I doświadczenia jonizacyjne pozwalają zatem przypuszczać, że zachowanie się odskakujących atomów jest dlatego różne od zachowania się cząsteczek α, że promienie pierwszego rodzaju są powolniejsze i utworzone z cięższych pocisków. Prawa fizyczne, rządzące absorbcyą i jonizacyą, są najpewniej w obu razach identyczne. Wszelka teorya cząsteczek α powinna być jednocześnie teoryą odskoku, i odwrotnie.

Jest mi miłym obowiązkiem wyrazić pani Curie moją szczerą wdzięczność za życzliwe wskazówki, jakich mi w ciągu pracy tej udzielała.

MIECZYSŁAW WOLFKE.

O powstawaniu obrazów optycznych w mikroskopie.

(Sur la formation des images optiques dans le microscope).

§ 1. Uginanie się światła.

Pierwszy E. Abbe[1] zauważył, że obrazy mikroskopowe przedmiotów niesamoświecących zależą od wielkości i od formy diafragmy, ograniczającej bieg promieni w mikroskopie; że wobec tego obraz otrzymany nie zawsze zgadza się z obrazem, jaki powinien powstać na zasadzie praw Optyki geometrycznej To samo zjawisko zostało następnie zaobserwowane przez L. Mandelstama[2] dla przedmiotów samoświecących. Rozbieżność ta, którą możemy obserwować w pewnych przypadkach pomiędzy otrzymanymi obrazami w mikroskopie i pomiędzy przewidzianymi przez Optykę geometryczną, tłómaczy się tem, że Optyka geometryczna nie uwzględnia zjawiska uginania się światła, lecz przyjmuje, jako podstawę rozważań, twierdzenie, że światło biegnie w ośrodku jednorodnym zawsze w kierunkach prostolinijnych. W ten sposób Optyka geometryczna nadaje promieniom świetlnym byt rzeczywisty, niezależny, gdy tymczasem z punktu widzenia Optyki fizycznej, promień świetlny jest pojęciem pochodnem, wypływającem z pojęcia fali świetlnej. Światło z fizycznego punktu widzenia w najogólniejszej formie możemy określić, jako pewną perturbacyę w przestrzeni, którą można wyrazić za pomocą

---

[1]) Zob. E. Abbe, Gesammelte Werke 1, p. 82, a także L. Zimmermann, Das Mikroskop, wyd. Fr. Deuticke, Wiedeń, 1895, lub O. Lummer, Optik, Müller-Pouillet's Lehrbuch, II, 1, § 219, p. 447—451, wyd. Vieweg & Sohn, Brunświk 1907.

[2]) L. Mandelstam, Ann. d. Phys. (4) **35**, p. 892—896. 1911.

pewnej funkcyi φ, czyniącej zadość równaniu różniczkowemu ruchu falistego

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi , \tag{1}$$

gdzie t oznacza czas, a szybkość rozchodzenia się fal w danym ośrodku. Równanie powyższe pozwala znaleść ruch świetlny $\varphi_P(t)$ w pewnym punkcie P (fig. 1), gdy znane są wartości funkcyi φ na jakiejkolwiek, otaczającej punkt P, zamkniętej powierzchni Σ i w jej nieskończenie blizkiem otocze-

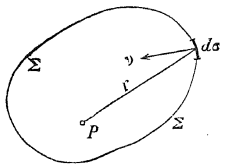

Fig. 1.

niu. Wzór odpowiedni wyprowadził Kirchhoff[1], stosując do funkcyi φ twierdzenia Greena. Oznaczmy przez $d\sigma$ pewien element powierzchni Σ, przez ν normalną do tej powierzchni wewnętrzną w miejscu elementu $d\sigma$, przez r promień wektorowy $\overline{Pd\sigma}$; wzór, otrzymany przez Kirchhoffa, wyrazi się następującem równaniem:[2]

$$\varphi_P(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d\sigma \left[\varphi \cdot \frac{\partial (1/r)}{\partial \nu} - \frac{1}{ar} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial r}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right]_{t' = t - \frac{r}{a}} ; \tag{2}$$

przyczem całkowanie musi być rozciągnięte do całej powierzchni Σ, wartości φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ dla każdego elementu $d\sigma$ muszą być wzięte w czasie $t' = t - \frac{r}{a}$. Aczkolwiek Kirchhoff przyjmuje w założeniu teoryi hypotezę stałego sprężystego eteru[3], jednak wzór (2) od hypotezy tej jest niezależny, gdyż jest on jedynie konsekwencyą równania różniczkowego (1). Przeto wzór powyższy pozostaje ważny dla każdej teoryi światła, w której równanie (1) zostaje zachowane; dlatego też wzór ten możemy stosować i w elektromagnetycznej teoryi światła.

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik, II, Optik.
[2]) E. Abbe, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop, oprac. i wyd. przez O. Lummera i Fr. Reichego, 1910, zob. § 3, wzór (13), p. 16.
[3]) Zob. Kirchhoff, Berl. Akad. Ber. 1882, p. 353—381.

Przy pominięciu stałego spółczynnika, natężenie światła w punkcie P wyrazi się wartością średnią $\overline{\varphi_P^2(t)}$. Przekonać się możemy o tem za pomocą prostego rachunku, opierając się na równaniach Maxwella, przyczem w przypadku fali kulistej musimy przyjąć, iż w źródle światła znajduje się dostateczna liczba elektronów dyspersyjnych[1].

Jako przykład stosowania wzoru Kirchhoffa rozpatrzymy przypadek, gdy fala płaska pada prostopadle na płaski ekran Σ (fig. 2) o powierzchni absolutnie absorbującej i o otworze Σ_0. Aby obliczyć natężenie światła w punkcie P, wyobrażamy sobie, że powierzchnia ekranu Σ zamyka się

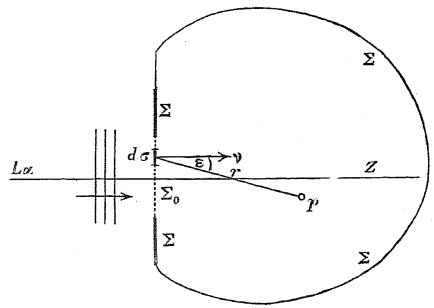

Fig. 2.

w nieskończoności. Wewnętrzną stronę tej powierzchni wraz z powierzchnią otworu Σ_0 przyjmiemy za powierzchnię całkowania. Ponieważ ekran jest nieprzezroczysty, funkcya φ i jej pochodne będą na wewnętrznej stronie powierzchni Σ równe zeru, tak iż całka (2) znika na tej powierzchni i pozostaje jedynie obliczyć całkę tę na powierzchni otworu Σ_0. Co się tyczy wartości funkcyi φ i jej pochodnych $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ na powierzchni otworu, przyjmiemy hypotezę najprostszą, że wartości te są takie, jakiemi byłyby bez ekranu. Hypoteza ta tembardziej zbliża się do prawdy, im większe są rozmiary otworu w stosunku do długości fali światła. Wyobraźmy sobie układ prostokątny spółrzędnych x, y, z, tak żeby płaszczyzna xy leżała w płaszczyznie ekranu, a oś spółrzędnych z w kierunku padania światła, przyczem środek tego układu będzie się znajdował w płaszczyznie otworu Σ_0. Przyjmijmy za funkcyę φ wyrażenie

[1]) Zob. E. Abbe, Die Lehre l. c. § 9, p. 20—22.

$$\varphi = A \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right),$$

gdzie A oznacza amplitudę, T okres wahań, λ długość fali. Wyznaczywszy z równania powyższego pochodne $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ i z uwagi, że

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} = \cos(rz) = -\cos\varepsilon,$$

gdzie ε oznacza kąt pomiędzy promieniem wektorowym $\overline{Pd\sigma}$ i normalną ν, otrzymamy:

$$\varphi_P(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_0} d\sigma \left[\frac{A}{r^2} \,.\, \cos\varepsilon \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{2\pi A \,.\, \cos\varepsilon}{r\lambda} \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) - \frac{2\pi A}{r\lambda} \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\right].$$

Jeżeli promień wektorowy r ma wielkość znaczną w stosunku do długości fali λ, możemy pierwszy wyraz w nawiasach pominąć, jako bardzo mały w stosunku do dwóch drugich, i otrzymamy z dostatecznem przybliżeniem: [1]

$$\varphi_P(t) = -\frac{A}{\lambda} \int_{\Sigma_0} \frac{d\sigma}{r} \,.\, \frac{1 + \cos\varepsilon}{2} \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right). \tag{3}$$

