L. LICHTENSTEIN.

Über eine Anwendung der Theorie quadratischer Formen mit unendlichvielen Variabeln auf ein Randwertproblem der Potentialtheorie.

O pewnem zastosowaniu teoryi form kwadratowych nieskończenie wielu zmiennych do teoryi potencyału.

In seiner fünften Mitteilung zur Theorie der linearen Integralgleichungen[1]) und nachdrücklicher noch in der Arbeit, Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variabeln,[2]) hat Herr Hilbert die Aufgabe gestellt, die Methode der unendlichvielen Variabeln direkt, d. h. ohne Vermittlung der linearen Integralgleichungen in die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen einzuführen. In einer vor kurzem erschienenen grösseren Arbeit[3]) habe ich unter wesentlicher Benutzung der Hilbert'schen Fundamentalsätze über die Hauptachsentransformation vollstetiger quadratischer Formen mit unendlichvielen Variabeln

---

1) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. fünfte Mitteilung, Göttinger Nachrichten, 1906, S. 439–480 insb. S. 439.

2) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, B. **27**, 1909, S. 59–74.

3) Zur Analysis der unendlichvielen Variabeln. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, B. **38**, 1914.

Vgl. ferner meine Noten in den Comptes rendus, B. **157**, 1913, S. 629–632 und 1508–1511 sowie die Arbeiten, Über einige Existenzprobleme der Variatiosrechnung. Methode der unendlichvielen Variabeln, Journal für Mathematik, B. **145**, 1914, S. 24 u. ff. und „Über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = k e^u$ auf geschlossenen Flächen. Methode der unendlichvielen Variabeln, Acta Mathematica, 1914, in denen die Methode unendlichvieler Variabeln auf einige Existenzprobleme der Variationsrechnung und der Theorie automorpher Funktionen angewandt wird.

eine Reihe neuer Sätze über die Entwicklung willkürlicher Funktionen in Reihen, die nach den Sturm-Liouville'schen Fundamentalfunktionen fortschreiten, abgeleitet. In der vorliegenden Arbeit wird die Methode unendlichvieler Variabeln auf das folgende Randwertproblem der Potentialtheorie angewandt.

Wir beziehen die Punkte einer Ebene bald auf die kartesischen Koordinaten ξ und η, bald auf die Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad s = \arccos \frac{\xi}{r} = \arcsin \frac{\eta}{r}.$$

Es sei S der Einheitskreis, T das von ihm begrenzte endliche Gebiet, $l(s)$, $k(s)$ und $h(s)$ gewisse auf S erklärte abteilungsweise stetige Funktionen.

Es wird nun diejenige in T und auf S stetige, in T reguläre Potentialfunktion $u(\xi, \eta) \equiv u(r, s)$ gesucht, die auf S der Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial r} + l u - \lambda k u = h$$

genügt, unter λ einen reellen Parameter verstanden.

Die analoge Aufgabe für ein einfach zusammenhängendes von einer allgemeineren Kurve begrenztes Gebiet lässt sich durch eine konforme Abbildung auf die vorerwähnte zurückführen.

Bekanntlich lässt sich das vorliegende Problem auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückführen. Ist das Vorzeichen der Funktion $k(s)$ beliebig, so gelangt man, wenn beispielsweise $l(s) \equiv 0$ vorausgesetzt wird, zu einer polaren Integralgleichung. Man erhält so Sätze über die Entwicklung willkürlicher, gewissen Bedingungen genügender Funktionen auf S nach den Eigenfunktionen der Integralgleichung.

Weiterreichende Sätze ergibt, wie wir sehen werden, eine direkte Anwendung der Methode unendlichvieler Variabeln. Als Beispiel sei auf dieser Stelle nur der folgende Satz erwähnt:

Es sei $f(s)$ eine auf S erklärte stetige Funktion:

$$f(s) \backsim \sum_i^{1\ldots\infty} f_i \sin is + \sum_i^{0\ldots\infty} f_i' \cos is,$$

die so beschaffen ist, dass die Reihe

$$\sum_i^{1\ldots\infty} i\,(f_i^2 + f_i'^2)$$

konvergiert. Es sei $f(\xi, \eta)$ diejenige in T und auf S stetige, in T reguläre Potentialfunktion, die auf S den Wert $f(s)$ hat. Die zuletzt hingeschriebene Reihe konvergiert, wenn das Integral

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right] d\xi\, d\eta$$

existiert. Es seien λ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ die Eigenwerte des Problems, $\varphi_\alpha(s)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ die den Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} k(s)\,[\varphi_\alpha(s)]^2\, ds = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|},$$

$$\int_0^{2\pi} k(s)\, \varphi_\alpha(s)\, \varphi_\beta(s)\, ds = 0 \qquad (\alpha \neq \beta)$$

gemäss normierten Eigenfunktionen. Es sei endlich $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ diejenige in T und auf S stetige, in T reguläre Potentialfunktion, die auf S gleich $\varphi_\alpha(s)$ ist. Es wird angenommen, dass $l(s) \equiv 0$ ist, $k(s)$ höchstens in einer Menge von Punkten vom Masse Null verschwindet und

$$\int_0^{2\pi} k(s)\, ds \neq 0$$

ist. *Dann gilt die Entwicklung*

$$f(\xi, \eta) - \frac{1}{\int_0^{2\pi} k(s)\, ds} \int_0^{2\pi} k(s)\, f(s)\, ds = \sum_\alpha^{1\ldots\infty} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\, \varphi_\alpha(\xi, \eta) \int_0^{2\pi} k(s)\, f(s)\, \varphi_\alpha(s)\, ds.$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert für alle (ξ, η) in jedem ganz im Innern von T gelegenen Gebiete unbedingt und gleichmässig.

Ist auf S durchweg $k(s) > 0$, so gilt diese Entwicklung sogar für alle auf S stetigen Funktionen $f(s)$. Der Beweis lässt sich unter Zuhilfenahme der Theorie linearer Integralgleichungen unschwer führen. In dem hier vorausgesetzten allgemeineren Falle ist der Beweis weniger naheliegend.

In ähnlicher Weise lassen sich analoge Betrachtungen im Raume durchführen. Dort leistet die Theorie linearer Integralgleichungen weniger als in der Ebene. Der Vorteil einer direkten Anwendung der Methode unendlichvieler Variabeln ist dem entsprechend grösser. Ich beabsichtige auf diesen Gegenstand an einer anderen Stelle ausführlicher einzugehen.

§ 1.

Es sei Θ' ein von einer stetig gekrümmten, doppelpunktlosen, geschlossenen Kurve Σ' begrenztes einfach zusammenhängendes, endliches Gebiet in der Ebene der Variabeln ξ' und η'. Es mögen s' die Bogenlänge der Kurve Σ' und $\frac{\partial}{\partial n'}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale bezeichnen. Sind

(1) $$\xi' = \xi'(s'), \qquad \eta' = \eta'(s')$$

die Gleichungen der Kurve Σ', so wird überdies der Einfachheit halber vorausgesetzt, dass die Funktionen $\xi'(s')$ und $\eta'(s')$ auch noch stetige Ableitungen dritter Ordnung haben. Es seien schliesslich $k'(s')$, $l'(s')$ und $h'(s')$ gewisse auf Σ' erklärte abteilungsweise stetige Funktionen, λ ein reeller Parameter. Wir stellen uns die Aufgabe, diejenige beschränkte, in Θ' reguläre Lösung $u'(\xi', \eta')$ der Differentialgleichung

(2) $$\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta'^2} = 0$$

zu bestimmen, die auf Σ' der Bedingung

(3) $$\frac{\partial u'(s')}{\partial n'} + [l'(s') + \lambda k'(s')]\, u'(s') = h(s')$$

genügt. Der Wert der Funktion $u'(\xi', \eta')$ und deren Normalableitung im Punkte s' auf S' ist hierbei mit $u'(s')$ und $\frac{\partial u'(s')}{\partial n'}$ bezeichnet.

Es sei

$$\zeta' = \xi' + i\eta'$$

und

$$\zeta = \xi + i\eta = \zeta(\zeta') = \xi(\xi', \eta') + i\eta(\xi', \eta')$$

eine analytische Funktion, durch deren Vermittlung das Gebiet Θ' auf die Fläche T des Einheitskreises S in der Ebene der Variabeln ξ und η konform abgebildet werden kann. Wir führen die Polarkoordinaten

(4) $$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad s = \arccos\frac{\xi}{r} = \arcsin\frac{\eta}{r}$$

ein; s ist also die in der positiven Richtung von dem Punkte (1,0) aus gemessene Bogenlänge des Kreises S.

Nach bekannten Sätzen sind die Ableitungen $\frac{d\zeta}{d\zeta'}$ und $\frac{d^2\zeta}{d\zeta'^2}$ in T und auf S stetig; $\left|\frac{d\zeta}{d\zeta'}\right|$ ist daselbst von Null verschieden[1]. Setzt man

(5) $$u'(\xi', \eta') = u(\xi, \eta), \qquad u'(s') = u(s), \qquad k'(s')\left|\frac{d\zeta'}{d\zeta}\right| = k(s),$$
$$l'(s')\left|\frac{d\zeta'}{d\zeta}\right| = l(s), \qquad -h'(s')\left|\frac{d\zeta'}{d\zeta}\right| = h(s)$$

und beachtet, dass

$$\frac{\partial u'(s')}{\partial n'} = -\frac{\partial u(s)}{\partial r}\left|\frac{d\zeta}{d\zeta'}\right|$$

ist, so kann man die soeben genannte Aufgabe durch die folgende ihr äquivalente ersetzen:

Es ist diejenige beschränkte, in T reguläre Lösung $u(\xi, \eta) \equiv u(r, s)$ der Differentialgleichung

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

zu bestimmen, die auf S der Bedingung

(7) $$\frac{\partial u(s)}{\partial r} - [l(s) + \lambda k(s)]\, u(s) = h(s)$$

genügt. Hierin sind $k(s)$, $l(s)$, $h(s)$ gewisse abteilungweise stetige, den Beziehungen

(8) $$l(s + 2\pi) = l(s), \quad k(s + 2\pi) = k(s), \quad h(s + 2\pi) = h(s)$$

genügende Funktionen.[2]

Es sei $v(s)$ eine beliebige nebst ihrer Ableitung auf S stetige Funktion,

(9) $$v(s + 2\pi) = v(s).$$

---

[1]) Vgl. A. Korn, Sur les équations de l'élasticité, Annales de l'Ecole Normale, 1907, S. 9–75, insb. S. 25; L. Lichtenstein, Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus, Math. Annalen **67**, 1909, S. 559—575, insb. S. 561–563.

[2]) Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial u(r, s)}{\partial r}$ beschränkt ist und sich ihrem Grenzwerte $\frac{\partial u(s)}{\partial r}$ in jedem die Unstetigkeitspunkte der Funktionen $l(s)$, $k(s)$, $h(s)$ nicht enthaltenden Teile von S gleichmässig nähert.

Wir setzen in der Bezeichnungsweise des Herrn Hurwitz

$$u(s) \infty \sum_i^{1..\infty} x_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} x_i' \cos is. \tag{10}$$

Die formell hingeschriebene Reihe (10) braucht natürlich nicht zu konvergieren. Dagegen ist gewiss die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1..\infty} x_i^2 + \sum_i^{1...\infty} x_i'^2 \tag{11}$$

konvergent. Wie sich bald zeigen wird, ist überdies

$$\sum_i^{1..\infty} i x_i^2 + \sum_i^{0..\infty} i x_i'^2 \tag{12}$$

konvergent. Da $v(s)$ stetige Ableitung hat, so ist die Reihe

$$v(s) = \sum_i^{1..\infty} y_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} y_i' \cos is \tag{13}$$

gleichmässig konvergent. Die Summe

$$\sum_i^{1..\infty} i^2 y_i^2 + \sum_i^{1..\infty} i^2 y_i'^2 \tag{14}$$

konvergiert.

