

„Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce“. C. R. T. 137. 1903.

„Sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques de deux variables et de leurs intégrales“. C. R. T. 138. 1904.

„Sur quelques équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques“. C. R. T. 139. 1904.

„Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales“. C. R. T. 137. 1903.

„Sur les résidus et les périodes des intégrales doubles de fonctions rationnelles“. C. R. T. 132. 1901.

A. Rosenblatt.

„Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques“. C. R. T. 154. 1912.

„Sur certaines classes de surfaces algébriques irrégulières et sur les transformations birationnelles de ces surfaces en elles-mêmes“. Bulletin de l'Académie de Cracovie. Juillet 1912.

„Sur les surfaces algébriques irrégulières de genre linéaire $p^{(1)} > 1$ “. Prace matematyczno-fizyczne. T. 23. 1912.

W. SIERPIŃSKI.

O krzywych, wypełniających kwadrat.

(Sur les courbes qui remplissent un carré).

ROZDZIAŁ I.

Wstęp

Pierwszy przykład krzywej ciągłej, wypełniającej kwadrat, podał w r. 1890 G. Peano w postaci czysto analitycznej¹⁾. Interpretację geometryczną krzywej Peano dali A. Schoenflies²⁾ oraz E. H. Moore³⁾.

W rozdziale niniejszym zamierzam przedstawić pewien oryginalny sposób otrzymania krzywej Peano. Sposób ten, będący pewną modyfikacją metody Schoenfliesa, wydaje mi się naturalnym i łatwym do spamiętania, a przytem daje się z odpowiednimi zmianami zastosować też przy wyprowadzaniu innych krzywych, wypełniających kwadrat, jak to zobaczymy w następnych rozdziałach.

Oznaczmy przez K kwadrat o wierzchołkach przeciwległych $(0,0)$ i $(1,1)$, i weźmy pod rozwagę dowolną daną krzywą ciągłą C_1 , przebiegającą w kwa-

¹⁾ Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. Mathematische Annalen, Bd. 36, p. 157.

²⁾ Zob. Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, T. I (1900), p. 122.

³⁾ On certain crinly curves. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. I (1900), p. 72–90.

dracie K od punktu $(0,0)$ do punktu $(1,1)$ (fig. 1). Niech

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t), \\ y &= \psi_1(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$



Fig. 1.

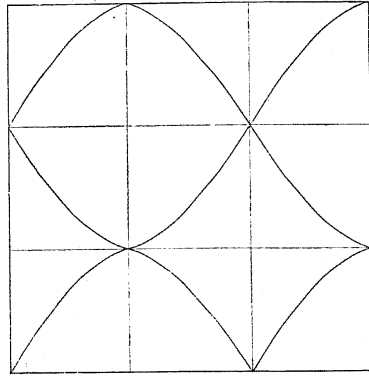


Fig. 2.

będą równania uważanej krzywej (Funkcje $\varphi_1(t)$ i $\psi_1(t)$ są więc ciągłe dla $0 \leq t \leq 1$, przyczem $\varphi_1(0) = \psi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1) = \psi_1(1) = 1$).

Podzielimy dalej kwadrat K na 9 nowych kwadratów i ponumerujemy je w sposób wskazany w tablicy I.

3	4	9
2	5	8
1	6	7

Tab. I.

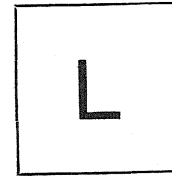
W kwadracie 1 umieścimy krzywą c_1 (zob. fig. 2), podobną krzywej C_1 (w trzykrotnym zmniejszeniu) i podobnie położoną. Obróćmy następnie kwadrat 1 o 180° dokoła boku wspólnego kwadratowi 1 i 2: krzywa c_1 zajmie przez to położenie c_2 (symetryczne względem c_1). Kwadrat 2 obróćmy dalej, wraz ze znajdującą się w nim krzywą, o 180° dokoła boku 23 i nowe położenie naszej krzywej oznaczmy przez c_3 ; następnie kwadrat 3 obróćmy o 180° dokoła boku 34 i nowe położenie krzywej oznaczmy przez c_4 i t. d. Ogólnie, mając krzywą c_i w i -tym kwadracie, obracamy go o 180° dokoła boku wspólnego

kwadratowi i oraz $i + 1$, a nowe położenie krzywej oznaczmy przez c_{i+1} (dla $i = 1, 2, 3, \dots, 8$).

Jasnym jest, że koniec krzywej c_i będzie zarazem początkiem krzywej c_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, 8$). Otrzymane 9 krzywych możemy więc uważać jako jedną krzywą ciągłą C_2 , przebiegającą w kwadracie K , podobnie jak krzywa C_1 , od punktu początkowego $(0,0)$ do punktu końcowego $(1,1)$ (fig. 2).

Z krzywą C_2 postąpimy dalej taksamo jak z krzywą C_1 , tworząc nową krzywą C_3 i t. d. Otrzymamy w ten sposób oznaczony w zupełności (przez krzywą początkową C_1) ciąg nieskończony krzywych ciągłych C_n .

Sposób otrzymywania krzywej C_{n+1} z krzywej C_n możemy przedstawić schematycznie zapomocą tablicy II. Położenie litery L (którą umyślnie wzię-



L	J	L
Γ	γ	Γ
L	J	L

Tabl. II.

liśmy niesymetryczną) przypomina nam położenie względne każdej z dziewięciu części nowej krzywej i sposób jej otrzymania z krzywej pierwotnej. Podobnego schematycznego sposobu przedstawiania będziemy używali też w następnych rozdziałach.

Ze sposobu, w jaki otrzymaliśmy w poprzednim artykule krzywą C_2 z krzywej C_1 , wynika natychmiast, że jako równania dla krzywej C_2 uważać możemy równania

$$\begin{aligned} x &= \varphi_2(t), \\ y &= \psi_2(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2)$$

gdzie funkcje ciągłe $\varphi_2(t)$ i $\psi_2(t)$ określone są w następujący sposób:

$$\left. \begin{aligned} \text{Dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}: \varphi_2(t) &= \frac{1}{3} \varphi_1(9t), & \psi_2(t) &= \frac{1}{3} \psi_1(9t), \\ \text{„ } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}: \varphi_2(t) &= \frac{1}{3} \varphi_1(2-9t), & \psi_2(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \psi_1(2-9t), \\ \text{„ } \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{8}{9}: \varphi_2(t) &= \frac{1}{3} \varphi_1(9t-2), & \psi_2(t) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \psi_1(9t-2), \\ \text{„ } \frac{8}{9} \leq t \leq \frac{4}{3}: \varphi_2(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \varphi_1(4-9t), & \psi_2(t) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \psi_1(4-9t), \\ \text{„ } \frac{4}{3} \leq t \leq \frac{5}{3}: \varphi_2(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \varphi_1(9t-4), & \psi_2(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \psi_1(9t-4), \\ \text{„ } \frac{5}{3} \leq t \leq \frac{6}{3}: \varphi_2(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \varphi_1(6-9t), & \psi_2(t) &= \frac{1}{3} \psi_1(6-9t), \\ \text{„ } \frac{6}{3} \leq t \leq \frac{7}{3}: \varphi_2(t) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \varphi_1(9t-6), & \psi_2(t) &= \frac{1}{3} \psi_1(9t-6), \\ \text{„ } \frac{7}{3} \leq t \leq \frac{8}{3}: \varphi_2(t) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \varphi_1(8-9t), & \psi_2(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \psi_1(8-9t), \\ \text{„ } \frac{8}{3} \leq t \leq 1: \varphi_2(t) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \varphi_1(9t-8), & \psi_2(t) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \psi_1(9t-8). \end{aligned} \right\} (3)$$

Określmy teraz dla przedziału $0 \leq t \leq 1$ funkcje $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ oraz $\theta(t)$ w następujący sposób:

Dla	$\alpha(t) =$	$\beta(t) =$	$\gamma(t) =$	$\delta(t) =$	$\theta(t) =$
$0 \leq t < \frac{1}{3}$	0	1	0	1	$9t$
$\frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3}$	0	1	2	-1	$2-9t$
$\frac{2}{3} \leq t < \frac{4}{9}$	0	1	2	1	$9t-2$
$\frac{4}{9} \leq t < \frac{5}{9}$	2	-1	2	1	$4-9t$
$\frac{5}{9} \leq t < \frac{8}{9}$	2	-1	2	-1	$9t-4$
$\frac{8}{9} \leq t < \frac{2}{3}$	2	-1	0	1	$6-9t$
$\frac{2}{3} \leq t < \frac{7}{9}$	2	1	0	1	$9t-6$
$\frac{7}{9} \leq t < \frac{8}{9}$	2	1	2	-1	$8-9t$
$\frac{8}{9} \leq t < 1$	2	1	2	1	$9t-8$

