ALFRED ROSENBLATT.

Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre deux.

(O powierzchniach algebraicznych, posiadających pęk niewymierny krzywych hypereliptycznych rodzaju 2).

Les surfaces qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes ont depuis longtemps attiré l'attention des géomètres. En effet, ce sont les surfaces possédant un faisceau irrationnel de courbes rationnelles, qui ont été l'objet des mémorables recherches de M. Noether[1]. Il résulte des ces recherches et des celles de M. Enriques que les surfaces en question sont toujours réferables aux surfaces réglées. Ensuite, ce sont les surfaces avec un faisceau irrationnel de courbes elliptiques, dont les propriétés extrêmement intéressantes ont occupé MM. Castelnuovo et Enriques, surfaces qui sont ou bien les surfaces elliptiques des MM. Picard et Painlevé, ou bien des surfaces ayant leur genre arithmétique au moins égal à zéro et pouvant admettre des séries discontinues de transformations birationnelles. On a étudié encore d'autres classes de surfaces avec des faisceaux irrationnels, comme les surfaces avec deux faisceaux unisécants de courbes.

Mais c'est surtout un théorème remarquable de M. Castelnuovo, publié en 1905[2], qui a montré toute l'importance de l'étude générale des surfaces à faisceaux irrationnels. En effet, M. Castelnuovo a établi, par une

[1]) Voir mon Rapport, présenté à la XI-e Réunion des médécins et naturalistes polonais à Cracovie et publié à Varsovie par M. le prof. Dickstein dans le XXIII Tome des „Prace matematyczno-fizyczne" (en polonais).

[2]) „Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo". Rendiconti del „Circolo Matematico di Palermo." T. **20**.

voie des plus intéressantes, que toutes les surfaces dont les genres p_g et p_a satisfont à l'inégalité capitale

(1) $$p_g \geqq 2\,(p_a + 2),$$

possèdent un faisceau irrationnel de genre au moins égal à deux.

J'ai poursuivi l'étude de ces surfaces remarquables dans plusieurs travaux, guidé toujours par l'idée de démontrer l'impossibilité de l'inégalité $p_g > 2\,(p_a + 2)$, si les courbes du faisceau ont leur genre plus grand que un. J'étais déjà parvenu à l'inégalité

(2) $$p_g \leqq \frac{8}{3} p_a + \frac{14}{3},$$

lorsque M. Castelnuovo me fit remarquer qu'on pourrait espérer d'avancer encore, en envisageant l'inégalité suivante

(3) $$(\pi - 3)\,(\pi' - 3) \leqq 2,$$

dans laquelle π, π' désignent le genre des courbes du faisceau irrationnel et le genre de ce faisceau lui-même.

Je pouvais énoncer bientôt, dans une Communication présentée à l'Académie de Paris, que les surfaces dont le genre p_g dépasse le double du genre p_a plus quatre, possèdent, si elles existent, un faisceau de genre $p_g - p_a$ de courbes de genre deux, mais que, si l'on a $p_g = 2p_a + 4$, et si les courbes du faisceau sont également de genre deux, le genre du faisceau est ou bien égal à $p_g - p_a$, ou bien la surface possède deux faisceaux de courbes unisécantes, savoir un faisceau de genre $p_g - p_a - 2$ de courbes de genre deux, et un faisceau de genre deux de courbes de genre $p_g - p_a - 2$.

Pour étudier les surfaces avec $p_g = 2p_a + 4$, on peut remplacer l'inégalité (3) par l'inégalité plus expressive

(4) $$\frac{m}{2}(\pi - 1) + (\pi - 3)\,(\pi' - 3) \leqq 2,$$

m étant le nombre des courbes k contenues dans des courbes canoniques de la surface. On voit alors que le genre π' est limité, si π dépasse le nombre deux, et qu'il n'est pas supérieur à six, l'existence de ces surfaces étant d'ailleurs incertaine. Ces résultats seront exposés dans une Note de prochaine publication dans les „Rendiconti di Palermo".

1. Je me suis servi, pour établir les résultats exposés, des propriétés du système canonique algébrique $\{K\}$ de la surface. En poursuivant cette voie, on peut parvenir à des resultats importants pour toutes les surfaces contenant des faisceaux irrationnels de courbes de genre deux.