Es seien $u(\xi, \eta) \equiv u(r, s)$ und $v(\xi, \eta) \equiv v(r, s)$ diejenigen beschränkten, in T regulären Potentialfunktionen, die auf S die Werte $u(s)$ und $v(s)$ annehmen. Nach bekannten Sätzen ist für alle $r < 1$

$$\left.\begin{aligned} u(r, s) &= \sum_i^{1..\infty} r^i x_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} r^i x_i' \cos is, \\ v(r, s) &= \sum_i^{1..\infty} r^i y_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} r^i y_i' \cos is. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Aus (7) folgt für alle $v(s)$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial u(s)}{\partial r} - \{l(s) + \lambda k(s)\} u(s)\right] v(s)\, ds = \int_0^{2\pi} h(s)\, v(s)\, ds. \tag{16}$$

Es ist nun für alle $r < 1$

$$\frac{\partial u(r, s)}{\partial r} = \sum_i^{1..\infty} i r^{i-1} (x_i \sin is + x_i' \cos is), \tag{17}$$

$$\int_0^{2\pi} u(r, s) \frac{\partial u(r, s)}{\partial r} ds = \pi \sum_i^{1..\infty} i r^{2i-1} (x_i^2 + x_i'^2), \tag{18}$$

daher

$$\sum_i^{1..m} i r^{2i-1} (x_i^2 + x_i'^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, s) \frac{\partial u(r, s)}{\partial r} ds \tag{19}$$

und hieraus für $r = 1$

$$\sum_i^{1..m} i (x_i^2 + x_i'^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(s) \frac{\partial u(s)}{\partial r} ds. \tag{20}$$

Die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1..\infty} i (x_i^2 + x_i'^2) \tag{21}$$

ist nach (20) augenscheinlich konvergent. Dem Abel'schen Satze gemäss ist also

$$\int_0^{2\pi} u(s) \frac{\partial u(s)}{\partial r} ds = \pi \sum_i^{1..\infty} i (x_i^2 + x_i'^2). \tag{22}$$

In ähnlicher Weise findet man die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} v(s) \frac{\partial u(s)}{\partial r} ds = \pi \sum_i^{1..\infty} i (x_i y_i + x_i' y_i') = \pi \sum_i^{1..\infty} (X_i Y_i + X_i' Y_i'), \tag{23}$$

$$X_i = \sqrt{i}\, x_i, \quad X_i' = \sqrt{i}\, x_i'; \quad Y_i = \sqrt{i}\, y_i, \quad Y_i' = \sqrt{i}\, y_i' \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Es ist nun weiter, wenn man $X_0' = x_0'$, $Y_0' = y_0'$ setzt und der Einfachheit halber unter $\frac{X_i'}{\sqrt{i}}$, $\frac{Y_i'}{\sqrt{i}}$ für $i = 0$ die Werte X_0', Y_0' versteht,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(s)\, u(s)\, v(s)\, ds = K(X, Y), \tag{25}$$

$$
(26)\quad
\begin{aligned}
K(X,\ Y) &= K_1(X,\ Y) + K_2(X,\ Y) + K_3(X,\ Y) + K_4(X,\ Y),\\
K_1(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i,\,j}^{1..\infty} \frac{X_i Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds,\\
K_2(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i=1..\infty\\ j=0..\infty}} \frac{X_i Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \cos js\, ds,\\
K_3(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i=0..\infty\\ j=1..\infty}} \frac{X_i' Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is \sin js\, ds,\\
K_4(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i,\,j}^{0..\infty} \frac{X_i' Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is \cos js\, ds.
\end{aligned}
$$

Ich behaupte, $K(X,\ Y)$ ist eine vollstetige, symmetrische Bilinearform der unendlichvielen Variabeln X_i, Y_i $(i=1,\ 2,\ldots)$, X_i', Y_i' $(i=0,\ 1,\ldots)$. Zum Beweise betrachten wir z. B. die Form $K_1(X,\ Y)$. Es ist

$$
K_1(X,\ Y) = \frac{1}{\pi} \sum_{i,\,j}^{1..\infty} \frac{X_i Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds
$$

$$
(27)\quad
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \sum_{i}^{1..\infty} \frac{X_i Y_i}{i} \int_0^{2\pi} k(s) \sin^2 is\, ds + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i=1..\infty\\ j<i}} \frac{X_i Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds\\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1..\infty\\ i<j}} \frac{X_i Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds = K_1' + K_1'' + K_1'''.
\end{aligned}
$$

Da die unendliche Reihe

$$
\sum_{i}^{1..\infty} \frac{1}{i^2} \left(\int_0^{2\pi} k(s) \sin^2 is\, ds \right)^2
$$

konvergiert, so ist K_1' gewiss vollstetig.

Es ist ferner, sofern $j < i$ ist,

$$
\frac{1}{\sqrt{i}} < \frac{1}{\sqrt{j}},
$$

daher für alle μ

$$
(28)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i=1..\mu\\ j<i}} \left(\frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds \right)^2 < \sum_{\substack{i=1..\mu\\ j<i}} \frac{1}{j^2} \left(\int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds \right)^2\\
&< \sum_{j}^{1..\mu} \frac{1}{j^2} \sum_{i}^{1..\mu} \left(\int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds \right)^2 < \sum_{j}^{1..\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{i}^{1..\infty} \left(\int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds \right)^2\\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{j}^{1..\infty} \frac{1}{j^2} \int_0^{2\pi} [k(s) \sin js]^2\, ds.
\end{aligned}
$$

Die Summe der Quadrate der Koeffizienten der Form K_1'' konvergiert, mithin ist K_1'' vollstetig. Ebenso überzeugt man sich, dass K_1''', daher auch die Form $K_1(X,\ Y)$ vollstetig ist. In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass jede der Formen K_2, K_3, K_4, somit endlich auch die Form $K(X,\ Y)$ vollstetig ist.

In ganz ähnlicher Weise erhält man

$$
(29)\quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} l(s)\, u(s)\, v(s)\, ds = L(X,\ Y),
$$

$$
(30)\quad
\begin{aligned}
L(X,\ Y) &= L_1(X,\ Y) + L_2(X,\ Y) + L_3(X,\ Y) + L_4(X,\ Y),\\
L_1(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i,\,j}^{1..\infty} \frac{X_i Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} l(s) \sin is \sin js\, ds,\\
L_2(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i=1..\infty\\ j=0..\infty}} \frac{X_i Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} l(s) \sin is \cos js\, ds,\\
L_3(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i=0..\infty\\ j=1..\infty}} \frac{X_i' Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} l(s) \cos is \sin js\, ds,\\
L_4(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i,\,j}^{0..\infty} \frac{X_i' Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} l(s) \cos is \cos js\, ds.
\end{aligned}
$$

Die symmetrische Bilinearform $L(X,\ Y)$ ist vollstetig.

Endlich ist

$$(31)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(s)\,v(s)\,ds &= \frac{1}{\pi}\sum_j^{1..\infty}\frac{Y_j}{\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} h(s)\sin is\,ds\\ &+\frac{1}{\pi}\sum_j^{0..\infty}\frac{Y_j'}{\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} h(s)\cos is\,ds = H(Y).\end{aligned}$$

Da die unendliche Reihe

$$\begin{aligned}&\sum_i^{1..\infty}\frac{1}{j}\left(\int_0^{2\pi} h(s)\sin is\,ds\right)^2+\sum_i^{0..\infty}\frac{1}{j}\left(\int_0^{2\pi} h(s)\cos is\,ds\right)^2\\ &\leqq \sum_i^{1..\infty}\left(\int_0^{2\pi} h(s)\sin is\,ds\right)^2+\sum_i^{0..\infty}\left(\int_0^{2\pi} h(s)\cos is\,ds\right)^2\end{aligned}$$

augenscheinlich konvergiert, so ist auch die Linearform $H(Y)$ vollstetig. Aus (16), (23), (25) und (29) ergibt sich nunmehr die Beziehung

$$(32)\qquad \sum_i^{1..\infty} X_i Y_i + \sum_i^{0..\infty} X_i' Y_i' - L(X, Y) - \lambda K(X, Y) - X_0' Y_0' = H(Y).$$

Sie gilt zunächst für alle $Y_j\,(j=1, 2, ..)$, $Y_j'\,(j=0, 1, ..)$, die einer nebst ihrer Ableitung stetigen, der Beziehung $v(s+2\pi)=v(s)$ genügenden Funktion entspringen, also insbesondere bei beliebigem i für die Wertsysteme

$$Y_j = 0\,(j \neq i), \qquad Y_i = 1, \qquad Y_j' = 0\,(j=0, 1, ..),$$

$$Y_j = 0\,(j=1, 2, ..), \qquad Y_j' = 0\,(j \neq i), \qquad Y_i' = 1.$$

Hieraus folgt aber (32) leicht für alle Y_j, Y_j' mit konvergenter Quadratsumme.

§ 2.

Die sich aus (32) ergebenden unendlichvielen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten gehören dem von Herrn Hilbert am Schluss seiner vierten Mitteilung über die linearen Integralgleichungen behandelten Typus an. [1])

[1]) Vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Vierte Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1906, S. 157-227, insb. S. 218 u. ff.

Es seien $X_i\,(i=1, 2, ..)$, $X_i'\,(i=0, 1, ..)$ die Lösungen dieser Gleichungen mit konvergenter Quadratsumme oder ein System eben solcher Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichungen. Wir beweisen, dass die unendliche Reihe

$$(33)\qquad \sum_i^{1..\infty} i X_i^2 + \sum_i^{0..\infty} i X_i'^2$$

konvergiert.

Wir nehmen $Y_j\,(j=1, 2, ..)$, $Y_j'\,(j=0, 1, ..)$ willkürlich, jedoch so an, dass $\Sigma j\,(Y_j^2+Y_j'^2)$ konvergiert, setzen

$$\frac{Y_j}{\sqrt{j}} = H_j, \qquad \frac{Y_j'}{\sqrt{j}} = H_j'\,(j=1, 2, ..), \qquad Y_0' = H_0'$$

und fassen den Ausdruck

$$(34)\qquad -L(X, Y) - \lambda K(X, Y) - X_0' Y_0' = T(X, Y)$$

zunächst rein formell als eine quadratische Form $\mathfrak{T}(X, H)$ der Variabeln X_i, X_i', H_i, H_i' auf. [1]) Man überzeugt sich nun rasch, dass $\mathfrak{T}(X, H)$ beschränkt ist.

Betrachten wir etwa den n-ten Abschnitt der Form $\mathfrak{K}(X, H) = K(X, Y)$ und setzen

$$(35)\qquad u^{(n)}(x) = \sum_i^{1..n}\frac{X_i}{\sqrt{i}}\sin is + \sum_i^{0..n}\frac{X_i'}{\sqrt{i}}\cos is,$$

$$(36)\qquad \eta^{(n)}(s) = \sum_i^{1..n} H_j \sin js + \sum_i^{0..n} H_j'\cos js.$$

Wir finden

$$(37)\qquad [K(X, Y)]_n = [\mathfrak{K}(X, H)]_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\,u^{(n)}(s)\,\eta^{(n)}(s)\,ds,$$

daher der Schwarz'schen Ungleichheit zufolge

$$(38)\qquad [\mathfrak{K}(X, H)]_n^2 \leqq \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{Max}\,|k(s)|^2\int_0^{2\pi}[u^{(n)}(s)]^2\,ds\int_0^{2\pi}[\eta^{(n)}(s)]^2\,ds.$$

[1]) Unter $X_i\,(i=1, 2, ..)$, $X_i'\,(i=0, 1, ..)$ werden also jetzt zunächst nicht die soeben gefundenen Lösungen, sondern willkürliche variable Grössen mit konvergenter Quadratsumme verstanden.