Łatwo widzieć, że wobec powyższych definicji będziemy mieli:

$$\text{oraz } \left. \begin{aligned} \varphi_2(t) &= \frac{\alpha(t)}{3} + \frac{\beta(t)}{3} \varphi_1(\theta(t)), \\ \psi_2(t) &= \frac{\gamma(t)}{3} + \frac{\delta(t)}{3} \psi_1(\theta(t)). \end{aligned} \right\} \text{ dla } 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Ponieważ krzywa C_n jest otrzymana z krzywej C_{n-1} w ten sam sposób, w jaki krzywa C_2 została otrzymana z krzywej C_1 , więc, w myśl (4), jako równania krzywej C_n będziemy mogli uważać równania

$$\begin{aligned} x &= \varphi_n(t), \\ y &= \psi_n(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(t) &= \frac{\alpha(t)}{3} + \frac{\beta(t)}{3} \varphi_{n-1}(\theta(t)), \\ \psi_n(t) &= \frac{\gamma(t)}{3} + \frac{\delta(t)}{3} \psi_{n-1}(\theta(t)), \end{aligned} \right\} \text{ dla } 0 \leq t \leq 1 \quad (5)$$

dla $n = 2, 3, 4, \dots$

Z definicji funkcji $\theta(t)$ wynika z łatwością, że jeżeli $0 \leq t \leq 1$, to mamy również $0 \leq \theta(t) \leq 1$. We wzorach (5) możemy więc zastąpić t przez $\theta(t)$ i czynność tę powtarzać dowolną liczbę razy.

Oznaczmy przez skrócenie

$$\theta(\theta(t)) = \theta_2(t), \quad \theta(\theta_2(t)) = \theta_3(t) \text{ i t. d.}$$

Ze wzorów (5) znajdziemy z największą łatwością:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(t) &= \frac{\alpha(t)}{3} + \frac{\beta(t)\alpha(\theta(t))}{3^2} + \frac{\beta(t)\beta(\theta(t))\alpha(\theta_2(t))}{3^3} + \dots \\ &\dots + \frac{\beta(t)\beta(\theta(t))\dots\beta(\theta_{n-3}(t))\alpha(\theta_{n-2}(t))}{3^{n-1}} + \frac{\beta(t)\beta(\theta(t))\dots\beta(\theta_{n-2}(t))}{3^{n-1}} \varphi_1(\theta_{n-1}(t)), \\ \psi_n(t) &= \frac{\gamma(t)}{3} + \frac{\delta(t)\gamma(\theta(t))}{3^2} + \frac{\delta(t)\delta(\theta(t))\gamma(\theta_2(t))}{3^3} + \dots \\ &\dots + \frac{\delta(t)\delta(\theta(t))\dots\delta(\theta_{n-3}(t))\gamma(\theta_{n-2}(t))}{3^{n-1}} + \frac{\delta(t)\delta(\theta(t))\dots\delta(\theta_{n-2}(t))}{3^{n-1}} \psi_1(\theta_{n-1}(t)), \end{aligned} \right\} (6)$$

Ponieważ krzywa C_1 nie wychodzi poza kwadrat K , więc mamy nierówność:

$$0 \leq \varphi_1(\theta_{n-1}(t)) \leq 1 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq \psi_1(\theta_{n-1}(t)) \leq 1. \quad (7)$$

Położmy dla $0 \leq t \leq 1$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\alpha(t)}{3} + \frac{\beta(t)\alpha(\theta(t))}{3^2} + \frac{\beta(t)\beta(\theta(t))\alpha(\theta_2(t))}{3^3} + \dots \\ \psi(t) &= \frac{\gamma(t)}{3} + \frac{\delta(t)\gamma(\theta(t))}{3^2} + \frac{\delta(t)\delta(\theta(t))\gamma(\theta_2(t))}{3^3} + \dots \end{aligned} \right\} (8)$$

i sumy n pierwszych składników wypisanych szeregów oznaczmy odpowiednio przez $p_n(t)$ i $q_n(t)$.

Szeregi (7) są zbieżne dla $0 \leq t \leq 1$, gdyż z definicji funkcji α , β , γ i δ wynika, że stale

$$|\alpha(t)| \leq 2, \quad |\beta(t)| \leq 1, \quad |\gamma(t)| \leq 2, \quad |\delta(t)| \leq 1,$$

tak iż n -ty składnik każdego z szeregów (8) nie przenosi bezwzględnie $\frac{2}{3^n}$. Wynika stąd też, że

$$\left. \begin{aligned} |\varphi(t) - p_{n-1}(t)| &\leq \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \dots = \frac{1}{3^{n-1}} \\ \text{i podobnie:} \\ |\psi(t) - q_{n-1}(t)| &\leq \frac{1}{3^{n-1}}. \end{aligned} \right\} (9)$$

Z drugiej strony, wzory (6), wobec nierówności (7), dają:

$$\text{oraz } \left. \begin{aligned} |p_{n-1}(t) - \varphi_n(t)| &\leq \frac{1}{3^{n-1}}, \\ |q_{n-1}(t) - \psi_n(t)| &\leq \frac{1}{3^{n-1}}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Wobec (9) i (10), znajdujemy w jednej chwili:

$$\text{oraz } \left. \begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| &\leq \frac{2}{3^{n-1}} \\ |\psi(t) - \psi_n(t)| &\leq \frac{2}{3^{n-1}} \end{aligned} \right\} (11)$$

Nierówności (11) dowodzą, że funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są w przedziale $0 \leq t \leq 1$ odpowiednio granicami ciągów jednostajnie zbieżnych funkcji ciągłych $\varphi_n(t)$ i $\psi_n(t)$. Wynika stąd, że funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są ciągłe w przedziale $0 \leq t \leq 1$. (Zauważymy, że o ciągłości funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ nie mogliśmy jeszcze wnioskować z jednostajnej zbieżności szeregów (8), gdyż składniki tych szeregów nie są funkcjami ciągłymi).

Krzywa C , określona przez równania

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1$$

jest więc krzywą ciągłą.

Krzywe C_n nie wychodzą poza kwadrat K , zatem i granica ich — krzywa C — nie może poza kwadrat K wychodzić. Powiadam, że krzywa C wypełnia kwadrat K .

Ze sposobu otrzymywania krzywych C_n wynika drogą łatwej indukcji, że, jeżeli kwadrat K podzielimy na 9^n równych kwadratów, to krzywa C_{p+1} i każda z krzywych C_{p+2}, C_{p+3}, \dots przechodzi przez pewien wierzchołek każdego z nich. Wnosimy stąd, że i granica krzywych C_n — krzywa C — przechodzi przez pewien wierzchołek każdego z 9^n kwadratów na które podzielimy kwadrat K . Wynika stąd, że zbiór punktów krzywej C jest wszędzie gęsty w kwadracie K ; ponieważ zaś krzywa C jest ciągła, więc dowodzi to, że krzywa nasza przechodzi przez każdy punkt (leżący wewnątrz lub na obwodzie) kwadratu K . Krzywa C wypełnia zatem kwadrat.

Godnem uwagi jest, że (jak to widać ze wzorów (8)) funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ nie zależą od obioru funkcji $\varphi_1(t)$ i $\psi_1(t)$, a więc od obioru krzywej początkowej C_1 (byleby to była krzywa ciągła¹⁾, przebiegająca w kwadracie K od punktu (0,0) do punktu (1,1)).

¹⁾ Ze wzorów (6) wynika, że warunek ciągłości funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ nie jest tu istotny: wystarczyłoby założenie, że funkcje te pozostają ograniczone.

Postaramy się obecnie równania (8), uzyskane na krzywą C , sprowadzić do postaci prostszej.

