mathfrak{y}')+3\mu_0\,.\,\partial\mathfrak{y}^2\,.\,\partial\mathfrak{y}' \\ &+2\mu_1\,.\,\partial\mathfrak{y}\,.\,\partial\mathfrak{y}'^2+\mu_2\,.\,\partial\mathfrak{y}'^3+\partial\beta\,.\,(\mu_1\,.\,\partial\mathfrak{y}^2+2\mu_2\,.\,\partial\mathfrak{y}\,.\,\partial\mathfrak{y}'+3\mu_3\,.\,\partial\mathfrak{y}'^2) \\ &+\mu_0'\,.\,\partial\mathfrak{y}^3+\mu_1'\,.\,\partial\mathfrak{y}^2\,.\,\partial\mathfrak{y}'+\mu_2'\,.\,\partial\mathfrak{y}\,.\,\partial\mathfrak{y}'^2+\mu_3'\,.\,\partial\mathfrak{y}'^3=0. \end{aligned}$$

Setzt man in diese Identität die folgenden Ausdrücke:

$$\partial\beta=\beta_{\mathfrak{y}}\,.\,\partial\mathfrak{y}+\beta_{\mathfrak{y}'}\,.\,\partial\mathfrak{y}'$$

$$\partial^2\beta=\beta_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}}\,.\,\partial\mathfrak{y}^2+2\beta_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}'}\,.\,\partial\mathfrak{y}\,.\,\partial\mathfrak{y}'+\beta_{\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'}\,.\,\partial\mathfrak{y}'^2+\beta_{\mathfrak{y}}\,.\,\partial^2\mathfrak{y}+\beta_{\mathfrak{y}'}\,.\,\partial^2\mathfrak{y}'$$

ein, so ergibt sich:

$$\lambda \,.\, \delta\mathfrak{y} \,.\, (\beta_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} \,.\, \delta\mathfrak{y}^2 + 2\,\beta_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}'} \,.\, \delta\mathfrak{y} \,.\, \delta\mathfrak{y}' + \beta_{\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'} \,.\, \delta\mathfrak{y}'^2$$
$$+ (\lambda \,.\, \beta_{\mathfrak{y}'} + \lambda') \,.\, (\delta\mathfrak{y} \,.\, \delta^2\mathfrak{y}' - \delta\mathfrak{y}' \,.\, \delta^2\mathfrak{y}) + \mu_0' \,.\, \delta\mathfrak{y}^3 + (3\,\mu_0 + \mu_1') \,.\, \delta\mathfrak{y}^2 \,.\, \delta\mathfrak{y}'$$
$$+ (\mu_2' + 2\,\mu_1) \,.\, \delta\mathfrak{y} \,.\, \delta\mathfrak{y}'^2 + (\mu_3' + \mu_2) \,.\, \delta\mathfrak{y}'^3$$
$$+ (\beta_{\mathfrak{y}} \,.\, \delta\mathfrak{y} + \beta_{\mathfrak{y}'} \,.\, \delta\mathfrak{y}') \,.\, (\mu_1 \,.\, \delta\mathfrak{y}^2 + 2\,\mu_2 \,.\, \delta\mathfrak{y} \,.\, \delta\mathfrak{y}' + 3\,\mu_3 \,.\, \delta\mathfrak{y}'^2) \equiv 0.$$

Da die Koeffizienten von $(\delta\mathfrak{y} \,.\, \delta^2\mathfrak{y}' - \delta\mathfrak{y}' \,.\, \delta^2\mathfrak{y})$, $\delta\mathfrak{y}^3$, $\delta\mathfrak{y}^2 \,.\, \delta\mathfrak{y}'$, $\delta\mathfrak{y} \,.\, \delta\mathfrak{y}'^2$, $\delta\mathfrak{y}'^3$ einzeln verschwinden müssen, so zerfällt die obige Identität in fünf Differentialgleichungen, welche die Funktionen $\lambda$, $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ bestimmen. Diese Differentialgleichungen lauten:

$$(19)\quad \begin{cases} \lambda' + \lambda \,.\, \beta_{\mathfrak{y}'} = 0, \\ \lambda \,.\, \beta_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} + \mu_1 \,.\, \beta_{\mathfrak{y}} + \mu_0' = 0, \\ 2\lambda\,\beta_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}'} + \mu_1 \,.\, \beta_{\mathfrak{y}'} + 2\,\mu_2 \,.\, \beta_{\mathfrak{y}} + \mu_1' + 3\,\mu_0 = 0, \\ \lambda \,.\, \beta_{\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'} + 2\,\mu_2 \,.\, \beta_{\mathfrak{y}'} + 3\,\mu_3 \,.\, \beta_{\mathfrak{y}} + \mu_2' + 2\,\mu_1 = 0, \\ 3\,\mu_3 \,.\, \beta_{\mathfrak{y}'} + \mu_3' + \mu_2 = 0. \end{cases}$$

Ausserdem ergibt sich noch eine endliche Gleichung. Aus (12) und (18) folgt nämlich für $\delta\mathfrak{y} = 0$:

$$-\lambda \,.\, \delta^2\mathfrak{y} + \mu_3 \,.\, \delta\mathfrak{y}'^2 = 0$$

und daraus bekommt man mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (16):

$$(20)\qquad (\alpha - \beta) \,.\, \mu_3 + \lambda = 0.$$

Die Gleichungen (19) kann man mit Rücksicht auf die Bezeichnungen des § 1 folgendermassen schreiben:

$$(19\text{ bis})\quad \begin{cases} \lambda' + \lambda \,.\, \beta_2 = 0, \\ \lambda \,.\, \beta_{33} + \mu_1 \,.\, \beta_3 + \mu_0' = 0. \\ 2\lambda \,.\, \beta_{23} + \mu_1 \,.\, \beta_2 + 2\,\mu_2 \,.\, \beta_3 + \mu_1' + 3\,\mu_0 = 0, \\ \lambda \,.\, \beta_{22} + 2\,\mu_2 \,.\, \beta_2 + 3\,\mu_3 \,.\, \beta_3 + \mu_2' + 2\,\mu_1 = 0, \\ 3\,\mu_3 \,.\, \beta_2 + \mu_3' + \mu_2 = 0. \end{cases}$$