Nimmt man

$$(39)\qquad \sum_i^{1..n} X_i^2 + \sum_i^{0..n} X_i'^2 = 1, \quad \sum_j^{1..n} H_j^2 + \sum_j^{0..n} H_j'^2 = 1$$

an, so erhält man

$$(40)\qquad \int_0^{2\pi} [\eta^{(n)}(s)]^2\, ds = \pi\left[2H_0'^2 + \sum_i^{1..n} (H_i^2 + H_i'^2)\right] \leqq 2\pi,$$

$$(41)\qquad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} [u^{(n)}(s)]^2\, ds &= \pi\left[2X_0'^2 + \sum_i^{1..n} \frac{1}{i}(X_i + X_i'^2)\right] \\ &\leqq \pi\left[2X_0'^2 + \sum_i^{1..n} (X_i^2 + X_i'^2)\right] \leqq 2\pi. \end{aligned}$$

Aus (38), (40) und (41) folgt nunmehr

$$(42)\qquad [\mathfrak{K}(X, H)]_n^2 \leqq 4\,\mathrm{Max}\,[k(s)]^2.$$

Die Form $\mathfrak{K}(X, H)$ ist beschränkt. In ähnlicher Weise überzeugt man sich überhaupt, dass auch $\mathfrak{T}(X, H)$ beschränkt ist.

Betrachten wir jetzt $\mathfrak{T}(X, H) - H(Y)$ als eine lineare Form der Variabeln H_j, H_j'[1]. Die Koeffizienten von $H_j\ (j = 1, 2, ..)$, H_0', $H_j'\ (j = 1, 2, ..)$ sind, wie aus (32) und (34) folgt, entsprechend gleich $-\sqrt{j}\,X_j$, $-X_0'$, $-\sqrt{j}\,X_j'$. Da die betrachtete Linearform beschränkt ist, so ist nach bekannten Sätzen die Summe der Quadrate dieser Koeffizienten, d. h.

$$X_0'^2 + \sum_i^{1..\infty} i X_i^2 + \sum_i^{1..\infty} i X_i'^2 = x_0'^2 + \sum_i^{1..\infty} i^2 x_i^2 + \sum_i^{1..\infty} i^2 x'^2$$

wie behauptet konvergent.

Die unendliche Reihe

$$(43)\qquad \sum_i^{1..\infty} x_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} x_i' \cos is$$

[1]) Während soeben X_i, X_i' beliebige Variabeln mit konvergenter Quadratsumme waren, sind jetzt X_i, X_i' die vorhin gefundenen Lösungen der aus (32) entspringenden unendlichvielen linearen Gleichungen.

konvergiert unbedingt und gleichmässig. Wir setzen

$$(44)\qquad u(s) = \sum_i^{1..\infty} x_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} x_i' \cos is.$$

Die Funktion $u(s)$ ist stetig und genügt der Beziehung

$$(45)\qquad u(s + 2\pi) = u(s).$$

Wir haben bisjetzt angenommen, dass die Funktionen $l(s)$, $k(s)$, $h(s)$ abteilungsweise stetig sind. Darüber hinaus mögen sie jetzt stetig sein und abteilungsweise stetige Ableitung haben. *Wir beweisen, das die unendliche Reihe*

$$\sum_i^{1..\infty} i^4 (x_i^2 + x_i'^2)$$

konvergiert.

Wir nehmen die Variabeln H_j, H_j' willkürlich, jedoch so an, dass die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1..\infty} i^2 (H_i^2 + H_i'^2)$$

konvergiert, setzen

$$(46)\qquad \frac{H_j}{j} = U_j\ (j = 1, 2, ..), \quad Y_0' = H_0' = U_0', \quad \frac{H_j'}{j} = U_j'\ (j = 1, 2, ..)$$

und betrachten

$$(47)\qquad \mathfrak{T}(X, H) = \mathfrak{T}^*(X, U)$$

zunächst sein formell als eine lineare Form der Variabeln U_j, U_j'.[1]) *Diese Form ist beschränkt.*

Betrachten wir etwa den n-ten Abschnitt der Form

$$(48)\qquad \mathfrak{K}^*_4(X, U) = \mathfrak{K}_4(X, H) = K_4(X, Y)$$

und setzen

$$(49)\qquad \begin{aligned} w(s) &= \sum_i^{0..\infty} x_i' \cos is = \sum_i^{0..\infty} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \cos is, \\ w^{(m)}(s) &= \sum_i^{0..m} x_i' \cos is = \sum_i^{0..m} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \cos is, \end{aligned}$$

[1]) Vgl. die Fussnote S. 230.

$$\zeta^{(n)}(s) = \sum_j^{1..n} U_j' \sin js. \tag{50}$$

Wir finden

$$[\mathfrak{K}_4^*(X,\, U)]_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{i=0..\infty\\ j=0..n}} \frac{X_i' Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is \cos js\, ds$$

(51)

$$= \frac{1}{\pi}\, U_0' \sum_i^{0..\infty} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s)\cos is\, ds + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\, w(s)\, \frac{d\zeta^{(n)}(s)}{ds}\, ds = P_1 + P_2,$$

$$P_2 = \lim_{m=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(s)\, w^{(m)}(s)\, \frac{d\zeta^{(n)}(s)}{ds}\, ds$$

$$= -\lim_{m=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\, \zeta^{(n)}(s)\, \frac{dw^{(m)}(s)}{ds}\, ds - \lim_{m=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dk(s)}{ds}\, \zeta^{(n)}(s)\, w^{(m)}(s)\, ds$$

(52)

$$= -\lim_{m=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\, \zeta^{(n)}(s)\, \frac{dw^{(m)}(s)}{ds}\, ds - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dk(s)}{ds}\, \zeta^{(n)}(s)\, w(s)\, ds.$$

Es sei

$$X_0'^2 + \sum_i^{1...\infty} i\,(X_i^2 + X_i'^2) = x_0'^2 + \sum_i^{1..\infty} i^2\,(x_i^2 + x_i'^2) = c_1, \tag{53}$$

unter c_1 wie später unter c_2, $c_3, ..$ einen gewissen positiven Wert verstanden.

Wir nehmen ferner

$$U_0'^2 + \sum_j^{1..\infty} (U_j^2 + U_j'^2) = 1 \tag{54}$$

an und erhalten zunächst

$$\left| \sum_i^{0..\infty} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is\, ds \right|^2 \leqq \sum_i^{0..\infty} X_i'^2 \sum_i^{0..\infty} \left(\int_0^{2\pi} k(s)\cos is\, ds\right)^2$$

(55)

$$\leqq \frac{1}{\pi} \sum_i^{0..\infty} X_i'^2 \int_0^{2\pi} [k(s)]^2\, ds < c_2,$$

daher

$$|P_1| < c_3. \tag{56}$$

Es ist weiter

$$|k(s)| < c_4,$$

$$|w(s)| \leqq \sum_i^{0..\infty} |x_i'| = |x_0'| + \sum_i^{1..\infty} \frac{1}{i}\, |i x_i'| \leqq |x_0'| + \left(\sum_i^{1..\infty} i^2 x_i'^2 \sum_i^{1..\infty} \frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} < c_5$$

und für alle m

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{dw^{(m)}(s)}{ds}\right)^2 ds = \sum_i^{1..m} i^2 x_i'^2 \leqq c_1,$$

daher

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\, \zeta^{(n)}(s)\, \frac{dw^{(m)}(s)}{ds}\, ds \right|^2 < c_4^2 \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\zeta^{(n)}(s))^2\, ds \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{dw^{(m)}(s)}{ds}\right)^2 ds$$

$$< c_1 c_4^2 \sum_j^{1..m} U_j'^2 \leqq c_1 c_4^2 = c_6^2$$

und

$$\left| \lim_{m=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\, \zeta^{(n)}(s)\, \frac{dw^{(m)}(s)}{ds}\, ds \right| \leqq c_6. \tag{57}$$

Wir finden schliesslich der Schwarz'schen Ungleichheit gemäss

$$\left|\frac{dk(s)}{ds}\right| < c_7, \qquad \left| \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dk(s)}{ds}\, \zeta^{(n)}(s)\, w(s)\, ds \right| \leqq \frac{1}{\pi}\, c_5 c_7 \int_0^{2\pi} |\zeta^{(n)}(s)|\, ds$$

(58)

$$< \frac{1}{\pi}\, c_5 c_7 \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} [\zeta^{(n)}(s)]^2\, ds} = \sqrt{2}\, c_5 c_7 \left(\sum_j^{1..n} U_j'^2\right)^{1/2} \leqq \sqrt{2}\, c_5 c_7 = c_8,$$

daher endlich für alle n

$$|[\mathfrak{K}_4^*(X,\, U)]_n| < c_9. \tag{59}$$

Die Form $\mathfrak{K}_4^*$ ist beschränkt. In analoger Weise überzeugt man sich, dass die Linearform $\mathfrak{T}^*(X,\, U)$ beschränkt ist. Aus (32) folgt, dass die Koeffizienten der Glieder U_j, U_j' $(j = 1, 2, ..)$ entsprechend den Wert $j\sqrt{j}\, X_j$ $j\sqrt{j}\, X_j'$ $(j = 1, 2, ..)$ haben. Daraus folgt aber, dass die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1..\infty} i^3\,(X_i^2 + X_i'^2) = \sum_i^{1..\infty} i^4\,(x_i^2 + x_i'^2) \tag{60}$$

konvergiert. Die Funktion

$$u(s) = \sum_i^{1..\infty} x_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} x_i' \cos is \tag{61}$$

hat eine stetige Ableitung erster Ordnung. Die unendliche Reihe

$$\frac{du(s)}{ds} = \sum_i^{1..\infty} i x_i \cos is - \sum_i^{1..\infty} i x_i' \sin is \tag{62}$$

konvergiert unbedingt und in gleichem Grade.[1]

Für diejenige in T reguläre Potentialfunktion, die auf S den Wert $u(s)$ annimmt, erhält man den Ausdruck

$$u(r, s) = \sum_i^{1..\infty} r^i x_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} r^i x_i' \cos is. \tag{63}$$

Offenbar ist

$$\frac{\partial u(r, s)}{\partial r} = \sum_i^{1..\infty} i r^{i-1} (x_i \sin is + x_i' \cos is). \tag{64}$$

Die Reihe (64) konvergiert unbedingt und gleichmässig für alle (r, s) in T und auf S. Insbesondere ist

$$\frac{\partial u(s)}{\partial r} = \sum_i^{1..\infty} i (x_i \sin is + x_i' \cos is). \tag{65}$$

Die unendliche Reihe (65) konvergiert für alle s unbedingt und gleichmässig. Aus der Gleichung (32) folgt jetzt, wie man sich leicht überzeugt, entweder

$$\frac{\partial u(s)}{\partial r} - [l(s) + \lambda k(s)]\, u(s) = h(s) \tag{66}$$

oder, falls die zu (32) gehörige homogene Beziehung besteht,

$$\frac{\partial u(s)}{\partial r} - [l(s) + \lambda k(s)]\, u(s) = 0. \tag{67}$$

Die Funktion $u(r, s)$ ist eine Lösung des eingangs gestellten Problems.

[1]) Die Funktion $u(s)$ hat eine quadratisch integrierbare Ableitung zweiter Ordnung. Doch wird diese Eigenschaft, welche den Lebesgue'schen Integralbegriff voraussetzt, im folgenden nicht gebraucht.

§ 3.

Lassen wir jetzt die zusätzliche Annahme, dass $l(s)$, $k(s)$ und $h(s)$ stetig sind und abteilungsweise stetige Ableitung haben, wieder fallen. Wie zuerst sollen $l(s)$, $k(s)$, $h(s)$ lediglich abteilungsweise stetige Funktionen darstellen. Dass die Potentialfunktion (63) auch jetzt noch eine Lösung unseres Randwertproblems ist, überzeugt man sich etwa wie folgt

Es mögen zunächst die aus (32) entspringenden nichthomogenen linearen Gleichungen stets auflösbar sein. Es sei (ξ, η) irgendein Punkt in T und $G^{II}(\xi, \eta; x, y)$ diejenige, ausser in (ξ, η), in T und auf S stetige, in T reguläre Potentialfunktion, die sich in der Umgebung von (ξ, η) wie

$$-\tfrac{1}{2} \log \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\} + \text{reg. Potentialfunktion}$$

verhält und auf S den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial r} G^{II}(\xi, \eta; s) = -1, \qquad \int_0^{2\pi} G^{II}(\xi, \eta; s)\, ds = 0$$

genügt.[1]

Es sei

$$G^{II}(\xi, \eta; s) = \sum_i^{1..\infty} \beta_i \sin is + \sum_i^{1..\infty} \beta_i' \cos is. \tag{68}$$

Die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1..\infty} i^2 (\beta_i^2 + \beta_i'^2)$$

ist, da $\frac{\partial G^{II}}{\partial s}$ stetig ist, sicher konvergent. Um so mehr ist auch die Reihe $\sum_i^{1..\infty} i (\beta_i^2 + \beta_i'^2)$ konvergent.