Jak zauważyliśmy w końcu poprzedniego artykułu, granice ciągów $\varphi_n(t)$ i $\psi_n(t)$ nie zależą od obioru krzywej C_1 : założmy więc, w szczególności, że krzywa C_1 jest symetryczna względem środka kwadratu K , mianowicie, że mamy

$$\text{oraz } \begin{aligned} \varphi_1(t) + \varphi_1(1-t) &= 1, \\ \psi_1(t) + \psi_1(1-t) &= 1. \end{aligned} \quad \text{dla } 0 \leq t \leq 1$$

Ze wzorów (3) wnosimy z łatwością (rozbijając dowód na 9 przypadków, stosownie do przedziału, w którym leży t), że będzie też:

$$\text{oraz } \begin{aligned} \varphi_2(t) + \varphi_2(1-t) &= 1, \\ \psi_2(t) + \psi_2(1-t) &= 1, \end{aligned} \quad \text{dla } 0 \leq t \leq 1$$

a stąd, przez indukcję, że będzie ogólnie:

$$\text{oraz } \left. \begin{aligned} \varphi_n(t) + \varphi_n(1-t) &= 1, \\ \psi_n(t) + \psi_n(1-t) &= 1, \end{aligned} \right\} \text{ dla } 0 \leq t \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Wobec (12) mamy (przy danem n) dla $k = 2, 4, 6, 8$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(k-9t) &= 1 - \varphi_n(9t-k+1), \\ \psi_n(k-9t) &= 1 - \psi_n(9t-k+1). \end{aligned} \right\} \text{ dla } \frac{k-1}{9} \leq t \leq \frac{k}{9} \quad (13)$$

Wzory (3) pozostaną prawdziwe, jeżeli w nich zastąpimy $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2$ i ψ_2 odpowiednio przez $\varphi_n, \psi_n, \varphi_{n+1}$ i ψ_{n+1} . Wobec tego i w myśl (13) będziemy mogli napisać:

Dla	$\varphi_{n+1}(t) =$	$\psi_{n+1}(t) =$
$0 \leq t \leq \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \varphi_n(9t)$	$\frac{1}{9} \psi_n(9t)$
$\frac{1}{9} \leq t \leq \frac{2}{9}$	$\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \varphi_n(9t-1)$	$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} \psi_n(9t-1)$
$\frac{2}{9} \leq t \leq \frac{3}{9}$	$\frac{2}{9} \varphi_n(9t-2)$	$\frac{3}{9} + \frac{1}{9} \psi_n(9t-2)$
$\frac{3}{9} \leq t \leq \frac{4}{9}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \varphi_n(9t-3)$	$1 - \frac{1}{9} \psi_n(9t-3)$
$\frac{4}{9} \leq t \leq \frac{5}{9}$	$\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \varphi_n(9t-4)$	$\frac{2}{9} - \frac{1}{9} \psi_n(9t-4)$
$\frac{5}{9} \leq t \leq \frac{6}{9}$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \varphi_n(9t-5)$	$\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \psi_n(9t-5)$
$\frac{6}{9} \leq t \leq \frac{7}{9}$	$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} \varphi_n(9t-6)$	$\frac{1}{9} \psi_n(9t-6)$
$\frac{7}{9} \leq t \leq \frac{8}{9}$	$1 - \frac{1}{9} \varphi_n(9t-7)$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \psi_n(9t-7)$
$\frac{8}{9} \leq t \leq 1$	$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} \varphi_n(9t-8)$	$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} \psi_n(9t-8)$

Powiadam, że dla $0 \leq t < 1$ powyższe 18 wzorów ująć można we dwa wzory:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n+1}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{E3t - 3Et - 1}{3} + [\varphi_n(9t - E9t) - \frac{1}{2}] \frac{(-1)^{E9t - 3E3t}}{3} \\ \psi_{n+1}(t) &= \frac{1}{2} + \frac{E9t - 3E3t - 1}{3} (-1)^{E3t - 3Et} + [\psi_n(9t - E9t) - \frac{1}{2}] \frac{(-1)^{E3t - 3Et}}{3} \end{aligned} \right\} (14)$$

gdzie $E x$ oznacza największą liczbę całkowitą $\leq x$. Dowód nie przedstawia najmniejszej trudności: należy tylko sprawdzić wypisane wzory dla każdego z dziewięciu przedziałów, na które rozpada się przedział $(0, 1)$. (Zauważymy przytem, że dla $t = 1$ wzory (14) już nie są prawdziwe).

Przechodząc we wzorach (14) do granicy dla $n = \infty$, otrzymujemy w jednej chwili:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2} + \frac{E3t - 3Et - 1}{3} + [\varphi(9t - E9t) - \frac{1}{2}] \frac{(-1)^{E9t - 3E3t}}{3} \\ \psi(t) &= \frac{1}{2} + \frac{E3t - 3E3t - 1}{3} (-1)^{E3t - 3Et} + [\psi(9t - E9t) - \frac{1}{2}] \frac{(-1)^{E3t - 3Et}}{3} \end{aligned} \right\} (15)$$

dla $0 \leq t < 1$.

Położmy:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) - \frac{1}{2} &= \Phi(t), \\ \psi(t) - \frac{1}{2} &= \Psi(t); \end{aligned} \right\} (16)$$

równania

$$x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t)$$

będą więc równaniami krzywej \mathcal{C} , jeżeli za osie współrzędnych przyjmiemy proste, łączące środki przeciwległych boków kwadratu K .

Położmy jeszcze:

$$\left. \begin{aligned} 9t - E9t &= \tau(t), & \tau(\tau(t)) &= \tau_2(t), \quad \text{i t. d.;} \\ E3t - 3Et &= \eta(t); \\ \eta(t) - 1 &= f(t). \end{aligned} \right\} (17)$$

Będziemy mogli, wobec (15) i (16), napisać:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{f(t)}{3} + \frac{(-1)^{\eta(3t)}}{3} \Phi(\tau(t)), \\ \Psi(t) &= \frac{f(3t)}{3} \cdot \frac{(-1)^{\eta(t)}}{3} + \frac{(-1)^{\eta(t)}}{3} \Psi(\tau(t)) \end{aligned} \right\} (18)$$

dla $0 \leq t < 1$.

Z definicji funkcji $\tau(t)$ wynika, że stale

$$0 \leq \tau(t) < 1;$$

wzory (18) pozostaną więc prawdziwe, jeżeli w nich zastąpimy t przez $\tau(t)$, przyczem proces ten można będzie powtarzać kolejno dowolną liczbę razy. W ten sposób znajdujemy drogą łatwej indukcji:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{f(t)}{3} + \frac{f(\tau(t))}{3^2} (-1)^{\eta(3t)} + \frac{f(\tau_2(t))}{3^3} (-1)^{\eta(3t) + \eta(3\tau(t))} + \dots \\ &\dots + \frac{f(\tau_{n-1}(t))}{3^n} (-1)^{\eta(3t) + \eta(3\tau(t)) + \dots + \eta(3\tau_{n-2}(t))} \\ &\quad + \frac{\Phi(\tau_n(t))}{3^n} (-1)^{\eta(t) + \dots + \eta(3\tau_{n-1}(t))} \\ \Psi(t) &= \frac{f(3t)}{3} (-1)^{\eta(t)} + \frac{f(3\tau(t))}{3^2} (-1)^{\eta(t) + \eta(\tau(t))} \\ &\quad + \frac{f(3\tau_2(t))}{3^3} (-1)^{\eta(t) + \eta(\tau(t)) + \eta(\tau_2(t))} + \dots \\ &\dots + \frac{f(3\tau_{n-1}(t))}{3^n} (-1)^{\eta(t) + \eta(\tau(t)) + \dots + \eta(\tau_{n-1}(t))} \\ &\quad + \frac{\Psi(\tau_n(t))}{3^n} (-1)^{\eta(t) + \eta(\tau(t)) + \dots + \eta(\tau_{n-1}(t))}. \end{aligned} \right\} (19)$$

Ze wzorów (16) wynika, że stale

$$|\Phi(t)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad |\Psi(t)| \leq \frac{1}{2};$$

wnosimy stąd, że ostatnie składniki prawych stron wzorów (19) zmierzają do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie. Mamy więc rozwinięcia:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{f(t)}{3} + \frac{f(\tau(t))}{3^2} (-1)^{\eta(3t)} + \frac{f(\tau_2(t))}{3^3} (-1)^{\eta(3t) + \eta(3\tau(t))} + \dots \\ \Psi(t) &= \frac{f(3t)}{3} (-1)^{\eta(t)} + \frac{f(3\tau(t))}{3^2} (-1)^{\eta(t) + \eta(\tau(t))} \\ &\quad + \frac{f(3\tau_2(t))}{3^3} (-1)^{\eta(t) + \eta(\tau(t)) + \eta(\tau_2(t))} + \dots \end{aligned} \right\} (20)$$

dla $0 \leq t < 1$.

$$\text{Powiadam, że} \quad \tau_n(t) = 3^{2n} t - E 3^{2n} t. \quad (21)$$

Jest to prawdziwe dla $n = 1$, w myśl definicji funkcji $\tau(t)$. Załóżmy, że wzór (21) zachodzi przy pewnym naturalnym n . Będzie

$$\tau_{n+1}(t) = \tau(\tau_n(t)) = 9(3^{2n}t - E 3^{2n}t) - E 9(3^{2n}t - E 3^{2n}t) = 3^{2n+2}t - E 3^{2n+2}t,$$

skąd wynika prawdziwość wzoru (21) dla $n+1$. Wnosimy stąd przez indukcję, że wzór (21) zachodzi przy wszelkim naturalnym n .