Der Kürze halber möge die folgende Bezeichnung eingeführt werden:

$$(20')\quad \begin{cases} \dfrac{df(x\mathfrak{y}\mathfrak{y}')}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{y}' \,.\, \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{y}'' \,.\, \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}'} = f_1 + \beta \,.\, f_2 = f^{\mathrm{I}} \\ \alpha\,(x\mathfrak{y}\mathfrak{y}') - \beta\,(x\mathfrak{y}\mathfrak{y}') = \gamma. \end{cases}$$



Mit Hilfe der endlichen Gleichung (20) kann man alle Funktioneni $\lambda$, $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$ durch die letzte $\mu_3$ ausdrücken. Dazu braucht man nur die fortschreitende Differentiation der Gleichung (20) und der weiteren Relationen, welche dadurch entstehen und die Elimination von $\mu_1'$, $\mu_2' \ldots$ mit Hilfe der Gleichungen (19) anzuwenden. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$(21)\quad \begin{cases} \lambda = -\gamma \,.\, \mu_3 \\ \gamma\,\mu_2 = (\gamma^{\mathrm{I}} - 2\,\gamma\,\beta_2) \,.\, \mu_3 \\ 2\,\gamma^2 \,.\, \mu_1 = -\{\gamma \,.\, (\gamma^{\mathrm{II}} + 3\,\gamma^{\mathrm{I}} \,.\, \beta_2) + \gamma^2\,[3\,\beta_3 - 2\,(\beta_2^{\mathrm{I}} + \beta_2^2)] - \gamma^3 \,.\, \beta_{22} - 2\,\gamma^{\mathrm{I}^2}\} \,.\, \mu_3 \\ 6\,\gamma^2 \,.\, \mu_0 = \{6\,\gamma^{\mathrm{I}^3} - 6\,\gamma\,\gamma^{\mathrm{I}} \,.\, (\gamma^{\mathrm{II}} + \gamma^{\mathrm{I}} \,.\, \beta_2) + \gamma^2 \,.\, [\gamma^{\mathrm{III}} + 3\,\gamma^{\mathrm{II}} \,.\, \beta_2 + \gamma^{\mathrm{I}} \,.\, (5\,\beta_2^{\mathrm{I}} + 2\,\beta_2^2 - 7\,\beta_3)] \\ + \gamma^3 \,.\, [3\,\beta_3^{\mathrm{I}} - 2\,(\beta_2^{\mathrm{II}} + 2\,\beta_2 \,.\, \beta_2^{\mathrm{I}}) + 8\,\beta_2 \,.\, \beta_3] + \gamma^4 \,.\, (4\,\beta_{23} - \beta_{22}^{\mathrm{I}})\} \,.\, \mu_3 \,. \end{cases}$$

Nochmalige Differentiation und Elimination ergibt die gesuchte Bedingung für die Funktionen $\alpha$, $\beta$:

$$\begin{aligned} &\gamma^{\mathrm{IV}} \,.\, \gamma^3 + 2\gamma^{\mathrm{III}} \,.\, \gamma^2 \,.\, (\gamma\,\beta_2 - 4\,\gamma^{\mathrm{I}}) + \gamma^{\mathrm{II}} \,.\, \gamma \,.\, \{\gamma^2 \,.\, [8\,\beta_2^{\mathrm{I}} - (\beta_2^2 + 10\,\beta_3)] \\ &+ 12\,\gamma^{\mathrm{I}} \,.\, (3\,\gamma^{\mathrm{I}} - \gamma\,\beta_2)\} - 6\,\gamma^{\mathrm{II}^2} \,.\, \gamma^2 + \gamma^{\mathrm{I}} \,.\, \gamma^3 \,.\, [7\,\beta_2^{\mathrm{II}} + 3\,\beta_2 \,.\, \beta_2^{\mathrm{I}} - 10 \,.\, (\beta_3^{\mathrm{I}} + \beta_2 \,.\, \beta_3) \\ (22)\qquad &- 2\,\beta_2^3] + 2\,\gamma^{\mathrm{I}^2} \,.\, \gamma^2 \,.\, (10\,\beta_3 - 8\,\beta_2^{\mathrm{I}} + \beta_2^2) + 12\,\gamma^{\mathrm{I}^3} \,.\, (\gamma \,.\, \beta_2 - 2\,\gamma^{\mathrm{I}}) \\ &+ \gamma^4 \,.\, [3\,\beta_3^{\mathrm{II}} - 2\,(\beta_2^{\mathrm{III}} + \beta_2 \,.\, \beta_2^{\mathrm{II}} + 2\,\beta_2^{\mathrm{I}^2}) + 5\,\beta_2 \,.\, \beta_3^{\mathrm{I}} + 14\,\beta_3 \,.\, \beta_2^{\mathrm{I}} + 4\,\beta_2^2 \,.\, \beta_2^{\mathrm{I}} \\ &- \beta_3 \,.\, (2\,\beta_2^2 + 9\,\beta_3)] + \gamma^5 \,.\, [3 \,.\, (\beta_3 \,.\, \beta_{22} - 2\,\beta_{33}) + 4 \,.\, (\beta_{23}^{\mathrm{I}} - \beta_2 \,.\, \beta_{23}) + \beta_2 \,.\, \beta_{22}^{\mathrm{I}} - \beta_{22}^{\mathrm{II}}] = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich einfacher schreiben. Doch ehe man dazu übergeht, möge eine Bemerkung eingeschaltet werden.

Setzt man die Ausdrücke (21) in die aus der Berührungsbedingung folgende Gleichung:

$$(23)\quad \lambda \,.\, (\delta\mathfrak{y} \,.\, \delta^2\mathfrak{y}' - \delta\mathfrak{y}' \,.\, \delta^2\mathfrak{y}) + \mu_0 \,.\, \delta\mathfrak{y}^3 + \mu_1 \,.\, \delta\mathfrak{y}^2 \,.\, \delta\mathfrak{y}' + \mu_2 \,.\, \delta\mathfrak{y} \,.\, \delta\mathfrak{y}'^2 + \mu_3 \,.\, \delta\mathfrak{y}'^3 = 0$$

ein und berücksichtigt man noch die Formeln (17), so bekommt man die Gleichung von der Form (12), wo die Veränderliche $x$ gar nicht auftritt. Führt man ferner statt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Anfangswerte $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_0'$ für $x = x_0$ ein, indem man setzt:

$$(\mathfrak{y})_{x=x_0} = \mathfrak{a}, \qquad (\mathfrak{y}')_{x=x_0} = \mathfrak{b},$$

so ergibt sich:

$$\delta\mathfrak{y}_0 = dy_0, \quad \delta\mathfrak{y}_0' = dy_0', \quad \delta^2\mathfrak{y}_0 = d^2y_0, \quad \delta^2\mathfrak{y}_0' = d^2y_0'.$$

Betrachtet man in der Relation (6) den Parameter $b$ als Funktion von $a$, so ist diese Funktion auch durch eine Differentialgleichung von der Form (9) bestimmt. Führt man ferner anstatt (13) die Operation:

$$\delta f(x\,,\ a\,,\ b) = f_a . da + f_b . db$$

ein, und benutzt dieselbe Methode, wie vorhin, so bekommt man die zweite Bedingung für die Funktionen $\alpha$, $\beta$, welche aus (22) durch Vertauschung von $\alpha$, $\beta$ hervorgeht.

