au moins triples. (La démonstration est basée sur le théorème de M. Phragmén).

Théorème II. Toute ligne cantorienne plane peut être représentée par une courbe continue, définie sur un ensemble lineaire fermé, qui ne possède que de points simples ou doubles.

Ces théoremes conduisent à une definition de la dimension d'un ensemble fermé, qui pour le cas du plan coincide avec celle de M. Cantor: un ensemble fermé est de dimension d $(d \geqq 0)$, s'il existe une courbe continue, définie sur un ensemble linéaire, fermé et punctiforme, qui représente l'ensemble donné et dont tous les points multiples sont d'ordre $d+1$ au plus, tandis que toute courbe de la dite espèce possède de points multiples d'ordre $d+1$ au moins.

W. SIERPIŃSKI.

O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$.

Sur la relation entre l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ et la continuité de la fonction $f(x)$.

1. Celem niniejszej pracy jest bliższe zbadanie związku, jaki zachodzi między istnieniem dla danej funkcyi (zmiennej rzeczywistej) $f(x)$ i danej wartości x_0 granicy $\lim\limits_{\Delta x=0} \left(\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right)_{x=x_0}$, czyli granicy

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2}, \tag{1}$$

a ciągłością funkcyi $f(x)$ dla wartości $x = x_0$.

Pewne ciekawe twierdzenia, dotyczące granicy (1), podał A. Harnack [1]. Zawdzięczamy mu np. twierdzenie, że jeżeli istnieje pochodna $f''(x_0)$, to istnieje też granica (1) i jest równa $f''(x_0)$ [2]. Twierdzenie to, jak zauważył Harnack, nie daje się odwrócić. Np. dla funkcyi $f(x)$, określonej przez warunki:

$$f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}, \quad \text{dla} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0,$$

[1]) Die allgemeine Sätze über den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen. Math. Annalen **23** (1884), p. 224—284, oraz: Elemente der Diff. und Int. Rechn. Lipsk 1884.

[2]) Math. Annalen **23**, p. 260, albo: E. Pascal: Eserzicii critici di calcolo diff. e int. Milano 1909, p. 124 lub w przekładzie polskim, Warszawa 1909, p. 100.

istnieje dla $x_0 = 0$ granica (1) i jest równa zeru, natomiast $f''(0)$ nie istnieje; istnieje jednak pierwsza pochodna $f'(0)$. Dla funkcyi zaś $f(x) = |x|$, jak łatwo widzieć, dla $x_0 = 0$ granica (1) jest zerem, natomiast nie istnieje już nawet $f'(0)$.

W obu wspomnianych przykładach funkcya $f(x)$ jest ciągła.

2. Podamy obecnie przykład funkcyi $f(x)$, nieciągłej dla wartości x_0, dla której istnieje granica (1). Określimy w tym celu funkcyę $f(x)$ w następujący sposób:

Jeżeli x jest liczbą formy

$$\pm \frac{2^k}{3^n}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{cases} k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \dots . \\ n = 1, \ 2, \ 3, \dots , \end{cases} \tag{2}$$

to

$$f(x) = 3^n x,$$

dla wszystkich zaś innych rzeczywistych x:

$$f(x) = 0.$$

(Jasnem jest, że wartość funkcyi $f(x)$ będzie przez powyższe warunki wyznaczona jednoznacznie przy wszelkiem rzeczywistem x, gdyż każda liczba rzeczywista daje się conajwyżej w jeden tylko sposób przedstawić w postaci (2)).

Powiadam, że określona w powyższy sposób funkcya $f(x)$ będzie przy wszelkiem rzeczywistem x spełniała równanie funkcyjne:

$$f(2x) = 2f(x). \tag{3}$$

W samej rzeczy, jeżeli liczba rzeczywista x nie jest formy (2), to liczba $2x$ również nie może być formy (2) i, wobec definicyi naszej funkcyi, mamy wtedy: $f(x) = 0$, $f(2x) = 0$; równanie (3) jest zatem wtedy spełnione.

Jeżeli zaś

$$x = \pm \frac{2^k}{3^n}, \qquad (k \text{ całkowite, } n \text{ naturalne})$$

to $2x = \pm \frac{2^{k+1}}{3^n}$, gdzie wykładnik $k+1$ znowu jest całkowity; w myśl definicyi naszej funkcyi będzie więc:

$$f(x) = 3^n x, \qquad f(2x) = 3^n . 2x,$$

skąd znowu wynika wzór (3).

