KAZIMIERZ BARTEL.

O płaskich utworach inwolucyj stopnia czwartego, rodzaju zerowego.

(Sur les courbes engendrées par les systèmes de points et les faisceaux en involution de quatrième ordre et d'espèce nulle).

A. O inwolucyach stopnia czwartego [1].

1. Proste, łączące odpowiednie punkty dowolnej inwolucyi na krzywej jednobieżnej, powłóczą krzywą, która nazywa się krzywą inwolucyjną danej inwolucyi.

Inwolucyę na krzywej jednobieżnej można punkt po punkcie przenieść na inną krzywą jednobieżną, a zatem także i na stożkową. Prostej, łączącej dwa odpowiednie punkty inwolucyi na pierwszej krzywej, odpowie określona prosta, łącząca dwa odpowiednie punkty na krzywej drugiej.

Rodzaj zatem krzywej inwolucyjnej pozostaje niezmieniony, bez względu na krzywą jednobieżną, do której odnosi się dana inwolucya. Tym rodzajem krzywej inwolucyjnej wyrażamy rodzaj samej inwolucyi.

Gdy podstawą inwolucyi punktów stopnia n-tego jest stożkowa—to krzywa inwolucyjna jest $(n-1)$-ej klasy. Jeżeli na stożkowej znajduje się inwo-

---

[1]) Emil Weyr. Ueber Involutionen höherer Grade. Journal f. d. reine und angew. Math. Tom 27. Berlin 1870. Str. 285—292.

— Ueber Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissenschaften. Wien 1879.

— Ueber biquadratische Involutionen zweiter Stufe und ihre typischen Curven, ebenda, Wien 1880. Str. 1007—1031.

— Ueber biquadratische Involutionen erster Stufe, ebenda, Wien 1881. Str. 300—320.

— Ueber Ausartungen biquadratischer Involutionen und... ebenda, Wien 1881. Str. 808—828.

lucya stycznych stopnia n-tego, to krzywą inwolucyjną będzie krzywa rzędu $(n-1)$-go. Gdy żadna para punktów podwójnych inwolucyi nie należy do jednej grupy, to krzywa nie ma żadnej stycznej podwójnej.

Rodzaj ogólnej inwolucyi stopnia n-tego na przekroju stożkowym będzie

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$ [1].

Ogólna zatem inwolucya stopnia czwartego jest rodzaju pierwszego. Krzywa inwolucyjna takiej inwolucyi punktów jest klasy trzeciej, bez stycznej podwójnej. Krzywa inwolucyjna ogólnej inwolucyi stycznych, stopnia czwartego, której podstawą jest stożkowa, jest krzywą rzędu trzeciego ogólną, a więc bez punktu podwójnego. Ponieważ inwolucya stopnia n-tego ma $2(n-1)$ elementów podwójnych [2], więc inwolucya stopnia czwartego ma sześć elementów podwójnych, z których jednak każdy należy do innej grupy.

Jeżeli para punktów, względnie prostych podwójnych, należy do jednej grupy, grupę tę tworzy, to prosta, łącząca owe punkty podwójne, względnie punkt przecięcia się stycznych podwójnych, będą elementami podwójnemi krzywej inwolucyjnej, która w tym przypadku będzie krzywą rodzaju zerowego. Inwolucya więc stopnia czwartego, w której dwa elementy podwójne tworzą grupę, jest inwolucyą rodzaju zerowego.

Jeżeli w inwolucyi stopnia czwartego występują dwie pary elementów podwójnych, z których każda tworzy grupę—to krzywa inwolucyjna posiadać będzie dwa elementy podwójne. Krzywa inwolucyjna rodzaju zerowego rozpadnie się w tym przypadku na stożkową i prostą, względnie punkt.

Zdarzyć się w końcu może, że inwolucya stopnia czwartego posiada trzy pary elementów podwójnych, z których każda tworzy grupę. Krzywa inwolucyjna posiadać będzie trzy elementy podwójne, składać się zatem będzie z trzech prostych, względnie tyluż punktów.

2. W dalszym ciągu naszych rozważań zajmować się będziemy wyłącznie inwolucyą stopnia czwartego, rodzaju zerowego, z rozpadającą się krzywą inwolucyjną.

Przyjmijmy w tym celu dowolną stożkową K^2, a dowolny punkt S uważajmy za środek inwolucyi punktów stopnia drugiego na tej stożkowej. Każdemu promieniowi α, $\beta, \ldots$, przechodzącemu przez punkt S, odpowiada para punktów $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ szeregu inwolucyjnego, jako punktów przecięcia się owego promienia z podstawą inwolucyi K^2. Zależnie od tego, czy z punktu S poprowadzić można do K^2 dwie styczne rzeczywiste, urojone lub zlewające się, inwolucya punktów będzie hyperboliczna, eliptyczna lub paraboliczna.

[1]) Herman Wiener. Ueber Involutionen auf ebenen Curven. München 1881.

[2]) Ludwig Cremona. Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven. Deutsch von Curtze, Greifswald 1865. Str. 28.

Rzut szeregu inwolucyjnego o podstawie K^2 z dowolnego punktu W tej podstawy, wyznacza pęk inwolucyjny $W(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \ldots)$.

Przetnijmy pęk inwolucyjny $W(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \ldots)$ dowolną stożkową C^2— to każdej parze promieni $\alpha_1 \alpha_2$ tego pęku odpowiadać będą na podstawie C^2 cztery punkty $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \overline{A}_4$, które tworzą grupę punktów szeregu inwolucyjnego stopnia czwartego rodzaju zerowego I^4, o krzywej inwolucyjnej rozpadającej się na prostą i stożkową. Promieniowi podwójnemu w pęku W odpowiada para punktów podwójnych w szeregu inwolucyjnym na C^2.

Z punktu W poprowadzić jeszcze można dwie styczne do C^2, których punkty styczności stanowią dwa punkty podwójne naszej inwolucyi; inwolucya ta posiada tedy sześć elementów podwójnych. Elementy te mogą być wszystkie rzeczywiste, wszystkie urojone, lub parami urojone.

a) Jeżeli pęk inwolucyjny $W(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \ldots)$ jest hyperboliczny, gdy wierzchołek jego W leży „zewnątrz“ C^2, a promienie podwójne tego pęku przecinają stożkową C^2 w punktach rzeczywistych, — to wszystkie elementy szeregu inwolucyjnego stopnia czwartego na C^2 są rzeczywiste.

b) Jeżeli jeden lub oba promienie podwójne pęku inwolucyjnego W nie przecinają stożkowej C^2 w punktach rzeczywistych,—to przy zachowaniu poprzedniego położenia punktu W względem C^2—jedna lub dwie pary elementów podwójnych inwolucyi stopnia czwartego będą urojone.

c) Jeżeli pęk inwolucyjny W jest eliptyczny, to inwolucya I^4 posiadać może dwa elementy podwójne, gdy punkt W leży „zewnątrz“ C^2. Występujące w tym przypadku elementy podwójne należą do dwóch różnych grup inwolucyi I^4.

d) Gdy pęk W jest eliptyczny, a z wierzchołka jego nie można poprowadzić stycznych rzeczywistych do stożkowej C^2, to wszystkie elementy podwójne inwolucyi I^4 są urojone.

e) Jeżeli pęk W będzie pękiem parabolicznym, to inwolucya na podstawie C^2 będzie stopnia drugiego.

f) Jeżeli jeden promień podwójny pęku inwolucyjnego W będzie styczny do stożkowej C^2, to ów punkt styczności będzie punktem poczwórnym I^4. Prócz punktu poczwórnego posiada inwolucya stopnia czwartego jeszcze trzy punkty podwójne; dwa z nich będą punktami przecięcia się drugiego promienia podwójnego pęku W z C^2, trzecim będzie punkt styczności drugiej prostej, dającej się poprowadzić z punktu W do C^2.

Para z pierwszych wymienionych punktów podwójnych należy do jednej grupy elementów i może być albo rzeczywista, albo urojona,—trzeci z wymienionych punktów podwójnych jest zawsze rzeczywisty. Punkt poczwórny szeregu inwolucyjnego I^4 liczyć należy za trzy elementy podwójne.

g) Jeżeli w końcu oba promienie podwójne pęku inwolucyjnego W będą styczne do stożkowej C^2, to ich punkty styczności będą punktami podwójnemi inwolucyi I^4 na podstawie C^2. Szereg inwolucyjny stopnia czwartego z dwoma punktami podwójnemi nie posiada żadnych elementów podwójnych, a w każdej grupie punktów jedna para jest urojona. Inwolucya taka nazywa się kołową [1].

B. Jednokreślne pęki i szeregi inwolucyjne stopnia czwartego oraz ich uzupełnienie.

3) Obierzmy dwa dowolne pęki inwolucyjne o wierzchołkach W i W'— każdy, wyznaczony przez dwie pary promieni $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ i $\alpha'_1\alpha_2'$, $\beta_1'\beta_2'$. Przez punkt W poprowadzimy stożkową K_1^2, a punkty przecięcia się elementów pęku W z tą stożkową utworzą na nim szereg inwolucyjny A_1A_2, B_1B_2, ... Podobnie punkty przecięcia się stożkowej K_2^2, poprowadzonej przez wierzchołek W', utworzą na niej szereg inwolucyjny o elementach $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$,...

Proste $A_1A_2=\alpha$ i $\beta_1\beta_2=\beta$ przecinają się w punkcie S, środku inwolucyi na K_1^2; proste $A_1'A_2'=\alpha'$ i $B_1'B_2'=\beta'$ wyznaczają punkt S' jako środek inwolucyi punktów na stożkowej K_2^2.

Przetnijmy pęki inwolucyjne W, W' dowolną stożkową C^2, nie przechodzącą przez ich wierzchołki. Elementy pęku W wyznaczają na stożkowej C^2 dwie czwórki grupy punktów: $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \overline{A}_4$; $B_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3, \overline{B}_4$ inwolucyi I_1^4 stopnia czwartego. Podobnie elementy pęku W' przecinają stożkową C^2 w dwóch grupach punktów: $\overline{A}_1', \overline{A}_2', \overline{A}_3', \overline{A}_4'$; $\overline{B}_1', \overline{B}_2', \overline{B}_3', \overline{B}_4'$, wyznaczających inwolucyę punktów I_2^4.

Załóżmy, że pęki $S(\alpha, \beta, \ldots)$ i $S'(\alpha', \beta', \ldots)$ są jednokreślne, to wtedy każdemu elementowi γ w pęku S odpowie para promieni $\gamma_1\gamma_2$ w pęku inwolucyjnym W, grupa zaś czterech punktów w szeregu inwolucyjnym I_1^4 na C^2. Ale elementowi γ odpowiada w pęku S' jeden jedyny element γ', który wyznacza w pęku inwolucyjnym W' parę promieni $\gamma'_1\gamma'_2$, odpowiadających jednokreślnie elementowi $\gamma_1\gamma_2$ w pęku S. Promienie $\gamma'_1\gamma'_2$ wyznaczają na C^2 grupę punktów szeregu inwolucyjnego I_2^4.

Pośrednictwo pęków jednokreślnych $S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ i $S'(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$ stwarza i ustala tym sposobem zależność między grupami punktów dwóch inwolucyj stopnia czwartego I_1^4 i I_2^4 na podstawie C^2 tego rodzaju, że każdej czwórce punktów szeregu inwolucyjnego I_1^4 odpowiada jedna jedyna grupa,

[1]) Hermann Wiener. Ueber Involutionen auf ebenen Kurven. München 1881.

złożona z czterech punktów w szeregu inwolucyjnym I_2^4. Szeregi inwolucyjne I_1^4 i I_2^4 są jednokreślne.