Es möge nun ein System von zwei Funktionen $\alpha$, $\beta$ vorliegen, welche diesen beiden Bedingungen genügen. Man benutze ferner bei der Integration von $y'' = \alpha$, $\mathfrak{y}'' = \beta$ die Anfangswerte $y_0$, $y_0'$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_0'$ von $y$, $y'$; $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$ für $x = x_0$ als Integrationskonstanten. Dann enthält die Gleichung (23) die Veränderliche $x$ nicht und man kann sie für $x = x_0$ hinschreiben. Benutzt man also die Anfangswerte $y_0$, $y_0'$; $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_0'$ als Integrationskonstanten $a$, $b$; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so lassen sich die Differentialgleichungen (8) und (9) die aus der Berührungsbedingung folgen, auch ohne Integration der Differentialgleichungen $y'' = \alpha$, $\mathfrak{y}'' = \beta$ hinschreiben.

In der vorhin erwähnten Dissertation hat Herr Koppisch den folgenden Satz bewiesen:

„Soll die zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \omega\,(x\,y\,y')$ gehörige Differentialgleichung $b'' = \varphi\,(a\,b\,b')$ die Form:

$$b'' = \alpha_0\,(a\,,\ b) - 3\,\alpha_1\,(a\,,\ b) . b' + 3\,\alpha_2\,(a\,,\ b) . b'^2 - \alpha_3\,(a\,,\ b) . b'^3$$

haben, so ist notwendig und hinreichend, dass $\omega$ der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(24)\quad -\frac{d^2\,\omega_{y'y'}}{dx^2} + 4\,\frac{d\,\omega_{yy'}}{dx} - 6\,\omega_{yy} - \omega_{y'} . \left(-\frac{d\,\omega_{y'y'}}{dx} + 4\,\omega_{yy'}\right) + 3\,\omega_y . \omega_{y'y'} = 0$$

genügt".

Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich die Differentialgleichung $b'' = \varphi\,(a\,b\,b')$ auf die Form $b'' = 0$ bringen, es gibt also eine Punkttransformation, welche die Differentialgleichung $y'' = \omega\,(x\,y\,y')$ auf die Form $y'' = 0$ bringt.

Die Bedingung (24) muss sich aus (22) für $\alpha = \infty$ ergeben, denn in diesem Falle stellt die Differentialgleichung $y'' = \alpha$ die Punkte der Ebene dar.

Um dies einzusehen, braucht man nur die Relation (22) durch $\gamma^5$ zu dividieren und sodann $\alpha = \infty$, $\gamma = \infty$ zu setzen. Auf diese Weise bekommt man:

$$3 . (\beta_3 . \beta_{22} - 2\,\beta_{33}) + 4 . (\beta_{23}{}^{\mathrm{I}} - \beta_2 . \beta_{23}) + \beta_2 . \beta_{22}{}^{\mathrm{I}} - \beta_{22}{}^{\mathrm{II}} = 0\,,$$

was mit (24) vollkommen übereinstimmt.



Um nun die Bedingung (22) einfacher zu schreiben, möge man setzen:

$$(25)\quad \begin{cases} A = B_{22}{}^{\mathrm{I}} - 4\,\beta_{23}\,, \quad B = \beta_3 . \beta_{22} - 2\,\beta_{33}\,, \\ C = 3\,\beta_3 - 2 . (\beta_2{}^2 + \beta_2{}^{\mathrm{I}}), \quad D = \beta_2 . \beta_3\,, \\ M_\beta = 8\,\beta_2{}^{\mathrm{I}} - (\beta_2{}^2 + 10\,\beta_3)\,, \\ N_\beta = 7\,\beta_2{}^{\mathrm{II}} + 3\,\beta_2 . \beta_2{}^{\mathrm{I}} - 10 . (\beta_3{}^{\mathrm{I}} + \beta_2 . \beta_3) - 2\,\beta_2{}^3\,, \\ P_\beta = C^{\mathrm{II}} - \beta_2 . C^{\mathrm{I}} - 3\,\beta_3 . C + 8\,(D^{\mathrm{I}} - \beta_2 . D), \\ Q_\beta = 3\,B + \beta_2 . A - A^{\mathrm{I}}\,, \\ \gamma\gamma^{\mathrm{II}} - 2\,\gamma^{\mathrm{I}\,2} = \overline{\gamma}\,, \quad (\overline{\gamma}^{\mathrm{I}} = \gamma . \gamma^{\mathrm{III}} - 3\,\gamma^{\mathrm{I}} . \gamma^{\mathrm{II}}), \\ \gamma\overline{\gamma}^{\mathrm{I}} - 3\,\overline{\gamma} . \gamma^{\mathrm{I}} = \overline{\overline{\gamma}}. \end{cases}$$

Dann bekommt die Bedingung (22) die folgende einfachere Form:

$$(26)\quad \begin{aligned} &\gamma^{\mathrm{IV}} . \gamma^3 - 2\,\gamma . (3\,\overline{\gamma}^{\mathrm{I}} . \gamma^{\mathrm{II}} + 4\,\gamma^{\mathrm{I}} . \overline{\gamma}^{\mathrm{I}}) - 24\,\gamma^{\mathrm{I}\,4} + 2\,\beta_2 . \gamma . \overline{\overline{\gamma}} + \gamma^2 . \overline{\gamma} . M_\beta + \gamma^3 . \gamma^{\mathrm{I}} . N_\beta \\ &\qquad + \gamma^4 . P_\beta + \gamma^5 . Q_\beta = 0. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $M_\beta$, $N_\beta$, $P_\beta$, $Q_\beta$ sind nur von $\beta$ abhängig und enthalten die Funktion $\alpha$ nicht.