Ze wzorów (21) i (17) znajdujemy:

$$\left. \begin{aligned} \eta(\tau_n(t)) &= E 3(3^{2n}t - E 3^{2n}t) - 3 E(3^{2n}t - E 3^{2n}t) = E 3^{2n+1}t - 3 E 3^{2n}t, \\ \eta(3\tau_n(t)) &= E 9(3^{2n}t - E 3^{2n}t) - 3 E 3(3^{2n}t - E 3^{2n}t) = E 3^{2n+2}t - 3 E 3^{2n+1}t, \end{aligned} \right\} (22)$$

$$\left. \begin{aligned} f(\tau_n(t)) &= \eta(\tau_n(t)) - 1 = E 3^{2n+1}t - 3 E 3^{2n}t - 1, \\ f(3\tau_n(t)) &= \eta(3\tau_n(t)) - 1 = E 3^{2n+2}t - 3 E 3^{2n+1}t - 1 \end{aligned} \right\} (23)$$

Wobec (22) mamy:

$$\begin{aligned} \eta(\tau_n(t)) &\equiv E 3^{2n}t + E 3^{2n+1}t \pmod{2} \\ \eta(3\tau_n(t)) &\equiv E 3^{2n+1}t + E 3^{2n+2}t \pmod{2}, \end{aligned}$$

skąd, biorąc jeszcze pod uwagę, że $E t = 0$ dla $0 \leq t < 1$, znajdujemy z łatwością:

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{\eta(3^0 t) + \eta(3^1 t) + \dots + \eta(3^{n-1} t)} &= (-1)^{E 3^0 t + E 3^1 t + \dots + E 3^{n-1} t}, \\ (-1)^{\eta(t) + \eta(3t) + \dots + \eta(3^n t)} &= (-1)^{E 3^0 t + E 3^1 t + \dots + E 3^{n-1} t} \end{aligned} \right\} (23)$$

Jeżeli położymy

$$f_n(t) = (E 3^n t - 3 E 3^{n-1} t - 1) (-1)^{E 3^0 t + E 3^1 t + \dots + E 3^{n-1} t} \quad (25)$$

to, wobec (20), (23) i (24), będziemy mogli napisać:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{f_1(t)}{3} + \frac{f_3(t)}{3^3} + \frac{f_5(t)}{3^5} + \dots, \\ \Psi(t) &= \frac{f_2(t)}{3} + \frac{f_4(t)}{3^2} + \frac{f_6(t)}{3^3} + \dots, \end{aligned}$$

czyli

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \cdot f_{2n-1}(t), \\ y &= \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \cdot f_{2n}(t). \end{aligned} \right\} \text{ dla } 0 \leq t < 1 \quad (26)$$

Są to równania, które na krzywą Peano podał E. Cesàro¹⁾. Aby je sprowadzić do równań, które określają samą krzywą, rozwiniemy liczbę t na ułamek trójkowy

$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots,$$

wybierając z dwóch ewentualnych rozwinięć rozwinięcie skończone. Jak łatwo widzieć, cyfry a_n tego rozwinięcia będą określone przez wzory:

$$a_n = E 3^n t - 3 E 3^{n-1} t, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

Będzie więc

$$a_n \equiv E 3^n t + E 3^{n-1} t \pmod{2}. \quad (28)$$

Położymy, wraz z Peano:

$$k^0(a) = a, \quad k'(a) = 2 - a, \quad k'(k'(a)) = k^2(a) \quad \text{i t. d.}$$

Jak łatwo widzieć, będzie przy wszelkim całkowitem $p \geq 0$:

$$k^p(a) = 1 + (-1)^p (a - 1),$$

zatem, w myśl (27) i (28):

$$\begin{aligned} b_n &= k^{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-2}}(a_{2n-1}) \\ &= 1 + (E 3^{2n-1} t - 3 E 3^{2n-2} t - 1) (-1)^{E 3^0 t + E 3^1 t + \dots + E 3^{2n-2} t}, \\ c_n &= k^{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1}}(a_{2n}) \\ &= 1 + (E 3^{2n} t - 3 E 3^{2n-1} t - 1) (-1)^{E 0 t + E 3^1 t + \dots + E 3^{2n-1} t}, \end{aligned}$$

zatem, z uwagi że $E t = 0$ dla $0 \leq t < 1$ i w myśl (25):

$$b_n = 1 + f_{2n-1}(t), \quad c_n = 1 + f_{2n}(t).$$

Ze wzorów tych wynika natychmiast, wobec (26), że jeżeli na osie współrzędnych przyjmiemy (jak na początku rozdziału) boki kwadratu K , to równania krzywej C będziemy mogli napisać w postaci:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \frac{b_3}{3^3} + \dots \\ y &= \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Sur la représentation analytique des régions et des courbes qui les remplissent. Bulletin des Sciences Math. (2), T. 21 (1897), p. 257.

gdzie położyliśmy

$$b_n = k^{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-2}} (a_{2n-1}),$$

$$c_n = k^{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1}} (a_{2n}).$$

Są to właśnie równania, które definiują swą krzywą Peano.

Dla zilustrowania krzywej C mogliśmybyśmy wykreślić kilka początkowych wyrazów ciągu C_n , których C jest granicą (pierwsze dwa wyrazy tego ciągu przedstawiają fig. 1 i 2). Krzywe te przedstawiają jednak tę niedogodność, że posiadają punkty wielokrotne, utrudniające zorientowanie się w biegu krzywej. Podamy wobec tego bardziej poglądowy sposób ilustrowania kolejnych przybliżeń krzywej Peano.

Załóżmy, że krzywa początkowa C_1 przechodzi przez środek kwadratu K . Przez łatwą indukcję wnioskujemy stąd (opierając się na sposobie tworzenia krzywych C_n), że krzywa C_n przechodzić będzie przez środek każdego

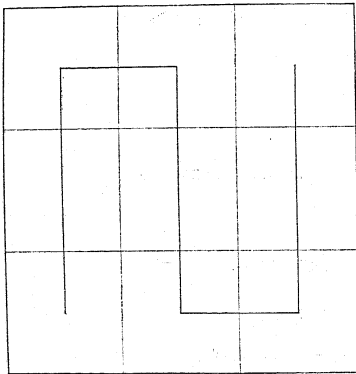


Fig. 3.

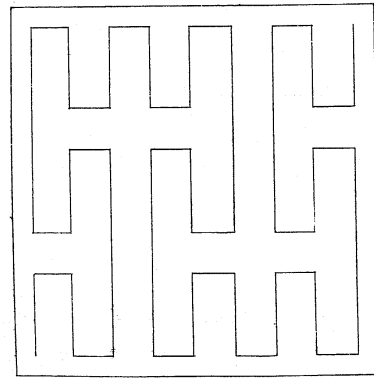


Fig. 4.

z 9^{n-1} kwadratów, na które podzielimy kwadrat K . W krzywą C_n ($n > 1$) wpiszmy łamane L_n , łącząc kolejne środki 9^{n-1} kwadratów przez które krzywa C_n przechodzi. Figury 3, 4 i 5 przedstawiają odpowiednio łamane L_2 , L_3 i L_4 .