Ten sam przypadek możemy również obliczyć według zasady Huygensa-Fresnela. Metoda ta została wynaleziona przez Huygensa[2], a następnie uzupełniona przez Fresnela[3]. Zasada Huygensa-Fresnela polega na tem, iż wszystkie punkty czoła danej fali uważane są za środki fal kulistych, tak zwanych „fal elementarnych", a wektor świetlny w danym punkcie za rezultat interferencyi tych fal elementarnych. Rezultat, otrzymany tą metodą, zgadza się z rzeczywistym wektorem świetlnym w danym punkcie tylko co do amplitudy, faza jednak jest o $\frac{\lambda}{4}$ mniejsza, tak iż słusznie W. Voigt[4] powiada: „Es ist also die Fresnelsche Theorie streng genommen eine geistreich erratene Regel zur Berechnung der Intensitäten; um sie auch für die Bestimmung der Phasen anwendbar zu machen, wird man die verlo-

[1]) E. Abbe, l. c. zob. § 9, wzór (14), p. 20.
[2]) Huygens, Traité de la lumière. Lejda, 1690.
[3]) Fresnel, Pogg. Ann., **30**, p. 150.
[4]) W. Voigt, Wied. Ann. **3**, p. 535, 1878.

rene Viertelwellenlänge zufügen müssen". Zastosujemy w tym przypadku zasadę tę w najogólniejszej jej postaci; przyjmując, iż każdy element powierzchni całkowania wytwarza w danym punkcie wibracyę elementarną, której amplituda jest: 1º wprost proporcyonalna do jego powierzchni, 2º odwrotnie proporcyonalna do odległości danego punktu od rozważanego elementu powierzchni całkowania i 3º proporcyonalna do pewnej funkcyi kąta, który tworzy dany promień elementarny, idący od rozważanego elementu powierzchni całkowania do danego punktu, z normalną rozważanego elementu powierzchniowego; przyczem funkcya ta powinna mieć jedno maximum w kierunku normalnej. [1]

Odpowiednio do powyższych założeń, wektor elementarny $d\varphi_P(t)$, wywołany przez element $d\sigma$ będzie równy:

$$d\varphi_P(t) = \varkappa \,.\, \frac{A\,d\sigma}{r} \,.\, f(\varepsilon) \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right),$$

gdzie $\varkappa$ oznacza spółczynnik proporcyonalności, a $f(\varepsilon)$ funkcyę kąta ε, czyniącą zadość trzeciemu warunkowi zasady Huygensa-Fresnela. Wektor świetlny ostateczny w punkcie P otrzymamy, całkując wyrażenie powyższe na powierzchni otworu Σ_0:

$$\varphi_P(t) = \varkappa \,.\, A \,.\, \int_{\Sigma_0} \frac{d\sigma}{r} \,.\, f(\varepsilon) \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right). \tag{4}$$

Porównywając wyrażenie (4) z wyrażeniem (3), otrzymanem ze wzoru Kirchhoffa, widzimy, iż forma tych obydwóch wyrazów jest ta sama i że dość jest założyć:

$$\varkappa = \frac{1}{\lambda}; \qquad f(\varepsilon) = \frac{1 + \cos\varepsilon}{2}$$

i następnie dodać do fazy każdego ruchu elementarnego wielkość stałą $\frac{\pi}{2}$, aby obadwa te wyrażenia stały się identyczne. Co się tyczy funkcyi $f(\varepsilon)$, moglibyśmy z równem powodzeniem dla małych kątów ε stosować prawo dostaw Lamberta i napisać:

$$f(\varepsilon) = \sqrt{\cos\varepsilon};$$

gdyż obiedwie te funkcye dopiero w drugiej potędze wielkości ε różnią się między sobą. [2]

[1]) Zob. E. Abbe, Die Lehre... i t. d. l. c. § 10, p. 22—23.
[2]) Zob. E. Abbe, l. c. § 10, p. 23.

Widzimy zatem, że z równym skutkiem możemy, zamiast wzoru Kirchhoffa, stosować zasadę Huygensa-Fresnela, w powyżej określonej postaci.

§ 2. Obraz optyczny punktu.

Opierając się na tem, co powiedzieliśmy w § 1, postaramy się znaleść obraz punktu, to znaczy natężenie świetlne, jakie wywołuje jeden punkt świetlny w płaszczyznie sprzężonej z płaszczyzną punktu. Przytem wywody nasze będą niezależne od tego, czy punkt świetlny będzie punktem samoświecącym, czy też niesamoświecącym. Niechaj w fig. 3 S będzie układem optycznym, O i O' dwiema płaszczyznami sprzężonemi, Σ ekranem nieprze-

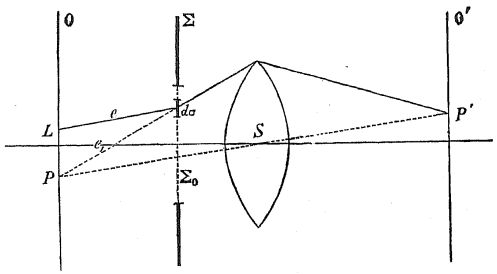

Fig. 3.

zroczystym z diafragmą Σ_0. Dajmy na to, że punkt świetlny rozważany znajduje się w punkcie L; zapytujemy, jakie natężenie światła będzie wywołane przez ten punkt w punkcie P' płaszczyzny sprzężonej. Za powierzchnię całkowania przyjmiemy powierzchnię Σ_0 diafragmy i zastosujemy zasadę Huygensa-Fresnela. Rozpatrzmy element $d\sigma$ powierzchni Σ_0. Niechaj wektor świetlny w punkcie L wyraża się równaniem:

$$\varphi = A \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wektor świetlny w punktach elementu $d\sigma$ wyraża się wówczas przez:

$$\frac{A}{\lambda e} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right);$$

gdzie e oznacza odległość $L d\sigma$. Jeżeli przyjmiemy, że odległość punktu L

od głównej osi optycznej jest bardzo mała w stosunku do odległości pomiędzy płaszczyznami O i Σ, możemy funkcyę $f(\varepsilon)$ dla promieni wychodzących z elementu $d\sigma$ przyjąć za równą jedności, gdyż kąt ε będzie w tym przypadku bardzo mały; jednocześnie możemy długości bezwzględne dróg optycznych promieni pomiędzy różnymi elementami powierzchni Σ_0 i punktem P' uznać za jednakowe. Wtedy wektor świetlny dS_P w punkcie P', wywołany przez wibracye elementu $d\sigma$, możemy wyrazić wzorem

$$dS_P = \text{const.} \frac{A\, d\sigma}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} - \frac{\overline{d\sigma P'}}{\lambda}\right);$$

a wektor świetlny, wywołany przez wszystkie elementy powierzchni Σ_0, otrzymamy, całkując powyższe wyrażenie na powierzchni Σ_0:

$$S_P = \text{const.} \frac{A}{\lambda} \int_{\Sigma_0} d\sigma \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} - \frac{\overline{d\sigma P'}}{\lambda}\right).$$

Niechaj P będzie punktem sprzężonym z punktem P'; oznaczmy przez e_1 odległość $\overline{P d\sigma}$, wtedy na zasadzie własności punktów sprzężonych wiemy, że:

$$e_1 + \overline{d\sigma P'} = \text{const.},$$

t. j. jest wielkością stałą, od wyboru elementu $d\sigma$ niezależną. Z równania powyższego mamy:

$$\overline{d\sigma P'} = \text{const.} - e_1.$$

Podstawiając wyraz ostatni we wzór, otrzymany na S_P, i z uwagi, że różnica stała faz $\frac{\text{const.}}{\lambda}$ dla wszystkich elementów $d\sigma$ może być pominięta, otrzymamy:

$$S_P = \frac{\varkappa}{\lambda} \int_{\Sigma_0} d\sigma \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e - e_1}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Aby obliczyć różnicę $e - e_1$, użyjemy spółrzędnych układu prostokątnego, których płaszczyzna XY niechaj leży w płaszczyznie O, a oś Z wzdłuż głównej osi optycznej naszego układu. Niechaj spółrzędne punktu L będą $X, Y, 0$, punktu P x, y, o, elementu $d\sigma$ ξ, η, ζ. Mamy następujące równania:

$$\begin{cases} e^2 = (\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + \zeta^2, \\ e_1^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2. \end{cases}$$