Vertauscht man nun $\alpha$ und $\beta$ miteinander, so geht:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \gamma & \gamma^{\mathrm{I}} & \gamma^{\mathrm{II}} & \gamma^{\mathrm{III}} & \gamma^{\mathrm{IV}} & \overline{\gamma} & \overline{\gamma}^{\mathrm{I}} & \overline{\overline{\gamma}} \\ \text{über in:} & & & & & & & & \\ & -\gamma & -\gamma^{\mathrm{I}} & -\gamma^{\mathrm{II}} & -\gamma^{\mathrm{III}} & -\gamma^{\mathrm{IV}} & -\overline{\gamma} & \overline{\gamma}^{\mathrm{I}} & -\overline{\overline{\gamma}}. \end{array}$$

Die zweite Bedingung für die Funktionen $\alpha$, $\beta$ lautet daher:

$$(27)\quad \begin{aligned} &\gamma^{\mathrm{IV}} . \gamma^3 - 2\,\gamma . (3\,\overline{\gamma} . \gamma^{\mathrm{II}} + 4\,\gamma^{\mathrm{I}} . \overline{\gamma}^{\mathrm{I}}) - 24\,\gamma^{\mathrm{I}\,4} + 2\,\alpha_2 . \gamma . \overline{\overline{\gamma}} + \gamma^2 . \overline{\gamma} . M_\alpha + \gamma^3 . \gamma^{\mathrm{I}} . N_\alpha \\ &\qquad + \gamma^4 . P_\alpha + \gamma^5 . Q_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Es sei nun eine beliebige infinitesimale Berührungstransformation $Bf$ durch ihre charakteristische Funktion $M\,(x\,y\,y')$ gegeben. Dann ist:

$$Bx = M_2\,, \quad By' = -\,M_1\,, \quad By = y' . M_2 - M\,,$$

$$By'' = -\,[M_{11} + y'' . (M_{12} + M_{21}) + y''^2 . M_{22}]$$

$$B\varphi\,(x\,y\,y') = M_2 . \varphi_1 - (M\varphi_3 + M_1 . \varphi_2)\,.$$

Soll diese infinitesimale Berührungstransformation die beiden Differentialgleichungen $y'' = \alpha\,(x\,y\,y')$; $\mathfrak{y}'' = \beta\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}')$ invariant lassen, so muss sein:

$$B\,(y''-\alpha)=0\,,\qquad B\,(y''-\beta)=0$$

vermöge $y''=\alpha$ bzw. $y''=\beta$. Die Definitionsgleichungen dieser infinitesimalen Transformationen lauten daher:

$$(28)\qquad \begin{cases} M_{11}+\alpha.(M_{12}+M_{21})+\alpha^2.M_{22}+\alpha_1 M_2-(\alpha_3 M+\alpha_2 M_1)=0\,, \\ M_{11}+\beta.(M_{12}+M_{21})+\beta^2.M_{22}+\beta_1 M_2-(\beta_3 M+\beta_2 M_1)=0. \end{cases}$$

Sie bestimmen eine achtgliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, welche mit der allgemeinen projektiven Gruppe vermöge einer Berührungstransformation ähnlich ist. Jedem System von zwei Funktionen $\alpha$, $\beta$, welche den Bedingungen (26), (27) genügen, entspricht eine Gruppe von Berührungstransformationen.

Setzt man:

$$(29)\qquad \alpha=-\frac{1}{\omega^{(1)}}\,,\qquad \beta=-\,\omega^{(2)}\,,$$

so gehen die Gleichungen (28) in die Definitionsgleichungen (II) der achtgliedrigen, mit der allgemeinen projektiven Gruppe ähnlichen Gruppen über. Die Gleichungen (26), (27) liefern bei der Substitution (29) die Integrabilitätsbedingungen für die in den Definitionsgleichungen (II) auftretenden Funktionen $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$. Für jedes System von zwei Funktionen $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, welche den letzteren Integrabilitätsbedingungen genügen, liefern die Gleichungen (II) die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen einer mit der projektiven Gruppe ähnlichen Gruppe. Die letztere kann auch definiert werden als Gruppe von Berührungstransformationen, welche die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(30)\qquad y''+\frac{1}{\omega^{(1)}}=0\,,\qquad y''+\omega^{(2)}=0$$

invariant lassen. Die Berührungstransformation, welche dann die Differentialgleichungen (30) auf die Form $y''=0$, $y''=\infty$ bringt, führt die entsprechende Gruppe von Berührungstransformationen in die allgemeine projektive Gruppe über.

## § 9. Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen aller irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene.

Nach dem Theorem 69 des zweiten Abschnitts (S. 433) der „Transformationsgruppen" ist jede continuirliche irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene $x$, $y$ entweder sechs — oder sieben — oder zehngliedrig und sie ist durch eine Berührungstransformation der Ebene $x$, $y$



mit einer der drei Gruppen ähnlich, deren charakteristische Funktionen der infinitesimalen Transformationen lauten:

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \mathrm{I} & \boxed{1,\quad x,\quad y',\quad x^2,\quad xy',\quad y'^2} \\[2ex] \mathrm{II} & \boxed{1,\quad x,\quad y',\quad y-\tfrac12 xy',\quad x^2,\quad xy',\quad y'^2} \\[2ex] \mathrm{III} & \boxed{\begin{array}{c} 1,\quad x,\quad y',\quad y-\tfrac12 xy',\quad x^2,\quad xy',\quad y'^2 \\ x.(y-\tfrac12 xy'),\quad y'.(y-\tfrac12 xy'),\quad (y-\tfrac12 xy')^2 \end{array}} \end{array}$$

### I.

Die charakteristische Funktion der allgemeinen infinitesimalen Transformation der ersten Gruppe lautet:

$$W=a+b\mathfrak{x}+c\mathfrak{y}'+d\mathfrak{x}^2+e\mathfrak{x}.\mathfrak{y}'+f.\mathfrak{y}'^2.$$

Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen haben folgende Form:

$$(2)\qquad \begin{gathered} W_{12}-W_{21}=0\,, \\ W_{111}=W_{112}=W_{211}=W_{122}=W_{221}=W_{222}=0\,, \\ m_1=0\,,\quad m_2=1\,,\quad m_3=6\,;\quad s=3. \end{gathered}$$