Supposons, en effet, que le genre π' du faisceau irrationnel $\{k\}$ soit plus petit que $p_g - p_a$: alors il est égal ou bien à $p_g - p_a - 1$ ou bien

à $p_g - p_a - 2$. Dans le premier cas, il y a $\infty^{p_g - p_a - 1}$ systèmes paracanoniques linéaires $|K^*|$ découpant un même groupe de deux points sur les courbes k du faisceau. On obtient, par exemple, ces systèmes en partant d'un système, en lui ajoutant un groupe de π' courbes k du faisceau irrationnel $\{k\}$ et en retranchant un second groupe de π' courbes k, symboliquement:

$$|K^*_2| = |K^*_1 + \Sigma_2 k - \Sigma_1 k|.$$

Mais le système canonique algébrique de la surface est composé, d'après les théorèmes généraux des MM. Enriques et Severi, de $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes linéaires paracanoniques. Donc, comme d'après M. Severi, si deux courbes découpent des groupes équivalents de points sur les courbes d'un faisceau irrationnel, elles sont équivalentes ou bien elles diffèrent par des courbes du faisceau, il existe sur la surface un système algébrique ∞^1 $\{C\}$ de courbes isolées, c'est à dire formant, chacune en soi, un système linéaire complet.

Ces courbes découpent sur les courbes k du faisceau $\{k\}$ des groupes de deux points non équivalents. Chaque courbe C est contenue dans $\infty^{p_g - p_a - 1}$ systèmes linéaires paracanoniques qu'on obtient en lui ajoutant des groupes de courbes k non équivalents, groupes qui sont en général non spéciaux. Ces systèmes de dimension effective au moins égale à la dimension virtuelle p_a contiennent C comme partie fixe, et au moins $p_a + \pi' = p_g - 1$ courbes k.

À priori, le système $\{C\}$ peut ou bien être un faisceau elliptique, ou une involution elliptique dans un faisceau irrationnel de genre arbitraire $\geqq 1$, ou enfin il peut avoir son degré plus grand que zéro. Ce degré est alors au moins égal à deux, car les surfaces contenant un système algébrique infini composé de courbes non équivalentes et de degré un sont ou bien rationnelles ou bien elle représentent les couples de points d'une courbe de genre supérieur à zéro. En tout cas, la variété V_1 de M. Picard, image de ce système $\{C\}$, est une courbe elliptique.

En effet, cette courbe admet un grupe continu ∞^1 de transformations birationnelles en elle-même, puisqu'on obtient toute courbe d'une de ces courbes C, en la transformant de la manière suivante. On ajoute au système paracanonique $|K^*|$ contenant cette courbe C une courbe arbitraire C' fixe, et ou en retranche une courbe arbitraire variable C''. On obtient alors un système paracanonique $|K^*_1|$

$$|K^*_1| = |K^* + C' - C''|,$$

contenant une courbe C''' fixe, qui est la transformée de la courbe C (bien entendu, dans la variété V_1, où les courbes C sont représentées par des points). Le système $|K^*_1|$ contiendra en général une courbe fixe, car il découpe en général sur les courbes k du faisceau $\{k\}$ un groupe paracanonique de points.

Cela donne le groupe de transformations birationnelles de la courbe de M. Picard en elle-même.

Envisageons maintenant l'intégrale elliptique de première espèce $I(\xi, \eta)$ de la courbe elliptique $\varphi(\xi, \eta)=0$, image du système $\{C\}$. À un point x, y, z de la surface $F(x, y, z)=0$ correspondent $m \geqq 1$ points de la courbe $\varphi(\xi, \eta)=0$

$$\xi_1 \eta_1; \quad \xi_2 \eta_2; \quad \xi_3 \eta_3; \quad \ldots; \quad \xi_m \eta_m,$$

formant ainsi une série algébrique ∞^2 de groupes de points composée de ∞^1 séries linéaires non équivalentes. La somme

$$\sum_{i=1}^{m} I(\xi_i \eta_i),$$

étendue à tous les points d'un groupe, donne une intégrale de première espèce de M. Picard $I(x, y, z)$ de la surface $F(x, y, z)=0$, intégrale réductible à une intégrale elliptique. Si l'on pose la congruence

$$I(\xi, \eta)+\sum_{i=1}^{m} I(\xi_i \eta_i) \equiv 0, \qquad \text{(modd. pr.)}$$

ou bien

$$I(\xi, \eta)+I(x, y, z) \equiv 0,$$

à chaque point $P(x, y, z)$ de la surface correspond un point de la courbe elliptique $\varphi(\xi, \eta)=0$, et, inversement, à chaque point de la courbe $\varphi(\xi, \eta)=0$ correspond une courbe sur la surface. La surface donnée possède donc un faisceau elliptique de courbes ou bien une involution elliptique dans un faisceau irrationnel de courbes, le faisceau étant composé de courbes algébriques d'un certain genre.