Pęki S i S', wyznaczone są przez trzy pary promieni, które znowu wyznaczają trzy czwórki promieni w pękach inwolucyjnych W i W', ustalając tym sposobem jednokreślność tych pęków. Trzy czwórki promieni w pękach W W' wyznaczają tyleż ósemek punktów jednokreślnych szeregów inwolucyjnych I_1^4 i I_2^4 na C^2.

Jednokreślne pęki inwolucyjne W i W' utworzą krzywą rzędu czwartego C^4 z dwoma punktami podwójnemi w wierzchołkach W i W' tych pęków. Krzywa C^4 przetnie się ze stożkową C^2 w ośmiu punktach, które parami mogą być urojone. Każdy z tych punktów jest punktem przecięcia się elementu pęku W i odpowiadającego mu promienia pęku W'. W każdym z tych punktów schodzą się po dwa odpowiednie punkty szeregów inwolucyjnych I_1^4 i I_2^4, leżących na wspólnej podstawie C^2. Otrzymujemy tedy dwoiście odpowiadające sobie prawa:

Dwa szeregi inwolucyjne punktów stopnia czwartego rodzaju zerowego, leżące na przekroju stożkowym, mają ośm punktów, w których schodzą się po dwa odpowiednie punkty tych szeregów.	Dwa pęki inwolucyjne stycznych stopnia czwartego rodzaju zerowego, których podstawą jest stożkowa, mają ośm stycznych, w których zlewają się po dwie odpowiednie styczne tych pęków.

Szeregi inwolucyjne I_1^4 i I_2^4, rzucone z dowolnych punktów T i T' stożkowej C^2, dają dwa jednokreślne pęki inwolucyjne stopnia czwartego rodzaju zerowego:

$$T(a_1\, a_2\, a_3\, a_4,\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4, \ldots) \,\overline{\wedge}\, T'(a_1'\, a_2'\, a_3'\, a'_4,\ b_1'\, b_2'\, b_3', \ldots).$$

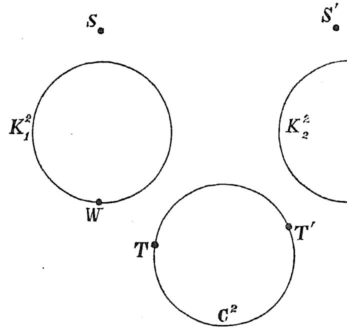
4. W poprzednim ustępie (3), przyjąwszy dwa pęki inwolucyjne, przecięliśmy każdy z nich jedną stożkową i na każdej z nich (K_1^2 i K_2^2) otrzymaliśmy jeden szereg inwolucyjny stopnia drugiego. Jednokreślność tych szeregów ustalona była przez jednokreślność pęków pomocniczych S i S'.

Do tego samego wyniku dojdziemy, gdy pęki W i W' przetniemy jedną stożkową K^2, na której otrzymamy złączone dwa jednokreślne szeregi inwolucyjne stopnia drugiego, złączone ze sobą pękami jednokreślnemi S i S'.

5. Podobnie zamiast szeregów inwolucyjnych jednokreślnych stopnia czwartego, złączonych na wspólnej stożkowej C^2, otrzymamy szeregi takie na dwóch podstawach, gdy każdy z pęków inwolucyjnych W i W' przetniemy inną stożkową, np. C_1^2 i C_2^2. Szereg inwolucyjny stopnia czwartego, rzucony z dowolnego punktu T podstawy C_1^2 tego szeregu, da pęk inwolucyjny promieni jednokreślny z pękiem, który otrzymamy, gdy szereg inwolucyjny stopnia czwartego, leżący na podstawie C_2^2, z jej dowolnego punktu T' rzucimy.

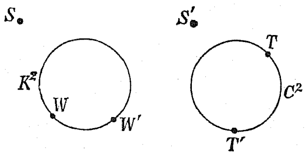
6. Z powyższych rozumowań widoczne jest, że łańcuch elementów, w którym ogniwami początkowemi są pęki S, S', a końcowemi pęki jednokreślne inwolucyjne stopnia czwartego T i T',— zachowując zawsze stałą liczbę ogniw—przyjąć może formę czworaką. Wyrazimy to zapomocą następujących schematów:

a)



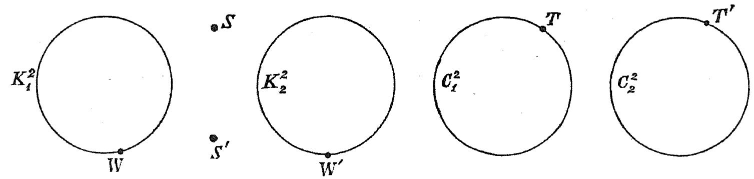
$$S(\alpha,\beta,\gamma,\ldots.)\ \overline{\Lambda}\ S'(\alpha',\beta',\gamma'\ldots.)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$K_1{}^2(A_1A_2,\ B_1C_2\ldots)\ \overline{\Lambda}\ K_2{}^2(A_1'\ A_2',\ B_1'B_2',\ldots.)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$W(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2,\ \gamma_1\gamma_2,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ W'(\alpha_1'\alpha_2',\ \beta_1'\beta_2',\ \gamma_1'\gamma_2',\ldots)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$C^2(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4},\ \overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}\,\overline{B_4},\ldots.)\ \overline{\Lambda}\ C^2(\overline{A_1}'\,\overline{A_2}'\,\overline{A_3}'\,\overline{A_4}',\ \overline{B_1}'\,\overline{B_2}'\,\overline{B_3}'\,\overline{B_4}',\ldots.)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$T(a_1a_2a_3a_4,\ b_1b_2b_3b_4,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ T'(a_1'a_2'a_3'a_4',\ b_1'b_2'b_3'b_4',\ldots)$$

b)



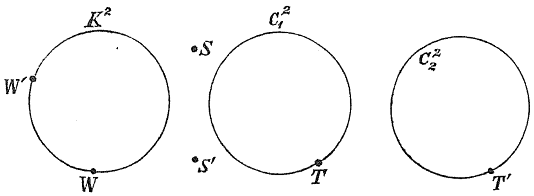
$$S(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ S'(\alpha',\beta',\gamma',\ldots)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$K^2(A_1A_2,\ B_1B_2,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ K^2(A_1'A_2',\ B_1'B_2',\ldots)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$W(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2,\ \gamma_1\gamma_2,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ W'(\alpha_1'\alpha_2',\ \beta_1'\beta_2',\ \gamma_1'\gamma_2',\ldots)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$C^2(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4},\ \overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}\,\overline{B_4},\ldots)\ \overline{\Lambda}\ C^2(\overline{A_1}'\,\overline{A_2}'\,\overline{A_3}'\,\overline{A_4}',\ \overline{B_1}'\,\overline{B_2}'\,\overline{B_3}'\,\overline{B_4}',\ldots)$$
$$T(a_1a_2a_3a_4,\ b_1b_2b_3b_4,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ T'(a_1'a_2'a_3'a_4',\ b_1'b_2'b_3'b_4',\ldots)$$

c)



$$S(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ S'(\alpha',\beta',\gamma',\ldots)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$K_1{}^2(A_1A_2,\ B_1B_2,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ K_2{}^2(A_1'A_2',\ B_1'B_2',\ldots)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$W(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ W'(\alpha_1'\alpha_2',\ \beta_2'\beta_2',\ldots)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$C_1{}^2(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4},\ \overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}\,\overline{B_4},\ldots)\ \overline{\Lambda}\ C_2{}^2(\overline{A_1}'\,\overline{A_2}'\,\overline{A_3}'\,\overline{A_4}',\ \overline{B_1}'\,\overline{B_2}'\,\overline{B_3}'\,\overline{B_4}',\ldots)$$
$$\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{c}\Vert\\ \overline{\Lambda}\\ \Vert\end{array}$$
$$T(a_1a_2a_3a_4,\ b_1b_2b_3b_4,\ldots)\ \overline{\Lambda}\ T'(a_1'a_2'a_3'a_4',\ b_1'b_2'b_3'b_4',\ldots)$$

d)

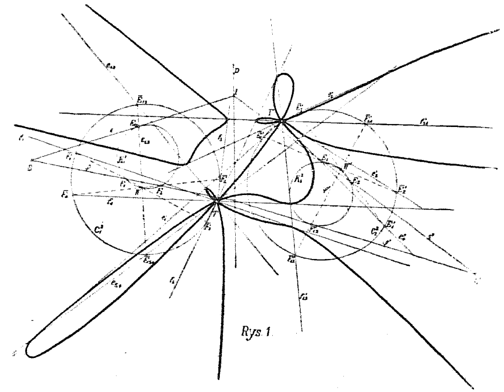


$$
\begin{array}{ccc}
S(\alpha,\beta,\gamma,\dots) & \overline{\wedge} & S'(\alpha',\beta',\gamma',\dots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
K^2(A_1A_2,\ B_1B_2,\dots) & \overline{\wedge} & K^2(A_1'A_2',\ B_1'B_2',\dots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
W(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2,\dots) & \overline{\wedge} & W'(\alpha_1'\alpha_2',\ \beta_1'\beta_2',\dots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
C_1^2(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4},\ \overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}\,\overline{B_4},\dots) & \overline{\wedge} & C_2^2(\overline{A_1'}\,\overline{A_2'}\,\overline{A_3'}\,\overline{A_4'},\ \overline{B_1'}\,\overline{B_2'}\,\overline{B_3'}\,\overline{B_4'},\dots) \\
T(a_1a_2a_3a_4,\ b_1b_2b_3b_4,\dots) & \overline{\wedge} & T'(a_1'a_2'a_3'a_4',\ b_1'b_2'b_3'b_4',\dots)
\end{array}
$$

C. O utworach pęków i szeregów inwolucyjnych stopnia 4-go w położeniu ogólnem.

7. Celem wyznaczenia rzędu krzywej, utworzonej przez pęki jednokreśne inwolucyjne stopnia czwartego T, T', przetnijmy te pęki dowolną prostą m, nie przechodzącą przez ich wierzchołki. Przyjmijmy dowolną stożkową C^2 i z punktu P na niej leżącego rzućmy szeregi inwolucyjne, leżące na podstawie m, na stożkową. Następnie znajdźmy środki W i W' inwolucyj obu szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego, leżących na C^2. Punkty W i W' są wierzchołkami jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia drugiego, których odpowiednie promienie przetną się w punktach, leżących na pewnej krzywej. Wyznaczmy rząd tej krzywej. W tym celu przetnijmy pęki jednokreślne inwolucyjne stopnia drugiego dowolną prostą m_1, a szeregi inwolucyjne na prostej tej otrzymane rzućmy na stożkową C^2 z dowolnego jej punktu P_1. Znajdźmy teraz środki M i M' inwolucyj stopnia drugiego, które leżą na C^2, to punkty te będą wierzchołkami jednokreślnych pęków promieni, których odpowiednie elementy przetną się w punktach stożkowej C_1^2.

Stożkowe C^2 i C_1^2 przetną się w czterech punktach, które, rzucone z punktu P_1 na prostą m_1, wyznaczają cztery punkty przecięcia się prostej m_1 z krzywą, wyznaczoną przez pęki W i W', która tym sposobem jest krzywą rzędu czwartego C^4.



Rys 1

Krzywa C^4 przetnie się ze stożkową C^2 w ośmiu punktach, które znowu, rzucone z punktu P na prostą m, dają ośm punktów przecięcia się tej prostej z krzywą, utworzoną przez pęki jednokreślne inwolucyjne stopnia czwartego TT'. Dochodzimy zatem do praw:

Utworem dwóch pęków jednokreślnych inwolucyjnych promieni stopnia czwartego jest krzywa rzędu ósmego C^8. (Rys. 1).

Utworem dwóch jednokreślnych inwolucyjnych szeregów punktów stopnia czwartego jest krzywa klasy ósmej C_8.