Funkcya $f(x)$ spełnia więc równanie (3). Okażemy teraz, że dla $x_0 = 0$ jest oną nieciągła. W samej rzeczy, połóżmy

$$x_n = \frac{1}{3^n};$$

będzie, w myśl definicyi naszej funkcyi:

$$f(x_n) = 3^n x_n = 1,$$

zatem

$$\lim_{n=\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n=\infty} f(x_n) = 1,$$

natomiast stale $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$. Funkcya $f(x)$ posiada więc dla $x = 0$ nieciągłość 2-go rodzaju.

Wobec wzoru (3), mamy przy wszelkiem rzeczywistem h:

$$f(2h) - 2f(h) = 0,$$

a ponieważ $f(0) = 0$, więc mamy dla $x_0 = 0$ przy wszelkiem h:

$$f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) = 0,$$

skąd wynika, że granica (1) istnieje i jest równa zeru.

Istnienie granicy (1) nie pociąga więc za sobą ciągłości funkcyi $f(x)$ dla $x = x_0$.

Badana przez nas funkcya nie jest nawet ograniczona, gdyż np.

$$f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 2^n,$$

przy wszelkiem naturalnem n.

3. Zauważymy, że możnaby nawet zbudować funkcyę $f(x)$, dla której istnieje każda z granic

$$\lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta^p f}{\Delta x^p}\right)_{x = x_0}, \qquad (p = 2, 3, 4, \dots) \tag{4}$$

pomimo że sama funkcya nie jest ciągła dla $x = x_0$. W samej rzeczy, określimy funkcyę $f(x)$ jak następuje:

Jeżeli x jest liczbą formy $\frac{w}{e^n}$, gdzie w jest liczbą wymierną $\neq 0$, n — liczbą naturalną, to

$$f(x) = e^n x,$$

w przeciwnym zaś razie

$$f(x) = 0.$$

(Jasnem jest, wobec przestępności liczby e, że żadna liczba rzeczywista różna od zera nie daje się dwoma różnemi sposobami przedstawić w postaci $\frac{w}{e^n}$).

Powiadam, że będzie przy wszelkiem naturalnem $p > 1$:

$$(\Delta^p f)_{x=0} = 0, \tag{5}$$

t. zn. przy wszelkiem rzeczywistem h i naturalnem $p > 1$:

$$f(ph) - \binom{p}{1} f((p-1)h) + \ldots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p-1} f(h) + (-1)^p f(0) = 0, \tag{6}$$

gdzie $\binom{p}{k}$ oznacza spółczynnik Newtonowski:

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2\ldots.k}.$$

W samej rzeczy, jeżeli h nie jest formy $\frac{w}{e^n}$ (w wymierne $\neq 0$, n — naturalne), to nie jest też tej formy żadna całkowita wielokrotność liczby h i wówczas, w myśl definicyi naszej funkcyi, każdy ze składników lewej strony wzoru (6) jest zerem.

Załóżmy teraz, że $h = \frac{w}{e^n}$, gdzie w jest wymierne $\neq 0$, n — naturalne. Będzie więc przy wszelkiem naturalnem k, $kh = \frac{kw}{e^n} = \frac{w_k}{e^n}$, gdzie w_k jest znowu liczbą wymierną $\neq 0$, zatem, w myśl definicyi naszej funkcyi: $f(kh) = e^n kh$, a że oczywiście $f(0) = 0$, więc lewa strona wzoru (6) przyjmuje teraz postać:

$$e^n h \left[p - \binom{p}{1}(p-1) + \binom{p}{2}(p-2) - \ldots. + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} \right]. \tag{7}$$

Powiadam, że szereg, wypisany w nawiasie, jest zerem dla $p>1$. W samej rzeczy, mamy przy wszelkiem rzeczywistem x i naturalnem p:

$$(x-1)^p = x^p - \binom{p}{1} x^{p-1} + \binom{p}{2} x^{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} x + (-1)^p,$$

skąd, biorąc pochodne względem x po obu stronach:

$$p(x-1)^{p-1} = p x^{p-1} - \binom{p}{1}(p-1) x^{p-2} + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1};$$

zatem, kładąc $x = 1$, otrzymujemy dla $p>1$:

$$0 = p - \binom{p}{1}(p-1) + \ldots. + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1},$$

c. b. d. o.

