Termoelektryczność. Badania termoelektrycznych własności rodu i irydu wykonane zostały metodą, poprzednio zastosowaną do metali alkalicznych. Siłę termoelektryczną mierzono w stosunku do miedzi i odnoszono następnie do ołowiu. Jeden kontakt utrzymywano przy 0°, drugi zaś przy +100° —78°,3 i —186°.

Otrzymaliśmy na siłę termoelektryczną w stosunku do ołowiu liczby następujące wyrażone w mikrovoltach:

Temperatura	Siła termoelektryczna	
	rod — ołów	Iryd — ołów
od 0° do +100°	+219	+237
od 0° do — 78°,3	— 168	—195
od 0° do —186°	— 361	—461

Widzimy, że krzywa zdolności termoelektrycznej rodu zbliża się bardzo znacznie do linii ołowiu poniżej —80°. Zdolność termoelektryczna irydu mało się zmienia pomiędzy +100° i —186°.

Pomiędzy +100° i —80° można wyrazić zdolność termoelektryczną rodu i irydu przez wzory następujące:

$$\text{dla rodu} \quad \frac{dE}{dt} = +2{,}17 + 0{,}0005\, t,$$

$$\text{,, irydu} \quad \frac{dE}{dt} = +2{,}44 - 0{,}0014\, t.$$

Zdolność termoelektryczna tych metali pomiędzy +100° i —186° może być wyrażona tylko przez wzory drugiego stopnia.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

O punktach wielokrotnych krzywych wypełniających obszar płaski.

(Sur les points multiples des courbes qui remplissent une aire plane).

Zagadnienie, stanowiące przedmiot pracy niniejszej, zostało mi zakomunikowane przez prof. Sierpińskiego. W literaturze występuje ono po raz pierwszy w pracy H. Lebesgue'a[1], który wygłosił twierdzenie następujące:

1) każda krzywa, wypełniająca obszar n-wymiarowy, posiada punkty wielokrotne rzędu conajmniej $n+1$, natomiast:

2) istnieją krzywe, wypełniające obszary n-wymiarowe i nie posiadające punktów wielokrotnych rzędu wyższego niż $n+1$.

Twierdzenie to jest niewątpliwie prawdziwe, dowód jednak podany przez Lebesgue'a jest niezupełnie wystarczający[2].

§ 1 niniejszej pracy zawiera dowód pierwszej części twierdzenia Lebesgue'a dla $n=2$, t. j. dla obszarów płaskich[3]. W § 2 podaję pewne wnioski oraz uwagi, dotyczące arytmetyzacyi continuów płaskich nigdziegęstych.

§ 1.

Niechaj będzie E dowolna mnogość domknięta, zawarta w odcinku 0-1.

[1]) Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n+p$ dimensions. Math. Ann. **70**, p. 166—168.

[2]) Por. Brouwer, Math. Ann. **71**, p. 305.

[3]) Dowód ten podałem w swojej tezie doktorskiej (Lwów 1913, niedruk.). Drugą część twierdzenia Lebesgue'a (również dla $n=2$) udowodnił G. Polya (Bull. Acad. Crac. Czerwiec 1913). Por. zresztą: Hilbert, Math. Ann. **38**.

Twierdzenie 1.

Załóżmy, że krzywa ciągła:

$$J: \begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t) \end{cases} \quad t \subset E\,^{1)} \tag{1}$$

wypełnia obszar A; powiadam, że krzywa J posiada wszędziegęstą mnogość punktów conajmniej potrójnych. Innemi słowy, jeżeli punkt (x_0, y_0) zawarty jest w A, wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ znaleść można taki punkt (x_0', y_0'), że:

$$\sqrt{(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2} \leqq \varepsilon \tag{2}$$

a równania:

$$\begin{aligned} x_0' &= f_1(t), \\ y_0' &= f_2(t) \end{aligned} \tag{3}$$

będą miały przynajmniej trzy różne rozwiązania. (W dowodzie można się ograniczyć do punktów (x_0, y_0), leżących wewnątrz A).