Wir setzen

$$\left\{\begin{aligned} u^{(n)}(s) &= \sum_i^{1..n} x_i \sin is + \sum_i^{0..n} x_i' \cos is, \\ u^{(n)}(\xi, \eta) &\equiv u^{(n)}(r, s) = \sum_i^{1..n} r^i x_i \sin is + \sum_i^{0..n} r^i x_i' \cos is, \end{aligned}\right. \tag{69}$$

[1]) Zur Vereinfachung ist für $G^{II}(\xi, \eta; x, y)$, wenn (x, y) den Punkt s auf S bezeichnet, $G^{II}(\xi, \eta; s)$ gesetzt worden.

$$G_n^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ s) = \sum_i^{1..n} \beta_i \sin is + \sum_i^{1..n} \beta_i' \cos is, \tag{70}$$

führen in der Formel (32)

$$\begin{aligned} Y_i &= \sqrt{i}\,\beta_i \ (i=1,..\ n), \qquad & Y_i' &= \sqrt{i}\,\beta_i' \ (i=0,..\ n) \\ Y_i &= 0, & Y_i' &= 0 \ (i>n) \end{aligned} \tag{71}$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ s)\frac{\partial u^{(n)}(s)}{\partial r}\,ds - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[l(s)+\lambda k(s)]\,G_n^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ s)\,u(s)\,ds \\ &\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G_n^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ s)\,h(s)\,ds. \end{aligned} \tag{72}$$

Setzt man in der Green'schen Formel

$$\iint_T (U\Delta V - V\Delta U)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(U\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{\partial U}{\partial r}\right)ds \tag{73}$$

für U und V entsprechend $G^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ x,\ y)$ und $u^{(n)}(x,\ y)$ ein, so erhält man in bekannter Weise

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ s)\,\frac{\partial u^{(n)}(s)}{\partial r}\,ds = u^{(n)}(\xi,\ \eta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{(n)}(s)\,ds \tag{74}$$

und aus (72) und (74) für $n=\infty$

$$\begin{aligned} u(\xi,\ \eta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[l(s)+\lambda k(s)]\,G^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ s)\,u(s)\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ s)\,h(s)\,ds. \end{aligned} \tag{75}$$

Den bekannten Sätzen der Potentialtheorie zufolge ist die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial r}u(r,\ s)$ beschränkt und konvergiert in jedem die Unstetigkeitspunkte der Funktionen $l(s)$, $k(s)$, $h(s)$ nicht enthaltenden Teile von S gleichmässig gegen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = [l(s)+\lambda k(s)]\,u(s) + h(s). \tag{76}$$

Wären die zu (32) gehörigen homogenen Gleichungen durch von Null verschiedene Werte der Unbekannten lösbar, so hätten wir in gleicher Weise am Rande

$$\frac{\partial u}{\partial r} = [l(s)+\lambda k(s)]\,u(s) \tag{77}$$

erhalten.

Wie behauptet ist also $u(r,\ s)$ auch jetzt noch eine Lösung unseres Randwertproblems. Im Gegensatz zu dem vorhin betrachteten besonderen Falle wird jetzt im allgemeinen die Ableitung $\frac{du(s)}{ds}$ nicht existieren.

Es ist einleuchtend, dass unser Verfahren alle den eingangs gestellten Bedingungen genügenden Lösungen des Randwertproblems liefert.

§ 4.

Wir wenden uns jetzt der Bestimmung der Eigenwerte zu und nehmen zur Vereinfachung

$$l(s) = 0, \tag{78}$$

mithin die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \lambda k(s)\,u(s) = 0 \tag{79}$$

an. Die Beziehung (32) geht jetzt über in

$$\sum_i^{1..\infty}(X_i Y_i + X_i' Y_i') - \lambda K(X,\ Y) = 0, \tag{80}$$

$$\begin{aligned} K(X,\ Y) &= \frac{1}{\pi}\sum_{i,j}^{1..\infty}\frac{X_i Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} k(s)\sin is\sin js\,ds \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{i=1..\infty \\ j=0..\infty}}\frac{X_i Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} k(s)\sin is\cos js\,ds \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{i=0..\infty \\ j=1..\infty}}\frac{X_i' Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} k(s)\cos is\sin js\,ds + \frac{1}{\pi}\sum_{i,j}^{0..\infty}\frac{X_i' Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} k(s)\cos is\cos js\,ds. \end{aligned} \tag{81}$$

Setzt man insbesondere

$$Y_0'=1, \quad Y_j=Y_j'=0 \qquad (j=1,2,..),$$

so erhält man, sofern $\lambda \neq 0$ ist,

(82) $$\frac{1}{\pi}\sum_i^{1..\infty}\frac{X_i}{\sqrt{i}}\int_0^{2\pi}k(s)\sin is\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_i^{0..\infty}\frac{X_i'}{\sqrt{i}}\int_0^{2\pi}k(s)\cos is\,ds=0,$$

d. h.

(83) $$\int_0^{2\pi}k(s)\,u(s)\,ds=0.$$

Es sei zunächst

(84) $$\int_0^{2\pi}k(s)\,ds=k_0\neq 0$$

vorausgesetzt. Dann folgt aus (82)

(85) $$X_0'=-\frac{1}{k_0}\sum_i^{1..\infty}\frac{X_i}{\sqrt{i}}\int_0^{2\pi}k(s)\sin is\,ds-\frac{1}{k_0}\sum_i^{1..\infty}\frac{X_i'}{\sqrt{i}}\int_0^{2\pi}k(s)\cos is\,ds,$$

daher

(86) $$\sum_i^{1..\infty}(X_iY_i+X_i'Y_i')-\lambda\overline{K}(X,Y)=0,$$

(87) $$\begin{aligned}\overline{K}(X,Y)=\frac{1}{\pi}\sum_{i,j}^{1..\infty}\frac{1}{\sqrt{ij}}\Big(X_iY_j\int_0^{2\pi}k(s)\sin is\sin js\,ds\\+X_iY_j'\int_0^{2\pi}k(s)\sin is\cos js\,ds+X_i'Y_j\int_0^{2\pi}k(s)\cos is\sin js\,ds\\+X_i'Y_j'\int_0^{2\pi}k(s)\cos is\cos js\,ds\Big)-\frac{1}{\pi k_0}\sum_i^{1..\infty}\frac{1}{\sqrt{i}}\Big(X_i\int_0^{2\pi}k(s)\sin is\,ds\\+X_i'\int_0^{2\pi}k(s)\cos is\,ds\Big)\sum_j^{1..\infty}\frac{1}{\sqrt{j}}\Big(Y_j\int_0^{2\pi}k(s)\sin js\,ds+Y_j'\int_0^{2\pi}k(s)\cos js\,ds\Big).\end{aligned}$$

Die symmetrische Bilinearform $\overline{K}(X,Y)$ ist, wie man leicht sieht, vollstetig.

Es sei λ_α ein Eigenwert und

(88) $$\sum_i^{1..\infty}(l_{i\alpha}X+l'_{i\alpha}X_i')=L_\alpha(X)$$

die zugehörige normierte Eigenform der quadratischen Form $\overline{K}(X,X)$.

Wir setzen

(89) $$l_{0\alpha}=-\frac{1}{k_0}\sum_i^{1..\infty}\frac{1}{\sqrt{i}}\Big(l_{i\alpha}\int_0^{2\pi}k(s)\sin is\,ds+l'_{i\alpha}\int_0^{2\pi}k(s)\cos is\,ds\Big),$$

(90) $$u_\alpha(s)=l'_{0\alpha}+\sum_i^{1..\infty}\frac{1}{\sqrt{i}}(l_{i\alpha}\sin is+l'_{i\alpha}\cos is),$$

(91) $$u_\alpha(r,s)=l'_{0\alpha}+\sum_i^{1..\infty}\frac{r^i}{\sqrt{i}}(l_{i\alpha}\sin is+l'_{i\alpha}\cos is).$$

Alsdann ist für alle α

(92) $$\int_0^{2\pi}k(s)\,u_\alpha(s)\,ds=0$$

und

(93) $$\frac{\partial u_\alpha}{\partial r}-\lambda_\alpha k(s)\,u_\alpha(s)=0.$$

Ist $k(s)$ höchstens in einer Menge von Punkten vom Masse Null gleich Null, so ist die quadratische Form $\overline{K}(X,X)$ abgeschlossen.

Es sei nämlich

(94) $$\overline{M}(Z)=\sum_i^{1..\infty}(m_iZ_i+m_i'Z_i')$$

eine beschränkte Linearform und es sei für alle Z_i, Z_i' $(i=1,2,..)$ mit konvergenter Quadratsumme

(95) $$\overline{K}(Z,.)\,\overline{M}(.)=0.$$

Wir schreiben

(96) $$m_0'=-\frac{1}{k_0}\sum_i^{1..\infty}\frac{1}{\sqrt{i}}\Big(m_i\int_0^{2\pi}k(s)\sin is\,ds+m_i'\int_0^{2\pi}k(s)\cos is\,ds\Big),$$

(97) $$w^*(s) \infty \sum_i^{1..\infty} \frac{Z_i}{\sqrt{i}} \sin is + \sum_i^{1..\infty} \frac{Z_i'}{\sqrt{i}} \cos is,$$

(98) $$\mu(s) \infty \sum_i^{1..\infty} \frac{m_i}{\sqrt{i}} \sin is + \sum_i^{0..\infty} \frac{m_i'}{\sqrt{i}} \cos is.$$

Die Funktionen $w^*(s)$ und $\mu(s)$ sind nebst ihren Quadraten im Lebesgue'schen Sinne integrierbar. Die Beziehungen (95), (96) und (97) ergeben

(99) $$\int_0^{2\pi} w^*(s)\,ds = 0, \quad \int_0^{2\pi} k(s)\,\mu(s)\,ds = 0, \quad \int_0^{2\pi} k(s)\,w^*(s)\,\mu(s)\,ds = 0.$$

Es sei jetzt $w_*(s)$ irgendeine auf S regulär analytische Funktion und es sei allgemein

$$\int_0^{2\pi} w_*(s)\,ds = c'.$$

Setzt man vorübergehend

(100) $$\underline{w}(s) = w_*(s) - \frac{1}{2\pi}c',$$

so findet man

(101) $$\int_0^{2\pi} \underline{w}(s)\,ds = 0,$$

daher

(102) $$\int_0^{2\pi} k(s)\,\underline{w}(s)\,\mu(s)\,ds = 0,$$

folglich wegen (99) auch

(103) $$\int_0^{2\pi} k(s)\,w_*(s)\,\mu(s)\,ds = 0.$$

Da $w_*(s)$ im übrigen willkürlich ist, so muss, wie sich ohne wesentliche Schwierigkeiten zeigen lässt, ausser höchstens in einer gewissen Nullmenge,

(104) $$k(s)\,\mu(s) = 0$$

sein. Ist nunmehr wie vorausgesetzt $k(s)$ höchstens in einer Nullmenge gleich Null, so muss in einer Punktmenge vom Masse eins

(105) $$\mu(s) = 0$$

sein. Dann ist aber

$$m_i = 0 \ (i = 1, 2, ..), \qquad m_i' = 0 \ (i = 0, 1, ..).$$

Die Form $\overline{K}(X, X)$ ist abgeschlossen. Es gibt also sicher unendlichviele Eigenwerte λ_α[1]. Insbesondere ist $\overline{K}(X, X)$ abgeschlossen, wenn $k(s)$ in dem Intervalle $(0, 2\pi)$ nur eine endliche Anzahl Zeichenwechsel hat.

