icm©

W końcu niech mi będzie wolno złożyć na tem miejscu najszczersze podziękowanie P. prof. Sommerfeldowi za inicyatywę i serdeczne poparcie w każdym kierunku oraz P. prof. Smoluchowskiemu za cenne wskazówki.

Monachium w kwietniu 1912.

ALFRED ROSENBLATT.

Postępy Teoryi powierzchni algebraicznych.

Referat przedstawiony na XI Zjeździe lekarzy i przyrodników polskich w Krakowie w lipcu 1911.

(Les progrès de la Théorie des surfaces algébriques. Mémoire présenté au XI Congrès des médécins et naturalistes polonais en juillet 1911 à Cracovie).

WSTĘP.

Przedstawiając referat o postępach Teoryi powierzchni algebraicznych Sekcyi Nauk ścisłych XI Zjazdu lekarzy i przyrodników polskich, miałem na celu zaznajomienie polskiego ogółu matematycznego z działem Geometryi, który się w ostatnich latach dzięki znakomitym badaniom matematyków francuskich i włoskich tak świetnie rozwinął, że nazwać go można jedną z najpiękniejszych zdobyczy Nauk matematycznych lat ostatnich.

Jeżeli mimo to, że Teorya powierzchni algebraicznych musi posiadać urok niepospolity dla każdego, kto się z nią bliżej obznajmi, dotychczas posiada bardzo niewielu pracowników, nawet we Włoszech, gdzie się prawie wyłącznie w ostatnich latach rozwija, tego szukać należy z jednej strony w tem, że zrozumienie prac tej Teoryi wymaga znajomości szeregu działów Geometryi, któremi również dopiero stosunkowo niedawno się zajęto i to również prawie wyłącznie we Włoszech, z drugiej strony w tem, że metody stworzone przez tych kilku matematyków, którzy zbudowali Geometryę na powierzchniach algebraicznych, nie zostały dotąd wyłożone w żadnym podręczniku, ani nie przedstawione w żadnym artykule encyklopedycznym. Wielkie dzieło Teoryi powierzchni algebraicznych Picarda przedstawia rozwój badań kierunku

icm©

funkcyjno-teoretycznego, niewiele miejsca poświęcając badaniom geometrycznym matematyków włoskich.

Zadaniem niniejszego referatu jest podanie historycznego rozwoju Teoryi powierzchni algebraicznych i literatury tego działu, mogące ułatwić pracę czytelnikowi, pragnącemu zająć się tą Teoryą, po obznajmieniu się z teoryami algebraicznemi, geometrycznemi i funkcyjno-teoretycznemi krzywych algebraicznych i układów krzywych algebraicznych na płaszczyznie, których poznanie niezmiernie ułatwiają artykuły Encyklopedyi matematycznej.

Niepodobna było omówić wszystkich badań nad rozmaitemi klasami powierzchni algebraicznych. Mam nadzieję, że będę mógł uzupełnić referat w tym kierunku, uzupełniając zarazem spis prac Teoryi powierzchni algebraicznych.

Nareszcie chciałbym na tem miejscu podziękować wszystkim kolegom fachowym, którzy przysłaniem prac swych ułatwili mi niezmiernie zadanie.

Kraków.

Literatura.

Spis niniejszy prac z Teoryi powierzchni algebraicznych obejmuje prace, odnoszące się do ogólnej Teoryi tych powierzchni. Nie obejmuje prac, odnoszących się do rzutowych (i metrycznych) własności powierzchni algebraicznych różnych rzędów. Nie obejmuje również tak zwanej Topologii powierzchni algebraicznych. Dalej obejmuje spis niniejszy prace, odnoszące się do Teoryi funkcyj algebraicznych dwóch zmiennych niezależnych. Z prac, odnoszących się do Teoryj krzywych algebraicznych: funkcyjno-teoretycznej, algebraicznej i geometrycznej, jakoteż z prac, odnoszących się do tych samych teoryj dla utworów algebraicznych o więcej aniżeli dwóch wymiarach, podane są tylko te, w których albo traktowana jest również i Teorya powierzchni algebraicznych, albo które stoją w bezpośrednim związku z tą Teoryą.

Skrócone nazwiska czasopism:

M. A.	Mathematische Annalen.
A. M.	Acta Mathematica.
C. R.	Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.
B. B.	Berichte der Berliner Akademie der Wissenschaften.
G. N.	Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.
Ann. M.	Annali di Matematica pura ed applicata.
Erl. B.	Erlanger Sitzungsberichte.
R. P.	Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
J. L.	Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville.
J. f. M.	Journal für die reine und angewandte Mathematik.
A. E. N.	Annales de l'École Normale Supérieure.
B. S. M.	Bulletin de la Société Mathématique de France.
M. T.	Memorie della Reale Accademia di Torino.
A. T.	Atti della Reale Accademia di Toriuo.
R. L.	Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei.
M. S.	Memorie della Società Italiana delle Scienze.
R. B.	Rendiconti della Reale Accademia di Bologna.
A. F. T.	Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
R. I. L.	Rendiconti del Reale Istituto Lombardo.
A. V.	Atti del Reale Istituto Veneto.
A. C. M.	Atti del IV. Congresso Internazionale dei Matematici.
C. P. T.	Cambridge Philosophical Transactions.
T. A. M.	Transactions of the American Mathematical Society.
G. B.	Giornale di Battaglini.
B. A. B.	Bulletin de l'Académie Royale de Belgique.
J. M. V.	Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
Am. J.	American Journal of Mathematics.

U. Amaldi.

„Determinazione delle superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi". R. L. Ser. 5. T. 11. 1902.

„Sullo sviluppo della Geometria in Italia". Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze. V. Riunione. 1912.

G. Bagnera e M. de Franchis.

„Sopra le superficie algebriche, che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri". R. L. Ser. 5. T. 16. 1907.

„Le superficie algebriche, le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche". M. S. S. 3. T. 14. 1908.

„Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro". R. P. T. 30. 1910.

A. Berry.

„On certain quintic surfaces, which admit of integrals of the first kind of total differentials". C. P. T. T. 19.

T. Bonnesen.

„Sur les séries linéaires triplement infinies de courbes algébriques sur une surface algébrique" Kjöbenhavn Oversight. 1906.

A. Bottari.

„Sulla razionalità dei piani multipli $(x, y, \sqrt[n]{F(x, y)})$. G. B. 1903. T. 41.

icm©

M. Bottaso.

„I caratteri d'un piano multiplo ciclico, la cui curva di diramazione è irriducibile e generale nel suo ordine". A. T. T. 44. 1909.

„Alcune singolarità elementari d'un piano multiplo ciclico, la cui curva di diramazione è irriducibile". A. T. T. 44. 1909.

A. Brill und M. Noether.

„Ueber algebraische Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie". M. A. T. 7. 1873.

A. Cayley.

„On the deficiency of certain surfaces". M. A. T. 3. 1871.

G. Castelnuovo.

„Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie". 2 Noty. R. I. L. Ser. 2. T. 24. 1891. (C. 1).

„Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane". M. T. Ser. 2. T. 42. 1891 (C. 2).

„Sulle superficie algebriche, le cui sezioni piane sono curve iperellittiche". R. P. T. 4. 1890. (C. 3).

„Massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere". Ann. M. Ser. 2. T. 18. (C. 4).

„Sulle superficie algebriche, le cui sezioni sono curve di genere 3. A. T. T. 25. (C. 5). 1890.

„Sulla linearità delle involuzioni più volte infinite, appartenenti ad una curva algebrica". A. T. T. 28. 1893 (C. 6).

„Sulla razionalità delle involuzioni piane". R. L. Ser. 5. T. 2. 1893 (C. 7).

„Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti". R. P. T. 7. 1893 (C. 8).

„Sulle superficie algebriche, che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili". R. L. 1894. Ser. 5. T. 3 (C. 9).

„Sulla razionalità delle involuzioni piane". M. A. T. 44. 1894 (C. 10).

„Sulle superficie algebriche, le cui sezioni piane sono curve ellittiche". R. L. Ser. 5. T. 3. 1894 (C. 11).

„Sulle superficie algebriche, che contengono una rete di curve iperellittiche. R. L. Ser. 5. T. 3. 1894 (C. 12)

„Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica". M. S. T. 10. 1896 (C. 13).

„Sulle superficie di genere zero". M. S. T. 10. 1896 (C. 14).

„Sul genere lineare di una superficie". R. L. Ser. 5. T. 6. 1897 (C. 15).

„Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie". Ann. M. Ser. 2. T. 25. 1897 (C. 16).

„Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo". R. P. T. 20. 1905 (C. 17).

„Sur les intégrales de différentielles totales, appartenant à une surface irrégulière". C. R. T. 140. 1905 (C. 18).

„Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare". 3 Noty. R. L. Ser. 5. T. 14. 1905 (C. 19).

„Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica". R. L. Ser. 5. T. 15. 1906 (C. 20).

G. Castelnuovo e F. Enriques.

„Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles mêmes". C. R. T. 120. 1895 (C. E. 1).

„Sur quelques résultats récents dans la théorie des surfaces algébriques". M. A. T. 48 (C. E. 2).