Oznaczmy (dla $h > 0$) odpowiednio przez $E(t_0, h)$ i $E_c(t_0, h)$ te punkty mnogości E, które spełniają nierówności:

$$|t - t_0| \leqq h, \tag{4}$$

względnie:

$$|t - t_0| \geqq h, \tag{5}$$

a przez $J(t_0, h)$, względnie $J_c(t_0, h)$ krzywe:

$$J(t_0, h): \begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t); \end{cases} \quad t \subset E(t, h) \tag{6}$$

$$J_c(t_0, h): \begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t) \end{cases} \quad t \subset E_c(t, h). \tag{7}$$

I. Załóżmy, że (x_0, y_0) jest pojedyńczym punktem krzywej J. Istnieje wówczas jedna i tylko jedna wartość t_0, dla której:

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(t_0), \\ y_0 &= f_2(t_0). \end{aligned} \tag{8}$$

[1]) $t \subset E$ znaczy że liczba t należy do zbioru E.

Można wyznaczyć h tak małe, że punkty krzywej $J(t_0, h)$ będą wewnątrz obszaru A, przytem w odległości nie większej niż ε od (x_0, y_0). Z drugiej strony, dla każdego h zawiera $J(t_0, h)$ punkty wewnętrzne; takim punktem wewnętrznym jest mianowicie (x_0, y_0). Istotnie, w przeciwnym razie krzywa $J_c(t_0, h)$ zawierałaby punkty dowolnie blizkie punktu (x_0, y_0), a więc (ponieważ jest to krzywa ciągła) i punkt (x_0, y_0), co jest niemożliwe, o ile punkt ten jest pojedyńczym.

Krzywa więc $J(t_0, h)$ wypełnia pewien obszar B_h, zawarty wewnątrz A. Brzeg tego obszaru oznaczmy przez G_h. Punkty mnogości G_h są punktami skupienia dla punktów krzywych $J(t_0, h)$ i $J_c(t_0, h)$, leżą więc na obu tych krzywych i są, z wyjątkiem może punktów:

$$(f_1(t_0 - h),\ f_2(t_0 - h)); \quad (f_1(t_0 + h),\ f_2(t_0 + h))\,^{1)} \tag{9}$$

punktami podwójnemi dla J. Z drugiej strony znane twierdzenie Phragmén'a orzeka, że brzeg obszaru zawiera zawsze continuum[2]). Można tym sposobem znaleść continuum C_h, zawarte w G_h i nie zawierające punktów (9).

Gdybyśmy teraz udowodnili, że C_h zawiera taki punkt (x_0', y_0'), który jest przynajmniej podwójnym już dla $J(t_0, h)$, wówczas bylibyśmy u celu, gdyż dla J punkt ten byłby conajmniej potrójnym, a dla h dostatecznie małego zachodzić będzie nierówność (2). Załóżmy, że tak nie jest, i oznaczmy przez F_h te punkty mnogości $E(t_0, h)$, w których $J(t_0, h)$ przechodzi przez C_h. F_h jest mnogością domkniętą, przytem nigdziegęstą na $E(t_0, h)$[3]), tembardziej więc na odcinku (0-1), a więc punktokształtną. Istniałoby tym sposobem jedno-jednoznaczne odwzorowanie mnogości punktokształtnej F_h na continuum C_h, co jest niemożliwe. Założenie więc, że wszystkie punkty C_h są pojedyńczemi dla $J(t_0, h)$ i — co za tem idzie — tylko podwójnemi dla J, doprowadza nas do sprzeczności, c. b. d. o.

II. Załóżmy teraz, że (x_0, y_0) jest punktem podwójnym krzywej J. Niechaj będzie:

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(t_0), & y_0 &= f_2(t_0); \\ x_0 &= f_1(t_1), & y_0 &= f_2(t_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Rozpatrujemy dwie krzywe: $J(t_0, h)$ i $J(t_1, h)$, zakładając przytem:

[1]) O punktach tych może być mowa tylko o tyle, o ile $t_0 - h$ i $t_0 + h$ należą do E.