Die Differentialinvarianten gibt die folgende Tabelle an:

$$(3)\qquad \begin{cases} j_1=\mathfrak{x}_1.\bar{\mathfrak{y}}_2'-\mathfrak{x}_2.\mathfrak{y}_1' \\ j_2=\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{11}'\mathfrak{x}_2;\quad j_3=\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{12}'\mathfrak{x}_2;\quad j_4=\mathfrak{x}_{21}\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{21}'\mathfrak{x}_2;\quad j_5=\mathfrak{x}_{22}\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{22}'\mathfrak{x}_2, \\ j_6=\mathfrak{y}_{11}'\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{y}_1';\quad j_7=\mathfrak{y}_{12}'\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{y}_1';\quad j_8=\mathfrak{y}_{21}'\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_{21}\mathfrak{y}_1';\quad j_9=\mathfrak{y}_{22}'\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_{22}\mathfrak{y}_1'. \end{cases}$$

Unter den Differentialinvarianten zweiter Stufe sind nur sechs voneinander unabhängig. Es bestehen nämlich die Relationen:

$$(4)\qquad j_2-j_7+2j_8=0\,;\qquad 2j_3-j_4+j_9=0.$$

Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen aller sechsgliedrigen irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene lauten:

$$\text{(5)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\alpha\,.\,(M_{12}-M_{21})=M_2\,\alpha_1-(M_1\,\alpha_1+M\,\alpha_3)\,,\\
&\alpha\,M_{211}=M_{11}\,.\,(\gamma+\delta)+(M_{12}-2\,M_{21})\,.\,\beta+M_{22}\,.\,\delta-M_2\,\beta_1+M_1\,\beta_2+M\,\beta_3,\\
&\alpha\,M_{212}=M_{11}\,.\,\varepsilon+(2\,M_{12}-M_{21})\,.\,\gamma+2\,M_{22}\,\eta-M_2\,\gamma_1+M_1\,\gamma_2+M\,\gamma_3,\\
&\alpha\,M_{221}=M_{11}\,.\,\varepsilon+(2\,M_{12}-M_{21})\,.\,\delta+M_{22}\,.\,(\eta-\beta)-M_2\,\delta_1+M_1\,\delta_2+M\,\delta_3,\\
&\alpha\,M_{222}=3\,.\,(M_{12}\,\varepsilon-M_{22}\,\gamma)-M_2\,\varepsilon_1+M_1\,\varepsilon_2+M\,.\,\varepsilon_3,\\
&\alpha\,M_{111}=3\,.\,(M_{21}\,\zeta-M_{11}\,\eta)+M_2\,\zeta_1-(M_1\,\zeta+M\,\xi_3),\\
&\alpha\,M_{121}=2\,M_{11}\,.\,\gamma+(2\,M_{21}-M_{12})\,.\,\eta+M_{22}\,.\,\zeta+M_2\,\eta_1-(M_1\,\eta_2+M\,\eta_3)\,.
\end{aligned}\right.$$

Durch einmalige Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ auf die Gleichungen (5) ergeben sich zunächst folgende Integrabilitätsbedingungen für die Funktionen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$:

$$\text{(6)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\alpha_1=\beta+\eta\,,\qquad \alpha_2=\delta-\gamma\,,\\
&2\,(\delta-\gamma)^2+\delta\,.\,(\delta-3\,\gamma)+\varepsilon\,.\,(\beta-\eta)+\alpha\,.\,(\varepsilon_1+\gamma_2-2\,\delta_2)=0,\\
&\zeta\,.\,(3\,\gamma-\delta)-3\,\beta\,.\,(\beta+\eta)-2\,\eta\,\beta+\alpha\,.\,(2\,\beta_1+3\,\eta_1-\zeta_2)=0\,,\\
&\varepsilon\,\zeta-\eta\,\delta+(\beta+\eta)\,.\,(2\,\gamma-3\,\delta)+\alpha\,.\,(\beta_2+\delta_1-2\,\gamma_1)=0\,.
\end{aligned}\right.$$

Die Gruppe (I) ergibt sich aus den Gleichungen (5) für $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta=\eta=0$ in der Form:

$$M_{12}-M_{21}=0;\quad M_{111}=M_{112}=M_{211}=M_{122}=M_{221}=M_{222}=0\,.$$

Die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen der Gruppe (I) lauten:

$$\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_1'=1\,;\quad \mathfrak{x}_{11}\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{11}'\,\mathfrak{x}_2=0\,,\ \ldots\,,\quad \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_{22}'-\mathfrak{x}_{22}\,\mathfrak{y}_1'=0.$$

II.

Im zweiten Falle lautet die allgemeinste charakteristische Funktion:

$$W=a+b\,\mathfrak{x}+c\,\mathfrak{y}'+d\,(\mathfrak{y}-\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}')+e\,\mathfrak{x}^2+f\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}'+g\,\mathfrak{y}'^2.$$

Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen sind dann:

$$W_{111}=W_{112}=W_{211}=W_{122}=W_{221}=W_{222}=0,$$

$$m_1=0,\quad m_2=0,\quad m_3=6;\quad s=3.$$



Die Differentialinvarianten haben die Form:

$$i_1=\frac{\mathfrak{x}_{11}\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{11}'\,\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_2}\,;\quad i_2=\frac{\mathfrak{x}_{12}\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{12}'\,\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_2}\,;\quad i_3=\frac{\mathfrak{x}_{21}\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{21}'\,\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_2}\,;$$

$$i_4=\frac{\mathfrak{x}_{22}\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{22}'\,\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_2}\,;\quad i_5=\frac{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_{11}'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_{11}}{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_2}\,;\quad i_6=\frac{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_{12}'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_{12}}{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_2}\,;$$

$$i_7=\frac{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_{21}'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_{21}}{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_2}\,;\quad i_8=\frac{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_{22}'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_{22}}{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{x}_2}\,.$$