Krzywa Peano nie jest krzywą zamkniętą: można by jednak okazać z łatwością, że krzywa, określona przez równania

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad \text{dla } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$$

gdzie funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ mają to samo znaczenie co i wyżej, jest krzywą zamkniętą, której punkt początkowy i końcowy zlewają się w punkcie $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

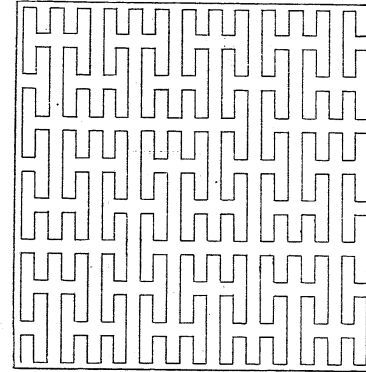


Fig. 5.

Krzywa ta wypełnia kwadrat, określony przez wierzchołki przeciwległe $(0, \frac{1}{3})$ i $(\frac{2}{3}, 1)$.

Pod względem krotności punkty krzywej Peano dzielą się na zwykłe, przez które krzywa raz tylko przechodzi (np. środek kwadratu K), podwójne (np. punkt $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$) oraz poczwórne (np. punkt $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$). Łatwą klasyfikację wszystkich punktów krzywej Peano pod względem ich krotności pozostawiamy czytelnikowi¹⁾.

ROZDZIAŁ II.

Wgłód krzywej Hilberta.

Weźmy pod uwagę dowolną daną krzywą ciągłą C_1 , przebiegającą w kwadracie K od punktu $(0, 0)$ do punktu $(1, 0)$; niech

¹⁾ Można by udowodnić, że dla każdej krzywej ciągłej, wypełniającej kwadrat, mnogości punktów zwykłych jest punktkształtna (to znaczy, że na każdym t. zw. continuum, łączącym w kwadracie K , znajdują się punkty wielokrotne uważanej krzywej). Ciekawą własność krzywych ciągłych, wypełniających kwadrat, udowodnił p. S. Mazurkiewicz w swej tezie doktorskiej, przedstawionej Wydziałowi filozoficznemu Uniwersytetu Lwowskiego: dowiódł on mianowicie, że każda taka krzywa posiada wszędziegęstą mnogość punktów, przez które krzywa przechodzi conajmniej trzy razy (Mnogość ta może zresztą być przeliczalna, jak np. dla krzywej Peano).

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ y &= \psi_1(t), \end{aligned}$$

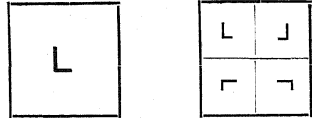
będą jej równania. Funkcje $\varphi_1(t)$ i $\psi_1(t)$ są więc ciągłe, a przytem $\varphi_1(0) = \psi_1(0) = 0$, zaś $\varphi_1(1) = 1$, $\psi_1(1) = 0$.

Podzielimy kwadrat K na cztery kwadraty: 1, 2, 3, 4 (tablica III). Obróćmy krzywą C_1 o kąt 90° według wskazówki zegara dokoła środka kwadratu K :

2	3
1	4

Tabl. III.

niech C' , oznacza krzywą C_1 w jej nowem położeniu. W kwadracie 1 umieścimy krzywą, podobną krzywej C_1' (mniejszą dwa razy) i podobnie położoną. W kwadracie 2 umieścimy krzywą podobną krzywej C_1 i podobnie położoną (względem jej pierwotnego położenia). W kwadratach 3 i 4 umieścimy krzywe, symetryczne względem krzywych, umieszczonych w kwadratach 2 i 1. Cztery otrzymane w ten sposób krzywe tworzą, jak łatwo widzieć,



Tabl. IV.

jedną krzywą ciągłą C_2 , przebiegającą w kwadracie K od punktu (0,0) do punktu (1,0). Schematycznie sposób otrzymania krzywej C_2 z krzywej C_1 przedstawia tabl. IV.

Z krzywą C_2 postąpimy taksamo jak z krzywą C_1 , tworząc nową krzywą C_3 i t. d. Otrzymamy w ten sposób ciąg nieskończony krzywych C_n . Z definicji ciągu C_n wynika, że jako równania krzywej C_n uważać możemy równania

$$\begin{aligned} x &= \varphi_n(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ y &= \psi_n(t), \end{aligned}$$

gdzie funkcje $\varphi_n(t)$ i $\psi_n(t)$ (dla $n > 1$) są określone zapomocą funkcji $\varphi_{n-1}(t)$ i $\psi_{n-1}(t)$ w następujący sposób:

Dla:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t \leq \frac{1}{4}: \quad \varphi_n(t) &= \frac{1}{2} \psi_{n-1}(1-4t), & \psi_n(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \varphi_{n-1}(1-4t), \\ \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}: \quad \varphi_n(t) &= \frac{1}{2} \varphi_{n-1}(4t-1), & \psi_n(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \psi_{n-1}(4t-1), \\ \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}: \quad \varphi_n(t) &= 1 - \frac{1}{2} \varphi_{n-1}(3-4t), & \psi_n(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \psi_{n-2}(3-4t), \\ \frac{3}{4} \leq t \leq 1: \quad \varphi_n(t) &= 1 - \frac{1}{2} \psi_{n-1}(4t-3), & \psi_n(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \varphi_{n-1}(4t-3). \end{aligned} \right\} (29)$$

Ze wzorów tych wynika, że będziemy mieli (dla $n > 1$):

$$\left. \begin{aligned} \text{Dla} \quad \varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t) &= \psi_{n+1}(t) - \psi_n(t) = \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{4}: \quad \frac{1}{2} [\psi_n(1-4t) - \psi_{n-1}(1-4t)], & -\frac{1}{2} [\varphi_n(1-4t) - \varphi_{n-1}(1-4t)], \\ \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}: \quad \frac{1}{2} [\varphi_n(4t-1) - \varphi_{n-1}(4t-1)], & \frac{1}{2} [\psi_n(4t-1) - \psi_{n-1}(4t-1)], \\ \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}: \quad \frac{1}{2} [\varphi_n(3-4t) - \varphi_{n-1}(3-4t)], & \frac{1}{2} [\psi_n(3-4t) - \psi_{n-1}(3-4t)], \\ \frac{3}{4} \leq t \leq 1: \quad \frac{1}{2} [\psi_n(4t-3) - \psi_{n-1}(4t-3)], & -\frac{1}{2} [\varphi_n(4t-3) - \varphi_{n-1}(4t-3)]. \end{aligned} \right\} (30)$$

Ponieważ krzywe C_n nie wychodzą oczywiście poza kwadrat K , więc dla $0 \leq t \leq 1$ każda z funkcji $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t)$ jest nieujemna oraz ≤ 1 , skąd:

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \leq 1, \quad \text{oraz} \quad |\psi_2(t) - \psi_1(t)| \leq 1. \quad (31)$$

Założmy, że mamy przy pewnem $n > 1$:

$$\left. \begin{aligned} |\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| &\leq \frac{1}{2^{n-2}}, \\ \text{oraz} \quad |\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t)| &\leq \frac{1}{2^{n-2}}, \end{aligned} \right\} \text{dla } 0 \leq t \leq 1; \quad (32)$$

— jest to, w myśl (31), prawdziwe dla $n=2$. Wzory (30) dowodzą, że będzie też

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

oraz

$$|\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

w każdym z czterech przedziałów $(0, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, 1)$, a zatem i w całym przedziale $(0, 1)$. Wynika stąd, przez indukcję, że nierówności (32) zachodzą przy wszelkiem $n > 1$.

Wobec (32) mamy przy wszelkich naturalnych k , dla $n > 1$:

$$\begin{aligned}
 | \varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t) | &= | \varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t) + \varphi_{n+1}(t) - \varphi_{n+2}(t) + \dots \\
 + \varphi_{n+k-1}(t) - \varphi_{n+k}(t) | &\leq | \varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t) | + | \varphi_{n+1}(t) - \varphi_{n+2}(t) | + \dots \\
 + | \varphi_{n+k-1}(t) - \varphi_{n+k}(t) | &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{n+k-2}} < \frac{1}{2^{n-2}},
 \end{aligned}$$

czyli

$$\left. \begin{aligned}
 | \varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t) | &< \frac{1}{2^{n-2}} \\
 | \psi_n(t) - \psi_{n+k}(t) | &< \frac{1}{2^{n-2}}
 \end{aligned} \right\} \text{ dla } 0 \leq t \leq 1 \quad (33)$$

Nierówności (33) dowodzą, że ciągi funkcji ciągłych $\varphi_n(t)$ i $\psi_n(t)$ są zbieżne jednostajnie w całym przedziale $(0, 1)$. Położmy:

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t), \\
 \psi(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t),
 \end{aligned} \right\} \text{ dla } 0 \leq t \leq 1, \quad (34)$$

— będą to więc funkcje ciągłe w całym przedziale $(0, 1)$, wyznaczone w zupełności przez funkcje początkowe $\varphi_1(t)$ i $\psi_1(t)$.