„Sur une classe de surfaces algébriques". C. R. T. 130. 1900 (C. E. 3).

„Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi". R. P. T. 14. 1900 (C. E. 4).

„Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche". Ann. M. S. 3. T. 6. 1901 (C. E. 5).

„Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique". A. E. N. Ser. 3. T. 22. 1906 (C. E. 6).

A. Clebsch.

„Sur les surfaces algébriques". C. R. 1868.

„Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung Abel'scher Functionen". M. A. T. 3. 1870.

A. Commessatti.

„Sui piani tripli ciclici irregolari". R. P. T. 31. 1911.

F. Enriques.

„Le superficie con infinite transformazioni proiettive in sèstesse. Atti del Reale Istituto Veneto". T. 4. Ser. 7. 1893 (E.).

„Ricerche di geometria sulle superficie algebriche". M. T. T. 44. 1893 (E. 1).

„Una questione sulla linearità". R. L. Ser. 5. T. 3. 1893 (E. 2).

„Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica". A. T. T. 29. 1894 (E. 3).

„Sulle superficie algebriche, le sui sezioni piane sono curve iperellittiche". R. L. Ser. 5. T. 3. 1893 (E. 4).

„Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche". M. S. Ser. 3. T. 10. 1896 (E. 5).

„Sui piani doppi di genere uno". M. S. S. 3. T. 10. 1896 (E. 6).

„Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche". R. L. Ser. 5. T. 5. 1896 (E. 7).

„Un osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche". R. P. T. 10. 1896 (E. 8).

icm©

„Le superficie algebriche di genere lineare“ $p^{(1)}=2$. R. L. Ser. 5. 1897 (E. 9).

„Sulle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)}=3$. R. L. Ser. 5. T. 6. 1897 (E. 10).

„Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)}=1$“. R. L. Ser. 5. T. 7. 1898 (E. 11).

„Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere 2 di curve razionali“. R. L. Ser. 5. T. 7. 1898 (E. 12).

„Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali“. R. L. Ser. 5. T. 7. (E. 13).

„Sulla irrazionalità, da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica $f(xyz)=0$ con funzioni razionali di 2 parametri“. M. A. T. 49. 1897. (E. 14).

„Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare“. R. P. T. 13. (E. 15).

„Sopra le superficie algebriche, che contengono un fascio di curve razionali“. M. A. T. 52. 1899 (E. 16).

„Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche“. A. T. T. 37. 1901 (E. 17).

„Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales des différentielles totales de 1-re espèce“. A. F. T. Ser. 2. T. 3. 1901 (E. 18).

„Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari“. R. B. (E. 19).

„Sur les surfaces algébriques de genre zéro“. C. R. T. 140. 1905 (E. 20).

„Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero“. R. P. T. 20. 1905 (E. 21).

„Sulle superficie algebriche, che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se“. R. P. T. 20. 1905 (E. 22).

„Sur les surfaces algébriques irrégulières“. C. R. T. 140. 1905 (E. 23).

„Sulle superficie, che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali“. R. L. Ser. 5. T. 15. 1906 (E. 24).

„Sopra le superficie algebriche di bigenere uno“. M. S. Ser. 3. T. 14. 1907 (E. 25).

„Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)}=1$“. R. B. 1907 (E. 26).

„Sui moduli delle superficie algebriche“. R. L. Ser. 5. T. 17. 1908 (E. 27).

„Un osservazione relativa alle superficie di bigenere 1“. R. B. 1908 (E. 28).

„Le superficie di genere uno“. R. B. 1908 (E. 29).

„Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche“. R. L. Ser. 5. T. 21. 1912 (E. 30).

„Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes“. C. R. T. 154. 1912 (E. 31).

F. Enriques e G. Castelnuovo (vide G. Castelnuovo e F. Enriques).

F. Enriques e F. Severi.

„Intorno alle superficie iperellittiche“. R. L. Ser. 5. T. 17. 1907 (E. S. 2).

„Intorno alle superficie iperellittiche irregolari“. R. L. Ser. 6. T. 17. 1908. (E. S. 2).

„Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques“. A. M. T. 32. 1909 i T. 33. 1910 (E. S. 3).

G. Fano.

„Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in se stesse“. R. L. Ser. 5. T. 4. 1895 (F. 1).

„Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in se“. R. P. T. 10. 1896 (F. 2).

„Sopra alcune superficie del 4-o ordine rappresentabili sul piano doppio“. R. L. Ser. 2. T. 39. 1906 (F. 3).

„Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno e loro casi particolari. R. P. 1910 (F. 4)

M. de Franchis.

„Sulle corrispondenze algebriche fra due curve“. R. L. Ser. 5. T. 12. 1903.

„Sulle varietà delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica“. R. P. 17. 1903.

„Sulle superficie che contengono un fascio irrazionale di curve“. R. P. T. 20. 1905.

„Sugl' integrali di Picard relativi ad una superficie doppia“. R. P. T. 20. 1905.

M. de Franchis e G. Bagnera (Vide G. Bagnera e M. de Franchis).

R. Garnier.

„Sur les surfaces du quatrième ordre qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles“. C. R. T. 149. 1909.

L. Godeaux.

„Sur les surfaces qui représentent les couples de points d'une courbe hyperelliptique“. B. A. B. 1909.

„Sur les transformations des surfaces algébriques laissant invariant un système continu de courbes“. R. L. Ser. 5. T. 21. 1912.

G. B. Guccia.

„Sulle superficie algebriche, le cui sezioni piane sono unicursali“. R. P. T. 1. 1887.

G. Humbert.

„Théorèmes concernant une classe de surfaces algébriques“. R. P. T. 3. 1889.

„Sur une classe de surfaces algébriques“. R. P. T. 4. 1890.

„Sur une classe de surfaces à génératrices rectilignes“. C. R. T. 116. 1893.

„Sur la théorie des surfaces unicursales“. M. A. T. 45. 1894.

„Sur les surfaces de Kummer elliptiques". Am. J. T. 16.

„Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques". C. R. T. 1893.

„Théorie générale des surfaces hyperelliptiques". J. L. Ser. 4. T. 9. 1893.

„Sur la décomposition des fonctions θ en facteurs". C. R. T. 1897.

„Sur les fonctions abéliennes singulières". C. R. T. 1898.

„Sur les fonctions abéliennes singulières". J. L. Ser. 5. T. 5. 1899.

„Sur les fonctions abéliennes singulières". J. L. Ser. 5. T. 5. 1900.

„Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques". J. L. 1894.

J. Hutchinson.

„On some birational transformations of the Kummer surface into itself". Bulletin of the American Math. Soc. 1901.

H. W. E. Jung.

„Zur Theorie der algebraischen Flächen". J. M. V. T. 19. 1910.

„Ueber den Doppelkurvendivisor einer algebraischen Fläche". J. M. V. T. 19. 1910.

„Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche". J. f. M. T. 138. 1910.

„Ueber das numerische Geschlecht einer algebraischen Fläche". Mitteilungen der mathem. Gesellschaft in Hamburg. T. 5. 1911.

S. Kantor.

„Sur les surfaces qui possèdent une série non linéaire de courbes rationnelles". C. R. T. 131. 1910.

H. Lacaze.

„Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques". A. F. T. Ser. 2. T. 3. 1901.

B. Levi.

„Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche". Ann. M. Ser. 2. T. 26, 1897.

„Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche". A. T. T. 33. 1897.

A. Maroni.

„Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi". A. T. T. 38. 1903.

E. H. Moore.

„Algebraic surfaces of which every plane section is unicursal in the light of n-dimensional geometry". Am. J. T. 10.

M. Noether.

„Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer komplexer Variabeln". G. N. 1869 (N. 1).

„Ueber die auf Ebenen eindeutig abbildbaren Flächen". G. N. 1870 (N. 2).

„Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen". M. A. T. 2. (N. 3).

„Über die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen". M. A. T. 3 (N. 4).

„Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen". M. A. T. 3. (N. 5).

„Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde". Zweiter Aufsatz. M. A. T. 8. 1874 (N. 6).

„Sulle curve multiple di superficie algebriche". Ann. M. Ser. 2. T. 5 (N. 7).

„Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques". C. R. 1886 (N. 8).

„Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen". Erl. B. 1878 (N. 9).

„Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke erster Gattung". Erl. B. 1886 (N. 10).

„Ueber die totalen algebraichen Differentialausdrücke erster Gattung. M. A. T. 29 (N. 11).

„Zur Theorie der algebraischen Raumkurven". B. B. 1883 (N. 12).

„Zur Theorie der algebraischen Raumkurven". J. f. M. T. 93. 1883 (N. 13).

„Anzahl der Moduln einer Klasse algebraischer Flächen". B. B. 1888 (N. 14).

„Ueber eine Fläche 6-er Ordnung vom Flächengeschlecht —1". M. A. T. 21 (N. 15).

„Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbarem Doppelebenen". M. A. T. 33 (N. 16).

P. Painlevé

„Sur les transformations rationnelles des surfaces et sur une classe d'équations différentielles". C. R. T. 110. 1890 (Pa. 1).

„Sur les surfaces algébriques qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles". C. R. T. 121. 1895 (Pa. 2).