Maintenant, cette involution elliptique ne peut pas entrer dans le faisceau $\{k\}$ donné sur la surface En effet, deux courbes D composées de m courbes C du système $\{C\}$ passant par un même point d'une courbe k, seraient alors équivalentes, si les deux points appartenaient à une même courbe k. On aurait alors, sur toute courbe k, une série linéaire de groupes de points, dont chaque groupe serait composé de m groupes de deux points ayant un point en commun. Mais alors, d'après M. Severi[1]), ces groupes de deux points seraient équivalents, ce qui n'est pas vrai. Donc le faisceau elliptique $\{C\}$ est différent du faisceau $\{k\}$.

[1]) „Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche“. Annali di Matematica pura ed applicata. Ser. III. T. **12**. 1905.

On peut affirmer tout de suite que les modules des courbes k sont variables. En effet, si lés modules des courbes d'un faisceau de courbes de genre quelconque sont constants, la surface possède un second faisceau de courbes, faisceau sans points base. Si les courbes k sont de genre supérieur à deux et générales, alors ce second faisceau est composé de courbes unisécantes par rapport au faisceau $\{k\}$, donc son genre est égal au genre des courbes k. Si les courbes k sont celles que nous envisageons ici, on a ou bien un faisceau linéaire de courbes découpant la série canonique sur les courbes k, ou bien un faisceau de genre deux unisécant par rapport à $\{k\}$. Les courbes C sont toujours composées avec les courbes de ce faisceau. Dans le premier cas, chaque courbe du système canonique algébrique $\{K\}$ est composée d'une courbe de ce second faisceau linéaire et d'un certain nombre de courbes k et le genre π' de $\{k\}$ est égal à $p_g - p_a$. Dans le second cas, π' est égal à $p_g - p_a - 2$, et les courbes C sont composées de deux courbes du second faisceau de genre deux.

2. Soit maintenant π' égal à $p_g - p_a - 2$. Nous avons alors un système algébrique ∞^2 $\{C\}$, composé de courbes isolées, non équivalentest À priori, ce système peut ou bien avoir ses courbes irréductibles ayant un degré positif au moins égal à deux, ou bien il peut être un faisceau hyperelliptique (ou une involution hyperelliptique de genre deux dans un faisceau irrationnel), ou bien les courbes du système peuvent être composées des courbes de deux faisceaux elliptiques (ou de deux involutions elliptiques dans des faisceaux irrationnels), ou enfin les courbes C peuvent être composées avec des courbes de systèmes ∞^1 de degré positif au moins égal à deux. Or toujours le système $\{C\}$ possède un groupe ∞^2 permutable et transitif de transformations birationnelles. En effet, formons les systèmes paracanoniques, en partant d'un système paracanonique fixe $|K^*_1|$ contenant une courbe C du système $\{C\}$, en ajoutant une courbe C' fixe et en retranchant une seconde courbe C'' variable

$$|K^*_2| = |K^*_1 + C' - C''|.$$

Le système K^*_2 est aussi réductible, contenant une courbe C''' fixe, ce qui donne le groupe ∞^2 de transformations birationnelles.

L'image du système $\{C\}$ est alors une variété à deux dimensions de M. Picard, savoir une surface hyperelliptique de M. Picard. Cette surface possède deux intégrales de M. Picard de première espèce

$$u_1(\xi, \eta, \zeta), \quad u_2(\xi, \eta, \zeta),$$

qui donnent, par inversion, ξ, η, ζ comme fonctions hyperelliptiques quadruplement périodiques de deux arguments.