Wir werden jetzt direkt zeigen, dass es, wie auch $k(s)$ beschaffen sei, insbesondere z. B. auch dann, wenn $k(s)$ streckenweise verschwindet, unendlichviele Eigenwerte gibt.

Bekanntlich ist identisch

(106) $$\overline{K}(X, Y) = \frac{1}{\lambda_\alpha} \sum_\alpha L_\alpha(X)\,L_\alpha(Y).$$

Es seien $u(s)$ und $v(s)$ beliebige auf S nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige, den Beziehungen

(107) $$\int_0^{2\pi} u(s)\,ds = 0, \qquad \int_0^{2\pi} v(s)\,ds = 0$$

genügende Funktionen:

(108) $$u(s) = \sum_i^{1..\infty} \frac{X_i}{\sqrt{i}} \sin is + \sum_i^{1..\infty} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \cos is,$$

(109) $$v(s) = \sum_i^{1..\infty} \frac{Y_i}{\sqrt{i}} \sin is + \sum_i^{1..\infty} \frac{Y_i'}{\sqrt{i}} \cos is.$$ [2]

---

[1]) Vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer algemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Vierte Mitteilung, Göttinger Nachrichten, 1906, S. 157—227.

[2]) Offenbar sind die unendlichen Reihen $\sum_i^{1..\infty} i\,(X_i^2 + X_i'^2)$ und $\sum_i^{1..\infty} i\,(Y_i^2 + Y_i'^2)$ konvergent. Für die Gültigkeit der Formeln (110) und (111) genügt es übrigens, wenn $u(s)$ und $v(s)$ stetig sind und den Beziehungen (107) genügen, wenn überdies die unendlichen Reihen $\sum_i^{1..\infty} (X_i^2 + X_i'^2)$ und $\sum_i^{1..\infty} (Y_i + Y_i'^2)$ konvergieren.

Die Formel (106) ergibt

$$
(110)\quad \begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,v(s)\,ds-\frac{1}{\pi k_0}\int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,ds\int_0^{2\pi} k(s)\,v(s)\,ds\\
&=\frac{1}{\pi^2}\sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_\alpha(s)}{\partial r}\,u(s)\,ds\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_\alpha(s)}{\partial r}\,v(s)\,ds\\
&=\sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{\pi^2}\int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,u_\alpha(s)\,ds\int_0^{2\pi} k(s)\,v(s)\,u_\alpha(s)\,ds
\end{aligned}
$$

und speziell für $u=v$

$$
(111)\quad \begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(s)\,[u(s)]^2\,ds-\frac{1}{\pi k_0}\left[\int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,ds\right]^2\\
&=\sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{\pi^2}\left(\int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,u_\alpha(s)\,ds\right)^2.
\end{aligned}
$$

Aus der Beziehung

$$
(112)\quad L_\alpha(\,.\,)\,L_\alpha(\,.\,)=1
$$

folgt wegen (22) und (88)

$$
(113)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_\alpha(s)}{\partial r}\,u_\alpha(s)\,ds=1,
$$

somit nach (93)

$$
(114)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_\alpha k(s)\,[u_\alpha(s)]^2\,ds=1.
$$

Wir setzen

$$
(115)\quad \varphi_\alpha(s)=u_\alpha(s)\sqrt{\frac{|\lambda_\alpha|}{\pi}}
$$

und erhalten nach (110) und (114)

$$
(116)\quad \int_0^{2\pi} k(s)\,[\varphi_\alpha(s)]^2\,ds=\frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|},
$$

$$
(117)\quad \begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} k(s)\,[u(s)]^2\,ds-\frac{1}{k_0}\left(\int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,ds\right)^2\\
&=\sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\left(\int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,\varphi_\alpha(s)\,ds\right)^2.
\end{aligned}
$$

Es möge $k(s)$ in $(0,2\pi)$ positive Werte annehmen; insbesondere sei $k(s)$ in dem Intervalle $0<a\leqq s\leqq b<2\pi$ positiv. Wir beweisen, dass es unendlichviele positive Eigenwerte gibt.

Es seien im Gegensatz hierzu $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m$ die einzigen positiven Eigenwerte. Es sei $u(s)$ irgendeine nebst ihrer ersten Ableitung stetige Funktion, die in den Intervallen

$$
0\leqq s\leqq a \quad\text{und}\quad b\leqq s\leqq 2\pi
$$

verschwindet und den Beziehungen

$$
(118)\quad \begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}[u(s)]^2\,ds>0,\quad \int_0^{2\pi} u(s)\,ds=0,\quad \int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,ds=0,\\
&\int_0^{2\pi} k(s)\,u(s)\,\varphi_\alpha(s)\,ds=0 \qquad (\alpha=1,\ldots m)
\end{aligned}
$$

genügt. Dies führt aber auf einen Widerspruch, indem alsdann in (117) sich linker Hand ein positiver Wert, rechter Hand ein negativer Wert oder Null ergibt.

In ähnlicher Weise überzeugt man sich, dass es unendlichviele negative Eigenwerte gibt, wenn $k(s)$ in $(0,2\pi)$ negative Werte annimmt. Nimmt $k(s)$ schliesslich Werte beiderlei Vorzeichen an, so gibt es unendlichviele positive und unendlichviele negative Eigenwerte.

§ 5.

Um zu Entwicklungssätzen zu gelangen, gehen wir von der Identität

$$
(119)\quad \begin{aligned}
&\sum_i^{1..\infty} X_i Y_i+\sum_i^{1..\infty} X_i' Y_i'=\sum_i^{1..\infty} L_\alpha(X)\,L_\alpha(Y)\\
&=\sum_i^{1..\infty}\left(\sum_i^{1..\infty}(l_{i\alpha}X_i+l_{i\alpha}'X_i')\right)\left(\sum_i^{1..\infty}(l_{i\alpha}Y_i+l_{i\alpha}'Y_i')\right)
\end{aligned}
$$

aus. Dabei wird die Form $\overline{K}(X, X)$ als abgeschlossen vorausgesetzt.

Es sei (ξ, η) irgendein Punkt im Innern von T und $\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; x, y)$ diejenige in T, ausser in (ξ, η), reguläre Potentialfunktion, die sich im Punkte (ξ, η) wie

$$-\tfrac{1}{2}\log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}+\text{reguläre Potentialfunktion} \tag{120}$$

verhält und auf S den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathfrak{G}^{II} = -\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{G}^{II} = -\frac{2\pi k(s)}{k_0}, \quad \int_0^{2\pi}\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; s)\, k(s)\, ds = 0 \tag{121}$$

genügt. Zur Vereinfachung ist hierbei für $\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; \overline{x}, \overline{y})$, wenn $(\overline{x}, \overline{y})$ den Punkt s bezeichnet, $\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; s)$ gesetzt worden. Die Bestimmung der Funktion $\mathfrak{G}^{II}$ bietet keine Schwierigkeiten. In bekannter Weise findet man das Reziprozitätsgesetz

$$\mathfrak{G}^{II}(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = \mathfrak{G}^{II}(\xi_2, \eta_2; \xi_1, \eta_1). \tag{122}$$

Wir schreiben

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; x, y) = -\tfrac{1}{2}\log\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}+\mathfrak{g}^{II}(\xi, \eta; x, y),\\ &\mathfrak{g}^{II}(\xi, \eta; s) = \sum_i^{1..\infty}\overline{g}_i \sin is + \sum_i^{0..\infty}\overline{g}_i' \cos is,\end{aligned}\right. \tag{123}$$

$$\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; s) = \sum_i^{1..\infty} g_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} g_i' \cos is.$$

Die Funktion $\mathfrak{g}^{II}(\xi, \eta; x, y)$ ist eine in T reguläre Potentialfunktion. Die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1..\infty} i(\overline{g}_i^2+\overline{g}_i'^2)$$

ist, da $\dfrac{\partial g^{II}}{\partial n}$ augenscheinlich abteilungsweise stetig ist, gewiss konvergent. Also ist auch die Reihe $\sum_i^{1..\infty} i(g_i^2+g_i'^2)$ konvergent.

Es sei $f(s)$ eine auf S stetige Funktion. Wir schreiben mit Herrn Hurwitz

$$f(s) \sim \sum_i^{1..\infty} f_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} f_i' \cos is \tag{124}$$

und nehmen an, dass die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1..\infty} i(f_i^2+f_i'^2) \tag{125}$$

konvergiert.

Wir setzen

$$X_i = \sqrt{i}\, g_i, \quad X_i' = \sqrt{i}\, g_i'; \quad Y_i = \sqrt{i}\, f_i, \quad Y_i' = \sqrt{i}\, f_i' \quad (i=1, 2, ..) \tag{126}$$

und erhalten nach (23), wenn wir zur Abkürzung

$$f^{(n)}(s) = \sum_i^{1..n} f_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} f_i' \cos is, \tag{127}$$

$$f(\xi, \eta) \equiv f(r, s) = \sum_i^{1..\infty} r^i f_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} r^i f_i' \cos is, \tag{128}$$

$$f^{(n)}(\xi, \eta) \equiv f^{(n)}(r, s) = \sum_i^{1..n} r^i f_i \sin is + \sum_i^{0..n} r^i f_i' \cos is \tag{129}$$

schreiben,

$$\begin{aligned}\sum_i^{1..\infty}(X_i Y_i + X_i' Y_i') &= \lim_{n=\infty}\sum_i^{1..n} i(f_i g_i + f_i' g_i')\\ &= \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; s)\frac{\partial f^{(n)}(s)}{\partial r}\, ds.\end{aligned} \tag{130}$$

Setzt man in der Green'schen Formel

$$\iint_T [U\Delta V - V\Delta U]\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\left[U\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{\partial U}{\partial r}\right] ds \tag{131}$$

für U und V entsprechend $\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; x, y)$ und $f^{(n)}(x, y)$ ein, so erhält man in bekannter Weise

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}^{II}(\xi, \eta; s)\frac{\partial f^{(n)}(s)}{\partial r}\, ds = 2f^{(n)}(\xi, \eta) - \frac{2}{k_0}\int_0^{2\pi} f^{(n)}(s)\, k(s)\, ds. \tag{132}$$

Es ist nun augenscheinlich

$$\begin{aligned}
\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f^{(n)}(s)\,k(s)\,ds &= \lim_{n=\infty}\Big[\sum_i^{1..n} f_i\int_0^{2\pi} k(s)\sin is\,ds \\
&\quad+\sum_i^{0..n} f_i'\int_0^{2\pi} k(s)\cos is\,ds\Big]=\sum_i^{1..\infty} f_i\int_0^{2\pi}k(s)\sin is\,ds \\
&\quad+\sum_i^{0..\infty} f_i'\int_0^{2\pi} k(s)\cos is\,ds=\int_0^{2\pi} f(s)\,k(s)\,ds
\end{aligned}\tag{133}$$

sowie in jedem ganz im Innern von T gelegenen Gebiete gleichmässig

$$\lim_{n=\infty} f^{(n)}(r,\,s)=f(r,\,s),\tag{134}$$

daher mit Rücksicht auf (130), (132) und (133)

$$\begin{aligned}
\sum_i^{1..\infty}(X_iY_i+X_i'Y_i') &= 2f(\xi,\,\eta)-\frac{2}{k_0}\int_0^{2\pi}k(s)\,f(s)\,ds \\
&=2f(r,\,s)-\frac{2}{k_0}\int_0^{2\pi}k(s)\,f(s)\,ds.
\end{aligned}\tag{135}$$

Ferner ist, wenn wir mit $u_\alpha(\xi,\,\eta)\equiv u_\alpha(r,\,s)$ und $\varphi_\alpha(\xi,\,\eta)\equiv\varphi_\alpha(r,\,s)$ diejenigen in T regulären Potentialfunktionen bezeichnen, die auf S die Werte $u_\alpha(s)$ und $\varphi_\alpha(s)$ annehmen,

$$\begin{aligned}
\sum_i^{1..\infty}(l_{i\alpha}X_i+l'_{i\alpha}X_i') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\xi,\,\eta;\,s)\,\frac{\partial u_\alpha(s)}{\partial r}\,ds \\
&=2u^\alpha(\xi,\,\eta)-\frac{2}{k_0}\int_0^{2\pi}u_\alpha(s)\,k(s)\,ds=2u_\alpha(r,\,s)
\end{aligned}\tag{136}$$

und wegen (115)

$$\sum_i^{1..\infty}(l_{i\alpha}X_i+l'_{i\alpha}X_i')=2\sqrt{\frac{\pi}{|\lambda_\alpha|}}\;\varphi_\alpha(r,\,s).\tag{137}$$