Powiadamy, że funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ nie zależą od obioru funkcji $\varphi_1(t)$ i $\psi_1(t)$, byleby to były funkcje ograniczone.

W samej rzeczy, niech $\bar{\varphi}_n(t)$ i $\bar{\psi}_n(t)$ będą dwa ciągi funkcji, określonych dla $n > 1$ wzorami, które otrzymamy, zastępując we wzorach (29) φ przez $\bar{\varphi}$, zaś ψ przez $\bar{\psi}$, i założmy nadto że funkcje $\bar{\varphi}_1(t)$ i $\bar{\psi}_1(t)$ są dla $0 \leq t \leq 1$ ograniczone. Możemy więc napisać:

$$\left. \begin{aligned}
 | \bar{\varphi}_1(t) - \varphi(t) | &\leq M, \\
 | \bar{\psi}_1(t) - \psi(t) | &\leq M,
 \end{aligned} \right\} \text{ dla } 0 \leq t \leq 1, \quad (35)$$

gdzie M oznacza liczbę, niezależną od t .

Opierając się na tych nierównościach, mogliśmy wyprowadzić nierówności

$$\left. \begin{aligned}
 | \bar{\varphi}_n(t) - \varphi_n(t) | &\leq \frac{M}{2^{n-2}} \\
 | \bar{\psi}_n(t) - \psi_n(t) | &\leq \frac{M}{2^{n-2}}
 \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1 \quad (36)$$

w sposób analogiczny do tego, w jaki otrzymaliśmy nierówności (32) z nierówności (31) (przyczem wzory (30) należałoby oczywiście zastąpić przez

wzory: $\bar{\varphi}_n(t) - \varphi_n(t) = \frac{1}{2} [\bar{\psi}_n(1-4t) - \psi_n(1-4t)]$, dla $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ i t. p.)

Z nierówności (36) wynika, wobec (34):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n(t) = \varphi(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\psi}_n(t) = \psi(t),$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Zupełnie taksamo jak przy wywodzie krzywej Peano w rozdziale I-ym, mogliśmy udowodnić, że krzywa ciągła U , określona przez równania

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \varphi(t), \\
 y &= \psi(t),
 \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1 \quad (37)$$

wypełnia kwadrat K .

Ze sposobu otrzymywania krzywych C_n wynika drogą łatwej indukcji, że krzywa C_n ($n > 1$) przechodzi przez środek każdego z 4^{n-2} kwadratów,

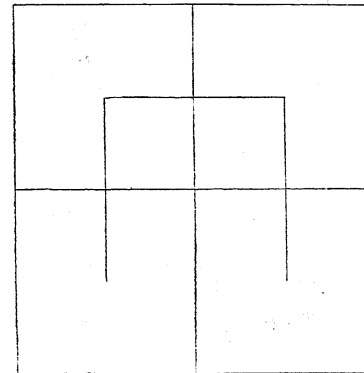


Fig. 6.

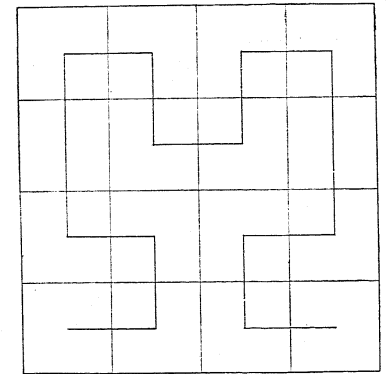


Fig. 7.

na które podzielimy kwadrat K . Łącząc środki 4^{n-2} kwadratów, kolejno przebiegane przez krzywą C_n ($n > 2$), otrzymamy łamaną L_n , wpisaną w C_n . L_3, L_4, L_5, L_6 i L_7 przedstawione są na fig. 6—10.

Hilbert określa właśnie swą krzywą jako granicę łamanych L_n ¹⁾. Pod względem krotności punkty krzywej Hilberta są czworaki: zwykłe, np.

¹⁾ D. Hilbert: „Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück“. *Mathematische Annalen* Bd. 98 (1891), p. 459 — 460. Toż samo w przekładzie polskim: *Prace mat.-fiz.* T. 5 (1894), str. 13 i 14.

punkt $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, podwójne, np. punkt $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, potrójne, np. środek kwadratu K , oraz poczwórne, np. punkt $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Godnem uwagi jest, że Hilbert

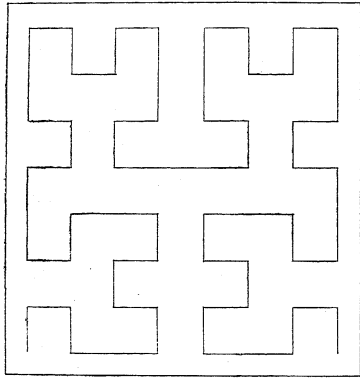


Fig. 8.

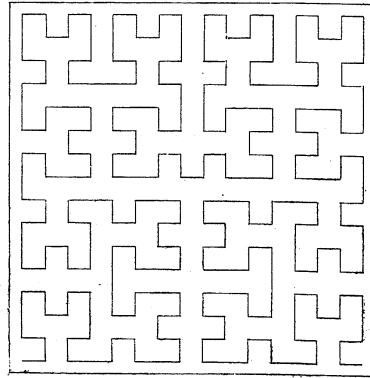


Fig. 9.

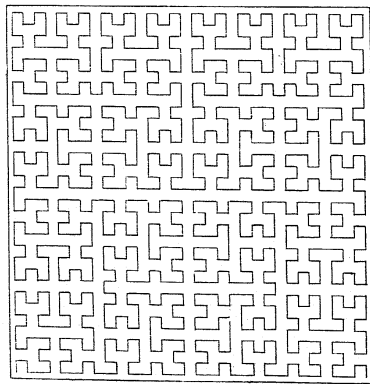


Fig. 10.

przeoczył istnienie punktów potrójnych. Jakoż czytamy u niego: „Tak znalezione odwzorowanie jest jednoznaczne i ciągłe i odwrotnie każdemu punktowi kwadratu odpowiadają jeden, dwa lub cztery punkty linii“. Ten sam

błąd powtarza Picard¹⁾: „Remarquons qu' à un point A du carré correspondent un, deux ou quatre points a “.

Możnaby z łatwością udowodnić, że przez środek kwadratu K krzywa C , określona równaniami (37), przechodzi dla $t = \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}$. Mnogość punktów potrójnych krzywej Hilberta jest wszędziegęsta: możnaby dowieść przez łatwą indukcję, że środek każdego z 4^n kwadratów, na które dzielimy K , jest jej punktem potrójnym.

Krzywa Hilberta nie jest zamknięta, możnaby jednak dowieść, że krzywa, określona przez równania

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad \text{dla } \frac{1}{16} \leq t \leq \frac{9}{16},$$

gdzie funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są określone wzorami (34), jest zamknięta i wypełnia prostokąt o wierzchołkach $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ (por. fig. 10).

Z łamanej Hilberta L_n otrzymamy wielobok Moore'a²⁾ W_n , jeżeli odrzucimy jej dolną połowę i zastąpimy ją linią symetryczną względem górnej połowy (a później całą figurę obrócimy o 90°). Różnica między krzywą Hilberta a krzywą Moore'a (granica wieloboków W_n) nie jest więc zasadnicza.

ROZDZIAŁ III.

Nowa krzywa, wypełniająca kwadrat.

Niech C_1 oznacza dowolną daną krzywą ciągłą, przebiegającą w trójkącie T o wierzchołkach

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1).$$

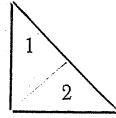
od punktu $(0, 1)$ do punktu $(1, 0)$.