„Sur les transformations simplement rationnelles des surfaces algébriques". C. R. T. 110. 1890 (Pa. 3).

„Sur les transformations biuniformes des surfaces algébriques". C. R. T. 122. 1896 (Pa. 4).

„Leçons sur la théorie des équations différentielles", professées à Stockholm. Paris 1897 (Pa. 5).

„Sur les surfaces qui admettent un groupe infini discontinu de transformations birationnelles". C. R. T. 126. 1898 (Pa. 6).

„Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition". A. M. T. 27 (Pa. 7).

A. Pensa.

„Sul' influenza di alcune singolarità di superficie sul' genere numerico e sul' bigenere P con applicazione alla determinazione di superficie razionali di quinto ordine". Mondovi. Vescovile. 1900 (Pa. 8).

icm©

É. Picard.

„Sur une classe de surfaces algébriques". B. S. M. 1878 (Pi. 1).

„Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales. J. f. M. T. 100 (Pi. 2).

„Sur les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de 2 paramètres". C. R. T. 92. 1881. (Pi. 3).

„Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espece". C. R. T. 99. 1884 (Pi. 4).

„Sur les intégrales de différentielles totales et sur une classe de surfaces algébriques. C. R. T. 99. 1884 (Pi. 5).

„Sur les intégrales de différentielles totales. C. R. T. 100. 1885 (Pi. 6).

„Sur les intégrales de différentielles totales de 2-e espèce". C R. T. 101. 1885 (Pi. 7).

„Sur les intégrales de différentielles totales algebriques de première espèce". J. L. Ser. 4. T. 1. 1885 (Pi. 8).

„Sur les intégrales de différentielles totales de 2-e espèce". C. R. T. 102. 1886 (Pi. 9).

„Sur les périodes des intégrales doubles". C. R. T. 102. 1886 (Pi. 10).

„Sur le calcul des périodes des intégrales doubles". C. R. T. 102. 1886 (Pi. 11).

„Sur la transformation des surfaces algébriques et sur une classe d'équations différentielles". C. R. T. 103. 1886 (Pi. 12).

„Sur les surfaces algébriques susceptibles d'une double infinité de transformations birationnelles". C. R. T. 103. 1886 (Pi. 13).

„Sur la transformation des surfaces algébriques en elles mêmes et sur un nombre fondamental dans la théorie des surfaces". C. R. T. 103. 1886 (Pi. 14).

„Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables". J. L. Sér. 4. T. 5. 1889 (Pi. 16).

„Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce". J. L. Sér. 4. T. 2. 1886 (Pi. 17).

„Sur un nombre invariant dans la théorie des surfaces algébriques". C. R. T. 116. 1893 (Pi. 18).

„Sur deux nombres invariants dans la théorie des surfaces algébriques". C. R. T. 119. 1894 (Pi. 19).

„Sur la théorie des surfaces et des groupes algébriques". C. R. T. 120. 1894 (Pi. 20).

„Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques". R. P. T. 9 (Pi. 21).

„Sur la théorie des surfaces algébriques. Revue générale des Sciences pures et appliquées". 1894 (Pi. 22).

„Sur la théorie des surfaces au point de vue de la géométrie de situation et sur les intégrales de différentielles totales". C. R. T. 124. 1897 (Pi. 23).

„Sur deux invariants nouveaux da la théorie générale des surfaces algébriques". C. R. T. 122. 1896 (Pi. 24).

„Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la géométrie de situation et sur les intégrales des différentielles totales". C. R. T. 125. 1897 (Pi. 25).

„Sur les intégrales doubles de seconde espèce". C. R. T. 125. 1897 (Pi. 26).

„Quelques remarques relatives aux périodes des intégrales doubles et aux cycles à deux dimensions dans les surfaces algébriques". C. R. T. 126. 1898 (Pi. 27).

„Sur les systèmes linéaires de lignes tracées sur une surface algébrique". R. P. T. 113. 1899 (Pi. 28).

„Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres". B. S. M. T. 28. 1900 (Pi. 29).

„Sur les intégrales de différentielles totales de troisème espèce dans la théorie des surfaces algébriques". A. E. N. Sér. 3. T. 18. 1901 (Pi. 29).

„Sur le nombre des conditions exprimant qu'une intégrale double est de seconde espèce". A. E. N. Sér. 3. T. 19. 1902 (Pi. 30).

„Sur la transformation des surfaces algébriques". C. R. 1902 (Pi. 31).

„Sur quelques points fondamentaux dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables". A. M. T. 26 (Pi. 32).

„Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales". C. R. T. 137. 1903 (Pi. 33).

„Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables". A. E. N. Sér. 3. T. 19. 1902 (Pi. 34).

„Sur certaines surfaces dont toutes les intégrales de différentielles totales se ramènent a des combinaisons algébrico-logarithmiques". A. E. N. Sér. 3. T. 20. 1903 (Pi. 35).

„Sur les périodes des integrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce". A. E. N. Sér. 3. T. 20. 1903 (Pi. 36).

„Sur les périodes d' une intégrale double de fonction rationnelle". A. E. N. Sér. 3. T. 19. 1902 (Pi. 37).

„Sur un théorème général concernant les surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure a l'unité". C. R. T. 138. 1904 (Pi. 38).

„Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce". C. R. T. 138. 1904 (Pi. 39).

„Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce". A. E. N. Sér. 3. T. 21. 1905 (Pi. 40).

„Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité". C. R. T. 140. 1905 (Pi. 41).

„Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algébrique". C. R. T. 140. 1905 (Pi. 42).

„Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes". J. f. M. T. 129. 1905 (Pi. 43).

icm©

„Sur la dépendance entre les intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce d'une surface algébrique". C. R. T. 140. 1905 (Pi. 44).

„De l'influence des points multiples isolés sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce d'une surface algébrique". C. R. T. 147. 1908 (Pi. 45).

É. Picard et G. Simart.

„Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes". T. I. 1897, T. II. 1906. Paryż (P. S. I, P. S. II).

H. Poincaré.

„Sur les transformations des surfaces en elles mêmes". C. R. T. 103. 1886.

„Sur les résidus des intégrales doubles". C. R. T. 102. 1886.

„Sur les résidus des intégrales doubles". A. M. T. 9. 1886.

„Sur les périodes des intégrales doubles". C. R. T. 125. 1897.

„Sur la connexion des surfaces algébriques. C. R. T. 133. 1901.

„Sur les cycles des surfaces algébriques". J. L. 1902. Sér. 5. T. 8.

„Sur les périodes des intégrales doubles". J. L. 1906. Sér. 6. T. 2.

„Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques". C. R. T. 149. 1909.

„Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques": A. E. N. Sér. 3. T. 27. 1910.

„Sur les courbes tracées sur une surface algébrique". Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. T. 10. 1910.

L. Remy.

„Sur les transformations birationnelles des surfaces du quatrième ordre à points doubles isolés". C. R. T. 149. 1909.

„Sur la valeur de l'invariant ρ pour une classe de surfaces algébriques". C. R. T. 147. 1908.

„Sur les surfaces algébriques qui représentent les couples de points d'une courbe de genre trois". C. R. T. 147. 1908.

„Sur une classe de surfaces algébriques lieés aux fonctions abéliennes de genre trois". A. E. N. Sér. 3, T. 26. 1909.

„Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce d'une classe de surfaces algébriques". A. E. N. Sér. 3. T. 26. 1909.

„Sur certaines surfaces algebriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois". J. L. Sér. 6. T. 4. 1908.

„Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espece de certaines surfaces algébriques". C. R. T. 147. 1908.

„Sur une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre". B. S. M. T. 35. 1907.

C. Rosati.

„Un' osservazione sugl' inviluppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica", R. L. Ser. 5. T. 16. 1907.

„Intorno alla sovrabbondanza di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica". A. V. T. 69. 1909/10.

A. Rosenblatt.

„Sur les surfaces qui admettent une série discontinue de transformations birationnelles en elles mêmes". C. R. T. 153. 1911.

„Algebraische Flächen mit diskontinuirlich unendlich vielen birationellen Transformationen in sich". R. P. T. 33. 1912.

G. Scorzo.

„Le superficie a curve sezioni di genere 3". Ann. M. Ser. 3. T. 16. 1909.

„Le superficie a curve sezioni di genere 3". Ann. M. Ser. 3. T. 17. 1910.

C. Segre.

„Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine". A. T. T. 21. 1886.

„Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque". A. T. T. 22. 1887.

„Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques". M. A. T. 30. I partie. 1887.

„Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques". M. A. T. 33. II partie. 1889.

„Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche". A. T. T. 31. 1896.

„Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche". Ann. M. Ser. 2. T. 25. 1896.

„Relazione del Concorso Internazionale per la medaglia Guccia". R. P. T. 26 1908.

F. Severi.

„Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica". A. T. T. 37. 1902 (S. 1).

„Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie". M. T. Ser. 2. T. 54. 1903 (S. 2).

„Sulle superficie, che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica". A. T. T. 38. 1903 (S. 3).

„Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica". A. T. T. 39. 1904 (S. 4).

„Su alcune questioni di postulazione". R. P. T. 17. 1903 (S. 5).

„Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenenti ad una superficie". R. L. Ser. 5. T. 12. 1903 (S. 6).

„Sulle relazioni, che legano i caratteri invariantivi di due superficie". R. I. L. Ser. 2. T. 36. 1903 (S. 7).

„Sulle superficie algebriche, che posseggono integrali di 2-a specie". R. L. Ser. 5 T. 13. 1904 (S. 8).

„Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie". A. T. T. 40. 1905 (S. 9).

„Intorno alla construzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare". R. P. T. 20. 1905 (S. 10).

icm©

„Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2-a specie". M. A. T. 61. 1905 (S. 11).
„Sulla differenza tra i numeri degli integrali di Picard della 1-a, e della 2-a specie". A. T. T. 40. 1905 (S. 12).
„Sur la totalité des courbes algébriques tracées sur une surface algébrique". C. R. T. 140. 1905 (S. 13).
„Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques". C. R. T. 140. 1905 (S. 14).
„Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica". M. A. T. 62. 1906 (S. 15).
„Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica". R. I. Ser. 2. T. 38. 1905 (S. 16).
„Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche". Ann. M. Ser. 3. T. 12. 1905 (S. 17).
„Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl' integrali di Picard". R. P. T. 21. 1905 (S. 18).
„Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica". A. V. T. 65. 1906 (S. 19).
„Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie". R. L. Ser. 5. T. 17. 1908 (S. 20).
„La base minima pour la totalité des courbes algébriques tracées sur une surface algébrique". A. E. N. Sér. 3. T. 25. 1908 (S. 21).
„Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri di transformazioni birazionali". A. V. T. 68. 1908 (S. 22).
„Le superficie algebriche con curva canonica di ordine zero". A. V. T. 68. 1908 (S. 23).
„Un sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica". A. V. T. 68. 1908 (S. 24).
„Da alcuni recenti risultati nella teoria delle superficie algebriche". A. C. M. T. 2. 1909 (S. 25).
„Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica". R. P. T. 30. 1910 (S. 26).
„Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica o tra curve di una superficie". A. V. T. 70. 1910/11 (S. 27).
„Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique". C. R. T. 152. 1911 (S. 28).
„Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo. R. L. Ser. 5. T. 20. 1911 (S. 29).

F. Severi e F. Enriques (Vide F. Enriques e F. Severi).
G. Simart et È. Picard (Vide É. Picard et G. Simart).

R. Torelli.
„Intorno alla determinazione dei sistemi lineari di curve sopra le superficie rigate algebriche". R. I. L. Ser. 2. T. 36. 1903.
„Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica". A. T. T. 42. 1906/7.

G. Scorza.
„Le superficie a curve sezioni di genere 3". Ann. M. Ser. 3. T. 16. 1909.
„Le superficie a curve sezioni di genere 3". Ann. M. Ser. 3. T. 17. 1909.

V. Snyder.
Infinite discontinuous groups of birational transformations which leave certain surfaces invariant. T. A. M. 1910.

E. Traynard.
„Sur une surface hyperelliptique". C. R. T. 135. 1902.
„Sur une surface hyperelliptique". C. R. T. 140. 1905.
„Sur une surface hyperelliptique". C. R. T. 140. 1905.
„Sur une surface hyperelliptique du quatrième degré sur laquelle trente droites sont tracées". B. S. M. T. 38. 1910.

H. S. White.
„Linear systems of curves on algebraical surfaces". The Boston Colloquium. 1903.

H. G. Zeuthen.
„Etudes géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces, dont les points se correspondent un-à-un". M. A, T. 4.

ROZDZIAŁ I.

Pierwsze podstawowe prace ogólnej Teoryi powierzchni algebraicznych, w szczególności prace Noethera.

1. Wstęp.

Teorya ogólna powierzchni algebraicznych, która, po pokonaniu niepospolitych trudności, dopiero w ostatnich latach ubiegłych została zbudowana w głównych swych zarysach, sięga jednakże swemi początkami lat sześćdziesiątych ubiegłego stulecia. Zapoczątkowali ją Alfred Clebsch i Max Noether, z których pierwszy, jak wiadomo, rozwinął Teoryę krzywych algebraicznych, stworzoną przez Riemanna metodami przestępno-funkcyjnemi, po-

icm©

sługując się metodami swojego mistrza, drugi oparł tę teoryę na podstawach algebraiczno-geometrycznych.

2. Wprowadzenie pojęcia rodzaju powierzchni algebraicznej przez Clebscha.

Clebsch i Noether przystąpili prawie równocześnie do uogólnienia pojęć, metod i twierdzeń, odnoszących się do funkcyj algebraicznych jednej zmiennej niezależnej, dla funkcyj dwóch (i więcej) zmiennych algebraicznych, najprzód w kierunku funkcyjno-teoretycznych rozważań Riemanna. W Nocie z r. 1868-go, ogłoszonej w Spraw. Akademii Paryskiej (Lit.), wprowadza Clebsch pojęcie rodzaju powierzchni algebraicznej zupełnie analogicznie do pojęcia, wprowadzonego przez siebie do Teoryi krzywych algebraicznych rodzaju krzywej algebraicznej. Jest to liczba powierzchni algebraicznych liniowo od siebie niezależnych rzędu $n-4$, przechodzących przez krzywe podwójne i krzywe zwrotu danej powierzchni rzędu n ogólnej, t.j. posiadającej tylko osobliwości właściwe ogólnej powierzchni rzędu n lub powierzchni odwrotnej tej powierzchni. Clebsch wypowiada bez dowodu własność niezmienności tej liczby p względem przekształceń dwuwymiernych danej powierzchni.

3. Przekształcenia dwuwymierne powierzchni algebraicznych i utworów algebraicznych r-wymiarowych (>2). Badania Noethera.

Badania Clebscha, uwieńczone nagrodą Akademii Paryskiej, przerwała jego śmierć. Kontynuując je Noether (N 1, 2, 3, 5 i 8), bada własności przekształceń dwuwymiernych utworów algebraicznych o więcej aniżeli jednym wymiarze.

Niechaj powierzchnia o spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2, x_3, x_4

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

przechodzi przez przekształcenie dwuwymierne

$$\rho x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4), \tag{2}$$

$$\sigma y_i = \psi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2a}$$

na powierzchnię

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0. \tag{3}$$

Powierzchnie przekształcające w przekształceniu dwuwymiernem (2) mogą przechodzić wszystkie równocześnie przez pewne punkty położone na powierzchni (3). Jeżeli w punkcie P, położonym na powierzchni (3), znikają wszystkie funkcye φ_i i ich pochodne aż do rzędu $k-1$ włącznie, natenczas punktowi P na powierzchni odpowiada krzywa wymierna rzędu k na powierzchni (1), gdy punkt P jest zwyczajnym punktem powierzchni (3), krzywa zaś pewnego rodzaju większego lub równego 0, gdy punkt ów jest osobliwym na powierzchni (3). Przeprowadzając wszystkie powierzchnie, prze-

kształcające powierzchnię (3), przez krzywą wielokrotną powierzchni (3), otrzymujemy na powierzchni (1) krzywę pojedyńczą pewnego rodzaju. Możemy zatem za pomocą przekształceń dwuwymiernych powierzchni usuwać punkty wielokrotne i krzywe wielokrotne. Dla utworów algebraicznych o więcej niż dwóch wymiarach mają się rzeczy zupełnie podobnie.

Uważajmy teraz utwór algebraiczny o $r \geqq 2$ wymiarach, dany przez równanie jednorodne

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{r+2}) = 0. \tag{4}$$

Spółrzędne x_i można wyrazić jako funkcye algebraiczne r parametrów $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, t. j. jako funkcye wymierne $r+1$ parametrów, związanych równaniem algebraicznem nieprzywiedlnem. Utwórzmy dla utworu (4) wyrażenie następujące:

$$\frac{\Theta \sum \pm c_1 x_2 \frac{\partial x_3}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial x_{r+2}}{\partial \lambda_r}}{\sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}, \tag{5}$$

gdzie Θ jest funkcyą jednorodną rzędu $n-r-2$ zmiennych x; zaś c_i są stałe dowolne, od których widocznie wartość wyrażenia (5) zupełnie nie zależy. Wówczas możemy uważać całki r-krotne należące do utworu (4):

$$J = \int \frac{\Theta \sum \pm c_1 x_2 \frac{\partial x_3}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial x_{r+2}}{\partial \lambda_r}}{\sum c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}} \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_r. \tag{6}$$

Przedewszystkiem chodzi o warunki, przy których całki (6) są analogonami całek Abela pierwszego gatunku na krzywych algebraicznych, t. j. przy których całki te są wszędzie skończone na utworze (4). Pierwszym warunkiem jest by rząd funkcyj Θ był właśnie najwyżej $n-r-2$. Utwór algebraiczny (4) będzie w ogólności posiadał utwory wielokrotne niższych od niego wymiarów, na nim leżące. W założeniu, że te utwory wielokrotne osobliwe są najogólniejsze swojego rodzaju, otrzymuje Noether (N. 3) jako warunek konieczny i wystarczający skończoności całek (6), aby utwór μ-krotny wymiaru h mniejszego od r posiadała powierzchnia Θ jako utwór conajmniej $\mu-r+h$-krotny.