Zwischen ihnen bestehen die folgenden Relationen:

$$i_1-i_6+2\,i_7=0\,;\qquad 2\,i_2-i_3+i_8=0\,.$$

Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen aller siebengliedrigen irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene haben die folgende Form:

$$\text{(7)}\quad\begin{aligned}
&M_{211}=M_{11}\,.\,(\gamma+\delta)-M_{21}\,.\,\beta+M_{22}\,.\,\zeta-M_2\,\beta_1+M_1\,.\,\beta_2+M\,.\,\beta_3\,,\\
&M_{212}=M_{11}\,.\,\varepsilon+M_{12}\,.\,\gamma+2\,M_{22}\,.\,\eta-M_2\,\gamma_1+M_1\,\gamma_2+M\,\gamma_3\,,\\
&M_{221}=M_{11}\,.\,\varepsilon+M_{12}\,.\,\delta+M_{22}\,.\,(\eta-\beta)-M_2\,\delta_1+M_1\,\delta_2+M\,\delta_3\,,\\
&M_{222}=(2\,M_{12}+M_{21})\,.\,\varepsilon-3\,M_{22}\,.\,\gamma-M_2\,\varepsilon_1+M_1\,\varepsilon_2+M\,\varepsilon_3\,,\\
&M_{111}=(M_{12}+2\,M_{21})\,.\,\zeta-3\,M_{11}\,.\,\eta+M_2\,\zeta_1-(M_1\,\zeta_2+M\,\zeta_3),\\
&M_{121}=2\,M_{11}\,\gamma+M_{21}\,\eta+M_{22}\,\zeta+M_2\,\eta_1-(M_1\,\eta_2+M\,\eta_3)\,.
\end{aligned}$$

Die $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$ sind Funktionen von $x$, $y$, $y'$, welche zunächst folgenden Integrabilitätsbedingungen genügen müssen:

$$\text{(8)}\quad\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2-4\,\gamma\,\delta+\delta^2+2\,\beta\,\varepsilon+\varepsilon_1+\gamma_2-2\,\delta_2=0,\\
&2\,\zeta\,.\,(2\,\gamma-\delta)+3\,\eta^2-\beta^2+2\,\beta_1+3\,\eta_1-\zeta_2=0,\\
&\varepsilon\,.\,\zeta-\beta\,.\,\gamma-\delta\,.\,(3\,\eta+\beta)+\beta_2+\delta_1-2\,\gamma_1=0\,.
\end{aligned}\right.$$

Da die Differentialinvarianten $i_1,\ldots,i_8$ zugleich Differentialinvarianten der sechsgliedrigen Gruppe (I) sind, so kann man die Gleichungen (7) als Definitionsgleichungen dritter Stufe aller sechsgliedrigen irreducibeln Gruppen betrachten. Man braucht dann nur die erste der Gleichungen (5) hinzuzufügen, um das System sämtlicher Definitionsgleichungen der irreducibeln sechsgliedrigen Gruppen zu bekommen. Das Entsprechende gilt für die Integrabilitätsbedingungen. Diese Folgerung kann man auch analytisch verifizieren. Setzt man nämlich in die Gleichungen (5) und (6) an Stelle der Funktionen $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$ überall die Produkte: $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$, $\alpha\zeta$, $\alpha\eta$, so bekommt man (abgesehen von der ersten der Gleichungen (5) und der ersten der Gleichungen (6)) genau die Gleichungen (7) und (8). Auf diese Weise erreicht man zugleich eine Rechnungsprobe.

Die Gleichungen (7) und (8) kann man noch etwas übersichtlicher schreiben, indem man $\beta - 2\eta$ an Stelle von $\beta$ einführt, d. h. $\beta + 2\eta$ als neues $\beta$ benutzt. Mit Rücksicht auf die Relation

$$M_{112} = 2M_{121} - M_{211}$$

kann man dann das Gleichungensystem (7) durch das folgende ersetzen:

$$\text{(7 bis)} \quad \left\{ \begin{aligned} M_{112} &= M_{11}.(3\gamma - \delta) + M_{21}.\beta + M_{22}.\zeta + M_2\beta_1 - M_1\beta_2 - M\beta_3, \\ M_{221} &= M_{22}.(3\eta - \beta) + M_{12}.\delta + M_{11}.\varepsilon - M_2\delta_1 + M_1\delta_2 + M\delta_3, \\ M_{212} &= M_{11}.\varepsilon + M_{12}.\gamma + 2M_{22}.\eta - M_2\gamma_1 + M_1\gamma_2 + M\gamma_3, \\ M_{121} &= M_{22}.\zeta + M_{21}.\eta + 2M_{11}.\gamma + M_2\eta_1 - M_1\eta_2 - M\eta_3, \\ M_{222} &= (2M_{12} + M_{21}).\varepsilon - 3M_{22}.\gamma - M_2\varepsilon_1 + M_1\varepsilon_2 + M\varepsilon_3, \\ M_{111} &= (2M_{21} + M_{12}).\zeta - 3M_{11}.\eta + M_2\zeta_1 - M_1\zeta_2 - M\zeta_3. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (7 bis) zerfallen in drei Paare, die so beschaffen sind, dass jede Gleichung eines jeden Paares aus der zweiten Gleichung desselben Paares durch Vertauschung der Indizes 1, 2 und gleichzeitige Vertauschung der Funktionen $\beta$, $\gamma$, $\varepsilon$ mit bzw. $\delta$, $\eta$, $\zeta$ hervorgeht. Dabei ist zu beachten, dass die Operation $f_3 = f_{12} - f_{21}$ bei Vertauschung der Indizes 1, 2 in die Operation $-f_3$ übergeht.

Die Integrabilitätsbedingungen (8) nehmen jetzt die folgende Form an:

$$\text{(8 bis)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(\gamma - \delta)^2 - 2[\gamma\delta + \varepsilon(2\eta - \beta)] + \varepsilon_1 + \gamma_2 - 2\delta_2 = 0, \\ &(\eta - \beta)^2 - 2[\eta\beta + \zeta(2\gamma - \delta)] + \zeta_2 + \eta_1 - 2\beta_1 = 0, \\ &(2\eta\gamma + \zeta\varepsilon - \delta\beta) - (\beta\gamma + \eta\delta) + \beta_2 + \delta_1 - 2(\eta_2 + \gamma_1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Man sieht sofort, dass die beiden ersten der Gleichungen (8 bis) bei der vorhin besprochenen Vertauschung ineinander übergehen, die letzte dagegen in sich selbst.

Fügt man nun zu dem System (7 bis) die Gleichung:

$$\alpha.(M_{12} - M_{21}) = M_2\alpha_1 - (M_1\alpha_2 + M\alpha_3)$$



hinzu, so bekommt man das System der Definitionsgleichungen der sechsgliedrigen irreducibeln Gruppen. Um die entsprechenden Integrabilitätsbedingungen zu erhalten, braucht man nur zu dem Systeme (8 bis) die beiden Gleichungen:

$$(\log \alpha)_1 = \beta - \eta, \qquad (\log \alpha)_2 = \delta - \gamma$$

hinzuzufügen, die bei der erwähnten Vertauschung ebenfalls ineinander übergehen.