Desgleichen ist

$$\begin{aligned}
\sum_i^{1..\infty}(l_{i\alpha}Y_i+l'_{i\alpha}Y_i') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(s)\,\frac{\partial u_\alpha(s)}{\partial r}\,ds \\
&=\frac{\lambda_\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}k(s)\,f(s)\,u_\alpha(s)\,ds=\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{\pi\,|\lambda_\alpha|}}\int_0^{2\pi}k(s)\,f(s)\,\varphi_\alpha(s)\,ds.
\end{aligned}\tag{138}$$

Aus (119), (135), (137) und (138) ergibt sich jetzt

$$f(r,\,s)-\frac{1}{k_0}\int_0^{2\pi}k(s)\,f(s)\,ds=\sum_\alpha^{1..\infty}\frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\,\varphi_\alpha(r,\,s)\int_0^{2\pi}k(s)\,f(s)\,\varphi_\alpha(s)\,ds.\tag{139}$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert für alle $(r,\,s)$ in einem beliebigen ganz im Innern von T gelegenen abgeschlossenen Gebiete T^* unbedingt und gleichmässig. In der Tat ist zunächst für alle μ

$$\Big|\sum_{\alpha>\mu}L_\alpha(X)\,L_\alpha(Y)\Big|^2\leqq\sum_{\alpha>\mu}[L_\alpha(X)]^2\sum_{\alpha>\mu}[L_\alpha(Y)]^2.\tag{140}$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha>\mu}[L_\alpha(X)]^2 &\leqq\sum_\alpha^{1..\infty}[L_\alpha(X)]^2=(X,\,X) \\
&=\lim_{r=1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\xi,\,\eta;\,s)\,\frac{\partial}{\partial r}h(\xi,\,\eta;\,r,\,s)\,ds,
\end{aligned}\tag{141}$$

unter $h(\xi,\,\eta;\,r,\,s)$ die in T reguläre Potentialfunktion

$$h(\xi,\,\eta;\,r,\,s)=\sum_i^{1..\infty}r^ig_i\sin is+\sum_i^{0..\infty}r^ig_i'\cos is\tag{142}$$

verstanden[1]. Für alle $(\xi,\,\eta)$ in T^* ist $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\xi,\,\eta;\,s)$ stetig; $\frac{\partial}{\partial r}h(\xi,\,\eta;\,r,\,s)$ ist für alle $(\xi,\,\eta)$ in T^* und alle $(r,\,s)$ in $T-T^*$ beschränkt. Daher ist

[1] Wie üblich bezeichnet $h(\xi,\,\eta;\,s)$ den Wert der Funktion $h(\xi,\,\eta;\,r,\,s)$ im Punkte s auf S. Es ist ferner

$$\frac{\partial}{\partial r}h(\xi,\,\eta,\,s)=\lim_{r=1}\frac{\partial}{\partial r}h(\xi,\,\eta;\,r,\,s).$$

$$(X,\ X) < c_{10}.$$

Da nun die unendliche Reihe

$$\sum_{\alpha}^{1..\infty} [L_\alpha(Y)]^2 = (Y,\ Y)$$

konvergiert, so konvergiert in der Tat (139) für alle $(\xi,\ \eta)$ in T^* unbedingt und in gleichem Grade

Wir haben so den folgenden Satz gewonnen:

Es sei $f(s)$ irgendeine auf S stetige Funktion:

$$f(s) \sim \sum_{i}^{1..\infty} f_i \sin is + \sum_{i}^{0..\infty} f_i' \cos is \tag{143}$$

und es sei bekannt, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{i}^{1..\infty} i\,(f_i^2 + f_i'^2) \tag{144}$$

konvergiert. Es sei

$$f(r,\ s) = \sum_{i}^{1..\infty} r^i f_i \sin is + \sum_{i}^{0..\infty} r^i f_i' \cos is \tag{145}$$

diejenige in T reguläre Potentialfunktion, die auf S den Wert $f(s)$ annimmt.

Ist $k(s)$ höchstens in einer gewissen Nullmenge gleich Null, so gilt die Entwicklung

$$f(r,\ s) = \frac{1}{k_0}\int_0^{2\pi} k(s)\, f(s)\, ds + \sum_{\alpha}^{1..\infty} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\, \varphi_\alpha(r,\ s) \int_0^{2\pi} k(s)\, f(s)\, \varphi_\alpha(s)\, ds. \tag{146}$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert in jedem ganz im Innern von T gelegenen Gebiete unbedingt und in gleichem Grade.

§ 6.

Es sei s^* irgendein fester, s ein variabler Punkt auf S. Es sei $t(x,\ y)$ diejenige in T und auf S stetige, in T reguläre Potentialfunktion, die den Bedingungen

$$\frac{\partial t(s)}{\partial r} = 2\pi k(s)\, \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*,\ s), \qquad \int_0^{2\pi} k(s)\, t(s)\, ds = 0 \tag{147}$$

genügt. Hierbei ist wie üblich mit $t(s)$ der Wert von $t(x,\ y)$ auf S bezeichnet. Setzt man in der Green'schen Formel (131) für U und V entsprechend $t(x, y)$ und $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ x,\ y)$ ein, so findet man

$$t(\xi,\ \eta) = \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\xi,\ \eta;\ \bar{s})\, k(\bar{s})\, \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*,\ \bar{s})\, d\bar{s}, \tag{148}$$

daher

$$t(s) = \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s,\ \bar{s})\, k(\bar{s})\, \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*,\ \bar{s})\, d\bar{s} = \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*,\ \bar{s})\, k(\bar{s})\, \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\bar{s},\ s)\, d\bar{s}. \tag{149}$$

Setzt man

$$t(s) \sim \sum_{i}^{1..\infty} \gamma_i \sin is + \sum_{i}^{0..\infty} \gamma_i' \cos is, \tag{150}$$

so ist, da für alle s^* auf S eine Ungleichheit

$$\left| \int_0^{2\pi} t(s)\, \frac{\partial}{\partial r} t(r,\ s)\, ds \right| < c_{11} \tag{151}$$

besteht, die unendliche Reihe

$$\sum_{i}^{1..\infty} i\,(\gamma_i^2 + \gamma_i'^2)$$

konvergent. Für alle s^* auf S ist ferner

$$\sum_{i}^{1..\infty} i\,(\gamma_i^2 + \gamma_i'^2) < c_{11}. \tag{152}$$

Nunmehr führen wir in der Formel

$$(X,\ Y) = \sum_{\alpha}^{1..\infty} L_\alpha(X)\, L_\alpha(Y) \tag{153}$$

für $X_i,\ X_i';\ Y_i,\ Y_i'$ entsprechend $\sqrt{i}\,\gamma_i,\ \sqrt{i}\,\gamma_i';\ \sqrt{i}\,f_i,\ \sqrt{i}\,f_i'$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}(X,\ Y) &= \lim_{n=\infty} \sum_{i}^{1..n} i\,(\gamma_i\gamma_i + f_i'\gamma_i') = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(s) \frac{\partial f^{(n)}(s)}{\partial r}\, ds \\ &= \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*, \bar{s})\, k(\bar{s}) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\bar{s},\ s) \frac{\partial f^{(n)}(s)}{\partial r}\, ds\right] d\bar{s} \\ &= \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*, \bar{s})\, k(\bar{s}) \left\{ 2 f^{(n)}(\bar{s}) - \frac{2}{k_0} \int_0^{2\pi} f^{(n)}(s)\, k(s)\, ds \right\} d\bar{s} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*,\ \bar{s})\, k(\bar{s})\, f(\bar{s})\, d\bar{s},\end{aligned} \tag{154}$$

oder, wenn wir

$$F(s^*) = \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*,\ \bar{s})\, k(\bar{s})\, f(\bar{s})\, d\bar{s} \tag{155}$$

setzen,

$$(X,\ Y) = 2F(s^*). \tag{156}$$

Wir erhalten nun ferner

$$\begin{aligned}L_\alpha(X) &= \sum_{i}^{1..\infty} X_i l_{i\alpha} + \sum_{i}^{1..\infty} X_i' l_{i\alpha}' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(s) \frac{\partial u_\alpha(s)}{\partial r}\, ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*, \bar{s}) \left[\int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\bar{s},\ s) \frac{\partial u_\alpha(s)}{\partial r}\, ds \right] k(\bar{s})\, d\bar{s}.\end{aligned} \tag{157}$$

oder wegen

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\bar{s}, s) \frac{\partial u_\alpha(s)}{\partial r}\, ds = \lambda_\alpha \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\bar{s}, s)\, k(s)\, u_\alpha(s)\, ds = 2\pi u_\alpha(\bar{s}), \tag{158}$$

$$L_\alpha(X) = 2 \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(s^*,\ \bar{s})\, k(\bar{s})\, u_\alpha(\bar{s})\, d\bar{s} = \frac{4\pi}{\lambda_\alpha} u_\alpha(s^*) \tag{159}$$

und

$$\begin{aligned}L_\alpha(Y) &= \sum_{i}^{1..\infty} l_{i\alpha} Y_i + \sum_{i}^{1..\infty} l'_{i\alpha} Y_i' = \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f^{(n)}(\bar{s}) \frac{\partial u_\alpha(\bar{s})}{\partial s}\, d\bar{s} \\ &= \frac{\lambda_\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{s})\, k(\bar{s})\, u_\alpha(\bar{s})\, d\bar{s} = \frac{\lambda_\alpha^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} k(s)\, u_\alpha(s) \left[\int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\mathrm{II}}(\bar{s},\ s)\, f(\bar{s})\, k(\bar{s})\, d\bar{s} \right] ds \\ &= \frac{\lambda_\alpha^2}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} F(s)\, k(s)\, u_\alpha(s)\, ds.\end{aligned} \tag{160}$$

Aus (153), (156), (159) und (160) erhalten wir schliesslich nach einer leichten Umrechnung

$$\begin{aligned}F(s^*) &= \sum_{\alpha}^{1..\infty} \frac{\lambda_\alpha}{\pi} u_\alpha(s^*) \int_0^{2\pi} F(s)\, k(s)\, u_\alpha(s)\, ds \\ &= \sum_{\alpha}^{1..\infty} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(s^*) \int_0^{2\pi} F(s)\, k(s)\, \varphi_\alpha(s)\, ds.\end{aligned} \tag{161}$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert unbedingt und gleichmässig. In der Tat ist für alle μ

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha>\mu} \left[\frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(s^*) \int_0^{2\pi} F(s)\, k(s)\, \varphi_\alpha(s)\, ds \right]^2 &= \sum_{\alpha>\mu} [L_\alpha(X)\, L_\alpha(Y)]^2 \\ &\leqq \sum_{\alpha}^{1..\infty} [L_\alpha(X)]^2 \sum_{\alpha>\mu} [L_\alpha(Y)]^2 \leqq (X,\ X) \sum_{\alpha>\mu} [L_\alpha(Y)]^2 \\ &= \sum_{i}^{1..\infty} i\,(\gamma_i^2 + \gamma_i'^2) \sum_{\alpha>\mu} [L_\alpha(Y)]^2 < c_{11} \sum_{\alpha>\mu} [L_\alpha(Y)]^2.\end{aligned} \tag{162}$$

Da nun die Reihe $\sum_{\alpha}^{1..\infty} [L_\alpha(Y)]^2$ konvergiert, so konvergiert (161) wie behauptet unbedingt und gleichmässig.