[2]) Istnieją bardziej precyzyjne sformułowania tego twierdzenia; tu wystarcza podane w tekście (por. Janiszewski, Prace mat.-fiz. t. XXVI).

[3]) Wynika to z założenia, że punkty C_h mają być pojedyńczemi dla $J(x_0, h)$, oraz z faktu, że są one punktami skupienia punktów należących do B_h, lecz nie do C_h.

$$h < \frac{|t_1 - t_0|}{2}. \tag{11}$$

Rozumując jak poprzednio, możemy udowodnić, że jedna przynajmniej z tych krzywych wypełnia pewien obszar, wewnątrz którego leży punkt (x_0, y_0); ponieważ (x_0, y_0) jest dla obu tych krzywych punktem pojedyńczym, więc zagadnienie sprowadza się do poprzedniego.

Tym sposobem twierdzenie I jest udowodnione.

---

§ 2.

Twierdzenie 2.

Każda krzywa Cantora, to znaczy każde continuum płaskie nigdziegęste, można przedstawić przez krzywą ciągłą:

$$J: \begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \end{cases} \quad t \subset E \tag{1}$$

posiadającą conajwyżej punkty podwójne (E oznacza mnogość domkniętą, zawartą w przedziale $0 \leqq t \leqq 1$).

Udowodnimy powyższe twierdzenie przez podanie konstrukcyi krzywej.

Niech będzie C dana krzywa Cantora, K dowolny kwadrat, wewnątrz którego leży C. Dobieramy spółrzędne x, y tak, aby kwadrat ów miał wierzchołki: (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

Istnieje zbiór przeliczalny

$$x_1, \quad x_2 \ldots, \tag{2}$$

zawarty wewnątrz odcinka $0 \leqq x \leqq 1$, wszędziegęsty na tym odcinku i taki, że mnogość punktów wspólnych krzywej C i prostej

$$x = x_n \tag{3}$$

jest punktokształtna.

Istnienie zbioru (2) jest wnioskiem z następującego twierdzenia:

Jeżeli C jest krzywą Cantora, wówczas mnogość prostych dowolnego pęku, mających z krzywą C odcinek wspólny, jest zbiorem 1-ej kategoryi (t. zn. sumą przeliczalnej mnogości zbiorów domkniętych nigdziegęstych).[1]

[1]) Por. Zoretti: Acta math. **36**, p. 265—268. Zoretti udowadnia tylko szczególny przypadek tego twierdzenia; uogólnienie nie wymaga jednak nowych metod i nie przedstawia żadnych trudności.

Oznaczmy rzut prostokątny zbioru punktów wspólnych krzywej C i prostej (3) na oś Y przez P_n. Suma wszystkich P_n jest na odcinku $0 \leqq y \leqq 1$ — pierwszej kategoryi, istnieje więc zbiór przeliczalny

$$y_1, \quad y_2 \ldots, \tag{4}$$

zawarty wewnątrz wspomnianego odcinka, wszędziegęsty na nim i nie mający punktów wspólnych z mnogościami P_n. Niechaj będzie V zbiór punktów (x_n, y_m), n, $m = 1, 2 \ldots$ Zbiór ten nie ma punktów wspólnych z krzywą C.

Uważajmy teraz zmienne pomocnicze u, v. Krzywa Peano[1]:

$$P: \begin{cases} u = \varphi_1(t), \\ v = \varphi_2(t), \end{cases} \quad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{5}$$

wypełniająca kwadrat Q: $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$, posiada wewnątrz kwadratu przeliczalną mnogość W punktów wielokrotnych rzędu wyższego niż 2. Niechaj będą:

$$u_1, \quad u_2 \ldots, \tag{6}$$

$$v_1, \quad v_2 \ldots, \tag{7}$$

odpowiednio zbiory odciętych i rzędnych (każda raz tylko liczona) punktów mnogości W. Pomiędzy x i u z jednej strony, a y i v z drugiej, można, na podstawie znanych twierdzeń, ustalić odpowiedniość jedno-jednoznaczną:

