STEFAN MAZURKIEWICZ.

O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$.

Sur la relation entre l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3}$ et la continuité de la fonction $f(x)$.

W pracy: „O związku między istnieniem granicy $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ a ciągłością funkcyi $f(x)$“ [1] udowodnił P. Sierpiński, że dla funkcyj ograniczonych w otoczeniu punktu x_0 warunek

$$\lim_{\Delta x=0} (\Delta^2 f(x))_{x=x_0} = 0$$

pociąga za sobą ciągłość funkcyi $f(x)$ w punkcie x_0, i postawił analogiczne zagadnienie dla $\Delta^3 f(x)$, t. zn. zagadnienie następujące:

Czy istnieją funkcye, ograniczone w otoczeniu punktu x_0 [2], nieciągłe w tym punkcie i czyniące zadość warunkowi:

$$\lim_{\Delta x=0} (\Delta^3 f(x))_{x=x_0} = 0\,? \tag{1}$$

Przykład poniżej podany wykazuje, że funkcye takie istnieją. Niechaj będzie α najmniejsze dodatnie rozwiązanie równania:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}. \tag{2}$$

---

[1] Prace mat.-fiz. t. 26, str. 127.

[2] Istnienie funkcyj nieograniczonych, nieciągłych dla $x=x_0$ i spełniających warunek (1) zostało udowodnione l. c.

Kładziemy:

(α) dla liczb x kształtu $2^k . 3^n$ ($k=0, \pm 1 \ldots, n=0, \pm 1 \ldots$):

$$f(x) = \cos\left(\alpha k + \frac{\alpha+\pi}{2} n\right);$$

(β) dla pozostałych:

$$f(x) = 0;$$

$f(x)$ jest funkcyą ograniczoną. Dalej, ponieważ α nie jest całkowitą wielokrotnością liczby 2π, więc np. ciąg:

$$\left\{ f\left(\frac{1}{2^k}\right)\right\} = \{\cos(-k\alpha)\} = \{\cos(k\alpha)\} \qquad k = 1, 2 \ldots \tag{3}$$

będzie rozbieżny, a więc w punkcie $x=0$ funkcya $f(x)$ jest nieciągła. Tem niemniej warunek (1) jest spełniony dla $x_0 = 0$. Zachodzi nawet równość

$$(\Delta^3 f(x))_{x=0} = 0 \tag{4}$$

dla wszelkich Δx.

Istotnie, jeżeli x nie jest kształtu $2^k . 3^n$ ($k, n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$) wówczas

$$f(\Delta x) = f(2\Delta x) = f(3\Delta x) = 0$$

a stąd i z równości

$$f(0) = 0 \tag{5}$$

wynika (4). Jeżeli zaś $\Delta x = 2^k . 3^n$, wówczas:

$$(\Delta^3 f(x))_{x=0} = \cos\left[k.\alpha + (n+1)\frac{\alpha+\pi}{2}\right] - 3\cos\left[(k+1)\alpha + n\frac{\alpha+\pi}{2}\right] \tag{6}$$

$$+ 3\cos\left[k\alpha + n\frac{\alpha+\pi}{2}\right] = \left(1 - 6\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left[k\alpha + (n+1)\frac{\alpha+\pi}{2}\right] \text{ [1]}$$

i wobec (2):

$$(\Delta^3 f(x))_{x=0} = 0; \tag{7}$$

warunek (4) zachodzi więc dla wszystkich Δx, c. b. d. o.

---

[1]) Posługujemy się znanym wzorem Rachunku różnicowego:

$$\Delta \cos[k.a+b] = 2\sin\frac{ah}{2}.\cos\left[ka+b+\frac{ah+\pi}{2}\right]$$

(h — oznacza różnicę zmiennej niezależnej k); por. np. Encycl. des sc. math. I, 21, § 5.

Podobnież z łatwością sprawdzić można, że funkcya, określona przez wzory:

$$f(x) = \cos\left[(k+m+n)\beta + n\frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin\beta = \frac{1}{10},$$

dla liczb kształtu $2^k . 3^m . 5^n$ ($k, m, n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$), oraz

$$f(x) = 0$$

dla pozostałych x rzeczywistych, jest ograniczona, nieciągła w punkcie $x=0$ i spełnia warunek:

$$(\Delta^5 f(x))_{x=0} = 0.$$

Wreszcie funkcya

$$f(x) = \cos\left[(k+2l+m)\frac{\gamma}{3} + n\frac{\gamma+\pi}{2}\right], \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{14},$$

dla $x = 2^k . 3^l . 5^m . 7^n$ ($k, l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$);

$$f(x) = 0$$

dla pozostałych x, — jest ograniczona, nieciągła w punkcie $x=0$ i spełnia warunek

$$(\Delta^7 f(x))_{x=0} = 0.$$

Warszawa 21 / I 1914.