Przyjmując, iż spółrzędne ξ, η, X, Y, x i y są bardzo małe w stosunku

do spółrzędnej ζ i pomijając wyrazy X^2, Y^2, x^2 i y^2, jako bardzo małe, otrzymamy:

$$e - e_1 = \xi'(x - X) + \eta'(\eta - Y), \tag{6}$$

gdzie ξ' i η' spółrzędnemi biegunowemi elementu $d\sigma$ i równe są

$$\xi' = \xi/\zeta; \qquad \eta' = \eta/\zeta.$$

Podstawiając wyraz (6) we wzór (5), znajdziemy: [1]

$$S_P = \frac{\varkappa \cdot \zeta^2}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} d\xi'\, d\eta' \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x - X)}{\lambda} - \frac{\eta'(\eta - Y)}{\lambda}\right]. \tag{7}$$

Jako przypadek szczególny przyjmiemy, że diafragma jest prostokątem, którego granice biegunowe są $\pm\alpha'$ i $\pm\beta'$. Prosty rachunek daje nam dla tego przypadku wyrażenie: [2]

$$S_P = \frac{\varkappa\zeta^2}{\lambda} \cdot 4\alpha'\beta' \cdot \frac{\sin\dfrac{2\pi\alpha'(x - X)}{\lambda}}{\dfrac{2\pi\alpha'(x - X)}{\lambda}} \cdot \frac{\sin\dfrac{2\pi\beta'(y - Y)}{\lambda}}{\dfrac{2\pi\beta'(y - Y)}{\lambda}} \cdot \sin 2\pi\frac{t}{T}. \tag{8}$$

Natężenie światła I_P będzie zatem:

$$I_P = \text{const.}\, \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 v}{v^2},$$

gdzie const. oznacza stałą, a u i v są równe

$$\begin{cases} u = \dfrac{2\pi\alpha'(x - X)}{\lambda}, \\[2ex] v = \dfrac{2\pi\beta'(y - Y)}{\lambda}. \end{cases}$$

Natężenie światła będzie miało w tym przypadku jedno silne maximum z mniejszemi maximami pobocznemi, przyczem przebieg natężenia świetlnego jest jednakowy w kierunku osi x i osi y, (fig. 4) [3]. Środek maximum głównego przypada w punkcie:

$$x = X, \qquad y = Y;$$

[1] Zob. E. Abbe, l. c. § 17, p. 39—43, a także wzór (29), p. 40.
[2] Zob. E. Abbe, l. c. § 17, wzór (30), p. 41.
[3] Zob. E. Abbe, l. c. Fig. 28 i 29, p. 42.

czyli w punkcie sprzężonym z punktem świetlnym L; szerokość tego maximum wynosi $\frac{\lambda}{\alpha'}$, a długość $\frac{\lambda}{\beta'}$. Widzimy z tego, że obraz optyczny punktu świetlnego przedstawi się, jako jasna plamka w pun-

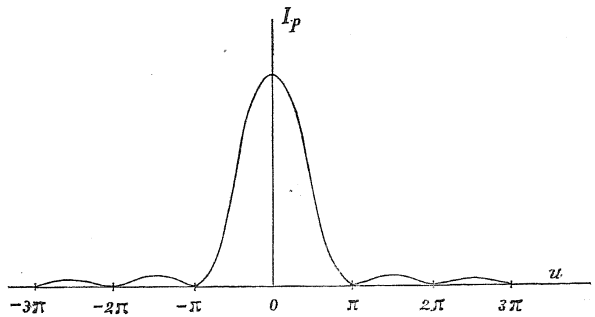

Fig. 4.

kcie sprzężonym z danym punktem świetlnym. Plamka ta będzie tem mniejsza, czyli obraz punktu tem ostrzejszy, im mniejsza będzie fala światła, które wysyła dany punkt świetlny, i im większe będą rozmiary diafragmy.

Wniosek powyższy stosuje się również do diafragmy okrągłej.

§ 3. Obraz optyczny płaszczyzny.

W poprzednim paragrafie przekonaliśmy się, że punkt świetlny wytwarza w punkcie z nim sprzężonym jasną plamkę, której forma i wielkość zależą od formy i wielkości diafragmy. Przedmiot, rozpatrywany przez mikroskop, możemy sobie wyobrazić jako płaszczyznę, złożoną z szeregu świetlnych punktów, o rozmaitem natężeniu światła. Każdemu z tych punktów przedmiotu odpowiadać będzie w płaszczyznie, sprzężonej z płaszczyzną przedmiotu, jasna plamka. Plamki te wogólności będą się wzajemnie częściowo nakrywały. Jeżeli przedmiot jest samoświecący, fale światła, wychodzące z dwóch różnych punktów przedmiotu, nie interferują ze sobą. Ażeby otrzymać natężenie światła w pewnym punkcie obrazu optycznego danego przedmiotu, wystarcza zatem zesumować natężenia świetlne, odpowiadające plamkom, które

w punkcie tym wzajemnie się pokrywają. Jak Lord Rayleigh[1] zauważył i udowodnił przykładami, można tę samą metodę stosować i do przedmiotów niesamoświecących. W tym jednak przypadku fale świetlne, wychodzące z różnych punktów przedmiotu, będą interferowały ze sobą, gdyż ten sam punkt źródła świetlnego oświeca cały przedmiot. Dlatego, stosując powyższą metodę do przedmiotów niesamoświecących, musimy sumować wektory świetlne plamek nakładających się, i dopiero na zasadzie interferencyi obliczać wypadkowe natężenie światła w danym punkcie obrazu. Metodę tę rachunku zastosował w sposób ogólny L. Mandelstam[2] dla wykazania wpływu diafragmy na obrazy mikroskopowe, jak również dla porównania własności obrazów przedmiotów samoświecących i niesamoświecących.

Przypuśćmy, że przedmiot znajduje się w przedniej płaszczyźnie ogniskowej objektywu; wówczas obraz optyczny jego powstanie w tylnej płaszczyźnie ogniskowej okularu[3]. Dla prostoty przyjmiemy, że przedmiot nasz posiada zmiany natężeń światła li tylko w kierunku osi X-ów, pozostając niezmiennym w kierunku osi Y-ów.

Rozpatrzymy przedewszystkiem przedmiot samoświecący. Na podstawie wzorów (7) i (8), które znaleźliśmy w § 3, widzimy, że amplituda A_s, w punkcie obrazu, sprzężonym z punktem x, wywołana przez punkt przedmiotu X, może w naszym przypadku być wyrażona równaniem:

$$A_s = \text{const.}\, \varphi(X)\, F(x-X)\,;$$

gdzie $\varphi(X)$ oznacza natężenie światła w punkcie X, a $F(x-X)$ funkcyę, zależną od formy diafragmy. Stosownie do tego, co wyżej powiedzieliśmy o obrazach przedmiotów samoświecących, natężenie światła I_s wyrazi się następującą całką:

$$I_s = \text{const.} \int_a^b dX\, [\varphi(X)\, F(x-X)]^2\,, \tag{9}$$

gdzie a i b odpowiadają granicom przedmiotu w kierunku osi X-ów.