$$\begin{matrix} x = x(u), & u = u(x); & 0 \leqq u \leqq 1, & 0 \leqq v \leqq 1 \\ y = y(v), & v = v(y). & 0 \leqq u \leqq 1, & 0 \leqq y \leqq 1, \end{matrix} \tag{8}$$

w której zbiorom (6) i (7) odpowiadają zbiory (2) i (4), i odwrotnie. Wzory (8) ustalają zarazem odpowiedniość jedno-jednoznaczną między kwadratami K i Q. Mnogości W odpowiada przytem pewna podmnogość zbioru V. Krzywa tedy:

$$\begin{matrix} x = x(\varphi_1(t)) = f_1(t), \\ y = y(\varphi_3(t)) = f_2(t) \end{matrix} \quad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{9}$$

wypełnia kwadrat K. Jej punkty wielokrotne rzędu wyższego niż 2 zawarte są w zbiorze V, a więc leżą nazewnątrz C. Oznaczmy przez E mnogość wartości t, dla których krzywa (9) przechodzi przez C. Krzywa

[1]) t. zn. ta specyalna krzywa, wypełniająca kwadrat, której konstrukcyę podał Peano.

$$J: \begin{matrix} x = f_1(t), \\ y = f_2(t) \end{matrix} \qquad t \subset E \tag{10}$$

przedstawia continuum C i ma conajwyżej punkty podwójne. Te ostatnie będą zresztą występowały zawsze, gdyż E jest mnogością punktokształtną.

Można twierdzenie II wypowiedzieć w innej nieco formie mianowicie:

Każde continuum płaskie, nigdziegęste, można dla każdego $\delta > 0$ rozłożyć na n_δ mnogości domkniętych:

$$A_1, \; A_2 \ldots \; A_{n_\delta}, \tag{11}$$

tak aby średnica każdej mnogości (11) była niewiększa niż δ, i aby nie było punktów wspólnych więcej niż dwu mnogościom (11)[1].

Uogólniając powyższe rozważania, dochodzimy do następującej definicyi wymiaru dla dowolnych mnogości domkniętych (zawartych w n-wymiarowej przestrzeni liczbowej).

Dla danej mnogości A (domkniętej) rozpatrujemy zbiór wszystkich krzywych ciągłych:

$$J: \quad x_i = f_i(t), \quad i = 1, 2 \ldots n \quad t \subset E \tag{12}$$

(E — mnogość domknięta, liniowa, punktokształtna), które przedstawiają A. Oznaczmy zbiór ten przez $Z(A)$.

Istnieje wówczas jedna i tylko jedna liczba całkowita d, taka że:

a) wszystkie krzywe zbioru $Z(A)$ mają punkty wielokrotne rzędu przynajmniej $d+1$;

b) jedna przynajmniej krzywa zbioru $Z(A)$ nie posiada punktów wielokrotnych rzędu wyższego niż $d+1$.

Liczbę d nazywamy wymiarem mnogości A.

Wymiar posiada własności następujące:

1) wymiar jest niezmiennikiem Analysis Situs;

2) mnogości punktokształtne mają wymiar $d = 0$, i odwrotnie;

3) continua płaskie mają wymiar $d = 1$, lub $d = 2$, zależnie od tego czy zawierają, czy też nie zawierają punktów wewnętrznych;

4) jeżeli ogólne twierdzenie Lebesgue'a jest prawdziwe, wówczas kostka n-wymiarowa ma wymiar $d = n$.

Oczywiście, chcąc uzasadnić podaną definicyę wymiaru, należałoby wykazać, że posiada ona jeszcze cały szereg innych własności.

[1] Por. Lebesgue, l. c.

Zaznaczę jeszcze, że z twierdzenia I wynika, iż obszar domknięty trójwymiarowy (w zwykłem znaczeniu tego słowa) nie daje się w sposób jedno-jednoznaczny i ciągły odwzorować na płaszczyźnie.