4. Przekształcenie całek (6); ich niezmienność względem przekształceń dwuwymiernych; rodzaj utworu algebraicznego (4).

Przekształćmy teraz utwór algebraiczny (4) za pomocą przekształcenia dwuwymiernego

icm©

$$\rho x_i = \varphi_i(y), \qquad \sigma y_i = \psi_i(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots r+2) \tag{7}$$

na utwór

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_{r+2}) = 0. \tag{8}$$

Otóż jeżeli całki (6) przekształcimy przy pomocy tego samego przekształcenia (7) na całki, należące do utworu przekształconego (8), natenczas okaże się najprzód, że całki przekształcone będzie można napisać w postaci

$$J' = \int \frac{\Theta' \sum \pm k_1 y_2 \frac{\partial y_3}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial y_{r+2}}{\partial \lambda_r}}{\sum k_i \frac{\partial F}{\partial y_i}} d\lambda_1 \ldots d\lambda_r, \tag{9}$$

gdzie Θ' jest funkcyą całkowitą zmiennych y. Zachowanie się tej funkcyi w utworach wielokrotnych, leżących na utworze (8), jest zupełnie analogiczne do zachowania się funkcyj Θ w utworach wielokrotnych utworu (4). A więc całki (6) wszędzie skończone na utworze (4) przechodzą na całki wszędzie skończone na utworze (8), zupełnie taksamo zbudowane i naodwrót. A więc liczba p liniowo niezależnych całek wszędzie skończonych jest niezmienna względem przekształceń dwuwymiernych, a równość dwóch liczb takich p, p', należących do dwóch utworów algebraicznych tych samych wymiarów, jest warunkiem koniecznym przekształcalności tych dwóch utworów na siebie.

5. Niezmienniki liczbowe względem przekształceń dwuwymiernych powierzchni algebraicznych.

Jak widzieliśmy, badania nad niezmiennością całek, należących do utworów algebraicznych, są zupełnie uogólnieniem metod Riemanna. Nieco później przystąpili geometrzy, a mianowicie H. G. Zeuthen (M. A. T. 4) i przedewszystkiem Noether (N. 6) do uogólnienia badań Clebscha nad krzywemi algebraicznemi do Teoryi powierzchni algebraicznych. Badania te były prowadzone w dwojakim kierunku.

W Teoryi krzywych algebraicznych mamy pewne związki liczbowe między liczbami charakterystycznemi krzywych, niezmienne względem przekształceń dwuwymiernych krzywych. Takiemi niezmiennemi wyrażeniami są dwa wyrażenia:

$$\frac{\omega}{2} - n + 1 \quad \text{i} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{1}{2}\sum i(i-1),$$

w których ω oznacza liczbę punktów rozgałęzienia, które posiada funkcya algebraiczna $s(z)$, określona równaniem $f(s, z) = 0$, n zaś oznacza rząd równania; suma w drugiem wyrażeniu ma być rozciągnięta na wszystkie punkty wielokrotne krzywej. Oba te wyrażenia dają rodzaj p-krzywej. Można

się więc starać o znalezienie wyrażeń analogicznych, zawierających liczby charakterystyczne powierzchni, niezmiennych względem przekształceń dwuwymiernych.

Aby otrzymać takie wyrażenia niezmienne, uważają Zeuthen (M, A. T. 4) i Noether (N. 6) stożki styczne do powierzchni, których wierzchołki albo leżą na tych powierzchniach, albo zewnątrz tych powierzchni. Otrzymują wówczas następujące wyrażenia niezmienne między liczbami charakterystycznemi powierzchni:

$$n' - 2a + 3n + \Sigma\mu = n_1' - 2a_1 + 3n_1 + \Sigma\mu_1, \tag{10}$$

$$c' - 12a + 24n + 3\Sigma\nu = c_1' - 12a_1' + 24n_1 + 3\Sigma\nu_1. \tag{11}$$

We wzorach tych oznaczają: n', a, n, c' klasę stożka opisanego z ogólnego punktu przestrzeni na powierzchni, jego rząd, rząd powierzchni i klasę powierzchni rozwijalnej, utworzonej przez płaszczyzny stateczne, styczne do danej powierzchni. Sumy $\Sigma\mu$, $\Sigma\nu$ są rozciągnięte na wielokrotności tych punktów fundamentalnych przekształceń dwuwymiernych, które są położone na powierzchni, względnie rozciągnięte są na liczby, oznaczające klasy stożków ściśle stycznych (oskulacyjnych) w tych punktach.

Takie same znaczenie mają z prawej strony wzorów (10)i (11) sumy wyrazów opatrzone wskaźnikami 1 dla powierzchni przekształconej. Przytem jeszcze dodać należy, że sumy $\Sigma\mu$, $\Sigma\mu_1$ mogą być też rozciągnięte na wszystkie te punkty wielokrotne, które nie są fundamentalnemi punktami przekształcenia, albo też na niektóre z nich; taksamo ma się rzecz odnośnie do sum $\Sigma\nu$, $\Sigma\nu_1$. W rzeczywistości zatem wzory (10), (11) są tylko o tyle zależne od samego obioru przekształcenia dwuwymiernego, że w sumach $\Sigma\mu$, $\Sigma\mu_1$ występują punkty zwyczajne powierzchni, będące punktami fundamentalnemi przekształcenia dwuwymiernego.

6. Powierzchnie dołączone danej powierzchni. Twierdzenie o reszcie.

W Teoryi krzywych algebraicznych, którą—jak powiedzieliśmy—rozwinęli Clebsch, Noether i inni, podstawową jest praca Brilla i Noethera (Lit.), w której autorowie badają układy liniowe grup punktów wyciętych na krzywej danej przez układy liniowe krzywych, zwane układami krzywych „dołączonych“ (adjungirte Kurven). Uogólniając to pojęcie krzywych dołączonych, wprowadza Noether (N. 6) pojęcie powierzchni dołączonych danej powierzchni algebraicznej. Należy przez to rozumieć powierzchnie algebraiczne dowolnego rzędu, przechodzące $j-1$ razy przez każdą krzywą j-krotną powierzchni danej.

Powierzchnie dołączone posiadają kapitalną własność, zwaną twierdzeniem o reszcie „Restsatz“, stanowiące analogon do własności, którą posiadają krzywe dołączone krzywej danej (Brill-Noether).

Niechaj powierzchnia dołączona wycina na powierzchni danej, oprócz krzywych wielokrotnych, dwie krzywe C i C_1. Uważajmy dalsze dwie powierzchnie dołączone dowolnych rzędów, z których niechaj pierwsza przechodzi przez krzywą C, wycinając na danej powierzchni oprócz tego drugą krzywą C', druga zaś powierzchnia dołączona niechaj przechodzi przez krzywą C_1, wycinając prócz tego drugą krzywą C_1': natenczas krzywe C' i C_1' też leżą na jednej i tej samej powierzchni dołączonej danej powierzchni. Krzywe C i C' tudzież krzywe C i C_1', nazywają się krzywemi rezydualnemi (resztowemi) jedna względem drugiej. Krzywe C_1 i C' nazywają się krzywemi korezydualnemi czyli spółresztowemi względem krzywej C; są one również korezydualne względem krzywej C_1'. Własność korezydualności nie zależy więc od specyalnego rezyduum; to właśnie stanowi istotę twierdzenia Noethera o reszcie.

Szczególnie ważnym jest specyalny rodzaj powierzchni dołączonych, które Noether nazywa powierzchniami dołączonemi φ. Są to powierzchnie dołączone rzędu $n-4$, które nadto (oprócz przez krzywe wielokrotne powierzchni) przechodzą przez punkty wielokrotne powierzchni, a mianowicie przechodzą przez każdy punkt k-krotny powierzchni $k-2$ razy.

Dalszem podstawowem pojęciem, wprowadzonem przez Noethera (N. 6), jest pojęcie powierzchni φ, dołączonych do krzywych płaskich lub krzywych przestrzennych. Niechaj krzywa C będzie częściowem lub zupełnem przecięciem dwóch powierzchni F_1 i F_2, mających prócz tego (ewentualnie) wspólne pewne krzywe C_i, i_1-krotne, względnie i_2-krotne, dla tych powierzchni. Niechaj prócz tego powierzchnie te mają ewentualnie wspólne pewne punkty P_j, j_1-krotne, względnie j_2-krotne. Powierzchniami φ dołączonemi do krzywej C nazywają się powierzchnie rzędu n_1+n_2-4, gdzie n_1 i n_2 są rzędy powierzchni F_1 i F_2, jeżeli powierzchnie te posiadają krzywe C_i jako i_1+i_2-1-krotne, punkty zaś P_j posiadają jako punkty osobliwe tego rodzaju, że przecinają każdą gałąź krzywej C, przechodzącą przez te punkty, j_1+j_2-2 razy, i jeżeli nareszcie przez każdy punkt styczności obu powierzchni F_1 i F_2 również przechodzą.