8. Promieniowi τ_1 w pęku W, przechodzącemu przez wierzchołek T', odpowiada w pęku W' para promieni $\tau_1'\tau_2'$. Promień τ_1 przecina podstawę szeregu inwolucyjnego stopnia czwartego $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\dots$, prócz w punkcie T', jeszcze w punkcie $\overline{T_1}$; promienie więc $TT'=t$ i $T\overline{T_1}=r_1$ stanowią parę promieni w pęku T. Promienie τ_1' i τ_2' przecinają podstawę szeregu inwolucyjnego $\overline{A_1'}\,\overline{A_2'}\,\overline{A_3'}\,\overline{A_4'},\ \overline{B_1'}\,\overline{B_2'}\dots$ w punktach $\overline{T_1'}\,\overline{T_2'}\,\overline{T_3'}\,\overline{T_4'}$, które, połączone z T', dają czwórkę promieni w tym pęku. Promienie t i r_1 przetną się z czwórką promieni $t_1'\,t_2'\,t_3'\,t_4'$ w pęku T' w ośmiu punktach, z których cztery schodzą się w punkcie T' i który wskutek tego jest punktem poczwórnym otrzymanej krzywej rzędu ósmego. W ten sam sposób wykazać można,

że punkt T jest również punktem poczwórnym krzywej C^8. Reasumując, powiemy:

Wierzchołki jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego są punktami poczwórnemi krzywej C^8, przez pęki te utworzonej.

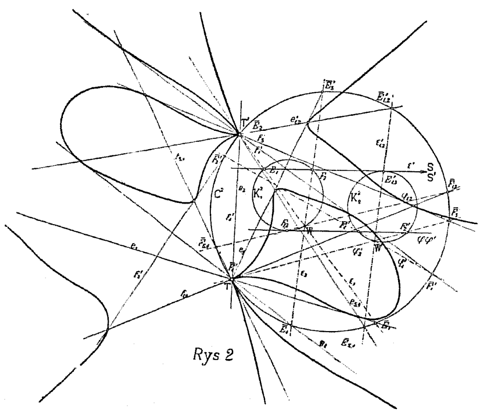
Podstawy jednokreślnych szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego są stycznemi poczwórnemi krzywej C_8, przez szeregi te utworzonej.

Jeżeli promienie szczególne w obu jednokreślnych pękach T i T' nie są elementami odpowiedniemi, to krzywa C^8, prócz dwóch punktów poczwórnych, nie posiada żadnych dalszych punktów osobliwych, jest więc rodzaju dziewiątego. Zatem:

Krzywa rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi jest krzywą klasy trzydziestej drugiej, rodzaju dziewiątego o symbolu C^8_{32}.

Krzywa klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi jest krzywą rzędu trzydziestego drugiego, rodzaju dziewiątego o symbolu C_8^{32}.

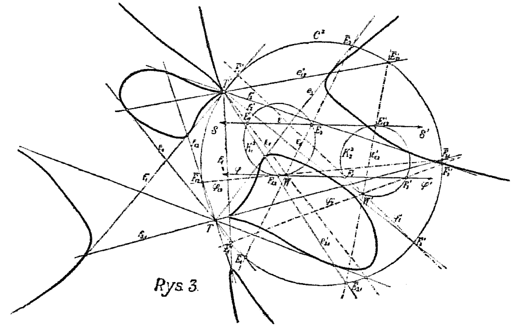
9. Rozpatrzmy rodzaje punktu poczwórnego. Elementowi, łączącemu wierzchołki T, T' jednokreślnych pęków inwolucyjnych tworzących krzywą C^8, uważanemu za element jednego pęku, odpowiada w pęku drugim czwórka promieni, które są stycznemi krzywej w jej punkcie poczwórnym. Zachodzić tu mogą następujące przypadki:



Rys 2

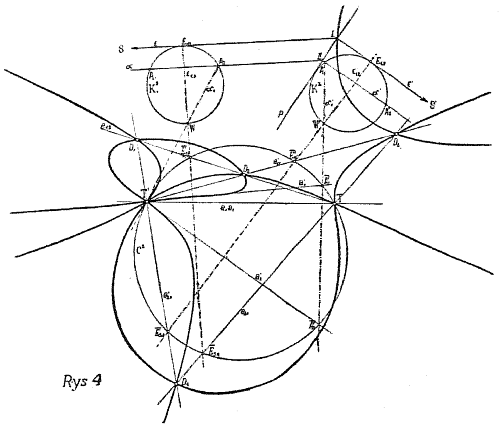
a) Wszystkie cztery styczne w punkcie poczwórnym krzywej są rzeczywiste; punkt ten jest więc **właściwym** punktem poczwórnym krzywej, jest złączeniem sześciu punktów podwójnych rzeczywistych.

b) Wszystkie styczne są rzeczywiste, dwie jednakowoż zlewają się, tworząc promień podwójny. W punkcie poczwórnym znajduje się jeden punkt zwrotu.



Rys 3.

c) Wszystkie cztery styczne są rzeczywiste — tworzą jednakowoż dwa promienie podwójne w odnośnym pęku inwolucyjnym. Punkt poczwórny zawiera w sobie dwa punkty zwrotu. (Rys. 2 i 3).



Rys 4

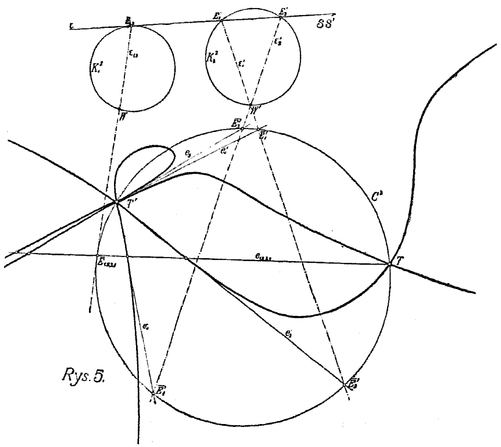
d) Para stycznych jest rzeczywista, para urojona. Graficznie przedstawi się taki punkt poczwórny, jako punkt podwójny. (Rys. 5).

e) Para stycznych jest rzeczywista, ale tworzy promień podwójny—druga para jest urojona. Graficznie wyrazi się taki punkt poczwórny, jako punkt zwrotu.

10. Promień, łączący wierzchołki pęków T, T', jest w ogólnym przypadku elementem pojedyńczym jednego lub drugiego pęku. W szczególności przyjąć jednak można, że promień, łączący wierzchołki obu pęków, jest elementem wielokrotnym jednego z nich. Załóżmy, że:

I. Promień łączący wierzchołki jest elementem podwójnym pęku T. (Rys. 4).

Wierzchołek pęku T schodzić się będzie w tym przypadku z punktem podwójnym szeregu inwolucyjnego $\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$, $\overline{B_1 B_2 B_3 B_4}$, ... na podstawie C^2. Zauważmy, że gdyby promień TT', jako element T, był promieniem pojedyńczym, to promieniowi temu odpowiedziałyby w pęku T' cztery promienie styczne w punkcie poczwórnym T' krzywej C^8. Każdy z tych promieni stycznych przecina trzy dalsze elementy pęku T w trzech punktach



Rys. 5.

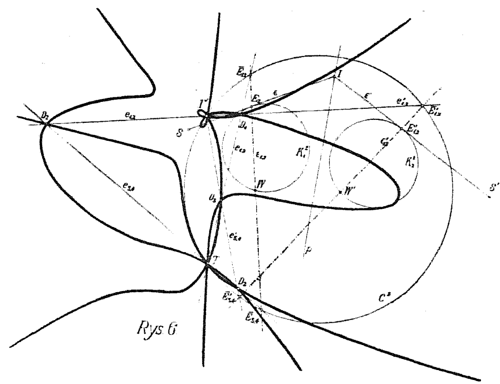
naszej krzywej. Gdy prosta TT' stanie się prostą podwójną w pęku T, to do każdego punktu styczności czterech elementów pęku T', odpowiadających promieniowi TT', przybywa jeszcze jeden punkt styczności, każda z czterech stycznych zawiera po trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty krzywej, które tym sposobem stają się punktami przegięcia. Dochodzimy tedy do następujących biegunowo odpowiadających sobie praw:

Utworem dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego, w takiem wzajemnem położeniu, że promień łączący wierzchołki tych pęków jest elementem podwójnym jednego z nich, jest krzywa C^8 z dwoma punktami poczwórnemi. Jeden z punktów poczwórnych, a mianowicie ten, który nie jest wierzchołkiem pęku, do którego promień podwójny TT' należy, posiada cztery punkty, a więc i tyleż stycznych przegięcia.

Utworem dwóch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego, w takiem wzajemnem położeniu, że punkt przecięcia się podstaw tych szeregów jest elementem podwójnym jednej z nich, jest krzywa C_8 z dwiema stycznemi poczwórnemi. Jedna ze stycznych poczwórnych, a mianowicie ta, która nie jest podstawą szeregu, do którego punkt podwójny tt' należy, posiada cztery styczne, a więc i tyleż punktów przegięcia.

II. Promień łączący wierzchołki jest elementem poczwórnym pęku T.

Punkt T' zejdzie się z punktem poczwórnym szeregu inwolucyjnego punktów $\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$.... na C^2. Każda z czterech stycznych w pęku T',



Rys 6

odpowiadających promieniowi TT', zawiera pięć następujących bezpośrednio po sobie punktów krzywej C^8, jest więc styczną przegięcia drugiego rodzaju. Przy poczynionem założeniu:

Krzywa C^8 posiada w punkcie poczwórnym cztery styczne przegięcia drugiego rodzaju.

Krzywa C_8 posiada na stycznej poczwórnej cztery punkty przegięcia drugiego rodzaju.

11. Wykazaliśmy, że każdy z dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego posiada sześć elementów podwójnych, które występują parami, bądź jako elementy rzeczywiste, bądź też jako urojone. Roz-

patrzmy zachodzące tu kombinacye i wpływ tych elementów podwójnych na charakter krzywej C^8.

I. Wszystkie promienie podwójne w obu pękach są urojone.

Oba pęki inwolucyjne W i W' będą w tym przypadku eliptyczne, a ich wierzchołki leżeć będą „wewnątrz" stożkowej C_2^2. Każdej czwórce promieni w jednym pęku odpowie czwórka rzeczywistych promieni w pęku drugim, i naodwrót. Promieniowi, łączącemu wierzchołki dwu pęków, uważanemu za element jednego pęku, odpowiadają w drugim pęku cztery promienie rzeczywiste. W tym więc przypadku:

posiada krzywa C^8 w każdym punkcie poczwórnym cztery styczne rzeczywiste; przez każdy z tych punktów poczwórnych przechodzą cztery rzeczywiste gałęzie krzywej.

posiada krzywa C_8 na każdej stycznej poczwórnej cztery punkty styczności rzeczywiste; z każdą styczną poczwórną stykają się cztery gałęzie rzeczywiste krzywej.

II. Pęk $T(T')$ posiada jedną parę promieni podwójnych rzeczywistych, dwie urojone; pęk $T'(T)$ ma wszystkie promienie podwójne urojone.

Promieniowi, łączącemu wierzchołki dwu pęków, uważanemu za element pęku $T(T')$, odpowiadają w pęku $T'(T)$ cztery promienie rzeczywiste; natomiast promieniowi temu, uważanemu za element pęku $T'(T)$, odpowiadają w pęku $T(T')$: a) cztery promienie rzeczywiste, b) dwa promienie rzeczywiste, dwa zaś urojone, c) cztery promienie urojone, d) dwa pojedyńcze rzeczywiste i jeden podwójny, e) dwa promienie pojedyńcze urojone i jeden rzeczywisty promień podwójny, f) dwa promienie podwójne.