Unter denjenigen Integrabilitätsbedingungen der sechs- und siebengliedrigen irreducibeln Gruppen, welche durch zweimalige Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ aus den Gleichungen (7 bis) folgen und sich aus den Integrabilitätsbedingungen (8 bis) durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ nicht ableiten lassen, haben die drei ersten die folgende Form:

$$\beta_{21} - \eta_{12} + [\gamma(2\eta - \beta)]_1 + \delta_2\zeta - (\beta_1\delta + \delta_1\eta + \varepsilon_1\zeta) + 2\zeta.(\varepsilon\eta + \gamma\delta) + (\varepsilon\zeta + \eta\delta).(\eta - \beta) = 0,$$

$$\eta_{11} - \beta_{11} + \zeta_3 + (2\eta_1 - \beta_1)(2\eta - \beta) + \zeta.(\eta_2 + \delta_1) + \zeta_1(\delta - \gamma) - \eta\zeta_2 + 2\eta^3 - \varepsilon.\zeta + 3\gamma\eta\zeta = 0,$$

$$\gamma_{11} + \beta_{12} - 4\eta_3 + [(2\gamma - \delta)(2\eta - \beta)]_1 - (\varepsilon\zeta_1 - 4\varepsilon_1\zeta) + 3\delta.[\eta_1 - \beta_1 + \eta(\eta - \beta)]$$
$$+ 3\zeta.[\delta_2 + 2\gamma\delta + \varepsilon(3\eta - \beta)] = 0.$$

Die drei übrigen ergeben sich aus den hingeschriebenen durch Vertauschung der Indizes 1, 2 und gleichzeitige Vertauschung der Funktiondn $\beta$, $\gamma$, $\varepsilon$ mit bzw. $\delta$, $\eta$, $\zeta$.

## III.

Im dritten Falle lautet die allgemeinste charakteristische Funktion:

$$W = a + b\mathfrak{x} + c\mathfrak{y}' + d(\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{y}') + e\mathfrak{x}^2 + f\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + g\mathfrak{y}'^2$$
$$+ h\mathfrak{x}.(\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{y}') + k\mathfrak{y}'.(\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{y}') + l.(\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}\mathfrak{y}')^2.$$

Die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen sind:

$$\text{(9)} \quad \left\{ \begin{aligned} &W_{111} = W_{121} = W_{212} = W_{222} = 0, \\ &\qquad (W_{112} + W_{211} = 0, \quad W_{221} + W_{122} = 0), \\ &W_{1111} = W_{1112} = W_{2111} = W_{1222} = W_{2221} = W_{2222} = 0, \\ &W_{1122} + W_{2112} = 0, \quad W_{2211} + W_{2112} = 0, \\ &\qquad W_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = 0 \qquad (i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5 = 1,\ 2). \end{aligned} \right.$$

Es ist also:

$$m_1=0, \quad m_2=0, \quad m_3=4, \quad m_4=8, \quad m_5=12; \quad s=5.$$

Mit Hilfe der Relationen zwischen den Operationen vierter und fünfter Stufe lässt es sich beweisen, dass sich die Definitionsgleichungen vierter und fünfter Stufe aus den Gleichungen dritter Stufe allein durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ ableiten lassen.

Die Differentialinvarianten zweiter Stufe lauten:

$$i_2=\frac{\mathfrak{x}_{12}\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{12}'\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\mathfrak{x}_2}, \qquad i_4=\frac{\mathfrak{x}_{22}\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_{22}'\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\mathfrak{x}_2},$$

$$i_5=\frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_{11}'-\mathfrak{y}_1'\mathfrak{x}_{11}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\mathfrak{x}_2}, \qquad i_7=\frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_{21}'-\mathfrak{y}_1'\mathfrak{x}_{21}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2'-\mathfrak{y}_1'\mathfrak{x}_2}.$$

Die Differentialinvarianten höherer Stufe lassen sich aus den letzteren durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$ ableiten.

Die Definitionsgleichungen dritter Stufe der infinitesimalen Transformationen aller zehngliedrigen irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene haben folgende Gestalt (s. (7))

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} M_{212}&=M_{11}.\varepsilon+M_{12}.\gamma+2M_{22}\eta-M_2\gamma_1+M_1\gamma_1+M\gamma_3,\\ M_{222}&=(2M_{12}+M_{21}).\varepsilon-3M_{22}\gamma-M_2\varepsilon_1+M_1\varepsilon_2+M\varepsilon_3,\\ M_{111}&=(M_{12}+2M_{21}).\zeta-3M_{11}\eta+M_2\zeta_1-(M_1\zeta_2+M\zeta_3),\\ M_{121}&=2M_{11}\gamma+M_{21}.\eta+M_{22}.\zeta+M_2\eta_1-(M_1\eta_2+M\eta_3). \end{aligned}\right.$$

Die Definitionsgleichungen vierter und fünfter Stufe ergeben sich aus denjenigen dritter Stufe durch Ausführung der Operationen $f_1$, $f_2$. Die Gleichungen (10) liefern die zehngliedrige Gruppe (III) für $\gamma=\varepsilon=\zeta=\eta=0$ in der Form $M_{212}=M_{222}=M_{111}=M_{121}=0$.

Um die Integrabilitätsbedingungen auf unmittelbarem Wege zu finden, müsste man die Definitionsgleichungen vierter und fünfter Stufe hinschreiben, sodann noch zweimal die Operationen $f_1$, $f_2$ ausführen und die Identitäten zwischen den Operationen sechster und siebenter Stufe benutzen.

Wie im Falle der allgemeinen projektiven Gruppe, kann man auch hier einen anderen Weg einschlagen, der wenigstens angedeutet werden möge.

Nach dem Theorem 71 (S. 439) des zweiten Abschnitts der „Transformationsgruppen" ist die zehngliedrige Gruppe (III) die grösste continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene $x$, $y$, welche die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung $y'''=0$ invariant lässt.