Powierzchnie φ dołączone do danej krzywej C posiadają następującą własność kapitalną. Serya grup punktów wyciętych przez te powierzchnie na krzywej C nie zależy od powierzchni F_1 i F_2 obranych, przechodzących przez krzywą C, albowiem jest to zupełna serya kanoniczna $2p-2$ (gdzie p jest rodzajem krzywej C).

7. Niezmienniki geometryczne przekształceń dwuwymiernych.

Powierzchnie φ dołączone do danej powierzchni rzędu $n-4$ posiadają ważną własność niezmienności względem przekształceń dwuwymiernych (2), przekształcających powierzchnię (1) na powierzchnię (3), a mianowicie

za pomocą przekształcenia

$$\rho x_i = \varphi_i(y)$$

wymiernego, które jednak zresztą nie potrzebuje być dwuwymiernem, przechodzą krzywe wycięte przez powierzchnie φ na powierzchni (1) na krzywe wycięte na powierzchni (3) przez powierzchnie φ_1, dołączone do powierzchni (3). A więc liczba powierzchni φ_1 liniowo niezależnych od siebie, dołączonych do powierzchni (3), równa się conajmniej liczbie liniowo niezależnych powierzchni φ; równa się zaś dokładnie tej liczbie, jeżeli przekształcenie jest dwuwymierne. Liczba ta, nazwana przez Noethera (N. 6) „rodzajem powierzchniowym" (Flächengeschlecht) powierzchni, jest właśnie liczbą p podwójnych całek liniowo niezależnych od siebie, należących do powierzchni algebraicznej (Zob. ustęp 3).

Równocześnie z rodzajem powierzchniowym występują teraz inne utwory geometryczne i charakteryzujące je liczby niezmienne, a mianowicie rodzaj krzywej ogólnej przecięcia powierzchni $f=0$ z powierzchnią „rodzaj krzywych" (Curvengeschlecht), którą to liczbę oznacza Noether przez $p^{(1)}$. Dalej drugą liczbą niezmienną jest liczba punktów ruchomych spotkania dwóch krzywych przecięć f z φ, którą oznacza Noether przez $p^{(2)}$.

Ostatnia liczba jest związana z liczbą $p^{(1)}$ ważną relacyą, którą łatwo otrzymać, zważając, że każdą powierzchnię

$$\varphi' \varphi'' = 0,$$

gdzie φ', φ'' są powierzchnie φ dołączone do powierzchni f, można uważać jako powierzchnię dołączoną krzywej, która jest przecięciem powierzchni f z φ (Ustęp 6). Stąd wynika natychmiast równość

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1. \tag{12}$$

Naturalnie równość ta wyraża tylko wtedy pewne twierdzenie geometryczne, gdy p jest większe niż 1; gdy $p=1$, twierdzeniu temu również można nadać znaczenie, albowiem krzywe przecięcia f z φ tworzą wtenczas pęk krzywych eliptycznych, nie przecinających się, więc można przyjąć $p^{(1)}=1$ i $p^{(2)}=0$.

Może zachodzić następująca okoliczność, o której w dalszym ciągu będzie mowa: mianowicie krzywe przekroju powierzchni f z powierzchnią φ rozpadają się na kilka krzywych ruchomych, a wówczas liczby $p^{(1)}$ i $p^{(2)}$ tracą bezpośrednie znaczenie.

8. Krzywe „wyróżnione" (ausgezeichnete Curven). Związki zachodzące między liczbami p i $p^{(1)}$.

Punktom fundamentalnym przekształcenia (2), pojedyńczym lub wielo-

icm©

krotnym, leżącym na powierzchni (1), odpowiadają na powierzchni (3) krzywe fundamentalne, przez które przechodzą wszystkie powierzchnie φ_1. W szczególności: punktom pojedyńczym na powierzchni pierwszej odpowiadają krzywe wymierne (w szczególności linie proste) wspólne powierzchniom φ_1, leżące na powierzchni (3). Jeżeli jednak będziemy uważali powierzchnię, otrzymaną za pomocą przekształcenia dwuwymiernego z powierzchni, posiadającej krzywe wspólne wszystkim powierzchniom φ_1, na której to powierzchni dwuwymiernie równoważnej poprzedniej krzywe te zostały przemienione na pojedyńcze punkty (przy założeniu, że działanie to jest możliwe, o czem w Rozdziale III będzie mowa), natenczas na powierzchni przekształconej mamy bezpośrednio dane liczby $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ i związki (12), o ile jednak nie zachodzi przypadek wyjątkowy, poprzednio omówiony.

Liczby p i $p^{(1)}$ czynią zadość bardzo ważnej nierówności (N. 6), którą otrzymamy, zważając że serya liniowa grup $p^{(1)}-1$ punktów, wycięta na jednej krzywej układu krzywych przecięć powierzchni f z powierzchniami φ przez wszystkie inne krzywe, jest specyalna i wymiaru $p-2$ (Brill i Noether, Lit.).

Ponieważ dla seryi specyalnej g_R^r grup punktów, leżącej na ogólnej krzywej, mamy nierówność (Brill i Noether l. c.):

$$R \geqq \frac{r(r+\pi-1)}{r+1}, \tag{13}$$

gdzie π jest rodzajem krzywej, więc wynika stąd nierówność

$$p^{(1)} \geqq (p-1)^2; \tag{14}$$

na specyalnych krzywych liczba $p^{(1)}$ może być mniejsza od liczby danej wzorem (14), w szczególności dla krzywych hypereliptycznych mamy:

$$p^{(1)} = 2p-3.$$

W tym ostatnim przypadku można na ogół przekształcić powierzchnię na powierzchnię rzędu n z punktem $n-2$-krotnym. Serya, wycięta przez krzywe przecięć powierzchni f i φ na jednej z tych krzywych, może być też złożona inwolucyą, a zachodzić to będzie zawsze w przypadku $p=3$, w którym mamy sieć (układ ∞^2 krzywych) na powierzchni. W tym przypadku mamy więc inwolucye ∞^2 grup punktów na powierzchni. Nareszcie mogą rozpadać się wszystkie krzywe przekroju powierzchni f z φ. W tym przypadku okazuje Noether, że krzywe te muszą być złożone z krzywych pęku linij krzywych, leżących na danej powierzchni. Jeżeli uważamy tylko przypadek, gdy ten pęk jest rodzaju zero, t. j. gdy jego krzywe uważane jako elementy utworu algebraicznego wymiaru 1, tworzą utwór rodzaju zero, krzywe przecięć f z φ złożone są z $p-1$ dowolnych krzywych pęku, a że $p^{(2)}=0$, więc $p^{(1)}=1$, mamy więc pęk krzywych eliptycznych. Powierzchnie te możemy przekształcić na powierzchnie rzędu n z prostą $n-3$-krotną.

9. Wzory „postulacyi" Noethera.

Problemat obliczenia liczby powierzchni dołączonych danej powierzchni, albo danej krzywej, jest specyalnym przypadkiem ogólnego problematu znalezienia liczby powierzchni danego rzędu, przechodzących przez dane krzywe algebraiczne. Każda krzywa, wspólna trzem powierzchniom algebraicznym, posiada pewną liczbę, którą Noether (N. 7) nazywa „równoważnikiem" („equivalenza") krzywej; jest to liczba punktów, którą z liczby przecięć trzech powierzchni krzywa ta absorbuje. Punkt wielokrotny, wspólny trzem powierzchniom, również absorbuje pewną liczbę punktów przecięcia tych powierzchni, posiada również pewien równoważnik. Jeżeli mamy pewną liczbę krzywych wielokrotnych i punktów wielokrotnych, przez które ewentualnie krzywe wielokrotne mogą przechodzić, istnieje pewna liczba, która jest całkowitym równoważnikiem sumy tych osobliwości i która może być równa albo różna (a mianowicie mniejsza) od sumy pojedyńczych równoważników.

„Postulacyą" krzywej wielokrotnej nazwał Cayley w swoich pracach liczbę warunków, jakie dana krzywa nakłada na powierzchnie danego rzędu, mające ją zawierać. Postulacya krzywej i-krotnej rzędu m, szczebla (rang) r, posiadającej k punktów podwójnych rzeczywistych a która jest przekrojem zupełnym dwóch powierzchni rzędów p, q stycznych ze sobą w k punktach, wynosi (N. 6) dla powierzchni F_n rzędu n:

$$N_i = \frac{i(i+1)}{2\,.\,3}\{3n-2i+5\}\,m - \frac{1}{2}\,\frac{i(i+1)(2i+1)}{2\,.\,3}\,(r+2k). \tag{15}$$

Gdy rząd n powierzchni F_n jest dostatecznie wysoki, mamy ten sam wzór (15) także i dla krzywej, która jest tylko częściowym przekrojem dwóch powierzchni. Postulacya punktu l-krotnego powierzchni i krzywych i-krotnych, przechodzących przez punkt l krotny j_i razy wynosi, gdy stożek k ściśle styczny w punkcie l-krotnym nie zawiera części wielokrotnych:

$$\frac{1}{6}\,l(l+1)(l+2) + \sum_i \frac{1}{6}\,i(i+1)\left\{(3n-2i+5)\,m_i - \frac{1}{2}\,(2i+1)\,r_i\right\}$$
$$-\sum_i \frac{1}{6}\,i(i+1)(3l-2i+2).$$