Otrzymana w tym przypadku krzywa C^8 posiada:

w punkcie poczwórnym $T'(T)$ cztery styczne rzeczywiste. Co do punktu $T(T')$ to w położeniu a) przechodzą przezeń cztery gałęzie rzeczywiste; w b) dwie gałęzie rzeczywiste, dwie urojone; w c) cztery gałęzie urojone; w położeniu d) posiada krzywa C^8 w punkcie poczwórnym jeden punkt zwrotu i dwie styczne rzeczywiste; w położeniu e) jeden punkt zwrotu i dwie styczne urojone; a w końcu w położeniu f) dwa punkty zwrotu.

na stycznej poczwórnej $t'(t)$ cztery punkty styczności rzeczywiste. Co do stycznej $t(t')$, to w położeniu a) styka się ona z czterema gałęziami rzeczywistemi krzywej; w b) z dwiema rzeczywistemi a z dwiema urojonemi; w c) z czterema gałęziami urojonemi; w położeniu d) posiada krzywa C_8 w stycznej poczwórnej jednę styczną przegięcia i dwa punkty styczności rzeczywiste; w położeniu e) jednę styczną przegięcia i dwa urojone punkty styczności; w położeniu f) dwie styczne przegięcia.

III. Pęk $T(T')$ ma dwie pary promieni podwójnych rzeczywistych, jedną urojoną; pęk $T'(T)$ ma natomiast wszystkie promienie podwójne urojone.

IV. Pęk $T(T')$ ma trzy pary promieni podwójnych rzeczywistych; pęk $T'(T)$ posiada trzy pary promieni podwójnych urojonych.

W przypadku III i IV posiada krzywa C^8 cztery styczne rzeczywiste w punkcie poczwórnym $T(T')$.

Co do punktu poczwórnego $T'(T)$, to wystąpi on jak w przypadku II.

W przypadku III i IV posiada krzywa C_8 cztery rzeczywiste punkty styczności na stycznej poczwórnej $t(t')$.

Co do stycznej poczwórnej $t'(t)$, to wystąpi ona jak w przypadku II.

V. Pęki inwolucyjne T i T' mają po jednej, dwie lub trzy pary promieni podwójnych rzeczywistych.

We wszystkich tych przypadkach odnoszą się do obu punktów poczwórnych uwagi, poczynione dla punktu T w ust. II.

We wszystkich tych przypadkach odnoszą się do obu stycznych poczwórnych uwagi, poczynione dla stycznej t w ust. II.

D. Inne „rodzaje" krzywych rzędu ósmego.

12. Zauważyliśmy już (str. 3), że pęk inwolucyjny stopnia czwartego posiada sześć promieni podwójnych. W dwóch takich pękach—jeśli są tylko jednokreślne — promienie podwójne mogą odpowiadać sobie wzajemnie— a punkt przecięcia się promienia podwójnego jednego pęku z takimże promieniem pęku drugiego jest punktem podwójnym krzywej, przez pęki utworzonej. Rozpatrzmy zachodzące tu przypadki:

I. Przyjmijmy, że stycznej μ, poprowadzonej z wierzchołka W do podstawy szeregu inwolucyjnego I_1^4, odpowiada w pęku W' prosta μ', która jest styczną do podstawy szeregu inwolucyjnego I_2^4. Punkt styczności $\overline{M_{1,2}}$ stycznej μ, który jest punktem podwójnym szeregu inwolucyjnego I_1^4, połączony z wierzchołkiem T, daje promień podwójny $m_{1,2}$ w pęku inwolucyjnym $T(a_1\, a_2\, a_3\, a_4,\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4, \ldots)$. Promieniowi temu odpowiada w pęku $T'(a_1'\, a_2'\, a_3'\, a_4',\ b_1'\, b_2'\, b_3'\, b_4', \ldots)$ promień $m'_{1,2}$, łączący wierzchołek T' z punktem styczności $M'_{1,2}$, stycznej μ', poprowadzonej z punktu W' do podstawy szeregu inwolucyjnego I_2^4. Punkt przecięcia się otrzymanej pary odpowiadających sobie promieni podwójnych będzie punktem podwójnym krzywej C^8, jako utworu dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego.

Krzywa rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i jednym punktem podwójnym jest krzywą

Krzywa klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i jedną styczną podwójną jest rzędu trzy-klasy trzydziestej, zatem należy do krzywych rodzaju ósmego, posiada 66 punktów przegięcia i 347 stycznych podwójnych.

dziestego, należy do krzywych rodzaju ósmego, posiada 66 punktów zwrotu i 347 punktów podwójnych.

II. Przyjmijmy, że i drugiej stycznej ν, dającej się poprowadzić z punktu W do stożkowej C^2_2 [1]), odpowiada w pęku W' prosta ν', styczna również do C_2^2. Punkty styczności $\overline{N}_{1,2}$ i $\overline{N}_{1,2}'$ owych stycznych są punktami podwójnemi szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego na podstawie C_2^2 i to elementami, odpowiadającemi sobie jednokreślnie. Punkt $\overline{N}_{1,2}$, rzucony z punktu T jako wierzchołka pęku inwolucyjnego stopnia czwartego, wyznacza promień podwójny $n_{1,2}$ w tym pęku; podobnie element pęku T', przechodzący przez punkt $\overline{N}_{1,2}'$ będzie promieniem podwójnym $n_{1,2}'$ tego pęku, podporządkowanym promieniowi podwójnemu $n_{1,2}$. Oba promienie podwójne przetną się w punkcie podwójnym naszej krzywej, która tym sposobem, prócz dwóch punktów poczwórnych, posiadać będzie dwa punkty podwójne.

Krzywa rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i dwoma punktami podwójnemi jest klasy dwudziestej ósmej, należy do krzywych rodzaju siódmego, posiada 60 punktów przegięcia i 284 styczne podwójne.

Krzywa klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i dwiema stycznemi podwójnemi jest rzędu dwudziestego ósmego, należy do krzywej rodzaju siódmego, posiada 60 punktów podwójnych.

III. Niechaj stycznej ε, dającej się poprowadzić z punktu S do stożkowej K_1^2, odpowiada w pęku S' prosta ν', przechodząca przez W' i styczna równocześnie do C_2^2. Prostej ε odpowie w pęku inwolucyjnym W promień podwójny $\varepsilon_{1,2}$, który wyznaczy na podstawie C_2^2 parę punktów podwójnych $\overline{E}_{1,2}$ i $\overline{E}_{3,4}$ szeregu inwolucyjnego.

Promienie $e_{1,2}$, $e_{3,4}$, rzucające te punkty podwójne z wierzchołka T, będą promieniami podwójnemi w pęku inwolucyjnym stopnia czwartego, dla którego punkt T jest wierzchołkiem. Tymczasem punkt styczności $\overline{N}_{1,2}'$ prostej ν' ze stożkową C_2^2, połączony z punktem T', jest promieniem podwójnym $n_{1,2}'$ w pęku T' $(a_1' \, a_2' \, a_3' \, a_4', \ldots)$. Punkty przecięcia się promieni podwójnych $e_{1,2}$, $e_{3,4}$ z promieniem $n_{1,2}'$, są również punktami podwójnemi naszej krzywej.

Przyjmijmy, że równocześnie stycznej μ, poprowadzonej z punktu W do stożkowej C_2^2, odpowiada w pęku W' prosta μ', styczna do tejże samej stożkowej (ust. 12, I). W tym razie krzywa C^8 posiadać będzie trzy punkty podwójne.

[1]) Przez C_2^2 nazywać będziemy w dalszym ciągu wspólną podstawę szeregów inwolucyjnych I_1^4 i I_2^4.

Krzywa rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i trzema punktami podwójnemi jest klasy dwudziestej szóstej, należy do krzywych rodzaju szóstego, posiada 54 punkty przegięcia i 240 stycznych podwójnych.

Krzywa klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i trzema stycznemi podwójnemi jest rzędu dwudziestego szóstego, należy do krzywych rodzaju szóstego, posiada 54 punkty zwrotu i 240 punktów podwójnych.

IV. Załóżmy, że stycznej ε, poprowadzonej z punktu S do K_1^2, odpowiada w pęku S' promień ε', styczny do stożkowej K_2^2. Promieniom ε i ε' w jednokreślnych pękach S $(\alpha, \beta, \varepsilon, \ldots)$ i S' $(\alpha', \beta', \varepsilon', \ldots)$ odpowiadają promienie podwójne $\varepsilon_{1,2}$ i $\varepsilon'_{1,2}$ w jednokreślnych pękach inwolucyjnych W $(\alpha_1 \, \alpha_2,$ $\beta_1 \, \beta_2, \varepsilon_{1,2}, \ldots)$ i W' $(\alpha_1' \, \alpha_2', \beta_1' \, \beta_2', \varepsilon_{1,2})$, a tym znowu—promienie podwójne $e_{1,2}$, $e_{3,4}$ i $e'_{1,2}$, $e'_{3,4}$ w pękach inwolucyjnych T $(a_1 \, a_2 \, a_3 \, a_4, \ldots \, e_{1,2} \, e_{3,4} \ldots)$ i T' $(a_1' \, a_2' \, a_3' \, a_4', \ldots \, e_{1,2} \, e_{3,4} \ldots)$. Punkty przecięcia się promieni podwójnych $e_{1,2}$, $e_{3,4}$ z promieniami podwójnemi $e'_{1,2}$, $e'_{3,4}$ będą punktami podwójnemi krzywej C^8, utworzonej przez pęki T i T'. Krzywa C^8 posiada w tym przypadku, prócz dwóch punktów poczwórnych, jeszcze cztery punkty podwójne D_1, D_2, D_3 i D_4 (rys. 4 i rys. 6).

Utworem dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego w takiem wzajemnem położeniu, że parze promieni podwójnych w jednym pęku odpowiada para promieni podwójnych w pęku drugim, jest krzywa rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i czterema punktami podwójnemi. Krzywa ta jest klasy dwudziestej czwartej, należy do krzywych rodzaju piątego, posiada 48 punktów przegięcia i 200 stycznych podwójnych.

Utworem dwóch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego w takiem wzajemnem położeniu, że parze punktów podwójnych w jednym szeregu odpowiada para punktów podwójnych w szeregu drugim, jest krzywa klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i czterema stycznemi podwójnemi. Krzywa ta jest rzędu dwudziestego czwartego; należy do krzywych rodzaju piątego, posiada 48 punktów zwrotu i 200 punktów podwójnych.

V. Założenie, uczynione w ustępie poprzednim, połączmy z założeniem, wyrażonem w ustępie I, to wówczas inwolucye punktów na stożkowej C_2^2 posiadać będą po trzy punkty podwójne; tyleż promieni podwójnych posiadać będzie każdy z pęków inwolucyjnych T i T'. Pięć punktów, które otrzymamy z przecięcia się owych promieni podwójnych, będą punktami podwójnemi krzywej, przez pęki T i T' utworzonej. Zatem:

Jeżeli trójce promieni podwójnych w jednym pęku inwolucyjnym odpowiada trójka takichże promieni

Jeżeli trójce punktów podwójnych w jednym szeregu inwolucyjnym odpowiada trójka takichże punw pęku drugim, to krzywa przez pęki te utworzona, jest krzywą rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i pięcioma punktami podwójnemi. Krzywa ta jest klasy dwudziestej drugiej, należy do krzywych rodzaju czwartego, posiada 42 punkty przegięcia i 164 styczne podwójne.

tów w szeregu drugim, to krzywa, przez szeregi te utworzona, jest krzywą klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i pięcioma stycznemi podwójnemi. Krzywa ta jest rzędu dwudziestego drugiego, należy do krzywych rodzaju czwartego, posiada 42 punkty zwrotu i 164 punkty podwójne.