Wenn man nun in die Gleichungen, welche die Transformationen der Gruppe (III) vorstellen, die neuen Veränderlichen durch eine Berührungstransformation einführt, so ergibt sich eine mit der Gruppe (III) ähnliche zehngliedrige irreducible Gruppe, welche dadurch definiert werden kann, dass sie eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form:

$$(11)\qquad y'''=\alpha(xyy')+\beta(xyy').y''+\gamma(xyy').y''^2+\delta(xyy').y''^3$$

invariant lässt. Bezeichnet man also mit $Bf$ eine beliebige infinitesimale Berührungstransiormation, welche der letzteren Gruppe angehört, so muss sein:

$$(12)\qquad B[y'''-(\alpha+\beta y''+\gamma y''^2+\delta y''^3)]=0,$$

vermöge der Gleichung (11). Jede zehngliedrige irreducible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene $x$, $y$ lässt eine gewisse Differentialgleichung von der Form (11) invariant. Die letztere Bedingung (12) muss also die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen aller zehngliedrigen irreducibeln Gruppen ergeben. Es ist in der Tat:

$$(13)\qquad \begin{aligned} By'''=-[&W_{111}+3y''.W_{121}+3y''^2.W_{212}+y''^3.W_{222}\\ &+y'''.(W_{12}+2W_{21}+3y''+W_{22})]. \end{aligned}$$

Die Bedingung (12) ergibt also:

$$\begin{aligned} &W_{111}+3y''.W_{121}+3y''^2.W_{212}+y''^3.W_{222}+(W_{12}+2W_{21}\\ &+3y''W_{12}).(\alpha+\beta y''+\gamma y''^2+\delta y''^3)+\alpha_1.W_2-\alpha_2.W_1-\alpha_3.W\\ &+y''.(\beta_1W_2-\beta_2W_1-\beta_3W)+y''^2.(\gamma_1W_2-\gamma_2W_1-\gamma_3.W)\\ &+y''^3.(\delta_1W_2-\delta_2W_1-\delta_3W)-(\beta+2\gamma y''+3\delta y''^2).[W_{11}\\ &+y''.(W_{12}+W_{21})+y''^2.W_{22}]\equiv 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung muss für alle $y''$ identisch bestehen; sie zerfällt also in die vier folgenden Gleichungen:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &W_{111}+\alpha.(W_{12}+2W_{21})-\beta.W_{11}+\alpha_1W_2-(\alpha_2W_1+\alpha_3W)=0,\\ &3W_{121}+3\alpha.W_{22}+\beta.W_{21}-2\gamma.W_{11}+\beta_1W_2-(\beta_2W_1+\beta_3W)=0\\ &3W_{212}+2\beta.W_{22}-\gamma.W_{12}-3\delta.W_{11}+\gamma_1W_2-(\gamma_2W_1+\gamma_3.W)=0,\\ &W_{222}+\gamma.W_{22}-\delta.(2W_{12}+W_{21})+\delta_1W_2-(\delta_2W_1+\delta_3.W)=0. \end{aligned}\right.$$

Schreibt man in den Gleichungen (14) an Stelle von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ bzw. $-\zeta$, $-3\eta$, $3\gamma$, $\varepsilon$, so bekommt man genau die vorhin gefundenen Gleichungen (10). Die durch die Gleichungen (10) bestimmte zehngliedrige Gruppe lässt also die folgende Differentialgleichung:

$$y''' + \zeta(xyy') + 3\eta(xyy') . y'' - 3\gamma(xyy') . y''^2 - \varepsilon(xyy') . y''^3 = 0$$

invariant.

Die vorstehenden Entwickelungen zeigen zugleich, dass die Aufgabe, die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen (10) zu finden, auf die folgende Aufgabe hinauskommt:

Die Bedingungen zu finden, denen die Funktionen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ der Veränderlichen $x$, $y$, $y'$ genügen müssen, damit es eine Berührungstransformation gibt, welche die Differentialgleichung:

$$y''' = \alpha + \beta . y'' + \gamma y''^2 + \delta . y''^3$$

auf die Form $y''' = 0$ zurückführt.

In Anschluss daran möge erwähnt werden, dass Herr Karl Wünschmann in seiner Inaugural-Dissertation: „Über Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen" (Greifswald, 1905) den folgenden Satz ohne Beweis ausgesprochen hat (S. 13):

„Eine Differentialgleichung dritter Ordnung lässt sich dann und nur dann auf die Form $y''' = 0$ bringen (durch Berührungstransformation), wenn $y'''$ eine ganze Funktion dritten Grades von $y''$ ist, also die Form hat:

$$y''' = \chi_0(xyy') + 3\chi_1(xyy') . y'' + 3\chi_2(xyy') . y''^2 + \chi_3(xyy') . y''^3,$$

und wenn zugleich die Bedingung für die Berührung zweier benachbarter Integralkurven eine Monge'sche Gleichung zweiten Grades ist".

---

ALFRED ROSENBLATT.

# Sur les variétés algébriques à trois dimensions.

O rozmaitościach algebraicznych trójwymiarowych.

Quand on passe des surfaces algébriques aux variétés algébriques à un nombre plus grand que deux de dimensions, alors le nombre des invariants par rapport aux transformations birationnelles augmente vite avec le nombre de dimensions. Étant données les variétés à $m$ dimensions on est en embarras, lesquels de ses invariants on doit prendre comme éléments de classification, pour apporter de l'ordre dans la multitude des cas possibles à priori. Mais, si l'on procède par étapes, en employant d'abord, pour étudier les invariants des variétés $V_3$ à trois dimensions, les inégalités et les égalités connues qui existent entre les invariants des surfaces algébriques, en se servant ensuite des relations obtenues de cette façon entre les invariants des variétés algébriques $V_3$ pour étudier les variétés algébriques supérieures $V_4$ etc., alors non seulement le nombre des cas possibles à priori pour les variétés à un nombre $m$ quelconque de dimensions se trouve très réduit, mais on trouve aussi vite le chemin à suivre pour classifier ces variétés d'une manière naturelle, analogue à celle qui est le résultat de longues recherches concernant les surfaces algébriques.

1. Donc il faut d'abord commencer par tirer parti des égalités et inégalités bien connues de la théorie des surfaces algébriques pour étudier les variétés à trois dimensions. Déjà M. Noether, dans un travail classique[1], a jeté les fondements de cette étude en introduisant les invariants géométriques. D'abord on a le nombre des variétés adjointes découpant sur la variété donnée les surfaces canoniques $K$. Le nombre $p$ de ces variétés adjointes d'ordre $n-5$, si la variété donnée est, dans un $R_4$, de l'ordre $n$,

[1] „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde". Zweiter Aufsatz. Mathematische Annalen. 8, 1874.