Otrzymujemy stąd na postulacyę powierzchni dołączonych rzędu $n-4$ powierzchni danej, a więc posiadających krzywą i-krotną powierzchni jako $i-1$-krotną, a punkt l-krotny jako $l-2$-krotny, wzór następujący:

icm©

$$\sum_i \frac{1}{6}\, i\,(i-1)\left\{(3n-2i+5)\, m_i - \frac{1}{2}\,(2i-1)\, r_i\right\}$$

$$-\sum_{i,\,l} \frac{1}{6}\, i\,(i-1)\,(3j-i-1)\, k_{ij} + \sum_l \frac{1}{6}\, l\,(l-1)\,(l-2) \tag{16}$$

$$-\sum_{i,\,l} \frac{1}{6}\, i\,(i-1)\,(3l-2i-2)\, j_{il}.$$

We wzorze tym liczby m_i, r_i oznaczają rzędy i szczeble krzywych i-krotnych powierzchni danej. Liczba spotkania dwóch krzywych i-krotnej i j-krotnej jest k_{ij}. Nareszcie liczba gałęzi, któremi krzywa i-krotna przechodzi przez punkt l-krotny, jest j_{il}. Wprowadzając klasę stożka ściśle stycznego w punkcie l-krotnym

$$\nu_l = l\,(l-1) - \sum i\,(i-1)\, j_{il},$$

otrzymamy zamiast dwóch ostatnich wyrazów wyrazy

$$\sum_l \frac{1}{6}\,(l-2)\,\nu_k - \sum_{i,\,l} \frac{1}{3}\, i\,(i-1)\,(l-i)\, j_{il}\,.$$

10. Związek między niezmiennikami liczbowemi ustępu 5 a niezmiennikami geometrycznemi ustępu 7.

Liczby p i $p^{(1)}$ możemy obliczyć zapomocą właśnie przytoczonych wzorów (16) Noethera, zakładając, że powierzchnia algebraiczna posiada tylko takie osobliwości, które w owych wzorach występują. Zakładając dalej, że na powierzchni niema krzywych „wyjątkowych", otrzymujemy na p i $p^{(1)}$ następujące wyrażenia

$$p = \frac{1}{6}\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) - \frac{1}{6}\sum_j j\,(j-1)\left\{(3n-2j-5)\, m_j\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\,(2j-1)\, r_j\right\} + \frac{1}{6}\sum_{j,\,j'} j\,(j-1)\,(3j'-j-1)\, s_{jj'} - \frac{1}{6}\sum_k (k-2)\,\nu_k \tag{17}$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{j,\,k} j\,(j-1)\,(k-j)\, h_{j,\,k}\,.$$

$$p^{(1)} = n\,(n-4)^2 + 1 - \sum_j (j-1)\,\{(3j-1)\, n - 2j\,(j+3)\}\, m_j$$

$$+\sum_j j\,(j-1)^2\, r_j + \sum_{j,\,j'} (j-1)\,\{(3j-1)\, j' - j\,(j+1)\}\, s_{jj'} \tag{18}$$

$$-\sum_k \{k + (k-3)\,\nu_k\} + \sum_{j,\,k} (j-1)\,(2j-1)\,(k-j)\, h_{j,\,k} \qquad (j < j').$$

Powierzchnia rzędu n posiada krzywe j-krotne C_j rzędów m_j, szczebla r_j, z punktami rzeczywistemi podwójnemi w liczbie s_{jj}; dwie krzywe C_j i $C_{j'}$ przecinają się w $s_{j,\,j'}$ punktach. Nadto powierzchnia posiada punkty k-krotne osobliwe P_k (oprócz owych punktów podwójnych), przez które przechodzą krzywe C_j $h_{j,\,k}$ razy. Punkty te nie posiadają zresztą innych osobliwych tworzących stożka oskulacyjnego, prócz stycznych do krzywych, przechodzących przez te punkty; ν_k jest klasą tych stożków ściśle stycznych.

Wzory powyższe (17) i (18) dają liczby p i $p^{(1)}$, poprzednio geometrycznie zdefiniowane, tylko wtedy, jeżeli wpływy pojedyńczych osobliwości powierzchni na wartości tych liczb są od siebie niezależne. Zobaczymy niebawem, że tak jednak często nie jest, a więc wzory (17) i (18) nie zawsze dają rzeczywiście liczby p i $p^{(1)}$.

Zwróćmy się teraz do niezmiennych wyrażeń liczbowych (10) i (11). Związki te zawsze wówczas zachodzą, gdy tylko osobliwości powierzchni są tego rodzaju, że wywody Noethera (N. 6) i Zeuthena (Lit.) do nich się stosują, a więc w przypadku ogólnych osobliwości danej powierzchni. Obliczmy wielkości c', a, n', występujące w tych wyrażeniach przy pomocy wzorów postulacyi Noethera (ustęp 9), natenczas znajdziemy związki następujące:

$$c' - 12a + 24n + 3\Sigma\nu = 24\,(p+1)\,, \tag{19}$$

$$n' - 2a + 3n + \Sigma\mu = 12\,(p+1) - (p^{(1)} - 1)\,, \tag{20}$$

w założeniu, że wzory (17) i (18) dają rzeczywiście liczby p i $p^{(1)}$. A więc wyrażenia niezmienne (10) i (11) i niezmiennie geometrycznie określone liczby p i $p^{(1)}$ stoją ze sobą w związkach (19) i (20), jeżeli wzory (17) i (18) są prawdziwe. Jeżeli jednak te wzory nie dają prawdziwych wartości liczb p i $p^{(1)}$, natenczas—mimo to—możemy wprowadzić dwie liczby całkowite, określone wzorami (17) i (18), π i $\pi^{(1)}$, i wtedy mamy cztery liczby niezmienne po dwie pary, a we wzorach (19) i (20) należy p i $p^{(1)}$ zastąpić przez π i $\pi^{(1)}$. Przypuśćmy teraz, że na powierzchni F istnieją krzywe wyjątkowe, przekształcone zwykłych punktów na f, wówczas zmienia się przy przekształceniu lewa strona równania (20), ale równocześnie zmienia się i prawa strona, bo liczba

icm©

$p_1^{(1)}$ powierzchni F będzie odmienna od liczby $p^{(1)}$. A mianowicie, jeżeli na F mamy pojedyńczą prostą wyjątkową, natenczas rodzaj $p^{(1)}$ będzie o 1 większy, niż odpowiada wzorowi (18), ale z drugiej strony lewa strona wzoru (20) też rośnie o 1.

11. Powierzchnie, dla których wzory liczbowe Noethera dają wartość ujemną na p.

Pierwszy przykład powierzchni, dla których wzory Noethera dają na p wartość ujemną, podał Cayley (Lit.). Uważajmy najprzód zwyczajny stożek rzędu n o δ tworzących podwójnych, o $\varkappa$ tworzących ostrzowych, wówczas wzory Noethera dają na p:

$$p = -\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \delta + \varkappa, \tag{21}$$

a więc na rodzaj otrzymujemy wartość, równą rodzajowi płaskiego przekroju stożka, wziętą ze znakiem przeciwnym.

Taksamo, uważając ogólną powierzchnię rozwijalną, której krzywa zwrotu jest rodzaju π, tudzież powierzchnię prostokreślną nierozwijalną, posiadającą tylko krzywą podwójną, której ogólny przekrój płaski jest rodzaju π, otrzymuje Cayley (l. c.).

$$p = -\pi,$$

i stąd przypuszcza: 1) że wszystkie powierzchnie prostokreślne posiadają rodzaj równy ujemnemu rodzajowi przekroju płaskiego; 2) że wszystkie powierzchnie, posiadające na p liczbę ujemną, dadzą się naodwrót przekształcić dwuwymiernie na powierzchnie prostokreślne, wymierne lub nie. Zobaczymy, że pierwsze przypuszczenie jest słuszne, ale drugie nie.

W każdym razie drugie przypuszczenie mogło się w owym czasie wydawać bardzo prawdopodobnem. Oto Noether (N. 15) w r. 1883 zbadał nader ciekawą powierzchnię rzędu 6-go. Powierzchnia ta posiada krzywą podwójną rzędu czwartego i rodzaju 1 i prostą podwójną, nie przecinającą tej krzywej, a więc wzór (17) daje bezpośrednio liczbę $p = -1$. Powierzchnia ta nie jest prostokreślna, ale daje się przekształcić dwuwymiernie na powierzchnię prostokreślną o przekroju rodzaju 1. Posiada ona pęk stożkowych, który (uważany jako utwór algebraiczny ∞^1) jest rodzaju 1, należy więc do klasy powierzchni, zbadanych przez Noethera (zob. ustęp 12). Noether okazuje istnienie na tych powierzchniach ∞^1 krzywych, przecinających każdą stożkową w jednym punkcie, z czego—jak zobaczymy—wynika własność podana powierzchni.

12. Powierzchnie posiadające pęk krzywych wymiernych.

Równocześnie z rozwijaniem ogólnej Teoryi powierzchni algebraicznych zwrócił się Noether (N. 5). do badania specyalnych klas powierzchni

w kierunku nowym, który się okazał bardzo doniosłym w dalszym rozwoju Teoryi.