Podzielmy trójkąt T na dwa podobne mu trójkąty: 1 i 2 (tabl. V). W trójkącie 1 umieścimy krzywą c_1 , podobną krzywej C_1 i zajmującą względem trójkąta 1 położenie podobne do tego, jakie zajmuje krzywa C_1 względem trójkąta T . W trójkącie 2 umieścimy krzywą c_2 , symetryczną względem krzywej c_1 (jeżeli zaś oś symetrii przyjmijemy wspólny bok trójkątów 1 i 2).

¹⁾ É. Picard: *Traité d'Analyse*, T. I (2-e éd.). Paris 1901, p. 24.

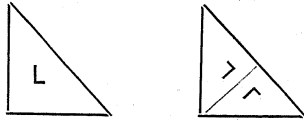
²⁾ Trans. Amer. Math. Soc. vol. I, l. c. Wieloboki Moore'a W_3 , W_4 , i W_5 podaje też Young: *The theory of sets of points*. Cambridge 1906, p. 169.

Łatwo widzieć, że krzywe c_1 i c_2 utworzą jedną krzywą ciągłą C_2 , przebiegającą w trójkącie T od punktu $(0, 1)$ do punktu $(1, 0)$.



Tabl. V.

Sposób otrzymania krzywej C_2 z krzywej C_1 przedstawia schematycznie tabl. VI.



Tabl. VI.

Z krzywą C_2 postąpimy podobnie jak z krzywą C_1 , tworząc nową krzywą C_3 i t.d. Ze sposobu tworzenia krzywych C_n wynika z łatwością, że jeżeli

$$\begin{aligned} x &= \varphi_n(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ y &= \psi_n(t), \end{aligned}$$

są równania krzywej C_n , to jako równania krzywej C_{n+1} przyjąć możemy równania

$$\begin{aligned} x &= \varphi_{n+1}(t) & 0 \leq t \leq 1, \\ y &= \psi_{n+1}(t) \end{aligned}$$

gdzie dla

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2}: \varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \varphi_n(1-2t) - \frac{1}{2} \psi_n(1-2t),$$

$$\psi_{n+1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varphi_n(1-2t) - \frac{1}{2} \psi_n(1-2t),$$

zaś dla

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 1: \varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varphi_n(2t-1) - \frac{1}{2} \psi_n(2t-1),$$

$$\psi_{n+1}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \varphi_n(2t-1) - \frac{1}{2} \psi_n(2t-1).$$

Możnaby dowieść, że ciągi funkcji ciągłych $\varphi_n(t)$ i $\psi_n(t)$ są zbieżne w przedziale $(0, 1)$ jednostajnie, a więc zmierzają odpowiednio do pewnych funkcji ciągłych $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ i że krzywa ciągła C , określona przez równania

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ y &= \psi(t), \end{aligned}$$

wypełnia trójkąt T . (Dowód zbieżności ciągów $\varphi_n(t)$ i $\psi_n(t)$ najłatwiej można przeprowadzić, biorąc pod uwagę jeszcze równania, wyrażające funkcje

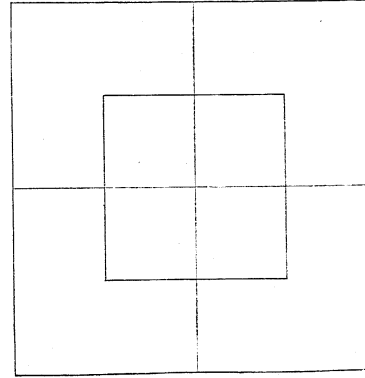


Fig. 11.

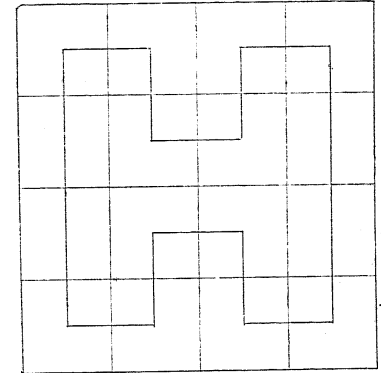


Fig. 12.

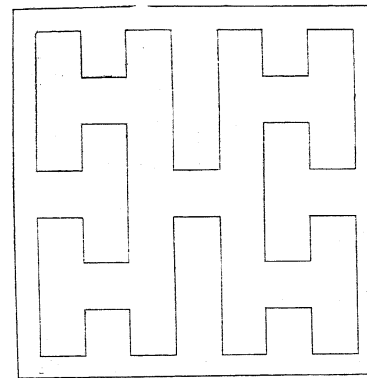


Fig. 13.

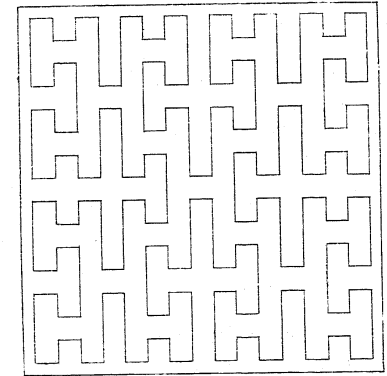


Fig. 14.

$\varphi_{n+2}(t)$ i $\psi_{n+2}(t)$ przez funkcje $\varphi_n(t)$ i $\psi_n(t)$ i rozumując dalej jak w rozdziale II-gim. Szczegółowe wykończenie tego dowodu, nie przedstawiające zresztą żadnych trudności, pozostawiamy czytelnikowi.

Aby otrzymać krzywą Γ , wypełniającą kwadrat, wystarczyłoby do krzywej C dostawić jej symetryczną względem przeciwprostokątnej trójkąta T i połączyć wspólne końce obu krzywych.

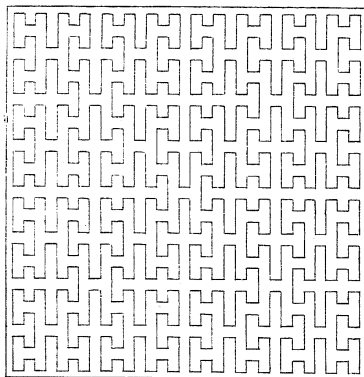


Fig. 15.

Krzywą Γ można też uważać jako granicę ciągu wieloboków, którego pierwsze cztery wyrazy przedstawiają fig. 11—15. Sposób tworzenia kolejnych wieloboków tego ciągu jest nader prosty i nie wymaga bliższego wyjaśnienia.

Zauważymy wreszcie, że krzywą Γ można określić zapomocą nader prostych równań funkcyjnych, jak tego dowiodłem w osobnej pracy¹⁾.

ROZDZIAŁ IV.

Krzywa, wypełniająca sześcian.

Inną całkiem metodą, niż rozpatrzone dotychczas, otrzymał krzywą, wypełniającą kwadrat Lebesgue²⁾. Metodę jego zastosujemy w tym rozdziale dla otrzymania krzywej ciągłej, wypełniającej sześcian.

¹⁾ Sur une nouvelle courbe continue qui remplit toute une aire plane. Biuletyn Akademii Krakowskiej 1912, str. 462—478.

²⁾ H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration. Paris 1904, p. 44. Por. też: Journ. de Math. (6), 1 (1905), p. 210.

Niech t oznacza daną liczbę przedziału $(0, 1)$. Rozróżnimy dwa przypadki:

A). Liczba t daje się przedstawić w postaci

$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots,$$

gdzie każde a_n przedstawia jedną z liczb 0 lub 2 (t. zn. że liczba t daje się rozwinąć na ułamek trójkowy skończony lub nieskończony, w którym żadna cyfra nie jest jednością. Łatwo widzieć, że takie rozwinięcie jest conajwyżej jedno)¹⁾.

Położmy w tym przypadku:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \frac{a_7}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n-2}}{2^n} + \dots \right)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_5}{2^2} + \frac{a_8}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n-1}}{2^n} + \dots \right)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_3}{2} + \frac{a_6}{2^2} + \frac{a_9}{2^3} + \dots + \frac{a_{3n}}{2^n} + \dots \right).$$

B). Przypadek A nie zachodzi. Oznaczmy przez a_p pierwszą cyfrę rozwinięcia trójkowego liczby t , będącą jednością. (Możnaby z łatwością dowieść, że jeżeli liczba t daje dwa rozwinięcia trójkowe, z których każde zawiera cyfrę 1, to liczba p nie zależy od tego, które z tych rozwinięć wybieremy).