Przypuśćmy obecnie, że przedmiot jest niesamoświecący, i że jest oświetlony falą płaską, padającą na płaszczyznę przedmiotu pod pewnym kątem u. Dajmy na to, że wektor świetlny fali padającej wyrazi się w punkcie osiowym płaszczyzny przedmiotu następującym wzorem:

$$\cos nt\,;$$

[1]) Lord Rayleigh, Papers Vol. 4.
[2]) L. Mandelstam, l. c. zob. p. 886—892.
[3]) L. Mandelstam, l. c. zob. Fig. 1, p. 885.

dla punktu płaszczyzny przedmiotu X wektor ten przyjmie formę:

$$\cos(nt - mX)\,,$$

gdzie opóźnienie fazy mX jest równe:

$$mX = \frac{2\pi X}{\lambda} \sin u\,.$$

Odpowiednio do tego wyrazi się wektor świetlny w punkcie obrazu, sprzężonym z punktem x, następującem równaniem:

$$A_n = \text{const.}\, \varphi(X)\, F(x-X) \cos(nt - mX)\,;$$

przyczem przypuszczamy, że fala światła w samym przedmiocie nie ulega opóźnieniu. Natężenie świetlne I_n w obrazie wyrazi się równaniem:

$$I_n = \text{const.} \left[\int_a^b dX\, \varphi(X)\, F(x-X) \cos mX \right]^2 + \text{const.} \left[\int_a^b dX\, \varphi(X)\, F(x-X) \sin mX \right]^2,$$

lub też całką podwójną:

$$I_n = \text{const.} \int_a^b dX_1\, \varphi(X_1)\, F(x-X_1)\, dX_1 \int_a^b dX_2\, \varphi(X_2)\, F(x-X_2) \cos m(X_1 - X_2)\,. \tag{10}$$

Zastanowimy się obecnie nad przypadkiem, w którym przedmiot niesamoświecący zostaje oświetlony pękiem fal, padających na płaszczyznę przedmiotu, pod wszystkimi kątami, zawartymi w granicach $+u_0$ i $-u_0$. Aby otrzymać wyrażenie natężenia światła I'_n w tym przypadku, musimy wyrażenie (10) pomnożyć przez $\cos u\, du$ i zcałkować w granicach $+u$ i $-u_0$. Z uwagi, że $\frac{2\pi}{\lambda} \sin u = m$, otrzymujemy:

$$I'_n = \text{const.} \int_a^b dX_1\, \varphi(X_1)\, F(x-X_1) \int_a^b dX_2\, \varphi(X_2)\, F(x-X_2)\,.\, \frac{\sin m_0 (X_1 - X_2)}{X_1 - X_2}\,, \tag{11}$$

gdzie

$$m_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\,.\, \sin u_0\,.$$

Rozpatrując bliżej wyrażenia (9), (10) i (11), widzimy przedewszystkiem, że we wszystkich trzech przypadkach natężenie światła w obrazie optycznym zależy od funkcyi $F(x-X)$, która znów jest zależna od formy i od wielkości diafragmy. Możemy tedy powiedzieć, iż wogólności obraz przedmiotów samoświecących i niesamoświecących jest zależny od formy i wielkości diafragmy. Dalej widzimy, że obraz otrzymany niekoniecznie musi być podobny do przedmiotu, gdyż żadne z powyższych trzech wyrażeń nie jest identyczne z funkcyą $\varphi(X)$.

Jeżeli jednak diafragma jest dostatecznie wielka, tak iż funkcya $F(x-X)$ redukuje się do tak wązkiego maximum, iż można wartość jej po za punktem $x=X$ uważać za równą zeru, wtedy obraz otrzymamy zarówno przedmiotu samoświecącego, jak i niesamoświecącego, musi być podobny do samego przedmiotu, gdyż w tym przypadku wszystkie trzy powyższe wyrażenia (9), (10) i (11) redukują się do funkcyi $\varphi(X)$. Poza tem z różnicy, jaka zachodzi pomiędzy wyrażeniem (9) i wyrażeniami (10) i (11), widzimy, iż, wogólności mówiąc, obrazy otrzymane w tych samych warunkach od dwóch identycznych przedmiotów, z których jeden jest samoświecący, a drugi niesamoświecący, mogą być zupełnie różne. W pewnych jednak warunkach, przedmiot samoświecący może dać obraz identyczny z tym, jaki daje przedmiot taki sam niesamoświecący. Aby tego dowieść, zastosujemy do wzoru (11) znane twierdzenie Rachunku całkowego: [1]

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f(\alpha)\,\frac{\sin n\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\pi f(o)\,,\quad \text{gdzie}\quad a<o<b\,; \tag{12}$$

przyczem całka powyższa będzie prawie równa $\pi f(o)$ i w tych przypadkach, gdy n nie jest ∞, lecz tak wielkie, że $f(\alpha)$ może być uważana za stałą w przedziałach, które są znaczne w stosunku do wielkości $\frac{2\pi}{n}$. Stosując wzór ten do całki (11), otrzymamy:

$$I_n'=I_s.$$

Widzimy stąd, że obraz przedmiotu samoświecącego będzie identyczny z obrazem takiegoż przedmiotu niesamoświecącego, ale oświetlonego równomiernie ze wszystkich stron: 1° o ile struktura przedmiotu jest tak gruba, że może być

[1]) Rieman-Weber, Partielle Differentialgleichungen, t. I, p. 37.

uważana za niezmieniającą się w przedziale o długości $\frac{\lambda}{\sin u_0}$; 2° o ile diafragma jest taka, że funkcya $F(x-X)$ w każdym przedziale $\frac{\beta\lambda}{\sin u_0}$, gdzie β oznacza odnośne powiększenie linijne obrazu, może być uważana za stałą. Stosując wzór (12) do wyrażeń (9), (10), (11), możemy również z łatwością przekonać się, że przedmiot o strukturze dostatecznie grubej i przy dostatecznie dużym jednym otworze, jako diafragmie, musi dać obraz do siebie samego podobny, niezależnie od tego, czy jest przedmiotem samoświecącym, czy też niesamoświecącym.

Wnioski powyższe były przez L. Mandelstama [1]) sprawdzone doświadczalnie.

§ 4. Teorya Abbego.

Dla przedmiotów niesamoświecących E. Abbe [2]) obmyślił nową metodę, różniącą się w zasadzie od wyłożonej powyżej metody. Zjawisko powstawania obrazów optycznych dzieli Abbe na dwa stadya. Pierwsze stadyum nazywa on „obrazem pierwotnym“, a drugie stadyum „obrazem wtórnym“, lub wprost „obrazem przedmiotu“. Obraz pierwotny jest obrazem źródła światła, użytego do oświetlenia przedmiotu. Obraz ten powstaje w płaszczyźnie sprzężonej z płaszczyzną źródła światła i jest zmodyfikowany przez ugięcie się światła przy przejściu przez przedmiot. Aby zatem znaleść obraz pierwotny danego przedmiotu, wystarczy wyznaczyć obraz źródła światła użytego, przyjmując dany przedmiot za diafragmę. Obraz wtórny czyli ostateczny obraz przedmiotu powstanie wtedy w płaszczyźnie sprzężonej z płaszczyzną przedmiotu, jako zjawisko interferencyjne, wywołane interferencyą wszystkich promieni, idących od obrazu pierwotnego.

Aby wyznaczyć obraz pierwotny dla danego przedmiotu, użyjemy wzoru (7), pisząc go w następujący sposób:

$$S_1=\frac{\varkappa\zeta^2}{\lambda}\iint_{\Sigma_0}\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta^2}\,.\,\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{\xi(x-X)}{\zeta\lambda}-\frac{\eta(y-Y)}{\zeta\lambda}\right]. \tag{13}$$

[1]) L. Mandelstam, l. c. zob. p. 892—896, jak również Fig. 2, p. 894.
[2]) E. Abbe, Gesammelte Werke I, a także E. Abbe, Die Lehre... l. c.

Odpowiednio do tego, co powyżej powiedzieliśmy o obrazie pierwotnym, punktem świetlnym L (fig. 3) będzie źródło światła, przyczem obecne spółrzędne tego punktu niechaj będą Ξ, H, $-\zeta$. Płaszczyzna O będzie, zatem płaszczyzną źródła światła, płaszczyzna O' będzie płaszczyzną sprzężoną z płaszczyzną O, i w niej powstanie obraz pierwotny danego przedmiotu. Za diafragmę Σ_0 będzie obecnie uważany sam przedmiot, którego element oznaczymy przez $dX\,dY$, o spółrzędnych X, Y i o spółczynniku przezroczystości $\varphi(XY)$. Niechaj P' będzie punktem obrazu pierwotnego, w którym chcemy obliczyć natężenie świetlne, P niechaj będzie punktem sprzężonym z punktem P' o spółrzędnych ξ, η, $-\zeta$. Zastępując w wyrażeniu (13) spółrzędne stare przez nowe, wyżej określone, i biorąc pod uwagę spółczynnik przezroczystości $\varphi(XY)$ naszego przedmiotu, otrzymujemy:

$$S_1 = \frac{\varkappa}{\lambda} \iint\limits_{\text{Przedmiot}} dX\,dY\,\varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{X(\xi - \Xi)}{\zeta\lambda} + \frac{Y(\eta - \mathrm{H})}{\zeta\lambda} - \psi(XY) \right];$$

gdzie $\psi(XY)$ oznacza opóźnienie fazy fali w punkcie przedmiotu XY. Całkowanie musi być rozciągnięte do całego przedmiotu. Oznaczmy:

$$\xi' = \xi/\zeta; \qquad \eta' = \eta/\zeta; \qquad \Xi' = \frac{\Xi}{\zeta}; \qquad \mathrm{H}' = \frac{\mathrm{H}}{\zeta};$$

widzimy, że wyrażenie

$$\frac{X\Xi' + Y\mathrm{H}'}{\lambda}$$

wyraża opóźnienie fazy fali, wskutek skośnego padania fali na przedmiot. Oznaczmy całkowite opóźnienie fazy fali w punkcie przedmiotu XY przez $\Psi(XY)$, gdzie: [1]

$$\Psi(XY) = \frac{X\Xi' + Y\mathrm{H}'}{\lambda} + \psi(XY).$$

Podstawiając powyższe wyrażenie we wzór na S_P, otrzymujemy: [2]

$$S_1 = \frac{\varkappa}{\lambda} \iint\limits_{\text{Przedmiot}} dX\,dY\,\varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{\xi' X + \eta' Y}{\lambda} - \Psi(XY) \right] \qquad (14)$$