VI. Przyjmijmy dalej, że stycznej ε, poprowadzonej z punktu S do stożkowej K_1^2, odpowiada w pęku S' promień ε', styczny do stożkowej K_2^2, a nadto, że stycznym μ i ν, dającym się poprowadzić z punktu W do stożkowej C_2^2, odpowiadają styczne μ' i ν', poprowadzone z punktu W' do C_2^2. Stycznej ε odpowie w pęku W promień podwójny $\varepsilon_{1,2}$, a temu w pęku T para promieni podwójnych $e_{1,2}$, $e_{3,4}$; stycznej ε' odpowie w pęku W' promień podwójny $\varepsilon'_{1,2}$, któremu znowu w pęku T' odpowiada para promieni podwójnych $e_{1,2}'$, $e_{3,4}'$. Stycznym μ i ν w pęku T odpowiadają promienie podwójne $m_{1,2}$ i $n_{1,2}$ — zaś styczne μ' i ν' dają parę promieni podwójnych $m_{1,2}'$ i $n_{1,2}'$ w pęku T'. Promienie podwójne $e_{1,2}$, $e_{3,4}$ przecinają się z promieniami podwójnemi $e_{1,2}'$ i $e_{3,4}'$ w czterech punktach podwójnych krzywej, utworzonej przez pęki T i T', następnie promień podwójny $m_{1,2}$ przetnie promień $m_{1,2}$ również w punkcie podwójnym krzywej, a wreszcie przecięcie się promieni podwójnych $n_{1,2}$ i $n_{1,2}'$ będzie szóstym punktem podwójnym krzywej C^8. Przy poczynionych założeniach dwa jednokreślne pęki względnie szeregi inwolucyjne stopnia czwartego utworzą:

krzywą rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i sześcioma punktami podwójnemi. Krzywa ta jest klasy dwudziestej, należy do krzywych rodzaju trzeciego, posiada 36 punktów przecięcia i 132 styczne podwójne.

krzywą klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i sześcioma stycznemi podwójnemi. Krzywa ta jest rzędu dwudziestego, należy do krzywych rodzaju trzeciego, posiada 36 punktów zwrotu i 132 punkty podwójne.

VII. Niechaj w dalszym ciągu, stycznej ε, poprowadzonej z punktu S do stożkowej K_1^2, odpowiada w pęku S' promień ε', styczny do stożkowej K_2^2. Niechaj nadto stycznej μ, dającej się poprowadzić z punktu W do krzywej C_2^2, odpowiada styczna μ', poprowadzona z punktu W' do C_2^2, a w końcu niech równocześnie drugiej stycznej φ, poprowadzonej z punktu S do K_1^2, odpowiada w pęku S' prosta ν', przechodząca przez punkt W' i stykająca się równocześnie z C_2^2 w punkcie $N_{1,2}$. Prosta ε, wyznacza w pęku T parę promieni podwójnych $e_{1,2}$, $e_{3,4}$, odpowiadających jednokreślnie parze

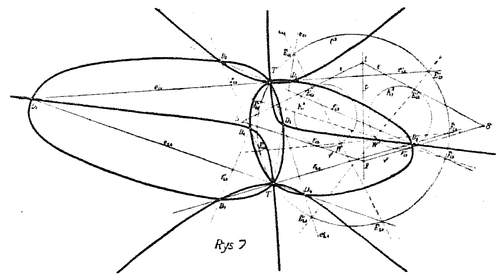
promieni podwójnych $e_{1,2}'$, $e_{3,4}'$, wyznaczonych przez styczną ε'. Promienie μ i μ' wyznaczają w obu pękach również parę promieni podwójnych $m_{1,2}$ i $m_{1,2}'$. Styczna φ wyznacza wreszcie parę promieni podwójnych $f_{1,2}$, $f_{3,4}$ w pęku T, a odpowiadający stycznej φ promień ν' wyznacza w pęku T' promień podwójny $n_{1,2}'$.

Przecięcie się wszystkich tych odpowiadających sobie promieni podwójnych da siedm punktów podwójnych krzywej rzędu ósmego.

Krzywa rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i siedmioma punktami podwójnemi jest krzywą klasy ośmnastej, należy do krzywych rodzaju drugiego, posiada 30 punktów przegięcia i 104 styczne podwójne.

Krzywa klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i siedmioma stycznemi podwójnemi jest krzywą rzędu ośmnastego, należy do krzywych rodzaju drugiego, posiada 30 punktów zwrotu i 104 punkty podwójne.

VIII. Załóżmy, że stycznym ε, φ, poprowadzonym z punktu S do stożkowej K_1^2, odpowiadają styczne ε' i φ' do stożkowej K_2^2, z punktu S' poprowadzone. Parze promieni ε i φ odpowiedzą w pęku inwolucyjnym W promienie podwójne $\varepsilon_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ — a tym znowu w pęku T czwórka promieni podwójnych $e_{1,2}$, $e_{3,4}$, $f_{1,2}$, $f_{3,4}$. Podobnie promieniom ε' i φ' odpowiadają



Rys. 7

w pęku W' promienie podwójne $\varepsilon_{1,2}'$, $\varphi_{1,2}'$, które wyznaczają w pęku inwolucyjnym T' czwórkę elementów podwójnych $e_{1,2}'$ $e_{3,4}'$, $f_{1,2}'$ $f_{3,4}'$. Punkty przecięcia się par owych promieni podwójnych będą punktami podwójnemi krzywej, jako utworu pęków inwolucyjnych o wierzchołkach T i T'. (Rys. 7).

Utworem dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego w takiem wzajemnem położeniu, że dwom parom promieni podwójnych w jednym pęku odpowia-

Utworem dwóch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego w takiem wzajemnem położeniu, że dwom parom punktów podwójnych w jednym szeregu od-dają dwie pary promieni podwójnych w pęku drugim, jest krzywa rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i ośmioma punktami podwójnemi. Krzywa taka jest klasy szesnastej, należy do krzywych rodzaju pierwszego, posiada 24 punkty przegięcia i 80 stycznych podwójnych.

powiadają dwie pary punktów podwójnych w szeregu drugim, jest krzywa klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i ośmioma stycznemi podwójnemi. Krzywa taka jest rzędu szesnastego, należy do krzywych rodzaju pierwszego, posiada 24 punkty zwrotu i 80 punktów podwójnych.

IX. Niechaj prócz odpowiedniości stycznych ε, φ, ε', φ' w pękach S i S', a więc także odpowiedniości promieni podwójnych $e_{1,2}$, $f_{1,2}$, $e_{1,2}'$, $f_{1,2}'$ w pękach inwolucyjnych W i W', zachodzi odpowiedniość między promieniami μ i μ', dającemi się poprowadzić z punktów W i W' do stożkowej $C_2{}^2$.

Pierwszy warunek daje ośm punktów podwójnych omawianej krzywej rzędu ósmego, drugi wyznacza jeszcze jeden punkt podwójny. Tym sposobem otrzymujemy:

Krzywą rzędu ósmego z dwoma punktami poczwórnemi i dziewięcioma punktami podwójnemi. Krzywa ta jest klasy czternastej, należy do krzywych rodzaju zerowego, czyli t. zw. krzywych jednobieżnych, posiada 18 punktów przegięcia i 60 stycznych podwójnych.

Krzywa klasy ósmej z dwiema stycznemi poczwórnemi i dziewięcioma stycznemi podwójnemi. Krzywa ta jest rzędu czternastego, należy do krzywych rodzaju zerowego, czyli t. zw. krzywych jednobieżnych, posiada 18 punktów zwrotu i 60 punktów podwójnych.

X. Wszystkie omawiane dotąd krzywe posiadają dwa punkty poczwórne. Przyjmijmy w dalszym ciągu naszego rozumowania, że inwolucye T i T' mają elementy poczwórne; załóżmy w dalszym ciągu, że elementowi poczwórnemu $e_{1,2,3,4}$ pęku T odpowiada element poczwórny $e_{1,2,3,4}$ w pęku T'. Punkt przecięcia się T'' tych promieni poczwórnych będzie punktem poczwórnym krzywej C^8. (Rys. 8).

Utworem dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego, w których para promieni poczwórnych odpowiada sobie, jest krzywa rzędu ósmego z trzema punktami poczwórnemi.

Krzywa ta jest klasy dwudziestej, należy do krzywych rodzaju trzeciego, posiada 36 punktów przegięcia i 132 styczne podwójne.

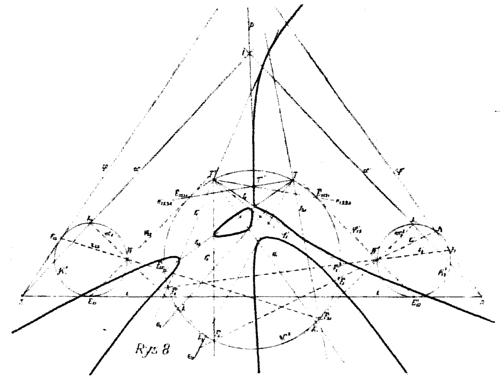
Utworem dwóch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego, w których para punktów poczwórnych odpowiada sobie, jest krzywa klasy ósmej z trzema stycznemi poczwórnemi.

Krzywa ta jest rzędu dwudziestego, należy do krzywych rodzaju trzeciego, posiada 36 punktów zwrotu i 132 punkty podwójne.

XI. Niechaj prócz pary elementów poczwórnych odpowiada sobie w obu pękach para promieni podwójnych (I),—to utworzona

przez pęki T, T' krzywa C^8 posiadać będzie trzy punkty poczwórne i jeden punkt podwójny. Jest to krzywa klasy ośmnastej rodzaju drugiego, posiada 30 punktów przegięcia i 104 styczne podwójne.

przez szeregi t, t' krzywa C_8 posiadać będzie trzy styczne poczwórne i jedną styczną podwójną. Jest to krzywa rzędu ośmnastego rodzaju drugiego, posiada 30 punktów zwrotu i 104 punkty podwójne.



XII. Niechaj wzajemne położenie jednokreślnych pęków inwolucyjnych T i T' będzie tego rodzaju, że elementowi poczwórnemu i parze elementów podwójnych (II) w jednym pęku odpowiadają odpowiednio element poczwórny i para elementów podwójnych w pęku drugim. Otrzymamy w tym przypadku:

krzywą C^8 z trzema punktami poczwórnemi i dwoma punktami podwójnemi. Będzie to krzywa klasy szesnastej rodzaju pierwszego, posiadająca 24 punkty przegięcia i 80 stycznych podwójnych.

krzywą C_8 z trzema stycznemi poczwórnemi i dwiema stycznemi podwójnemi. Będzie to krzywa rzędu szesnastego, rodzaju pierwszego, posiadająca 24 punkty zwrotu i 80 punktów podwójnych.

XIII. Przyjmijmy wreszcie, że elementowi poczwórnemu w jednym pęku odpowiada taki sam element w pęku drugim, a nadto, że zachodzi odpowiedniość między elementami podwójnemi, omówiona w ustępie III tej Części. Otrzymamy krzywą C^8 z trzema punktami poczwórnemi i trzema punktami podwójnemi, a więc krzywą klasy czternastej, rodzaju zerowego, posiadająca 18 punktów przegięcia i 60 stycznych podwójnych.

krzywą C_8 z trzema stycznemi poczwórnemi i trzema stycznemi podwójnemi, a więc krzywą rzędu czternastego, rodzaju zerowego, posiadającą 18 punktów zwrotu i 16 punktów podwójnych.

E. Krzywe rzędu ósmego, rozpadające się na krzywe rzędów niższych.

13. Promieniowi, łączącemu wierzchołki T i T' jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego, uważanemu za element jednego z tych pęków, odpowiada czwórka promieni w pęku drugim, której żaden element nie zlewa się z promieniem TT'.