Envisageons sur cette surface $V(\xi, \eta, \zeta) = 0$ de M. Picard une courbe arbitraire γ[1]. Aux points de cette courbe correspond sur la surface primitive F un système algébrique ∞^1 de courbes C contenu dans le système $\{C\}$. Par un point général $P(x, y, z)$ de F passent m courbes C dont l'image est un groupe de m points

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1;\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2;\ \ldots;\ \xi_m,\ \eta_m,\ \zeta_m$$

de la courbe γ. Envisageons alors les deux équivalences

$$\begin{cases} u_1(\xi, \eta, \zeta) + \sum_{i=1}^{m} u_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv 0, \\ u_2(\xi, \eta, \zeta) + \sum_{i=1}^{m} u_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \equiv 0, \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} u_1(\xi, \eta, \zeta) + I_1(x, y, z) \equiv 0, \\ u_2(\xi, \eta, \zeta) + I_2(x, y, z) \equiv 0, \end{cases}$$

$I_1(x, y, z)$, $I_2(x, y, z)$ étant les deux intégrales de M. Picard de première espèce qui correspondent sur F aux deux intégrales $u_1(\xi, \eta, \zeta)$, $u_2(\xi, \eta, \zeta)$ de la surface hyperelliptique. À un point $P(x, y, z)$ correspond sur $V(\xi, \eta, \zeta) = 0$ un point $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$ unique, mais à un point $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$ peut correspondre ou un groupe fini de points sur $F(x, y, z) = 0$, ou bien une courbe algébrique.

Dans le premier cas, les points $P(x, y, z)$, qui correspondent à un point $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$, sont ceux, auxquels appartiennent des courbes D, sommes de m courbes C passant par ces points, équivalentes, donc des groupes de m points équivalents sur γ. Dans le second cas, toutes les ∞^1 courbes D, qui appartiennent aux ∞^1 points d'une courbe algébrique, sont équivalentes.

Dans le premier cas, la surface $F(x, y, z) = 0$ est représentable sur la surface $V(\xi, \eta, \zeta) = 0$ multiple (F n'étant pas, elle-même, hyperelliptique). On a alors sur $V(\xi, \eta, \zeta) = 0$ une certaine courbe de diramation.

Dans le second cas ou bien les deux intégrales $I_1(x, y, z)$, $I_2(x, y, z)$ sont fonctions l'une de l'autre et se réduisent à deux intégrales hyperelliptiques d'une courbe de genre deux, ou bien chaque intégrale $I_1(x, y, z)$, $I_2(x, y, z)$ est réductible à une intégrale elliptique. La surface de M. Picard est alors une surface de Jacobi, qui possède ∞^2 courbes hyperelliptiques de genre deux dans le premier cas, mais qui possède, dans le second cas, deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques unisécantes. On peut prendre comme courbe γ dans le premier cas une courbe de genre deux, dans le second cas une courbe elliptique. Aux points de la courbe de genre deux correspondent sur $F(x, y, z) = 0$ des courbes d'un faisceau hyperelliptique de genre deux, ou bien des courbes formant une involution hyperelliptique de genre deux dans un faisceau irrationnel. Si l'une des deux intégrales de M. Picard, et par suite aussi l'autre, sont réductibles à des intégrales elliptiques, la surface $F(x, y, z) = 0$ possède deux faisceaux elliptiques de courbes, ou bien deux involutions elliptiques, correspondants aux deux intégrales $I_1(x, y, z)$ et $I_2(x, y, z)$.

[1] Castelnuovo: „Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficre irregolare". Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. Ser. 5. T. **14**. 1905.

3. Il est facile de voir que le premier cas est impossible. En effet, envisageons le faisceau irrationnel $\{k\}$ et son image dans l'involution, image située sur la surface $V(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Cet image ne pouvant pas être un faisceau irrationnel devrait être un système algébrique de degré au moins égal à deux $\{k^*\}$. Le genre des courbes k^* ne peut pas dépasser deux, et s'il est égal à deux, alors les courbes k et k^* se correspondent birationnellement. Alors le genre π^* de k^* est deux, et le degré n^* est égal à deux, d'après la formule

$$n^* = 2\pi^* - 2.$$

La surface $V(\xi, \eta, \zeta) = 0$ serait alors une surface de Jacobi, et les courbes k^* appartiendraient à un système algébrique composé de ∞^2 courbes k^* non équivalentes et de mêmes modules, puisque les transformations du groupe continu ∞^2 transforment ces courbes l'une dans une autre. Donc aussi les courbes k^* les auraient mêmes modules, mais alors, comme nous l'avons vu, la surface possède un second faisceau de genre deux de courbes dont se composent les courbes C, et on a le second cas.