Wzór (14) daje obraz pierwotny w zależności od spółrzędnych kątowych ξ' i η'. Ponieważ we wzorze (14) zachodzą jedynie spółrzędne kątowe, możemy obraz pierwotny przedstawić na powierzchni kuli, której środek będzie się znajdo-

[1] Zob. E. Abbe, l. c. § 25, wzór (67), p. 86.
[2] Zob. E. Abbe, l. c. § 25, wzór (72), p. 89.

wał w środkowym punkcie płaszczyzny przedmiotu. Znając obraz pierwotny możemy obecnie obliczyć zjawisko interferencyjne, które zostanie wywołane przez promienie tego obrazu w płaszczyźnie sprzężonej z płaszczyzną przedmiotu. Zjawisko to będzie ostatecznym obrazem danego przedmiotu. Niechaj S (fig. 5) będzie układem optycznym, O płaszczyzną przedmiotu,

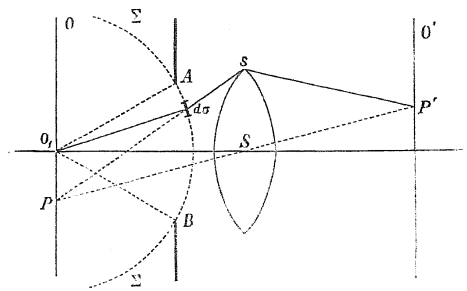

Fig. 5.

O' płaszczyzną z nią sprzężoną, AB diafragmą. Aby znaleść wyrażenie wektora świetlnego w punkcie P', przyjmiemy, że obraz pierwotny leży na kuli Σ, której środek znajduje się w punkcie O_1. Weźmy element $d\sigma$ tego obrazu o spółrzędnych ξ, η i ζ. Wektor świetlny wyrazi się w tym punkcie wzorem (14). Z elementu tego biegnie do punktu P' fala $\overline{d\sigma s P'}$, która posiada w punkcie P' opóźnienie fazy $\frac{\overline{d\sigma s P'}}{\lambda}$. Kierunek $\overline{d\sigma s}$ tej fali, przedłużony wstecz, przecina płaszczyznę O w punkcie P sprzężonym z punktem P', tak iż będziemy mieli dla wszystkich elementów obrazu pierwotnego

$$\overline{P d\sigma} + \overline{d\sigma s P'} = \text{const.}$$

Oznaczając $\overline{P d\sigma}$ przez e_1 i pomijając stałą const., otrzymamy dla szukanego opóźnienia fali:

$$\frac{\overline{d\sigma s P'}}{\lambda} = -\frac{e_1}{\lambda}.$$

Niechaj spółrzędne punktu P będą x, y; będziemy mieli:

$$\begin{cases} e^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2; \\ e_1^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2. \end{cases}$$

Przyjmując, że x i y są bardzo małe, otrzymamy z równań powyższych:

$$e_1 = 1 - \frac{\xi x}{e} - \frac{\eta y}{e}.$$

Odejmując opóźnienie fazy $-\frac{e_1}{\lambda}$ od fazy w wyrazie (14) i pomijając stałą $\frac{1}{\lambda}$ w wyrażeniu fazy, otrzymamy według zasady Fresnela-Huygensa dla wektora świetlnego, wywołanego w punkcie P' przez element $d\sigma$, wzór następujący:

$$dS_2 = d\sigma \cdot \frac{\varkappa}{\lambda^2} \iint\limits_{\text{Przedmiot}} dX\,dY\,\varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y-Y)}{\lambda} - \Psi(XY)\right].$$

Ze wszystkich elementów kuli Σ, jedynie te, które znajdują się w otworze diafragmy AB, mogą wysłać promienie swe do punktu P', tak iż dla znalezienia wypadkowego wektora świetlnego, który wytwarzają w punkcie P' wszystkie elementy zawarte w diafragmie AB, musimy wyrażenie powyższe w granicach diafragmy zcałkować. Po zastąpieniu elementu $d\sigma$ przez $d\xi' \cdot d\eta'$, otrzymamy: [1]

$$S_2 = \frac{\varkappa}{\lambda^2} \iint\limits_{\text{Otwór}} d\xi'\,d\eta' \iint\limits_{\text{Przedmiot}} dX\,dY\,\varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y-Y)}{\lambda} - \Psi(XY)\right]. \quad (15)$$

Wzór ten daje wektor świetlny w obrazie wtórnym danego przedmiotu.

W wyrażeniu (15) użyliśmy do obliczenia obrazu wtórnego tylko tej części obrazu pierwotnego, która zawiera się w otworze diafragmy. Obraz pierwotny rozciąga się w znaczeniu matematycznem od $-\infty$ do $+\infty$, lecz znaczenie rzeczywiste fizyczne posiada on jedynie w granicach od -1 do $+1$, gdyż ξ' i η' są spółrzędnemi kątowemi i oznaczają wstawę i dostawę odpowiedniego kąta. Obecnie postaramy się dowieść, że bezwzględne podobieństwo obrazu wtórnego do przedmiotu jest wtedy jedynie formalnie możebne, gdy wyrażenie (14) zcałkujemy w obszarze całego obrazu pierwotnego od $-\infty$ do $+\infty$, t. j. w rzeczywistej części obrazu pierwotnego, oraz w urojonej.[2]

Z tego, co powiedzieliśmy na początku tego paragrafu, możemy wywnioskować, że wektor świetlny w punkcie przedmiotu XY wyrazi się przez

$$\varkappa\varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \Psi(XY)\right].$$

[1]) Zob. E. Abbe, l. c. § 25, wzór (68), p. 87.
[2]) Co do dowodu następnego zob. E. Abbe, l. c. § 25, p. 90—92.

Aby podobieństwo pomiędzy obrazem wtórnym a przedmiotem było bezwzględne, wektor świetlny w punkcie obrazu wtórnego, sprzężonym z punktem xy płaszczyzny przedmiotu, musi być identyczny z wektorem świetlnym, który istnieje w punkcie xy, płaszczyzny przedmiotu; zatem wektor ten musi wyrazić się wzorem

$$\varkappa\varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \Psi(XY)\right]. \quad (16)$$

Podług wzoru (15) wektor świetlny w punkcie obrazu wtórnego, sprzężonym z punktem xy, wyrazi się, przy użyciu całkowitego obszaru obrazu pierwotnego, wzorem:

$$\left.\begin{aligned} S_2' = \varkappa \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi'\,d\eta' \iint\limits_{\text{Przedmiot}} dX'\,dY'\,\varphi_1(X'Y') \sin 2\pi \Big[\frac{t}{T} - \Psi_1(X'Y') \\ - \xi'(x'-X') - \eta'(y'-Y')\Big], \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

gdzie

$$\left\{\begin{aligned} & X' = \frac{X}{\lambda}, \quad Y' = \frac{Y}{\lambda}, \quad x' = \frac{x}{\lambda}, \quad y' = \frac{y}{\lambda}, \\ & \varphi(\lambda X', \lambda Y') = \varphi_1(X'Y'), \quad \Psi(\lambda X', \lambda Y') = \Psi_1(X'Y'). \end{aligned}\right.$$