I. Przyjmijmy położenie pęków T i T' tego rodzaju, że promieniowi TT' jako elementowi pęku T odpowiadają cztery promienie w pęku T', z których jeden przechodzi przez wierzchołek T. Takie położenie jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego, w którem element jednego pęku zlewa się z odpowiadającym mu elementem w pęku drugim, nazwiemy położeniem półperspektywicznem pierwszego rodzaju.

Konstrukcyjnie otrzymamy takie pęki wówczas, gdy promieniowi $W'T$ w pęku inwolucyjnym W' odpowie jednokreślnie promień WT' w pęku W.

Prosta TT', w której schodzi się para odpowiednich promieni dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego, stanowi część krzywej rzędu ósmego, jako utworu tych pęków. Zatem:

Utworem dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego w położeniu półperspektywicznem rodzaju pierwszego jest krzywa rzędu ósmego, rozpadająca się na prostą i krzywą rzędu siódmego C^7, która w wierzchołkach T i T' posiada punkty potrójne. Ponieważ punkt potrójny jest zespoleniem trzech punktów podwójnych, więc krzywa C^7 jest klasy trzydziestej, rodzaju dziewiątego.

Utworem dwóch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego w położeniu półperspektywicznem rodzaju pierwszego jest krzywa klasy ósmej, rozpadająca się na punkt i krzywą klasy siódmej C_7, która w podstawach t i t' posiada styczne potrójne. Ponieważ styczna potrójna jest zespoleniem trzech stycznych podwójnych, więc krzywa C_7 jest rzędu trzydziestego, rodzaju dziewiątego.

Przy zachowaniu powyżej określonego położenia pęków T i T', przyjąć możemy, że w pękach tych zachodzi odpowiedniość między elementami podwójnemi, omówiona w Części poprzedniej. Otrzymamy więc krzywą C^7

z jednym, dwoma, trzema, czterema, pięcioma, sześcioma, siedmioma, ośmioma i dziewięcioma punktami podwójnemi.

Jeżeli założymy, że promieniowi poczwórnemu w jednym pęku odpowiada taki sam promień w pęku drugim, to krzywa C^7, prócz dwóch punktów podwójnych, posiada jeden punkt poczwórny. Obok punktu poczwórnego posiadać może krzywa C^7 z dwoma punktami potrójnemi jeszcze trzy punkty podwójne.

II. Przyjmijmy następnie, że element podwójny jednego pęku zlewa się z odpowiadającym mu elementem podwójnym w pęku drugim. Takie położenie jednokreślnych pęków inwolucyjnych nazywać będziemy położeniem półperspektywicznem rodzaju drugiego.

Prosta TT', na której przypada para odpowiednich promieni podwójnych, stanowi część krzywej rzędu ósmego, utworzonej przez jednokreślne pęki inwolucyjne stopnia czwartego. Krzywa zatem C^8 składać się będzie z prostej podwójnej TT' i krzywej rzędu szóstego C^6, która w wierzchołkach T i T' ma punkty podwójne.

Utworem dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego w położeniu półperspektywicznem rodzaju drugiego jest krzywa rzędu ósmego, rozpadająca się na prostą podwójną i krzywą rzędu szóstego C^6. Jeżeli co do wzajemnych położeń obu pęków nie poczyniliśmy żadnych dalszych założeń, to otrzymana krzywa C^6 posiada w wierzchołkach T i T' punkty podwójne. Krzywa ta jest klasy dwudziestej szóstej, rodzaju ósmego.

Utworem dwóch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego w położeniu półperspektywicznem rodzaju drugiego jest krzywa klasy ósmej, rozpadająca się na punkt podwójny i krzywą klasy szóstej C_6. Jeżeli co do wzajemnych położeń obu szeregów nie poczyniliśmy żadnych dalszych założeń—to otrzymana krzywa C_6 posiada w podstawach t t' styczne podwójne. Krzywa ta jest rzędu dwudziestego szóstego, rodzaju ósmego.

Jeżeli w dalszym ciągu przyjmiemy, że promień, względnie promienie podwójne w obu pękach odpowiadają sobie, to krzywa C^6, prócz punktów podwójnych w wierzchołkach T i T' pęków inwolucyjnych, posiada dalsze punkty podwójne, których liczba dochodzić może do dziesięciu. Wywołanie dalszych punktów podwójnych pociągnie za sobą rozpadnięcie się krzywej C^6 na krzywe rzędów niższych.

Jeżeli przyjmiemy, że para promieni poczwórnych w obu pękach odpowiada sobie jednokreślnie, to punkt przecięcia się tych promieni będzie punktem poczwórnym krzywej C^6.

Otrzymamy tym sposobem krzywą rzędu szóstego C^6 z dwoma pun-

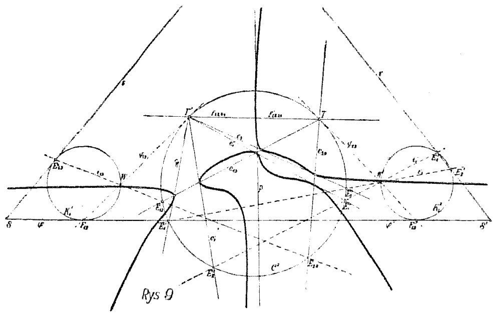
Otrzymamy tym sposobem krzywą klasy szóstej C_6 z dwiema styczktami podwójnemi i jednym punktem poczwórnym.

Krzywa ta jest klasy czternastej, rodzaju drugiego.

nemi podwójnemi i jedną styczną poczwórną.

Krzywa ta jest rzędu czternastego, rodzaju drugiego.

Prócz punktów podwójnych w wierzchołkach T i T' pęków inwolucyjnych i jednego punktu poczwórnego, posiadać może krzywa C^6 jeszcze jeden lub dwa dalsze punkty podwójne, jako punkty przecięcia się odpowiadających sobie promieni podwójnych w obu pękach.



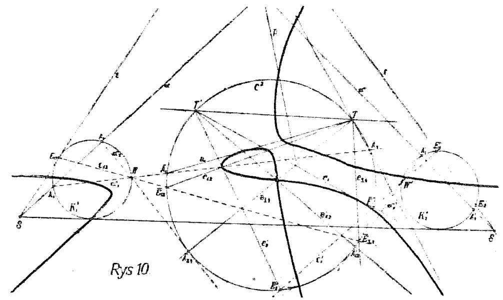
Rys. 9

III. Niechaj dwie jednokreślne inwolucye stopnia czwartego rodzaju zerowego posiadają po jednym elemencie poczwórnym i niech elementy te zlewają się. Położenie, odpowiadające temu założeniu, nazywać będziemy położeniem półperspektywicznem rodzaju trzeciego. Element, w którym schodzi się para odpowiednich elementów poczwórnych obu jednokreślnych inwolucyj, stanowi część krzywej, przez inwolucje te utworzonej. (Rys. 9).

Utworem dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych stopnia czwartego w położeniu półperspektywicznem rodzaju trzeciego jest krzywa rzędu ósmego, rozpadająca się na prostą poczwórną, łączącą wierzchołki T i T' pęków i krzywą rzędu czwartego C^4. Przez punkty T i T' nie przejdzie żadna gałąź krzywej C^4, która nie posiada wskutek tego żadnych punktów wielokrotnych, jest więc ogólną krzywą rzędu czwartego, zatem krzywą klasy dwunastej a rodzaju trzeciego.

Utworem dwóch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych stopnia czwartego w położeniu półperspektywicznem rodzaju trzeciego jest krzywa klasy ósmej, rozpadająca się na punkt poczwórny, jako punkt przecięcia się podstaw t i t' szeregów i krzywą klasy czwartej C_4. Styczne t i t' nie będą elementami żadnej gałęzi krzywej C_4, która nie posiada wskutek tego żadnych stycznych wielokrotnych, jest więc ogólną krzywą klasy czwartej, zatem krzywą rzędu dwunastego a rodzaju trzeciego.

Jeżeli w dalszym ciągu przyjmiemy, że jeden, dwa lub trzy promienie podwójne w pękach T i T' odpowiadają sobie, to punkty przecięcia się tych promieni będą punktami podwójnemi krzywej C^4. W ten sposób otrzymamy krzywą rzędu czwartego z jednym (rys. 10), dwoma lub trzema punktami podwójnemi, która wraz z prostą poczwórną TT' daje krzywą C^8.



Rys 10

Gdy przyjmiemy dalszą odpowiedniość elementów podwójnych w pękach T i T', to i krzywa C^4 rozpadnie się również najpierw na dwie stożkowe, potem na dwie proste i stożkową, a w końcu na cztery proste, które oznaczać będą krzywą rzędu czwartego z sześcioma punktami podwójnemi.

F. O utworach: pęków i szeregów inwolucyjnych, stopnia czwartego, jednokreślnych z pękami i szeregami inwolucyjnemi stopnia drugiego.

14. Przyjmijmy pęk inwolucyjny stopnia czwartego, który niechaj będzie ogniwem końcowem następującego łańcucha:

$$S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \overline{\wedge} K_1^2 (A_1 A_2, B_1 B_2, \ldots) \overline{\wedge} W(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \ldots)$$

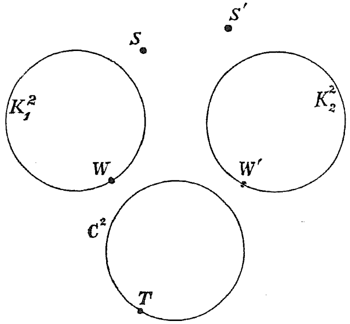
$$\overline{\wedge} C^2 (\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4, \overline{B}_1 \overline{B}_2 \overline{B}_3 \overline{B}_4, \ldots) \overline{\wedge} T(a_1 a_2 a_3 a_4, b_1 b_2 b_3 b_4, \ldots).$$

Obierzmy następnie pęk inwolucyjny stopnia drugiego, jako ogniwo końcowe w łańcuchu:

$$S'(\alpha', \beta', \gamma', \ldots) \overline{\wedge} K_2^2 (A_1' A_2', B_1' B_2', \ldots) \overline{\wedge} W'(\alpha_1' \alpha_2', \beta_1' \beta_2', \gamma_1' \gamma_2', \ldots).$$

Niechaj pęk $S(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$ będzie jednokreślny z pękiem $S'(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$, to wówczas każdej parze $\alpha_1' \alpha_2'$ promieni pęku W' odpowiada czwórka $a_1 a_2 a_3 a_4$, promieni w pęku inwolucyjnym stopnia czwartego T. Pęk inwolucyjny stopnia drugiego W' jest jednokreślny z pękiem inwolucyjnym stopnia czwartego T.