Envisageons le second cas. Ici encore, comme dans le cas de $\pi' = p_g - p_a - 1$, le faisceau $\{k\}$ ne peut pas contenir les faisceaux dont l'existence sur la surface vient d'être établie. En effet, si les ∞^1 courbes D, dont on a dejà parlé, étaient équivalentes, les courbes C devraient découper sur les courbes k des groupes équivalents, ce qui n'est pas possible. Donc, ou bien la surface possède un faisceau de genre deux de courbes, et alors ces courbes sont unisécantes par rapport aux courbes k, ou bien la surface possède deux faisceaux elliptiques de courbes. Alors les courbes k sont composées par deux involutions elliptiques, et leurs modules sont différents, comme nous l'avons vu.

Si les courbes k contiennent une involution elliptique, l'image de cette involution est une surface avec un faisceau irrationnel de genre π' de courbes elliptiques. Sur F on a une courbe de diramation, formée par les couples de points de coïncidence de l'involution sur chaque courbe k, et cette courbe de coïncidence ajoutée aux courbes k donne une courbe canonique de F. La surface F^*, image de l'involution, peut on bien être elliptique, et alors elle contient, outre le faisceau de genre π', un autre faisceau elliptique de courbes de genre supérieur à zéro, donc aussi la surface F contient un faisceau irrationnel, elliptique ou bien hyperelliptique de genre deux et composé par deux involutions elliptiques.

4. Nous étudierons maintenant notre surface d'une autre manière, en envisageant l'involution I_2 déterminée par les couples de points conjugués des courbes hyperelliptiques k.

On peut alors représenter notre surface sur une surface réglée double F^* Aux courbes k correspondent, sur la surface reglée, les génératrices. La courbe D de coïncidence de l'involution coupe les courbes k en six points. Donc le double de cette courbe est équivalent à six fois une courbe canonique K aux courbes k du faisceau $\{k\}$ près. Donc on a

$$2D + \lambda k \equiv 6K + \mu k,$$

λ, μ étant deux nombres positifs. Posons $\mu - \lambda = \nu$, et calculons le nombre des points de rencontre d'une courbe K avec la courbe D. On trouve

$$2(D, D) = 6(D, K) + 6\nu,$$

$$2(K, D) = 6(K, K) + 2\nu.$$

Donc on a

$$(D, D) = 9(p^{(1)} - 1) + 6\nu, \qquad (K, D) = 3(p^{(1)} - 1) + \nu,$$

$p^{(1)}$ étant le genre linéaire de la surface F.

Maintenant, si l'on envisage la correspondance entre la courbe canonique K et son image K^* sur la surface F^*, et si l'on se sert de la formule de Zeuthen, on trouve

$$2(p^{(1)} - 1) = 4(\pi' - 1) + 3(p^{(1)} - 1) + \nu,$$

donc

(α) $$p^{(1)} = -\nu - 4\pi' + 5.$$

Cette formule intéressante nous a été communiquée par M. Godeaux qui s'est occupé de l'étude de la correspondance entre F et F^*.

Calculons maintenant les invariants de Zeuthen-Segre de deux surfaces F et F^*. Soient I, I^* ces deux invariants. On a

$$I^* = -4\pi', \qquad I = 12p_a + 9 - p^{(1)}.$$

On a entre ces deux invariants la relation de Severi

$$I = 2I^* + 2\pi_D + 2,$$

π_D étant le genre de la courbe de coïncidence D égal au genre de la courbe de diramation D^*. On trouve d'ailleurs

$$\pi_D = \frac{7}{2}\nu + 6p^{(1)} - 5,$$

donc on trouve

$$12p_a - 7\nu = 13p^{(1)} - 8\pi - 17;$$

d'où on tire

(β) $$p_a = -\frac{\nu}{2} - 5\pi' + 4.$$

Mais on a

$$p^{(1)} \leqq 12p_a + 13 - 4(\pi' - 1),$$

donc on trouve la formule capitale

(5) $$\pi' \leqq p_a + 2.$$

Soit $\pi' = p_g - p_a - \varepsilon$, $\varepsilon = 0$, 1 ou 2, alors on a

$$p_g \leqq 2p_a + 2 + \varepsilon.$$

Il s'ensuit que, seulement si $\varepsilon = 2$. on peut avoir $p_g = 2p_a + 4$, et que les surfaces $p_g > 2p_a + 4$ n'existent pas. On retrouve les surfaces avec deux faisceaux unisécants de genre $p_g - p_a - 2 = p_a + 2$ et deux. Les courbes canoniques sont équivalentes alors à $2\pi - 2$ courbes k plus deux courbes du second faisceau, donc ν est égal à $-(2\pi - 2)$.