Rozkładamy w wyrażeniu (17) wstawę i otrzymujemy:

$$\left\{\begin{aligned} S_2' = & \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi'\,d\eta' \iint\limits_{\text{Przedmiot}} F(X'Y')\,dX'\,dY' \cos 2\pi\,[\xi'(x'-X') + \eta'(y'-Y')] \\ & - \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi'\,d\eta' \iint\limits_{\text{Przedmiot}} G(X'Y')\,dX'\,dY' \sin 2\pi\,[\xi'(x'-X' + \eta'(y'-Y')], \end{aligned}\right. \quad (18)$$

gdzie:

$$\left\{\begin{aligned} & F(X'Y') = \varkappa\varphi_1(X'Y') \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \Psi_1(X'Y')\right], \\ & G(X'Y') = \varkappa\varphi_1(X'Y') \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \Psi_1(X'Y')\right]. \end{aligned}\right.$$

Do całek w wyrazie (18) zastosujemy następujące dwa twierdzenia Fouriera:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \int_{A_1}^{A_2} dX F(X) \cos 2\pi\xi'(x-X) = \begin{cases} F(x) & \text{dla } x \text{ zawartego pomiędzy } A_1 \text{ i } A_2. \\ 0 & \text{dla } x \text{ leżącego poza } A_1 \ldots A_2, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \int_{A}^{A_2} dX F(X) \sin 2\pi\xi'(x-X) = 0, \text{ dla wszystkich wartości } x.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \int_{A_1}^{A_2} dX' F(X'Y') \cos 2\pi\xi'(x'-X') = F(x'y'), \text{ gdy } x' \text{ leży w obszarze } A_1A_2.$$

i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \int_{B_1}^{B_2} dY' F(X'Y') \cos 2\pi\eta'(y'-Y') = F(x'y'), \text{ gdy } y' \text{ leży w obszarze } B_1B_2.$$

Podstawiając obadwa powyższe wzory do pierwszej całki wzoru (18), otrzymamy:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi'\, d\eta' \iint_{A_1 B_1}^{A_2 B_2} dX'\, dY'\, F(X'Y') \cos 2\pi\xi'(x'-X') \cos 2\pi\eta'(y'-Y') = F(x'y'),$$

gdy x' i y' leżą w obszarze A_1A_2 ew. B_1B_2.

W ten sam sposób dostaniemy:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi'\, d\eta' \iint_{A_1 B_1}^{A_2 B_2} dX'\, dY'\, F(X'Y') \sin 2\pi\xi'(x'-X') \sin 2\pi\eta'(y'-Y') = 0,$$

dla wszystkich wartości x' i y'.

Odejmując obadwa powyższe wzory otrzymane, znajdziemy:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi'\, d\eta' \iint_{A_1 B_1}^{A_2 B_2} dX'\, dY'\, F(X'Y') \cos 2\pi[\xi'(x'-X') + \eta'(y'-Y')] = F(x'y'),$$

gdy x' i y' leżą w granicach obszaru A_1A_2 ew. B_1B_2; po za tym obszarem całka powyższa jest równa zeru.

Tą samą metodą znajdujemy:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi'\, d\eta' \iint_{A_1 B_1}^{A_2 B_2} dX'\, dY'\, G(X'Y') \sin 2\pi[\xi'(x'-X') + \eta'(y'-Y')] = 0,$$

dla wszystkich wartości x' i y'.

W ten sposób dowiedliśmy, że wyrażenie S_1' (17) w granicach przedmiotu jest równe funkcyi $F(x'y')$, a po za granicami przedmiotu jest równe zeru. Wobec tego wektor świetlny, wyrażony w obrazie wtórnym całką (17), jest identyczny z wektorem świetlnym w punktach przedmiotu.

Z twierdzenia tego widzimy, że bezwzględnego podobieństwa obrazu do przedmiotu żadnym fizycznym sposobem otrzymać nie można, gdyż po za rzeczywistym obszarem obrazu pierwotnego musielibyśmy jeszcze uwzględnić obszar urojony. Z punktu jednak widzenia praktycznego podobieństwo dostateczne będzie osiągnięte, gdy diafragma użyta będzie dostatecznie duża, aby prawie całą energię świetlną obrazu pierwotnego mogła przepuścić, tak iżby pozostała część całki (17) przedstawiała tylko drobny ułamek całej energii.

Z rozważań powyższych wypływa, że nie tylko sam przedmiot, ale i forma i wielkość diafragmy wpływają decydująco na formę otrzymanego obrazu optycznego.

Metodę analogiczną do wyżej opisanej metody Abbego można również z powodzeniem stosować do przedmiotów samoświecących. [1]

§ 5. Zastosowania teoryi Abbego.

Wzory Abbego (14) i (15) zostały zastosowane w niektórych prostych przypadkach [2] do obliczania natężenia światła w obrazie pierwotnym i wtórnym. Wzory te można również zastosować do siatki dyfrakcyjnej. [3]

Dla prostoty przyjmiemy, że siatka leży symetrycznie do osi głównej układu optycznego; niechaj ona rozciąga się w kierunku osi X od $-A$ do $+A$, w kierunku osi Y od $-B$ do $+B$. Niechaj liczba szpar siatki będzie N. Szerokość jednej szpary niechaj równa się $2a$, szerokość sztaby 2Δ. Tedy stała siatki γ będzie równa: $\gamma = 2(a+\Delta)$. Spółrzędne i-tej szpary oznaczymy przez p_i i q_i, tak iż $q_i - p_i = 2a$. Wtedy funkcya $\varphi(XY)$ czyli spółczynnik przezroczystości będzie miał wartość 1 pomiędzy p_i i q_i, będzie zaś równy zeru między p_i i q_{i+1}. Przy oświetleniu równoległem i prostopa-

[1]) Zob. M. Wolfke, Ann. d. Phys. (4) **39**, p. 569–610, 1912.

[2]) Zob. E. Abbe, l. c. §§ 20, 21, 22, 23 i 24, p. 46—86. Porówn. także Lord Rayleigh, Phil. Mag. **42**, 1896, a także Journ. of the R. Micr. Soc., p. 447—482, 1903.

[3]) M. Wolfke, Inaug. Diss. Wrocław, 1910, albo Ann. d. Phys. (4) **34**, p. 277—310 1911, lub Prace mat.-fiz. t. XXII, p. 135–171, 1911, a także E. Abbe, l. c. Roz. IV, p. 97—106. Porówn. także Lord Rayleigh, Scientific Papers, **4**, p. 235.

dłem, otrzymamy, na podstawie wzoru (14), następujący wzór na wektor świetlny S_1 w obrazie pierwotnym siatki:

$$S_1 = \frac{\varkappa}{\lambda} \int_{-B}^{+B} dY \sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{\xi' X + \eta' Y}{\lambda} \right].$$

Po rozłożeniu wstawy, otrzymujemy za pomocą prostego rachunku, pomijając całki, w których funkcya podcałkowa jest symetryczna i nieparzysta, następujący wzór na natężenie światła I_1 w obrazie pierwotnym w kierunku osi ξ':

$$I_1 = \text{const.} \left[\sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda} \right]^2.$$

Prosty rachunek daje:

$$I_1 = \text{const.} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin^2 \frac{\gamma\omega}{2a}}, \tag{19}$$

gdzie $\omega = \frac{2\pi\xi' a}{\lambda}$. Wzór (19) zawiera znaną funkcyę siatkową, która okazuje szereg silnych maximów świetlnych w punktach:

$$\omega = \frac{2\varkappa\pi a}{\lambda}, \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

przedzielonych $N-2$ maximami słabemi. Przebieg natężenia światła I_1 jest

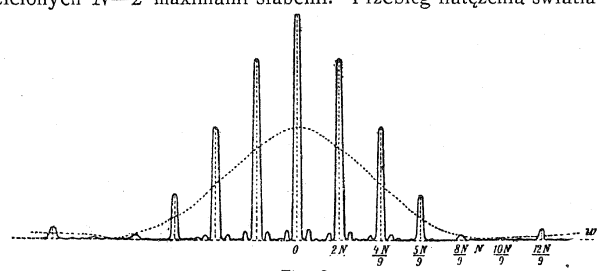

Fig. 6.

wyobrażony dla szczególnego przypadku na fig. 6.[1] Wzór (15) daje nam wektor świetlny w obrazie wtórnym siatki:

[1]) Zob. O. Lummer, „Müller-Pouillet", t. II, Optyka. Tabl. VI, p. 805, 1907, a także F. Auerbach, Physik in graphischer Darstellung. Tabl. 202. 1912.

$$S_2 = \frac{\varkappa}{\lambda^2} \iint_{\text{Otwór}} d\xi' \, d\eta' \int_{-B}^{+B} dY \sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y-Y)}{\lambda} \right].$$

Całkujemy wyrażenie to względem zmiennych η' i Y, skąd prostym rachunkiem znajdujemy natężenie światła I_2 w obrazie wtórnym w kierunku osi x:

$$I_2 = \text{const.} \left[\int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda} \right]^2,$$

przyczem przyjęliśmy, że otwór diafragmy leży symetrycznie do głównej osi układu optycznego. Całkując powyższe wyrażenie i sumując oddzielne całki, otrzymujemy:

$$I_2 = \text{const.} \left[\int_{-\frac{2\pi a \alpha'}{\lambda}}^{+\frac{2\pi a \alpha'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right]^2; \tag{20}$$

gdzie $\omega = \frac{2\pi\xi' a}{\lambda}$. Rozpatrzymy obecnie parę poszczególnych przypadków, w których diafragma przepuszcza jedno, dwa, lub więcej maximów głównych obrazu pierwotnego.