Wyrażenie (7) jest więc zerem i wzór (6) znowu zachodzi. Udowodniliśmy więc wzór (5), skąd wynika, że dla $x_0 = 0$ istnieje każda z granic (4) i jest równa zeru. Funkcya nasza jest atoli dla $x = 0$ nieciągła, a nawet w otoczeniu zera nie jest ograniczona, gdyż np.

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0, \quad \text{zaś} \quad f\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n\right) = 2^n.$$

4. Podane w poprzednich artykułach przykłady funkcyj nieciągłych, dla których istnieje granica (1), były zarazem funkcyami, które nie są ograniczone w otoczeniu punktu x_0. Zachodzi wobec tego pytanie, czy można zbudować funkcyę ograniczoną, nieciągłą dla danej wartości $x = x_0$, dla której istnieje granica (1)?

Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie:

Jeżeli dla danej funkcyi $f(x)$, ograniczonej w otoczeniu punktu x_0 istnieje granica (1), to funkcya ta jest dla wartości x_0 ciągła. Twierdzenie to jest natychmiastowym wnioskiem z następującego twierdzenia:

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest ograniczona w otoczeniu punktu x_0 i jeżeli

$$\lim_{h=0} (f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)) = 0, \tag{8}$$

to funkcya $f(x)$ jest ciągła dla $x = x_0$.

Dowód. Połóżmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \varphi(h); \tag{9}$$

będzie więc

$$f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) = \varphi(2h) - 2\varphi(h)$$

i warunek (8) daje:

$$\lim (\varphi(2h) - 2\varphi(h)) = 0, \tag{10}$$

zatem też:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t=0} \left[\varphi(t) - 2\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\right] = 0, \\ \lim\limits_{t=0} \left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{t}{2^2}\right)\right] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lim\limits_{t=0} \left[\varphi\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) - 2\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right] = 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Mnożąc drugie z równań (11) przez 2, trzecie przez $2^2, \ldots$, ostatnie przez 2^{n-1} i dodając stronami, otrzymujemy przy wszelkiem naturalnem n:

$$\lim_{t=0}\left[\varphi(t)-2^n\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]=0,$$

zatem, dla $|t|<\delta_n$, gdzie δ_n oznacza liczbę dodatnią zależną jedynie od n:

$$\left|\varphi(t)-2^n\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right|<1. \tag{12}$$

Z założenia, że funkcya $f(x)$ jest ograniczona w otoczeniu punktu x_0, wynika, że istnieje takie $\delta_0>0$ oraz takie M, iż dla $|t|<\delta_0$:

$$|f(x_0+t)|<M,$$

zatem, w myśl (9):

$$|\varphi(t)|<2M.$$

Będzie więc, wobec (12), przy wszelkiem t, mniejszem bezwzględnie od każdej z liczb δ_n i δ_0:

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right|<\frac{2M+1}{2^n}. \tag{13}$$

Niech teraz ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy n tak wielkie, iżby było

$$\frac{2M+1}{2^n}<\varepsilon \tag{14}$$

i oznaczmy przez δ niewiększą z liczb $\frac{\delta_n}{2^n}$ i $\frac{\delta_0}{2^n}$.

Dla

$$|h|<\delta \tag{15}$$

będzie jednocześnie

$$|h|<\frac{\delta_n}{2^n} \quad \text{oraz} \quad |h|<\frac{\delta_0}{2^n};$$

kładąc

$$t=2^n h, \tag{16}$$

będziemy więc mieli dla t nierówności

$$|t|<\delta_n \quad \text{oraz} \quad |t|<\delta_0,$$

które pociągają za sobą nierówność (13), czyli, wobec (16) i (14), nierówność:

$$|\varphi(h)|<\varepsilon. \tag{17}$$

Dowiedliśmy więc, że do każdego dodatniego ε można dobrać takie dodatnie δ, iżby nierówność (15) pociągała za sobą nierówność (17), czyli, wobec (9), nierówność

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Dowodzi to, że funkcya $f(x)$ jest ciągła dla $x=x_0$, c. b. d. o.