Wyrazimy to w następującem schematycznem zestawieniu:

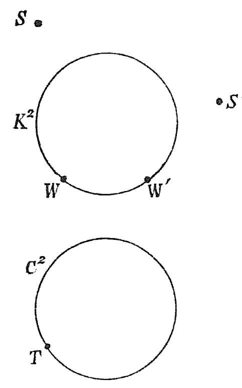


$$\begin{array}{ccc}
S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots.) & \overline{\wedge} & S'(\alpha', \beta', \gamma', \ldots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
K_1^2(A_1 A_2, B_1 B_2 \ldots) & \overline{\wedge} & K_2^2(A_1' A_2', B_1' B_2', \ldots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
W(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \ldots) & \overline{\wedge} & W'(\alpha_1' \alpha_2', \beta_1' \beta_2', \ldots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
C^2(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4, \overline{B}_1, \ldots) & \overline{\wedge} & W'(\alpha_1' \alpha_2', \beta_1' \beta_2', \ldots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
T(a_1 a_2 a_3 a_4, \ldots) & \overline{\wedge} & W'(\alpha_1' \alpha_2', \beta_1' \beta_2' \ldots).
\end{array}$$

15. Szeregi inwolucyjne punktów stopnia drugiego:

$$K_1^2(A_1 A_2, B_1 B_2 \ldots) \overline{\wedge} K_2^2(A_1' A_2', B_1' B_2' \ldots),$$

które obraliśmy na dwóch podstawach, złączyć można na jednej K^2, a schematyczne przedstawienie naszego łańcucha będzie następujące:



$$\begin{array}{ccc}
S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) & \overline{\wedge} & S'(\alpha', \beta', \gamma', \ldots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
K^2(A_1 A^2, B_1 B_2, \ldots) & \overline{\wedge} & K^2(A_1' A'_2, B_1' B_2', \ldots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
W(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \ldots) & \overline{\wedge} & W'(\alpha_1' \alpha_2', \ldots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
C^2(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{B}_1, \ldots) & \overline{\wedge} & W'(\alpha_1' \alpha_2', \beta_1' \beta_2', \ldots) \\
\| & & \| \\
\overline{\wedge} & & \overline{\wedge} \\
\| & & \| \\
T(a_1 a_2 a_3 a_4, b_1 b_2 \ldots) & \overline{\wedge} & W'(\alpha_1' \alpha_2', \beta_1' \beta_2', \ldots)
\end{array}$$

16. Do dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych, z których jeden jest stopnia drugiego, drugi czwartego, dojdziemy wprost z schematów (ust. 6, str. 70), jeśli tylko założymy, że jeden z pęków W lub W' jest pękiem inwolucyjnym stopnia drugiego, parabolicznym.

17. Każda para $\alpha_1' \alpha_2' \ldots$ promieni pęku W' przetnie się z odpowiednią czwórką $a_1 a_2 a_3 a_4$, promieni pęku T w ośmiu punktach; a miejscem geometrycznem tych punktów będzie krzywa, która, jak to wynika wprost z zasady odpowiedniości (Korrespondenzprincip) Chasles'a[1]), będzie krzywą rzędu szóstego.

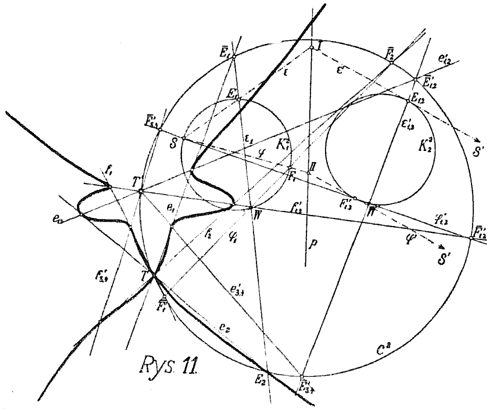
W celu wyznaczenia rzędu krzywej, otrzymanej jako miejsce geometryczne punktów przecięcia się par promieni $\alpha_1' \alpha_2'$; $\beta_1' \beta_2' \ldots$ z odpowiadającemi im czwórkami $a_1 a_2 a_3 a_4$, $b_1 b_2 b_3 b_4, \ldots$, przetnijmy pęki T, W' dowolną prostą m, a przyjąwszy stożkową C^2, rzućmy na nią, z dowolnego jej punktu P, szeregi otrzymane na prostej m. Środek W szeregu inwolucyjnego stopnia czwartego na podstawie C^2 jest wierzchołkiem pęku inwolucyjnego stopnia drugiego, zaś środek S' szeregu inwolucyjnego stopnia drugiego, leżącego na wspólnej z poprzednim podstawie C^2, jest wierzchołkiem zwyczajnego pęku promieni. Pęki W i S' są jednokreślne, w tem rozumieniu tego słowa, że każdej parze promieni pierwszego z nich odpowiada jeden promień w pęku drugim, zaś każdemu promieniowi w pęku S' odpowiada para promieni w pęku inwolucyjnym o wierzchołku W.

Przez punkty W i S' poprowadźmy dowolną stożkową C_1^2, znajdźmy środek S szeregu inwolucyjnego powstałego z przecięcia się pęku W ze stoż-

1) M. Chasles: Comptes rendus 1864.

kową C_1^2, zaś pęk S' uważajmy za pęk inwolucyjny paraboliczny, którego środkiem będzie dowolny punkt krzywej C_1^2.

Utworem jednokreślnych pęków W i S' jest krzywa rzędu trzeciego C^3, z punktem podwójnym w punkcie W[1]; krzywa ta przetnie stożkową C^2 w sześciu punktach, które, rzucone z punktu P na prostą m, wyznaczają rząd badanej krzywej.



Rys. 11.

Promieniowi, łączącemu wierzchołki W' i T, uważanemu za element pęku W, odpowiadają w pęku T cztery promienie, przecinające $W'\,T$ czterokrotnie w punkcie T, który wskutek tego jest punktem poczwórnym krzywej C^6. Zatem:

Utworem dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych, z których jeden jest stopnia drugiego, drugi stopnia czwartego, jest krzywa rzędu szóstego C^6 z punktem podwójnym w wierzchołku pęku stopnia drugiego i z punktem poczwórnym w wierzchołku stopnia czwartego. Krzywa ta więc jest klasy szesnastej, rodzaju trzeciego. (Rys. 11).

Utworem dwóch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych, z których jeden jest stopnia drugiego, drugi stopnia czwartego, jest krzywa klasy szóstej C_6 ze styczną podwójną w podstawie szeregu stopnia drugiego i ze styczną poczwórną w podstawie szeregu stopnia czwartego. Krzywa ta jest więc rzędu szesnastego, rodzaju trzeciego.

18. Elementy podwójne, zarówno w pęku W, jak i T mogą być wszystkie rzeczywiste lub też parami urojone. W szczególności przyjmijmy, że:

[1]) „Wektor" rocznik **1**, str. 411.

I. W obu pękach wszystkie promienie podwójne są urojone.

Każdej parze elementów w pęku W' odpowie czwórka rzeczywistych elementów w pęku T, i naodwrót. Zatem także promieniowi $W'\,T$, uważanemu za element pęku T, odpowie w pęku W' zawsze para promieni rzeczywistych, podobnie jak promieniowi $W'\,T$, uważanemu za element pęku W', odpowie w pęku T czwórka promieni rzeczywistych. W tym więc przypadku będzie:

punkt W' takim punktem podwójnym, przez który przechodzą dwie rzeczywiste gałęzie krzywej C^6, punkt zaś T właściwym punktem poczwórnym tej krzywej.

prosta w' taką styczną podwójną, z którą stykają się dwie rzeczywiste gałęzie krzywej C_6, prosta zaś t właściwą styczną poczwórną tej krzywej.

II. Pęk W' jest pękiem hyperbolicznym, zaś w pęku T jedna para promieni podwójnych jest rzeczywista, dwie zaś urojone.

Zajść tu mogą następujące położenia obu pęków: a) promieniowi $W'\,T$, uważanemu za element pęku T, odpowie w pęku W' para promieni rzeczywistych, albo b) para promieni urojonych, albo wreszcie c) promień podwójny.

W położeniu a) punkt podwójny W' krzywej C^6 będzie punktem podwójnym, przez który przechodzą dwie gałęzie rzeczywiste krzywej; w położeniu b) punkt W' będzie punktem podwójnym odosobnionym, a w położeniu c) punkt W' przejdzie na punkt zwrotu.

W położeniu a) styczna podwójna w' krzywej C_6 będzie styczną podwójną, z którą stykają się dwie rzeczywiste gałęzie krzywej; w położeniu b) styczna w' będzie styczną odosobnioną, a w położeniu c) styczna w' przejdzie na styczną przegięcia.

Równocześnie promieniowi $W'\,T$, uważanemu za element pęku W', odpowiadają w pęku T: a') cztery promienie rzeczywiste, b') dwa promienie rzeczywiste, dwa urojone, c') cztery promienie urojone, d') dwa promienie pojedyńcze i jeden podwójny i e') dwa promienie podwójne.

W położeniu a') krzywa C^6 posiada w punkcie poczwórnym T cztery styczne rzeczywiste; w położeniu b')—dwie styczne rzeczywiste a dwie urojone, wskutek czego graficznie wyrazi się ten punkt, jako punkt podwójny; w położeniu c')—cztery styczne urojone, czyli punkt po-

W położeniu a') krzywa C_6 posiada na stycznej poczwórnej t cztery rzeczywiste punkty styczności; w położenin b')—dwa punkty styczności rzeczywiste i dwa urojone—co graficznie wyrazi się tem, że styczna poczwórna przedstawi się jako podwójna; w położeniu c') — cztery czwórny jest punktem odosobnionym.

Położenie d') sprawia, że krzywa C^6 posiada w punkcie poczwórnym jeden, a w położeniu e') dwa punkty zwrotu.

punkty styczności urojone, zatem styczna poczwórna będzie odosobniona.

Położenie d') sprawia, że krzywa C_6 posiada w stycznej poczwórnej jedną, a w położeniu e') dwie styczne przegięcia.

III. Pęk W' jest eliptyczny, pęk T ma jednę parę promieni podwójnych rzeczywistych, dwie pary promieni urojonych.

Promieniowi, łączącemu wierzchołki obu pęków, uważanemu za element pęku T, odpowie w tym przypadku w pęku W' para promieni rzeczywistych, która ze względu na charakter tego pęku nie może złączyć się w promień podwójny. Zatem:

Przez punkt podwójny W' krzywej C^6 przechodzą dwie rzeczywiste gałęzie krzywej Co do punktu poczwórnego, to zachodzić tu mogą wszystkie przypadki, wymienione pod II.

Styczna podwójna w' krzywej C_6 dotyka dwóch rzeczywistych gałęzi tej krzywej. Co do stycznej poczwórnej, to zachodzą tu wszystkie przypadki, wymienione pod II.

IV. Pęk W' jest hyperboliczny; wszystkie promienie podwójne w pęku T są urojone.

Punkt podwójny W', podobnie jak w II, może być: a) właściwym punktem podwójnym, b) punktem podwójnym odosobnionym, c) punktem zwrotu.

Stycznna podwójna w', podobnie jak w II, może być: a) właściwą styczną podwójną, b) styczną podwójną odosobnioną, c) styczną przegięcia.

Natomiast promieniowi $W'T$, uważanemu za element pęku W', odpowiadają w tym przypadku cztery promienie rzeczywiste—a więc:

Przez punkt poczwórny T przechodzą cztery rzeczywiste gałęzie krzywej C^6.

Styczna poczwórna t dotyka zawsze czterech rzeczywistych gałęzi krzywej C_6.

V. Pęk W' jest hyperboliczny, pęk T posiada dwie pary promieni podwójnych rzeczywistych, jednę urojoną.

Co do charakteru punktów podwójnego i poczwórnego, to powtórzą się tutaj przypadki, wymienione pod II str. 93.

VI. Pęk W' jest eliptyczny, pęk T posiada dwie pary promieni podwójnych rzeczywistych, jednę urojoną.

Podobnie, jak w I, przez punkt podwójny W' przejdą dwie rzeczywiste gałęzie krzywej C^6.

Podobnie, jak w I, styczna podwójna w' dotyka czterech rzeczywistych gałęzi krzywej C_6.

Punkt poczwórny, względnie styczna poczwórna, wystąpią jak w II.

VII. Pęk W' jest hyperboliczny, pęk T posiada wszystkie trzy pary promieni podwójnych rzeczywistych.

Do punktów W' i T, względnie stycznych w' i t, odnoszą się uwagi, poczynione w ust. II.

VIII. Pęk W' jest eliptyczny, pęk T posiada wszystkie pary promieni podwójnych rzeczywistych.

Zachodzi tu ta sama liczba możliwych przypadków, co w III.

IX. Pęk W' jest hyperboliczny, pęk T posiada jeden promień poczwórny—a jeden, względnie trzy promienie podwójne rzeczywiste.