W przypadku, gdy tylko środkowe maximum samo zostaje przepuszczone przez diafragmę, granice całkowania całki (20) będą równe $+\frac{2\pi a}{N\gamma}$ i $-\frac{2\pi a}{N\gamma}$. Natężenie światła wyrazi się w tym przypadku jak następuje:

$$I_2 = 4 \text{ const. } I_0^2,$$

gdzie

$$I_0 = \int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a}.$$

Ponieważ obszar całkowania $\frac{2\pi a}{N\gamma}$ jest bardzo mały, możemy w całym tym obszarze założyć $\frac{\sin \omega}{\omega} = 1$ i zamiast $\sin \frac{\gamma\omega}{2a}$ wziąć argument, poczem otrzymamy:

$$I_0 = \int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \, \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega} \cdot \cos \frac{x\omega}{a}. \tag{21}$$

Znajdując pochodną całki (21) względem x i obliczając niektóre jej wartości poszczególne, widzimy, iż całka ta, jako funkcya zmiennej x, posiada w punkcie $x=0$ jedno maximum, spada do około 0,4 wartości maksymalnej w punktach $x=\pm\frac{N\gamma}{2}$, t. j. na granicach siatki i okazuje po za siatką słabe maxima i minima. Stosownie do tego, natężenie światła będzie miało również jedno maximum w środku siatki i spadnie na brzegach siatki do około 0,2 wartości maksymalnej. Obraz siatki przedstawi się zatem w tym przypadku, jako jasna powierzchnia, o szerokości siatki, z natężeniem światła zmniejszającem się szybko ku brzegom siatki. Obraz zatem otrzymany będzie zupełnie niepodobny do siatki.

Przypuśćmy obecnie, że diafragma przepuszcza dwa i-te maxima obrazu pierwotnego. Natężenie światła w tym przypadku będzie:

$$I_2 = 4\,\text{const.}\left[\int_{\frac{2\pi a(Ni-1)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+1)}{N\gamma}} d\omega \,.\, \frac{\sin\omega}{\omega} \,.\, \frac{\sin\frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin\frac{\gamma\omega}{2a}} \,.\, \cos\frac{x\omega}{a}\right]^2. \tag{22}$$

Wprowadzamy do całki tej nową zmienną:

$$\omega_1 = \pi i - \frac{\gamma\omega}{2a}$$

i czynimy odpowiednie uproszczenia, poczem zastępujemy zmienną ω_1 przez nową zmienną:

$$\omega_2 = \frac{2a\omega_1}{\gamma};$$

po uproszczeniach otrzymujemy:

$$I_2 = \text{const.}\frac{\sin^2\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\left(\frac{2\pi a i}{\gamma}\right)^2} \,.\, \cos^2\frac{2\pi i x}{\gamma} \,.\, I_0^2;$$

gdzie I_0 oznacza całkę (21). Z wyrażenia tego widzimy, że w danym przypadku obraz siatki przedstawi się, jako szereg maximów, przyczem maxima te będą leżały w punktach:

$$x = \pm\frac{\varkappa\gamma}{2i}; \qquad (\varkappa = 0,\ 1,\ 2\ldots)$$

tak iż zamiast N szpar siatki ujrzymy $2Ni$ szpar, przyczem natężenie światła będzie stopniowo spadało od środka każdego maximum do środka sąsiednich minimów.

Jeżeli diafragma przepuszcza obadwa i-te maxima i środkowe, natężenie światła wyrazi się wzorem:

$$I_2 = 4\,\text{const.}\,(I_0 + I_i)^2,$$

gdzie I_0 jest całką (21), I_i oznacza całkę wyrażenia (22). Uskuteczniwszy z całką I_i takież samo przekształcenie, jak w przypadku poprzednim, znajdujemy:

$$I_2 = 4\,\text{const.}\left[1 + (-1)^{i(N-1)} \,.\, 2 \,.\, \frac{\sin\frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \,.\, \cos\frac{2\pi x i}{\gamma}\right]^2 . I_0^2 .$$

Bliższe rozpatrzenie otrzymanego wzoru przekonywa nas, iż w tym przypadku ujrzymy Ni szpar w obrazie siatki, tak iż dla $i=1$ otrzymamy obraz podobny do siatki. W pewnych warunkach wystąpią jeszcze małe maxima pomiędzy poprzedniemi.

W podobny sposób można również przeprowadzić obliczenia w przypadkach, w których większa liczba maximów obrazu pierwotnego zostaje przepuszczona przez diafragmę [1]. Wzory Abbego były również stosowane w przypadkach, gdy diafragma nie jest symetryczna [2], oraz do siatek przezroczystych, t. j. takich, w których i szpary posiadają pewien stopień przezroczystości [3].

Wszystkie rezultaty otrzymane ze wzorów Abbego zgadzają się w zupełności z obserwowanemi zjawiskami.

---

§ 6. Sprawność mikroskopu.

Z przykładów, rozważonych w poprzednim paragrafie, widzimy, jak wielkość diafragmy wpływa na podobieństwo otrzymanych obrazów optycznych do przedmiotu danego. Jak tego już w § 4 dowiedliśmy, bezwzględne podobieństwo jest teoretycznie niemożliwe, ale jeżeli części całki (17), które nie są

---

[1]) Zob. M. Wolfke, Ann. d. Phys. (4) **34**, § 8 i 9, p. 298—307. 1911, lub Prace mat.-fiz. t. XXII, p. 154—164, 1911.

[2]) M. Wolfke, Ann. d. Phys. (4) **37**, p. 96—102, 1912, lub Prace mat.-fiz. t. XXII, p. 165—171, 1911.

[3]) M. Wolfke, Ann. d. Phys. (4) **37**, p. 797—811, i **38**, p 385—396, 1912.

objęte diafragmą, są bardzo małe w porównaniu do części tej całki, która jest zawarta w otworze diafragmy, w takim razie obraz otrzymany będzie, z praktycznego punktu widzenia, zupełnie podobny do danego przedmiotu. Aby przekonać się, do jakich czynników zależy sprawność mikroskopu, rozpatrzymy obraz siatki dyfrakcyjnej [1].

Dla i-tego maximum obrazu pierwotnego otrzymujemy ze wzoru (19) następujące równanie:

$$\omega_i = \frac{2\pi a i}{\gamma} = \frac{2\pi a \xi_i'}{\lambda}.$$

Uwzględniając spółczynnik załamania n ośrodka, znajdujemy zatem

$$\xi_i' = \sin u_i = \frac{\lambda i}{n\gamma},$$

gdzie u_i jest kątem, który tworzą promienie i-tego maxima z główną osią optyczną danego układu. Liczba zatem maximów, zawartych w kącie u, będzie równa:

$$i = n \sin u \,.\, \frac{\gamma}{\lambda}. \tag{23}$$

Stopień podobieństwa otrzymanego obrazu wzrasta wraz z liczbą maximów i dopiero przy $i = \infty$ osiągnąłby bezwzględny stopień doskonałości. W ten sposób stopień otrzymanego podobieństwa obrazu możemy mierzyć liczbą użytych maximów. Liczba zaś tych maximów, jak to widzimy ze wzoru (23), przy danej długości fali i danej siatce, jest zależna jedynie od wielkości $n \sin u$. Wielkość tę oznaczymy przez A:

$$A = n \,.\, \sin u.$$

Tę wielkość Abbe nazwał otworem (aperturą) układu optycznego. Na podstawie wzoru (23) możemy zatem powiedzieć, że układy, posiadające jednakowy otwór, dadzą obrazy tego samego przedmiotu o jednakowym stopniu podobieństwa. Największa wartość, jaką kąt u mieć może, wynosi 90°. W tym przypadku otwór A będzie:

$$A = n.$$

W tym idealnym przypadku sprawność mikroskopu, którą możemy mierzyć stopniem otrzymanego podobieństwa, czyli wielkością i, osiągnie wartość:

$$i = n \,.\, \frac{\gamma}{\lambda}.$$

[1]) Zob. E. Abbe, l. c. § 26, p. 92—94.