Istotnie niechaj będzie:

$$J: \quad x_i = f_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad t \subset E \tag{13}$$

dowolna krzywa ciągła, wypełniająca kostkę: $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(i = 1, 2, 3)$.

Oznaczmy przez E_λ mnogość tych wartości t, dla których:

$$f_1(t) = \lambda. \tag{14}$$

Dla każdego λ, zawartego w przedziale 0 - 1, krzywa

$$J_\lambda: \quad x_i = f_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad t \subset E_\lambda \tag{15}$$

wypełnia kwadrat, a więc na mocy twierdzenia 1-go posiada punkty conajmniej potrójne. Stąd wynika, że J posiada zawsze nieprzeliczalną mnogość punktów conajmniej potrójnych. Z drugiej strony można (przy pomocy krzywej Peano np.) przedstawić każde continuum płaskie przez krzywą:

$$J: \quad x_i = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2 \quad t \subset F \tag{16}$$

której punkty wielokrotne rzędu wyższego niż dwa stanowią mnogość przeliczalną. Gdyby kostka trójwymiarowa była równoważna w sensie Analysis Situs continuum płaskiemu, to samo byłoby możliwe i dla niej, w sprzeczności z tem, co powyżej udowodniono.

RESUMÉ.

Théorème I.[1] E désignant un ensemble linéaire fermé, toute courbe continue:

$$J: \begin{matrix} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{matrix} \qquad t \subset E$$

qui remplit un domaine plan y, possède un ensemble parfait dense de points

[1] Ce théorème a été enoncé par M. Lebesgue—pour le cas général d'un domaine à n dimensions (Math. Ann. **70**).

au moins triples. (La démonstration est basée sur le théorème de M. Phragmén).

Théorème II. Toute ligne cantorienne plane peut être représentée par une courbe continue, définie sur un ensemble lineaire fermé, qui ne possède que de points simples ou doubles.

Ces théoremes conduisent à une definition de la dimension d'un ensemble fermé, qui pour le cas du plan coincide avec celle de M. Cantor: un ensemble fermé est de dimension d $(d \geqq 0)$, s'il existe une courbe continue, définie sur un ensemble linéaire, fermé et punctiforme, qui représente l'ensemble donné et dont tous les points multiples sont d'ordre $d+1$ au plus, tandis que toute courbe de la dite espèce possède de points multiples d'ordre $d+1$ au moins.

W. SIERPIŃSKI.

O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$.

Sur la relation entre l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ et la continuité de la fonction $f(x)$.

---

1. Celem niniejszej pracy jest bliższe zbadanie związku, jaki zachodzi między istnieniem dla danej funkcyi (zmiennej rzeczywistej) $f(x)$ i danej wartości x_0 granicy $\lim\limits_{\Delta x=0} \left(\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\right)_{x=x_0}$, czyli granicy

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}, \tag{1}$$

a ciągłością funkcyi $f(x)$ dla wartości $x=x_0$.

Pewne ciekawe twierdzenia, dotyczące granicy (1), podał A. Harnack [1]. Zawdzięczamy mu np. twierdzenie, że jeżeli istnieje pochodna $f''(x_0)$, to istnieje też granica (1) i jest równa $f''(x_0)$ [2]. Twierdzenie to, jak zauważył Harnack, nie daje się odwrócić. Np. dla funkcyi $f(x)$, określonej przez warunki:

$$f(x)=x^3 \sin\frac{1}{x}, \quad \text{dla} \quad x \neq 0; \quad f(0)=0,$$

[1]) Die allgemeine Sätze über den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen. Math. Annalen **23** (1884), p. 224—284, oraz: Elemente der Diff. und Int. Rechn. Lipsk 1884.

[2]) Math. Annalen **23**, p. 260, albo: E. Pascal: Eserzicii critici di calcolo diff. e int. Milano 1909, p. 124 lub w przekładzie polskim, Warszawa 1909, p. 100.