Die Entwicklung (161) gilt für alle Funktionen $F(s)$, die sich in der Form

$$F(s^*) = \int_0^{2\pi} \mathfrak{G}^{\text{II}}(s^*, s)\, k(s)\, f(s)\, ds \tag{163}$$

darstellen lassen. Hierin bezeichnet $f(s)$ eine beliebige stetige Funktion:

$$f(s) \backsim \sum_i^{1..\infty} f_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} f_i' \cos is,$$

die so beschaffen ist, dass

$$\sum_i^{1..\infty} i(f_i^2 + f_i'^2)$$

konvergiert. Aus (163) folgt mit Rücksicht auf (121) insbesondere

$$\int_0^{2\pi} F(s)\, k(s)\, ds = 0. \tag{164}$$

Dieses Resultat geht über die Ergebnisse der Theorie der polaren Integralgleichungen hinaus. Diese liefert Entwicklungssätze für Funktionen, die in bekannter Weise eine Integraldarstellung mit Hilfe eines gewissen iterierten Kernes gestatten.

§ 7.

Wir haben bisjetzt vorausgesetzt, dass $k(s)$ höchstens in einer Nullmenge verschwindet. Die Form $\overline{K}(X, X)$ war alsdann abgeschlossen. Es möge jetzt im Gegensatz hierzu, um nur den einfachsten Fall herauszugreifen, $k(s)$ in einer endlichen Anzahl von Intervallen $a_1' a_1''$, $a_2' a_2''$, ... $a_p' a_p''$ identisch gleich Null sein, im Innern der übrigen Intervalle $b_1' b_1''$, ... $b_p' b_p''$ aber höchstens in einer Nullmenge verschwinden. Es sei

$$M_\alpha(X) = \sum_i^{1..\infty} m_{\alpha i} X_i + \sum_i^{1..\infty} m_{\alpha i}' X_i' \tag{165}$$

eine Linearform, so dass für alle Z_i $(i = 1, 2, ..)$ mit konvergenter Quadratsumme

$$\overline{K}(Z, .)\, M_\alpha(.) = 0 \tag{166}$$

wird. Wir setzen

$$m_{0\alpha}' = -\frac{1}{k_0} \sum_i^{1..\infty} \frac{1}{\sqrt{i}} \left(m_{\alpha i} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is\, ds + m_{\alpha i}' \int_0^{2\pi} k(s) \cos is\, ds \right), \tag{167}$$

$$w^*(s) \backsim \sum_i^{1..\infty} \frac{Z_i}{\sqrt{i}} \sin is + \sum_i^{1..\infty} \frac{Z_i'}{\sqrt{i}} \cos is, \tag{168}$$

$$m_\alpha(s) \backsim \sum_i^{1..\infty} \frac{m_{\alpha i}}{\sqrt{i}} \sin is + \sum_i^{0..\infty} \frac{m_{\alpha i}'}{\sqrt{i}} \cos is. \tag{169}$$

Die Funktionen $w^*(s)$ und $m_\alpha(s)$ sind nebst ihren Quadraten im Lebesgueschen Sinne integrierbar. Die Beziehungen (166), (167), (168) ergeben

$$\int_0^{2\pi} w^*(s)\, ds = 0, \tag{170}$$

$$\int_0^{2\pi} k(s)\, m_\alpha(s)\, ds = 0, \qquad \int_0^{2\pi} k(s)\, w^*(s)\, m_\alpha(s)\, ds = 0. \tag{171}$$

Wie in § 4 überzeugt man sich, dass die Beziehungen (171) auch dann gelten, wenn die Gleichung (170) nicht erfüllt ist. Aus (171) folgt nun, da $k(s)$ in $a_i' a_i''$ $(i = 1, .. p)$ verschwindet, dass im Innern der Intervalle $b_i' b_i''$ $(i = 1, .. p)$, ausser höchstens in einer Menge vom Masse Null,

$$m_\alpha(s) = 0 \tag{172}$$

ist.

Unser Randwertproblem lautet jetzt so. Es ist diejenige in T und auf S stetige, in T reguläre Potentialfunktion $u(x, y)$ zu bestimmen, die auf S in den Intervallen $a_i' a_i''$ $(i = 1, .., p)$ der Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial r} = h, \tag{173}$$

in den Intervallen $b_i' b_i''$ $(i = 1, .., p)$ hingegen der Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \lambda k u = h \tag{174}$$

genügt.

Das vollständige normierte Orthogonalsystem der Eigenformen $L_\alpha(X)$ des

Kernes $\overline{K}(X, X)$ ist jetzt nicht mehr abgeschlossen. Wir ergänzen es zu einem abgeschlossenen durch die Linearformen

$$M_\alpha(X) \quad (\alpha = 1, 2, ..). \tag{175}$$

Die Identität (119) ist jetzt durch die Formel

$$(X, Y) = \sum_\alpha^{1..\infty} L_\alpha(X) L_\alpha(Y) + \sum_\alpha M_\alpha(X) M_\alpha(Y) \tag{176}$$

zu ersetzen.

Es sei $f(s)$ eine auf S stetige Funktion:

$$f(s) \backsim \sum_i^{1..\infty} f_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} f_i' \cos is \tag{177}$$

und es sei wie in § 6 vorausgesetzt, dass die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1..\infty} i(f_i^2 + f_i'^2) \tag{178}$$

konvergiert. Es bezeichne wieder

$$f(r, s) = \sum_i^{1..\infty} r^i f_i \sin is + \sum_i^{0..\infty} r^i f_i' \cos is \tag{179}$$

diejenige in T reguläre Potentialfunktion, die auf S gleich $f(s)$ wird. Es sei ferner bekannt, dass im Innern gewisser Intervalle $c_i' c_i''$ $(i = 1, \dots p)$, die $b_i' b_i''$ $(i = 1, .. p)$ ganz in ihrem Innern enthalten $\left(\sum_i^{1..p} (c_i' c_i'' - b_i' b_i'')\right.$ kann dabei beliebig klein sein$\left.\right)$,

$$\lim_{r=1} \frac{\partial}{\partial r} f(s, r) = \frac{\partial f}{\partial r}$$

existiert und $\frac{\partial f(s, r)}{\partial r}$ sich seinem Grenzwerte gleichmässig nähert.

Die Funktion $\frac{\partial f}{\partial r}$ ist alsdann in $c_i' c_i''$ $(i = 1, .. p)$ stetig.

Dies tritt z. B. ein, wenn $f(s)$ in $c_i' c_i''$ stetige, der Hölder'schen Bedingung genügende Ableitung hat

$$\left| \frac{d}{ds} f(s + \delta) - \frac{d}{ds} f(s) \right| < c_{12} \delta^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1.$$

In allen Punkten der Intervalle $b_i' b_i''$ $(i = 1 \dots p)$ soll endlich $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$ sein. Wir bezeichnen zur Vereinfachung die Gesamtheit der Intervalle $b_i' b_i''$ mit B, die der Intervalle $a_i' a_i''$ mit A. Es seien $d_i' d_i''$ beliebig gewählte in $c_i' c_i''$ enthaltene, ihrerseits $b_i' b_i''$ ganz in ihrem Innern enthaltende Intervalle $d_i' d_i''$. Die Gesamtheit der Intervalle $d_i d_i''$ heisse D. Es sei endlich

$$E = A + B - D.$$

Wir gewinnen offenbar wieder den Entwicklungssatz (139), wenn wir in (176) für X_i, X_i', Y_i, Y_i' entsprechend $\sqrt{i}\, g_i$, $\sqrt{i}\, g_i'$, $\sqrt{i}\, f_i$, $\sqrt{i}\, f_i'$ setzen, falls für alle α

$$M_\alpha(Y) = \sum_i^{1..\infty} \sqrt{i}\,(m_{\alpha i} f_i + m_{\alpha i}' f_i') = 0 \tag{180}$$

ist.

Augenscheinlich ist

$$M_\alpha(Y) = \lim_{r=1} \sum_i^{1..\infty} \sqrt{i}\, r^i (m_{\alpha i} f_i + m_{\alpha i}' f_i'). \tag{181}$$

Wir führen jetzt die in T reguläre Potentialfunktion

$$m_\alpha(r, s) = \sum_i^{1..\infty} r^i \frac{m_{\alpha i}}{\sqrt{i}} \sin is + \sum_i^{0..\infty} r^i \frac{m_{\alpha i}'}{\sqrt{i}} \cos is, \tag{182}$$

ein. Nach bekannten Sätzen ist $m_\alpha(r, s)$ auf S, ausser höchstens in einer Nullmenge, gleich $m_\alpha(s)$ [1]. Für (181) können wir auch schreiben

$$M_\alpha(Y) = \lim_{r=1} \int_0^{2\pi} m_\alpha(r, s) \frac{\partial}{\partial r} f(r, s)\, ds \tag{183}$$

oder

$$\begin{aligned} M_\alpha(Y) &= \lim_{r=1} \int_B m_\alpha(r, s) \frac{\partial}{\partial r} f(r, s)\, ds + \lim_{r=1} \int_E m_\alpha(r, s) \frac{\partial}{\partial r} f(r, s)\, ds \\ &+ \lim_{r=1} \int_{D-B} m_\alpha(r, s) \frac{\partial}{\partial r} f(r, s)\, ds = \lim_{r=1} I' + \lim_{r=1} I'' + \lim_{r=1} I''', \end{aligned} \tag{184}$$

[1] Vgl. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mathematica, 1906, Bd. 30, S. 335—400.

vorausgesetzt, dass die drei Grenzwerte existieren. Zunächst ist

$$(185)\qquad |I'''|^2 < \int_0^{2\pi}[m_\alpha(r,s)]^2\,ds \int_{D-B}\left(\frac{\partial}{\partial r}f(r,s)\right)^2 ds < c_{13}\int_{D-B}\left(\frac{\partial}{\partial r}f(r,s)\right)^2 ds,$$

$$(186)\qquad |\lim_{r=1} I'''|^2 \leqq c_{13}\int_{D-B}\left(\frac{\partial f(s)}{\partial r}\right)^2 ds < \varepsilon,$$

unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, sofern die Gesamtlänge von $D-B$ hinreichend klein ist. Es ist ferner

$$(187)\qquad \lim_{r=1} I' = \int_B m(s)\frac{\partial f}{\partial r}\,ds = 0.$$

Schliesslich ist

$$(188)\qquad \lim_{r=1} I'' = \lim_{r=1}\int_E \frac{m_\alpha(r,s)}{1-r}(1-r)\frac{\partial f(r,s)}{\partial s}\,ds.$$

Nach bekannten Sätzen ist, da $f(s)$ auf S stetig ist,

$$(189)\qquad \lim_{r=1}(1-r)\frac{\partial f(r,s)}{\partial r} = 0$$

und zwar ist der Grenzübergang gleichmässig. Es ist ferner, da, wie man leicht sieht, in A

$$\lim_{r=1} m_\alpha(r,s) = 0$$

ist, folglich in E

$$\frac{\partial m_\alpha(s)}{\partial r}$$

gewiss existiert und stetig ist,

$$(190)\qquad \left|\lim_{r=1}\frac{m_\alpha(r,s)}{1-s}\right| < c_{14}.$$

Daher ist auch

$$(191)\qquad \lim_{r=1} I'' = 0.$$

Aus den zuletzt durchgeführten Betrachtungen folgt, wie man leicht sieht,

$$(192)\qquad M_\alpha(Y) = 0.$$

Unter den vorhin ausführlich angegebenen Bedingungen gilt also wieder die Entwicklung (139). Sie konvergiert offenbar für alle (x, y) in jedem ganz im Innern von T gelegenen Gebiete unbedingt und gleichmässig. Unsere Voraussetzungen liessen sich übrigens noch verschärfen, doch wollen wir uns nicht länger dabei aufhalten.

In ahnlicher Weise lässt sich auch der in § 6 abgeleitete Entwicklungssatz auf den Fall ausdehnen, wenn $k(s)$ in einer endlichen Anzahl von Intervallen identisch verschwindet.

§ 8.