Ciekawem byłoby wiedzieć, czy dla funkcyi $f(x)$, ograniczonej w otoczeniu punktu x_0, warunek

$$\lim_{\Delta x=0}(\Delta^3 f(x))_{x=x_0}=0,$$

czyli warunek

$$\lim_{h=0}[f(x_0+3h)-3f(x_0+2h)+3f(x_0+h)-f(x_0)]=0$$

również pociąga za sobą ciągłość funkcyi dla $x=x_0$. Zagadnienie to uważam za bardzo trudne.

5. Wobec dowiedzionego w poprzednim artykule twierdzenia, że istnienie granicy (1) pociąga za sobą dla funkcyi ograniczonej jej ciągłość w punkcie x_0, godnem uwagi jest, że istnienie granicy

$$\lim_{h=0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}\text{ [1]} \tag{18}$$

nie pociąga za sobą, nawet dla funkcyi ograniczonej, jej ciągłości w punkcie x_0. Np. dla funkcyi, określonej przez warunki:

$$f(x)=1, \quad \text{dla} \quad x>0,$$

$$f(x)=-1 \quad \text{dla} \quad x<0,$$

$$f(0)=0,$$

dla $x_0=0$ granica (18), jak łatwo widzieć, istnieje i jest zerem, zaś sama funkcya jest nieciągła dla $x=0$, ale ograniczona dla wszystkich wartości rzeczywistych x.

Istnienie granicy (18) nie pociąga więc za sobą istnienia granicy (1); ale i naodwrót, gdyż np. dla funkcyi $f(x)=|x|$ istnieje granica (1) dla $x_0=0$, ale nie istnieje granica (18). Zachodzi jednak

Twierdzenie. *Jeżeli dla danej funkcyi $f(x)$ i danej wartości $x=x_0$ istnieją obie granice (1) i (18), to są one sobie równe.*

Dowód. Załóżmy, że dla danej funkcyi $f(x)$ i danej wartości x_0 istnieją obie granice (1) i (18) i połóżmy:

$$\lim_{h=0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=A, \tag{19}$$

[1]) Jest to tak zwana uogólniona druga pochodna (Schwarza).

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = B. \tag{20}$$

Wobec (19) możemy też napisać:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0-h) + f(x_0)}{h^2} = A, \tag{21}$$

zaś, wobec (20):

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+2h) - 2f(x) + f(x_0-2h)}{h^2} = 4B. \tag{22}$$

Wobec (22) i (20) mamy:

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0) + f(x_0-2h)}{h^2} - 2\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}\right] = 2B,$$

co możemy też napisać w postaci:

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2} + \frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0-h) + f(x_0)}{h^2}\right] = 2B,$$

co, wobec (19) i (21) daje:

$$2A = 2B,$$

skąd $A = B$, c. b. d. o.

6. Opierając się na znanym pewniku Zermelo[1], dowiódł G. Hamel[2], że istnieją funkcye, nieciągłe dla każdej wartości zmiennej, spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Dla każdej takiej funkcyi będzie przy wszelkiem x i wszelkiem h, jak łatwo widzieć:

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = 0,$$

jako też:

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = 0,$$

zatem granice (1) i (18) istnieją przy wszelkiem x i są zerem.

[1]) Pewnik ten brzmi: „Dla każdej mnogości zbiorów Z, nie posiadających elementów wspólnych, istnieje mnogość M, zawierająca po jednym i tylko jednym elemencie z każdego ze zbiorów Z" (Zob. Math. Ann. **59**, p. 517 oraz **65**, p. 266).

[2]) Math. Ann. **60**, p. 459—462.

Istnieją więc funkcye wszędzie nieciągłe, dla których granice (1) i (18) są zerem przy wszelkiem x.

Dla funkcyj Hamela będzie też przy wszelkiem x, h, k:

$$f(x+k+h) - f(x+k) - f(x+h) + f(x) = 0,$$

zatem

$$\lim_{k=0} \lim_{h=0} \frac{f(x+k+h) - f(x+k) - f(x+h) + f(x)}{kh} = 0$$

przy wszelkiem rzeczywistem x, pomimo że pochodna $f''(x)$ nie istnieje dla żadnej wartości x.

Lwów, w listopadzie 1913 r.