Położmy dalej:

$$t_0 = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{1}{3^p},$$

$$t_1 = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{2}{3^p}.$$

Dla liczb t_0 i t_1 zachodzi przypadek A, gdyż możemy napisać:

$$t_0 = \frac{a_2}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{0}{3^p} + \frac{2}{3^{p+1}} + \frac{2}{3^{p+2}} + \dots,$$

$$t_1 = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{2}{3^p} + \frac{0}{3^{p+1}} + \frac{0}{3^{p+2}} + \dots;$$

¹⁾ Na zbiór wszystkich takich liczb (przedstawiający przykład zbioru doskonałego wszędziegęstego) zwrócił uwagę pierwszy G. Cantor: zob. Mathemat. Annalen Bd. 21, p. 590, jako też Acta Mathematica T. 4, p. 386.

funkcje φ , ψ i θ będą więc oznaczone w zupełności zarówno dla t_0 jak i dla t_1 , w myśl umowy A.

Kładziemy teraz:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + 3^p(t-t_0)[\varphi(t_1) - \varphi(t_0)],$$

$$\psi(t) = \psi(t_0) + 3^p(t-t_0)[\psi(t_1) - \psi(t_0)],$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + 3^p(t-t_0)[\theta(t_1) - \theta(t_0)].$$

Powyższe warunki (A i B) określają więc w zupełności każdą z funkcji $\varphi(t)$, $\psi(t)$ i $\theta(t)$ dla $0 \leq t \leq 1$. Dowód, że funkcje te są ciągłe, możnaby dalej przeprowadzić taksamo jak to robi Lebesgue.

Łatwo widzieć, że krzywa ciągła C , określona przez równania:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \theta(t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1 \quad (38)$$

wypełnia sześcian. W samej rzeczy, niech x , y , z będą dowolne dane liczby nieujemne ≤ 1 . Rozwińmy każdą z nich na ułamek dwójkowy:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \dots,$$

$$y = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2^2} + \frac{\beta_3}{2^3} + \dots,$$

$$z = \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2^2} + \frac{\gamma_3}{2^3} + \dots$$

i połączmy:

$$t = \frac{2\alpha_1}{3} + \frac{2\beta_1}{3^2} + \frac{2\gamma_1}{3^3} + \dots + \frac{2\alpha_n}{3^{3n-2}} + \frac{2\beta_n}{3^{3n-1}} + \frac{2\gamma_n}{3^{3n}} + \dots$$

W myśl umowy A wnosimy natychmiast, że będzie

$$\varphi(t) = x, \quad \psi(t) = y, \quad \theta(t) = z,$$

co dowodzi, że punkt (x, y, z) leży na krzywej C .

Krzywa ciągła płaska, określona przez równania

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1 \quad (39)$$

gdzie funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ mają to samo znaczenie, co we wzorach (38), posiada, jak łatwo widzieć, tę ciekawą własność, że przechodzi nieprzeliczalną mnogość razy przez każdy punkt kwadratu K .

Jeszcze ciekawszą własność posiada krzywa przestrzenna Γ , określona przez równania:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1.$$

Jest to oczywiście krzywa ciągła, a przytem bez punktów wielokrotnych. (W samej rzeczy, różnym wartościom na t odpowiadają, w myśl (40) zawsze różne wartości na z , a więc różne punkty krzywej). Moglibyśmy też powiedzieć, że krzywa Γ przedstawia jedno-jednoznacznie i ciągłe odwzorowanie odcinka.

Rzut Γ_1 krzywej Γ na płaszczyznę XY przedstawia krzywą, określoną przez równania (39), a więc wypełnia kwadrat (i to w ten sposób, że każdy punkt kwadratu K jest rzutem nieprzeliczalnej mnogości punktów krzywej Γ).

Rzut Γ_2 krzywej Γ na płaszczyznę XZ jest krzywą, określoną przez równania:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 1,$$

— jest to więc krzywa ciągła bez punktów wielokrotnych (łuk krzywej Jordana), a przytem, jak łatwo widzieć, każdy punkt krzywej Γ_2 jest rzutem jednego tylko punktu krzywej Γ . Podobną własność posiada też rzut Γ_3 krzywej Γ na płaszczyznę YZ .

A więc: Jeżeli spojrzymy na krzywą Γ w kierunku osi OZ , to zobaczymy kwadrat, którego każdy punkt będzie nam zasłaniał nieprzeliczalną mnogość punktów krzywej Γ ; jeżeli zaś spojrzymy na krzywą Γ w kierunku osi OX (lub osi OY), to zobaczymy krzywą ciągłą bez punktów wielokrotnych, przyczem będziemy widzieli wszystkie punkty krzywej Γ .

Sądząc zatem po rzucie Γ_2 skłonnymi byłibyśmy zbiór punktów Γ_2 uznać jako linię, sądząc zaś po rzucie Γ_1 — jako powierzchnię lub bryłę. Można sobie już stąd zdać sprawę, jak wielkie trudności napotykały przy definicyi powierzchni.

Zauważymy, że możnaby z łatwością zbudować taką krzywą ciągłą przestrzenną bez punktów wielokrotnych, której rzut na każdą z trzech płaszczyzn XY , XZ , YZ wypełnia kwadrat.

Funkcye $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ określiliśmy tylko dla przedziału $(0, 1)$; położmy jeszcze:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(t) = \varphi(0) \\ \psi(t) = \psi(0) \end{array} \right\} \text{ dla } t < 0, \text{ oraz } \left. \begin{array}{l} \varphi(t) = \varphi(1) \\ \psi(t) = \psi(1) \end{array} \right\} \text{ dla } t > 1.$$

Będziemy więc mieli funkcje ciągłe $\varphi(t)$, $\psi(t)$, określone dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej.

Położmy:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \varphi(x + y + z) + x, \\ \eta = \psi(x + y + z) + y, \\ \zeta = x + y + z. \end{array} \right\} (40)$$

Powiadam, że wzory (40) przedstawiają takie jedno-jednoznaczne i ciągłe odwzorowanie przestrzeni, przy którym pewien skończony odcinek linii prostej przechodzi na krzywą, której rzut wypełnia kwadrat.

Udowodnimy przedewszystkiem, że odwzorowanie nasze jest jedno-jednoznaczne. Wystarczy tu okazać, że dla każdego danego układu (ξ, η, ζ) równania (40) posiadają jedno i tylko jedno rozwiązanie względem x, y, z ¹⁾.

Jakoż, wstawiając wartość na sumę $x + y + z$, wyznaczoną z ostatniego z równań (40) do pierwszych dwóch, znajdujemy:

$$\xi = \varphi(\zeta) + x, \quad \eta = \psi(\zeta) + y,$$

skąd

$$\xi + \eta + z = \varphi(\zeta) + \psi(\zeta) + x + y + z = \varphi(\zeta) + \psi(\zeta) + \zeta$$

i przeto:

$$\left. \begin{array}{l} x = \xi - \varphi(\zeta) \\ y = \eta - \psi(\zeta) \\ z = \zeta - \xi - \eta + \varphi(\zeta) + \psi(\zeta) \end{array} \right\} (41)$$

Jeżeli więc równania (40) są co do x, y, z rozwiązalne, to rozwiązanie jest jedyne i wyraża się wzorami (41). Z drugiej strony, przez bezpośrednie podstawienie do wzorów (40) z największą łatwością sprawdzamy, że wyznaczając przy danych ξ, η, ζ współrzędne x, y, z ze wzorów (41), otrzymamy rozwiązanie układu równań (40). Ze wzorów (40) i (41) wynika też bezpośrednio ciągłość naszego odwzorowania.

Wzory (40) wskazują, że odcinek osi OZ , określony przez warunki:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

przechodzi przy naszym odwzorowaniu na krzywą, określoną przez równania:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \varphi(z), \\ \eta = \psi(z), \\ \zeta = \theta(z), \end{array} \right\} 0 \leq z \leq 1.$$

Jest to oczywiście krzywa Γ , badana wyżej.

Tak więc własność, że rzut danej krzywej wypełnia pole, nie jest niezmiennikiem Analysis Situs.

¹⁾ Porówn. mój komunikat: O pewnym odwzorowaniu ciąglem, nieróżniczkowalnym. Sprawozd. z pos. Tow. Nauk. Warsz. 1912, str. 354.