Wir haben bisjetzt

$$(193)\qquad l(s) \equiv 0, \qquad \int_0^{2\pi} k(s)\,ds \neq 0$$

vorausgesetzt. Ist

$$(194)\qquad l(s) \equiv 0, \qquad \int_0^{2\pi} k(s)\,ds = 0,$$

so bedürfen unsere Entwicklungen verschiedener Modifikationen. Wir begnügen uns mit einigen Andeutungen.

Aus den Formeln

$$(195)\qquad \sum_i^{1..\infty}(X_iY_i + X_i'Y_i') - \lambda K(X,Y) = 0,$$

$$(196)\qquad \begin{aligned} K(X,Y) = {} & \frac{1}{\pi}\sum_i^{1..\infty}\frac{X_iY_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} k(s)\sin is \sin js\,ds \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{i=1..\infty\\ j=0..\infty}}\frac{X_iY_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} k(s)\sin is\cos js\,ds \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{i=0..\infty\\ j=1..\infty}}\frac{X_i'Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} k(s)\cos is\sin js\,ds \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_{i,j}^{0..\infty}\frac{X_i'Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}}\int_0^{2\pi} k(s)\cos is\cos js\,ds \end{aligned}$$

folgt, wenn wir

$$(197)\qquad Y_0' = 1, \qquad Y_j = Y_j' = 0\ (j = 1, 2, ..)$$

setzen, sofern $\lambda \neq 0$ ist,

$$(198)\qquad \sum_i^{1..\infty}\frac{X_i}{\sqrt{i}}\int_0^{2\pi} k(s)\sin is\,ds + \sum_i^{1..\infty}\frac{X_i'}{\sqrt{i}}\int_0^{2\pi} k(s)\cos is\,ds = 0.$$

Die Fourier'schen Koeffizienten der Funktion $k(s)$ sind gewiss nicht sämtlich gleich Null. Es sei etwa

$$k_1 = \int_0^{2\pi} k(s) \sin s\, ds \neq 0.$$

Aus (198) folgt

$$(199)\qquad X_1 = -\frac{1}{k_1}\left\{\sum_i^{2..\infty} \frac{X_i}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is\, ds + \sum_i^{1..\infty} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is\, ds\right\}.$$

Legt man jetzt den bisher der einzigen Voraussetzung, dass

$$\sum_j^{1..\infty} Y_j^2 + \sum^{0..\infty} Y_j'^2$$

konvergieren soll, unterworfenen Grössen Y_j, Y_j' die weitere Einschränkung, dass

$$(200)\qquad \sum_j^{1..\infty} \frac{Y_j}{\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin js\, ds + \sum_j^{1..\infty} \frac{Y_j'}{\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos js\, ds = 0$$

sein soll, auf, so erhält man aus (195), (198) und (200)

$$(201)\qquad \sum_i^{1..\infty} X_i Y_i + \sum_i^{1..\infty} X_i' Y_i' - \lambda \underline{K}(X, Y) = 0,$$

$$(202)\qquad \begin{aligned} \pi \underline{K}(X, Y) = & \sum_{i,j}^{1..\infty} \frac{X_i Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin js\, ds \\ & + \sum_{i,j}^{1..\infty} \frac{X_i Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \cos js\, ds \\ & + \sum_{i,j}^{1..\infty} \frac{X_i' Y_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is \sin js\, ds \\ & + \sum_{i,j}^{1..\infty} \frac{X_i' Y_j'}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is \cos js\, ds. \end{aligned}$$

Hierin sind für X_1 und Y_1 ihre Werte aus (195) und (200) einzusetzen.

Man erhält so

$$(203)\qquad \sum_i^{2..\infty} X_i Y_i + \sum_i^{1..\infty} X_i' Y_i' + P(X, Y) - \lambda \mathfrak{K}(X, Y) = 0.$$

Hierin ist

$$(204)\qquad \begin{aligned} P(X, Y) = \frac{1}{k_1^2} & \left\{\sum_i^{2..\infty} \frac{X_i}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is\, ds + \sum_i^{1..\infty} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is\, ds\right\} \left\{\sum_i^{2..\infty} \frac{Y_i}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is\, ds \right. \\ & \left. + \sum_i^{1..\infty} \frac{Y_i'}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is\, ds\right\}, \end{aligned}$$

$\mathfrak{K}(X, Y)$ ist eine vollstetige, symmetrische Bilinearform der Variabeln $X_i\ (i = 2, 3, \ldots)$, $X_i'\ (i = 1, 2, \ldots)$, $Y_i\ (i = 2, 3, \ldots)$, $Y_i'\ (i = 1, 2, \ldots)$. Setzt man in (195)

$$Y_1 = 1, \quad Y_i = 0\ (i = 2, 3, \ldots), \quad Y_i' = 0\ (i = 0, 1, \ldots),$$

so erhält man nach einer einfachen Umrechnung

$$(205)\qquad \begin{aligned} X_0' = \frac{\pi X_1}{\lambda k_1} & - \frac{1}{k_1} \sum_i^{1..\infty} \frac{X_i}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \sin is \sin s\, ds \\ & - \frac{1}{k_1} \sum_i^{1..\infty} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \int_0^{2\pi} k(s) \cos is \sin s\, ds. \end{aligned}$$

Sind aus (203) die Werte $X_i\ (i = 2, 3, ..)$, $X_i'\ (i = 1, 2, ..)$ ermittelt, so liefern (119) und (205) die zugehörigen Werte von X_1 und X_0'.

Wir setzen jetzt vorübergehend

$$(206)\qquad \sum_i^{2..\infty} X_i Y_i + \sum_i^{1..\infty} X_i' Y_i' + P(X, Y) = Q(X, Y).$$

Für alle der Gleichung

$$(207)\qquad \sum_i^{2..\infty} X_i^2 + \sum_i^{1..\infty} X_i'^2 = 1$$

genügenden Werte der Variabeln ist offenbar

$$Q(X, X) \geqq 1. \tag{208}$$

Einem bekannten Satze des Herrn Toeplitz zufolge kann man $Q(X, Y)$ durch eine orthogonale Transformation

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_j^{2..\infty} r_{ij} \overline{X}_j + \sum_j^{1..\infty} r'_{ij} \overline{X}_j', & Y_i &= \sum_j^{2..\infty} r_{ij} \overline{Y}_j + \sum_j^{1..\infty} r'_{ij} \overline{Y}_j', & (i = 2, 3, ..) \\ X_i' &= \sum_j^{2..\infty} q_{ij} \overline{X}_j + \sum_j^{1..\infty} q'_{ij} \overline{X}_j', & Y_i' &= \sum_j^{2..\infty} q_{ij} \overline{Y}_j + \sum_j^{1..\infty} q'_{ij} \overline{Y}_j' & (i = 1, 2, ..) \end{aligned} \tag{209}$$

in die Form

$$\sum_i^{2..\infty} \overline{X}_i \overline{Y}_i + \sum_i^{1..\infty} \overline{X}_i' \overline{Y}_i' \tag{210}$$

transformieren.[1] Durch dieselbe Substitution geht $\mathfrak{K}(X, Y)$ in eine vollstetige symmetrische Bilinearform $\overline{\mathfrak{K}}(\overline{X}, \overline{Y})$ über. Für (203) erhalten wir die Formel

$$\sum_i^{2..\infty} \overline{X}_i \overline{Y}_i + \sum_i^{1..\infty} \overline{X}_i' \overline{Y}_i' - \lambda \overline{\mathfrak{K}}(\overline{X}, \overline{Y}) = 0, \tag{211}$$

deren weitere Behandlung keine Schwierigkeiten bietet.[2]

§ 9.

Wir haben bis jetzt $l(s) \equiv 0$ vorausgesetzt. Diese Annahme lassen wir jetzt fallen und betrachten die allgemeinere Beziehung

$$\sum_i^{1..\infty} X_i Y_i + \sum_i^{1..\infty} X_i' Y_i' - L(X, Y) - \lambda K(X, Y) = 0. \tag{212}$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf den Fall, dass $l(s)$ durchweg negativ ist und dem absoluten Betrage nach eine positive Zahl

[1] Vgl. O. Toeplitz, Über die Jacobische Transformation quadratischer Formen mit unendlichvielen Variabeln. Göttinger Nachrichten, 1907.

[2] Vgl. meine eingangs zitierte Palermo Arbeit, wo im II. Kapitel analoge Betrachtungen durchgeführt worden sind.

übersteigt. In Formeln:

$$l(s) < -c_{15} < 0. \tag{213}$$

Wird jetzt

$$\sum_i^{1..\infty} X_i Y_i + \sum_i^{1..\infty} X_i' Y_i' - L(X, Y) = R(X, Y) \tag{214}$$

gesetzt, so ist für alle der Beziehung

$$\sum_i^{1..\infty} X_i^2 + \sum_i^{0..\infty} X_i'^2 = 1 \tag{215}$$

genügenden Werte der Variabeln X_i $(i = 1, 2, ..)$, X_i' $(i = 0, 1, ..)$

$$R(X, X) > c_{16}. \tag{216}$$

In der Tat ist, wenn wir

$$u^{(n)}(s) = \sum_i^{1..n} \frac{X_i}{\sqrt{i}} \sin is + \sum_i^{1..n} \frac{X_i'}{\sqrt{i}} \cos is \tag{217}$$

setzen,

$$\begin{aligned} -[L(X, X)]_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} l(s) [u^{(n)}(s)]^2 ds > c_{15} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [u^{(n)}(s)]^2 ds \\ &= c_{15} \left\{ X_0'^2 + \sum_i^{1..n} \frac{1}{i} (X_i^2 + X_i'^2) \right\}, \end{aligned} \tag{218}$$

daher

$$-L(X, X) \geqq c_{15} \left\{ X_0'^2 + \sum_i^{1..\infty} \frac{1}{i} (X_i^2 + X_i'^2) \right\},$$

$$R(X, X) \geqq c_{15} X_0'^2 + \sum_i^{1..\infty} \left(1 + \frac{c_{15}}{i}\right) (X_i^2 + X_i'^2). \tag{219}$$

Ist c_{16} die kleinere der beiden Zahlen c_{15} und 1, so ist

$$R(X, X) > c_{16} \left\{ X_0'^2 + \sum_i^{1..\infty} (X_i^2 + X_i'^2) \right\}. \tag{220}$$

Also ist für alle der Beziehung (215) genügenden Werte der Variabeln wie behauptet

(221) $$R(X, X) > c_{16}.$$

Dem vorhin zitierten Satze des Herrn Toeplitz zufolge kann man eine orthogonale Transformation

$$X_i = \sum_j^{1..\infty} \mu_{ij} \overline{X}_i + \sum_j^{0..\infty} \mu'_{ij} \overline{X}_i', \quad Y_i = \sum_j^{1..\infty} \mu_{ij} \overline{Y}_i + \sum_j^{0..\infty} \mu'_{ij} \overline{Y}_i' \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

(222)

$$X_i' = \sum_j^{1..\infty} \nu_{ij} \overline{X}_i + \sum_j^{0..\infty} \nu'_{ij} \overline{X}_i', \quad Y_i' = \sum_j^{1..\infty} \nu_{ij} \overline{Y}_i + \sum_j^{0..\infty} \nu'_{ij} \overline{Y}_i' \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

angeben, so dass

(223) $$R(X, Y) = \sum_i^{1..\infty} \overline{X}_i \overline{Y}_i + \sum_i^{0..\infty} \overline{X}_i' \overline{Y}_i',$$

(224) $$K(X, Y) = \overline{K}(\overline{X}, \overline{Y})$$

wird. $\overline{K}(\overline{X}, \overline{Y})$ ist eine vollstetige, symmetrische Bilinearform. Für (214) tritt jetzt die Beziehung

(215) $$(\overline{X}, \overline{Y}) - \lambda \overline{K}(\overline{X}, \overline{Y}) = 0$$

ein, deren weitere Behandlung keine Schwierigkeiten bietet.[1]

Es sei zum Schluss bemerkt, dass sich diese Betrachtungen leicht weiter fortspinnen lassen. Die Voraussetzung (213) lässt sich ohne Schwierigkeiten durch eine weiterreichende ersetzen.

---

[1]) Vgl. meine Palermo Arbeit, in der analoge Betrachtungen wiederholt vorkommen.