Punkty W' i T przyjąć mogą charaktery, wymienione pod II.

X. Pęk W' jest eliptyczny, pęk T posiada jeden promień poczwórny—a jeden, względnie trzy promienie podwójne rzeczywiste.

Punkt W', jak w I—punkt T, jak w II.

19. W dotychczasowych rozważaniach naszych, odnoszących się do krzywej, utworzonej z dwóch jednokreślnych pęków inwolucyjnych, z których jeden jest stopnia drugiego, drugi czwartego—przyjmowaliśmy, że promieniom podwójnym w jednym pęku odpowiadają promienie pojedyńcze w pęku drugim.

Położenie pęków $W'T$ może jednak być takie, że promieniowi podwójnemu w pęku W' odpowiada jeden, względnie dwa promienie podwójne w pęku T. Punkty przecięcia się odpowiadających sobie promieni podwójnych będą punktami podwójnemi krzywej C^6. W ten sposób dochodzimy do następujących krzywych:

I. Jeżeli położenie pęków W' i T jest tego rodzaju, że promieniowi podwójnemu w jednym odpowiada promień podwójny w pęku drugim—to krzywa otrzymana, rzędu szóstego, posiada jeden punkt poczwórny i dwa punkty podwójne. Krzywa ta jest klasy 14-ej, rodzaju drugiego.

II. Gdy promieniowi podwójnemu w pęku W' odpowiadają dwa promienie podwójne w pęku T, to krzy-

I'. Jeżeli położenie szeregów w' i t jest tego rodzaju, że punktowi podwójnemu w jednym odpowiada punkt podwójny w szeregu drugim—to otrzymana krzywa klasy szóstej posiada jedną styczną poczwórną i dwie styczne podwójne. Krzywa ta jest rzędu 14-go, rodzaju drugiego.

II'. Gdy punktowi podwójnemu w szeregu w' odpowiadają dwa punkty podwójne w szeregu t, to krzywa C^6 posiadać będzie prócz punktu poczwórnego trzy punkty podwójne. Krzywa taka jest klasy dwunastej, rodzaju pierwszego.

III. Gdy w końcu jednemu promieniowi podwójnemu w pęku W' odpowie takiż promień w pęku T, drugiemu zaś promieniowi podwójnemu para promieni podwójnych w pęku T, to otrzymamy krzywą C^6, która, prócz punktu poczwórnego, posiada cztery punkty podwójne. Jest to krzywa klasy dziesiątej rodzaju zerowego, a więc krzywa jednobieżna.

wa C_6 posiadać będzie prócz stycznej poczwórnej trzy styczne podwójne. Krzywa taka jest rzędu dwunastego, rodzaju pierwszego.

III'. Gdy w końcu jednemu punktowi podwójnemu w szeregu w' odpowie takiż punkt w szeregu t, drugiemu zaś punktowi podwójnemu para punktów podwójnych w szeregu t, to otrzymamy krzywą C_6, która, prócz stycznej poczwórnej, posiada cztery styczne podwójne. Jest to krzywa rzędu dziesiątego rodzaju zerowego, a więc krzywa jednobieżna.

20. W ustępie 10 (str. 76) zwróciliśmy uwagę na to, że styczne w punktach wielokrotnych krzywej, mogą być stycznemi przegięcia, lub stycznemi przegięcia. Odnosi się to także do omawianej tu krzywej. Powołując się na rozumowania, zawarte w ustępie 10, powiemy wprost:

I. Gdy promień, łączący wierzchołki, jest elementem podwójnym pęku T, to krzywa C^6, przez pęki te utworzona, posiada w punkcie podwójnym W' dwa punkty przegięcia.

II. Gdy promień wspólny obu pęków jest elementem pęku W', to krzywa C^6 posiada w punkcie poczwórnym cztery punkty przegięcia.

III. Gdy promień wspólny jest elementem poczwórnym pęku T, to krzywa C^6 posiada w punkcie podwójnym W' dwa punkty przegięcia drugiego rodzaju.

I'. Gdy punkt przecięcia się podstaw jest elementem podwójnym szeregu t, to krzywa C_6, przez szeregi te utworzona, posiada na stycznej podwójnej dwie styczne przegięcia.

II'. Gdy punkt wspólny podstaw w' i t jest elementem podwójnym szeregu w', to krzywa C_6 posiada w stycznej cztery styczne przegięcia.

III'. Gdy punkt wspólny jest elementem poczwórnym szeregu t, to krzywa C_6 posiada w stycznej podwójnej w' dwie styczne przegięcia rodzaju drugiego.

21. Wspomnieć nam wreszcie pozostaje o położeniach półperspektywicznych pęków W' i T.

Z rozważań ustępu 13 (str. 86) wynika wprost:

I. W położeniu półperspektywicznem rodzaju pierwszego krzywa C^5, przez jednokreślne pęki $W'T$ utworzona, rozpada się na prostą i krzywą C^5, posiadającą w wierzchołku pęku stopnia drugiego punkt pojedyńczy — w wierzchołku zaś pęku inwolucyjnego stopnia czwartego T punkt potrójny. Jest to krzywa klasy 14-ej, rodzaju trzeciego.

Prócz punktu potrójnego, krzywa ta posiadać jeszcze może jeden, dwa lub trzy punkty podwójne, które będą punktami przecięcia się promieni podwójnych, odpowiadających sobie w obu pękach.

Odpowiednio do tego zniży się klasa i rodzaj krzywej.

I. W położeniu półperspektywicznem rodzaju pierwszego krzywa C_5, przez jednokreślne szeregi w', t, utworzona rozpadą się na punkt i krzywą C_5, posiadającą w podstawie szeregu stopnia drugiego styczną pojedyńczą, w podstawie zaś szeregu inwolucyjnego stopnia czwartego t styczną potrójną. Jest to krzywa rzędu 14-go, rodzaju trzeciego.

Prócz stycznej potrójnej, krzywa ta posiadać jeszcze może jednę, dwie lub trzy styczne podwójne, które będą prostemi, łączącemi punkty podwójne, odpowiadające sobie na obu podstawach.

Odpowiednio do tego zniży się rząd i rodzaj krzywej.

II. W położeniu półperspektywicznem rodzaju drugiego otrzymamy krzywą rzędu czwartego C^4 z jednym punktem podwójnym; to samo położenie pozwoli na otrzymanie krzywej C^4 z dwoma, a wreszcie z trzema punktami podwójnemi.

II'. W położeniu półperspektywicznem rodzaju drugiego, otrzymamy krzywą klasy czwartej C_4 z jedną styczną podwójną; to samo położenie pozwoli na otrzymanie krzywej C_4 z dwiema, a wreszcie i z trzema stycznemi podwójnemi.

G. Inwolucye stopnia czwartego jednokreślne z pękami i szeregami zwyczajnemi.

22. Przyjmijmy pęk inwolucyjny stopnia czwartego rodzaju zerowego, utworzony jak w ust. 14 (str. 89) według schematu:

$$S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \overline{\wedge} K^2 (A_1 A_2, B_1 B_2, \ldots) \overline{\wedge} W(\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \ldots)$$

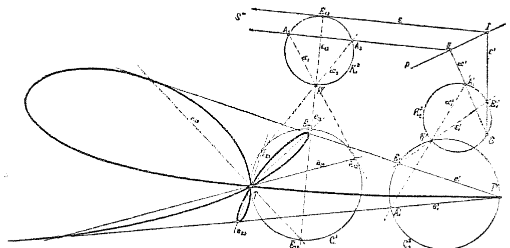
$$\overline{\wedge} C^2 (\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}, \overline{B_1} \overline{B_3} \overline{B_2} \overline{B_4}, \ldots) \overline{\wedge} T (a_1 a_2 a_3 a_4, b_1 b_2 b_3 b_4, \ldots)$$

i zwyczajny pęk promieni $S'(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$, który niechaj będzie jednokreślny z pękiem $S(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.

Każdemu promieniowi w pęku S' odpowie czwórka promieni w pęku T. Powiemy, że pęk promieni $S'(\alpha', \beta', \gamma' \ldots)$ jest jednokreślny z inwolucyjnym pękiem promieni stopnia czwartego.

23. W celu wyznaczenia rzędu krzywej, utworzonej przez pęki T i S', uważajmy pęk $S'(\alpha' \beta' \gamma' \ldots)$ za pęk inwolucyjny paraboliczny, którego środek M obierzemy dowolnie na stożkowej, przechodzącej przez wierzchołek S'. Krzy-

wa w tym przypadku, przez pęki T i S' utworzona, będzie według ust. 17 rzędu szóstego, jednak złożona z prostej MS' i z krzywej rzędu piątego C^5. Przez uwzględnienie jeszcze rozważań w części C przeprowadzonych, dochodzimy do następujących dwoiście odpowiadających sobie praw:



Rys. 12

I. Krzywa, utworzona przez pęki jednokreślne S' i T, jest rzędu piątego, posiadającą w wierzchołku pęku inwolucyjnego T punkt poczwórny; wierzchołek S' pęku promieni jest punktem pojedyńczym krzywej. Krzywa ta jest klasy ósmej, rodzaju zerowego. (Rys. 12).

Zależnie od wzajemnego położenia obu pęków, krzywa posiadać może w punkcie poczwórnym cztery styczne rzeczywiste, dwie rzeczywiste a dwie urojone, cztery urojone, jeden lub dwa punkta zwrotu.

II. W położeniu półperspektywicznem, gdy zatem promień łączący wierzchołki jest elementem odpowiednim w obu pękach, krzywa C^5 rozpadnie się na prostą i krzywą rzędu czwartego z punktem potrójnym w wierzchołku pęku inwolucyjnego stopnia czwartego.

I'. Krzywa, utworzona przez szeregi jednokreślne s' i t, jest klasy piątej i posiadają w podstawie szeregu inwolucyjnego t styczną poczwórną; podstawa s' szeregu punktów jest styczną zwyczajną krzywej. Krzywa ta jest rzędu ósmego, rodzaju zerowego.

Zależnie od wzajemnego położenia obu szeregów, krzywa posiadać może na stycznej poczwórnej cztery punkty styczności rzeczywiste, dwa rzeczywiste a dwa urojone, cztery urojone, jedną lub dwie styczne przegięcia.

II'. W położeniu półperspektywicznem, gdy punkt przecięcia się podstaw jest elementem odpowiednim równocześnie obu podstaw, krzywa C_5 rozpadnie na punkt i krzywą klasy czwartej ze styczną potrójną w podstawie szeregu inwolucyjnego stopnia czwartego.

RÉSUMÉ.

Si dans deux faisceaux en involution de quatrième ordre et de l'espèce nulle, les groupes d'éléments correspondent un à un, les faisceaux en involution sont homographiques et engendrent généralement une courbe d'ordre huit avec deux points multiples d'ordre quatre. Lorsque les rayons multiples de nos faisceaux en involution correspondent un à un, la courbe possède encore plus de points multiples.

Dans la position demi-perspective de première espèce, les faisceaux en involution engendrent une courbe de septième ordre, qui a deux points multiples de troisième ordre; dans la position demi-perspective de seconde espèce les faisceaux en involution produisent une courbe de sixième ordre, qui a deux points doubles, et enfin deux faisceaux en involution de quatrième ordre, dans la position demi-perspective de troisième espèce, engendrent une courbe d'ordre quatre.

Étant donné un faisceau en involution de quatrième ordre et de l'espèce nulle, homographiques d'un faisceau en involution de seconde ordre, ou aura une courbe d'ordre six, ayant un point multiple d'ordre quatre et un point double.

Lorsque, à la place d'un faisceau en involution de seconde ordre, entre un faisceau de droites, la courbe engendrée sera de cinquième ordre avec un point multiple d'ordre quatre.