Widzimy, że wartość ta rośnie, gdy n powiększa się i gdy długość fali użytego światła się zmniejsza. Jeżeli oznaczymy przez $A_0 = n_0$ największą możliwą aperturę, a przez λ_0 najkrótszą falę światła, której możemy użyć, wtedy sprawność mikroskopu osiągnie największą możliwą wartość:

$$i = A_0 \,.\, \frac{\gamma}{\lambda_0}. \tag{24}$$

Oznaczmy przez i_0 ostatnie maximum obrazu pierwotnego, po za którem wszystkie pozostałe są tak nieznaczne, że je możemy pominąć, wtedy układ optyczny z maksymalną aperturą $A_0 = n_0$ da obraz podobny wszystkich siatek, których stała γ będzie czyniła zadość warunkowi:

$$\gamma \geqq \frac{i_0 \lambda_0}{A_0}.$$

Jeżeli jednak γ będzie mniejsze, niż $\frac{i_0 \lambda_0}{A_0}$, podobieństwo obrazu nie zostanie zachowane, gdyż z chwilą, gdy stała siatki γ się zmniejsza, wszystkie maxima oddalają się od środka; gdy γ będzie mniejsza od $\frac{i_0 \lambda_0}{A_0}$, maximum i_0, które leżało na granicy otworu diafragmy, obecnie wyjdzie po za ten otwór. Dajmy na to, że γ będzie się coraz bardziej zmniejszało, wtedy coraz większa liczba maximów wyjdzie z otworu diafragmy, aż w końcu pozostanie jedynie środkowe maximum samo. Obraz otrzymany w tych warunkach, jak to widzieliśmy w § 5, przedstawi się, jako jasna powierzchnia bez struktury; zatem obraz ten będzie do siatki wcale nie podobny. Stopień takiego niepodobieństwa nazywamy „niepodobieństwem bezwzględnem“ [1]). Widzieliśmy jednak w § 5, iż dostateczne jest, aby pierwsze dwa maxima dołączyły się do maximum środkowego, by obraz siatki stał się mniej więcej do siatki podobny. Ten najniższy stopień podobieństwa otrzymamy przy oświetleniu prostopadłem, gdy:

$$\gamma = \frac{\lambda_0}{A_0}.$$

Jednakże i jedno maximum pierwsze, dodane do środkowego, wystarcza do otrzymania tego samego podobieństwa. Aby warunkowi temu zadośćuczynić, wystarcza przedmiot oświetlić skośnie, tak iż maximum środkowe przesunie się i w otworze diafragmy znajdzie się jedynie środkowe maximum i jedno

[1]) Zob. E. Abbe, l. c. § 27, p. 94—96.

z obydwóch pierwszych. Wtedy najmniejsza wartość na stałą γ, przy której otrzymamy jeszcze stopień najniższy podobieństwa, wyniesie:

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_0}{2 A_0}. \tag{25}$$

Jest to granica możliwości rozpoznawania mikroskopowego[1]. Jeżeli użyjemy np. układu inwersyjnego z bromku naftaliny ($n = 1{,}66$) i jako światła użyjemy światła fioletowego, odpowiadającego linii Fraunhofera H ($\lambda = 0{,}4\ \mu$), otrzymamy przy oświetleniu skośnem:

$$\gamma_0 = \frac{0{,}0004}{2.1{,}66} = 0{,}00012 \text{ mm}.$$

t. j. ca. $^1/_{8000}$ mm. W tych warunkach bylibyśmy zatem jeszcze w stanie odróżnić dwa punkty odległe od siebie o $^1/_{8000}$ mm. Stosując metodę fotograficzną, promieniami ultrafioletowymi[2], możemy w rozpoznawaniu mikroskopowem posunąć się jeszcze o krok naprzód; jednakże i mikroskop „ultrafioletowy" nie pozwoli nam odróżnić przedmiotu mniejszego od $^1/_{10000}$ mm. Bez porównania dalej prowadzi nas „ultramikroskop"[3], za którego pomocą możemy jeszcze dojrzeć cząsteczki o wielkości około 6 $\mu\mu$, t. j. tylko dziesięć razy większe, niż średnia wielkość molekuł. Zasada jednak ultramikroskopu jest zupełnie różna od zasady zwykłych mikroskopów. Cząsteczki, które chcemy zobaczyć, zostają silnie z boku oświetlone i światło rozprasza się niejako na nich[4], tak iż nabywają one własności przedmiotów samoświecących.

Ze wszystkiego, co wyżej powiedzieliśmy, jest rzeczą widoczną, że przy danej diafragmie tylko te przedmioty mogą dać obraz podobny, których obraz pierwotny jest taki, iż diafragma dana może go prawie całkowicie przepuścić. Pytaniem, jakiej konstrukcyi przedmioty przy danej diafragmie dadzą obraz podobny, zajmował się L. Mandelstam[5]. Jako podstawę swych rozważań zastosował on metodę, wyłożoną w § 3 i, stosując równania całkowe, doszedł do wniosku, że przy danej diafragmie, tylko pewna określona liczba struktur może dać obraz do przedmiotu podobny.

[1]) Zob. E. Abbe, Ber. d. Berl. Akad. 1873, także Arch. f. mikr. Anatomie, April, 1874, porówn. też H. Helmholtz, Pogg. Ann. Jubelband, 1874, p. 557—584, lub Wiss. Abh. II, p. 185—212, 1883.

[2]) A. Köhler, Phys. Ztschr. 5, p. 666—671, 1904, także O. Lummer, id. p. 671—672.

[3]) Siedentopf i Szigmondy, Ann. d. Phys. (4) 10, p. 1, 1903.

[4]) Lord Rayleigh, Scientific papers, III, 173, 1902.

[5]) L. Mandelstam, „Weber-Festschrift", p. 228—241, 1912.

Zagadnieniem, tyczącem się również kwestyi podobieństwa obrazów optycznych, jest pytanie: z jakim stopniem podobieństwa możemy otrzymać obraz przedmiotu, leżącego po za płaszczyzną nastawienia. Przez płaszczyznę nastawienia rozumiemy w tym przypadku płaszczyznę obszaru przedmiotowego, sprzężoną bądź z siatkówką oka obserwatora, bądź z płaszczyzną ekranu, na którym powstaje dany obraz. Pytanie to było poprzednio rozważane[1]; opierając się jednak na zasadzie Fresnela-Huygensa, można niezależnie od wzorów Abbego wyprowadzić wzory ogólne[2] dla przedmiotów samoświecących, jak również i dla niesamoświecących; wzory te pozwalają obliczyć obraz przedmiotu danego, niezależnie od tego, czy on znajduje się w płaszczyznie nastawienia, czy też leży po za nią. Ze wzorów tych wypływa, że wogólności przedmioty samoświecące jak i niesamoświecące, gdy leżą po za płaszczyzną nastawienia, dają obraz niepodobny. Jedynie tylko przedmioty niesamoświecące w pewnych wyjątkowych przypadkach mogą dać obraz podobny i niezależny[3] od położenia płaszczyzny przedmiotu względem płaszczyzny nastawienia. Wzory te ogólne były stosowane do siatki dyfrakcyjnej i dały rezultaty zupełnie zgodne z obserwowanemi zjawiskami.[4]

[1]) R. Straubel, Abh. d. kgl. bayer. Akad. d. Wiss. 2 Kl. 18, 1 Abt. p. 113, 1893 a także A. Winkelmann, Ann. d. Phys. 27, p. 905, 1908 i H. Weisel, Ann. d. Phys. 33, p. 995, 1910.

[2]) M. Wolfke, Ann. d. Phys. (4) 39. p. 569—610, 1912.

[3]) M. Wolfke, id. zob. p. 592 i 607.

[4]) M. Wolfke, Ann. d. Phys. (4) 40, p. 194—200, 1913.