Wychodząc z założenia, że dana powierzchnia posiada pęk krzywych wymiernych, a więc że istnieje pęk liniowy powierzchni algebraicznych, przecinających daną powierzchnię w jednej lub kilku krzywych algebraicznych wymiernych, zmieniających się ze zmianą powierzchni przecinającej, bada naturę danej powierzchni, a w szczególności jej rodzaj.

Jeżeli każda powierzchnia pęku przecina daną powierzchnię według jednej krzywej ruchomej wymiernej, natenczas zawsze można znaleść krzywą przecinającą każdą krzywą pęku krzywych wymiernych w jednym punkcie i odwzorować powierzchnię na płaszczyźnie. Jeżeli jednak liczba krzywych ruchomych przecięć danej powierzchni jedną powierzchnią jest większa od jedności, to w każdym razie można daną powierzchnię przekształcić na powierzchnię, mającą tę samą własność, ale której krzywe mają rząd o dwa mniejszy. A więc gdy powierzchnia jest rzędu nieparzystego, można ją odwzorować na powierzchni prostokreślnej. Pozostaje przypadek, gdy przez przekształcenie danej powierzchni otrzymuje się powierzchnię, na której pęk powierzchni wycina każda powierzchnia więcej, aniżeli jednę stożkową. I w tym ostatnim przypadku — jak to znacznie później okazał Enriques (E. 12, 13, 16), a co dla specyalnej powierzchni rzędu szóstego (porównaj ustęp 11) okazał już Noether — można odwzorować powierzchnię na powierzchni prostokreślnej.

13. Pogląd na epokę omówioną.

Widzieliśmy, że pierwszym początkiem Teoryi powierzchni algebraicznych jest uogólnienie dla nich pojęć geometrycznych, pojęć przestępnych i związków niezmiennych liczbowych Teoryi krzywych algebraicznych. Otrzymują się dwa rodzaje liczb całkowitych niezmiennych, jedne mające bezpośrednie znaczenie geometryczne, inne zdefiniowane za pomocą pewnych wzorów, w skład których wchodzą liczby charakterystyczne rzutowych własności powierzchni. Równocześnie pojawiają się pierwsze badania nad układami krzywych algebraicznych, leżącemi na powierzchniach, i własnościami powierzchni, związanemi z istnieniem tych układów.

Rozwój atoli tej nowej Teoryi doznaje wnet dłuższej przerwy. Jeżeli pominiemy prace, które—choć blizkie Teoryi powierzchni algebraicznych—jednak do niej bezpośrednio nie należą, możemy skonstatować, że po krótkiej i nader świetnej epoce początkowej rozwoju tej Teoryi, w której przedewszystkiem pierwsze miejsce zajmują badania Noethera, zapanował przez lat mniej więcej 10 zastój. Dopiero Picard w wielostronnej swej twórczej działalności matematycznej podjął około r. 1885 pracę przerwaną przez Noethera, wzbogacając podstawowemi rezultatami Teoryę powierzchni algebra-

icm©

icznych. Odtąd pierwszeństwo w Teoryi tej przechodzi z Niemiec do Francyi, a nieco później około 1890 r. do Włoch. Odtąd też dzielą się wyraźnie dwa kierunki badań: funkcyjno-teoretyczny, reprezentowany przedewszystkiem przez Picard'a, i geometryczny, który się rozwinął we Włoszech. Dopiero znacznie później po roku 1900 następuje, przez geometrów włoskich złączenie rezultatów otrzymanych na tych obu odmiennych drogach.

Przedstawiając rozwój Teoryi w porządku historycznym, najlepiej się tutaj nadającym, przystępujemy do omówienia prac Picard'a.

ROZDZIAŁ II.

Rozwój teoryi całek na powierzchniach algebraicznych. Prace Picarda.

1. Całki pojedyńcze na powierzchniach algebraicznych. Całki pojedyńcze pierwszego gatunku.

Uogólniając w odmiennym kierunku, aniżeli Clebsch i Noether, koncepcye Riemanna, wprowadza Picard całki pojedyńcze lub o różniczkach zupełnych, należące do powierzchni (Pi. 4, 5, 6, 7, 8, 9, P. S. I.). Uważajmy powierzchnię

$$f(x, y, z) = 0; \tag{1}$$

całki kształtu

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} A dx + B dy, \tag{2}$$

do niej należące, gdzie A, B są funkcye wymierne zmiennych x, y, z a (x_0, y_0, z_0) punktem stałym na powierzchni, nazywają się całkami pojedyńczemi o różniczkach zupełnych. Warunkiem całkowalności jest

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}. \tag{3}$$

Załóżmy, że całki (2) są na powierzchni wszędzie skończone, nazywając je całkami pierwszego gatunku, wówczas całki (2) można przedstawić w postaci

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{P dx + Q dy}{f'_z},$$

gdzie P, Q są wielomianami rzędu $m-2$ względem x, y, z i rzędu $m-3$ odpowiednio względem x, z i y, z.

Wprowadzając trzy nowe wielomiany

$$A = -Q, \qquad B = P, \qquad C = \frac{Q f'_x - P f'_y}{f'_z},$$

mamy tożsamościowo:

$$A f'_x + B f'_y + C f'_z \equiv (A'_x + A'_y + A'_z) f. \tag{4}$$

Tożsamość (4) możemy zastąpić dwiema innemi, zachodzącemi między czterema wielomianami θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 rzędów $m-3$:

$$\theta_1 f'_x + \theta_2 f_y + \theta_3 f'_z + \theta_4 f'_t \equiv 0, \tag{5}$$

$$\theta'_{1,x} + \theta'_{2,y} + \theta'_{3,z} + \theta'_{4,t} \equiv 0, \tag{5'}$$

w spółrzędnych jednorodnych.

Najogólniejsza powierzchnia danego rzędu nie posiada całek (2) wszędzie skończonych odmiennych od liczby stałej (por. Pi. 8, P. S. I.). Zgodnie z tem, nie można w ogólności znaleść czterech wielomianów θ_i, spełniających warunki (5), (5'), ani też trzech wielomianów, spełniających warunek (4).

Załóżmy teraz, że powierzchnia posiada tylko zwyczajne osobliwości: krzywą podwójną z punktami potrójnemi o trzech płaszczyznach stycznych od siebie odmiennych, do której to postaci (P. S. I.) dowolne powierzchnie dadzą się dwuwymiernie sprowadzić, i że można znaleść wielomiany rzędu $m-2$ względem x, y, z, zaś odpowiednio rzędu $m-3$ względem y, z; x, z; x, y.

Warunkiem koniecznym dla całek (2) jest, aby powierzchnie

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

każdą krzywą k-krotną powierzchni posiadały jako k—1-krotną. Jeżeli nadto każdy punkt p-krotny posiadają powierzchnie te jako p—1-krotny, natenczas całki (2) są wszędzie na powierzchni skończone.

2. Przykłady powierzchni, posiadających całki pojedyńcze i powierzchni, nie posiadających całek pojedyńczych.

Z poprzedniego wynika bezpośrednio, że powierzchnie wymierne, w szczególności więc powierzchnie rzędu 2-go i 3-go, z wyjątkiem stożków eliptycznych, nie posiadają całek kształtu (2).

Powierzchnie rzędu czwartego mogą posiadać najwyżej jedną całkę, taksamo powierzchnie rzędu piątego (P. S. I.). Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia tej całki na powierzchniach rzędu czwartego jest istnienie czterech funkcyj liniowych

icm©

$$\theta_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i t, \qquad a_1 + b_2 + c_3 + d_4 = 0,$$

spełniających tożsamość (5).

Uważajmy powierzchnię, przedstawiającą jedno-jednoznacznie pary punktów dwóch krzywych algebraicznych rodzajów p, p':

$$x = x(\alpha, \beta; \alpha', \beta'), \quad y = y(\alpha, \beta; \alpha', \beta'), \quad z = z(\alpha, \beta; \alpha', \beta'),$$

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad f'(\alpha', \beta') = 0.$$

Powierzchnia ta posiada $p + p'$ całek (2), liniowo niezależnych.

3. Całki pojedyńcze na powierzchniach hypereliptycznych.

Powierzchniami hypereliptycznemi Picarda nazywają się powierzchnie, pierwszy raz przez Picarda do nauki wprowadzone (Pi. 3, 8), których spółrzędne x, y, z wyrażają się jako funkcye poczwórnie peryodyczne dwóch parametrów u, v w ten sposób, że u, v są jednoznacznie określone przez x, y, z (jeżeli odwrócimy uwagę od peryodów). Powierzchnie te posiadają dokładnie dwie całki pojedyńcze pierwszego gatunku

$$\int du \quad \text{i} \quad \int dv$$

i dokładnie jednę całkę podwójną wszędzie skończoną na powierzchni (pierwszego gatunku):

$$\iint du\, dv,$$

t. j. rodzaj powierzchniowy tych powierzchni jest 1.

Warunkiem koniecznym i na ogół dostatecznym, aby powierzchnia rodzaju $p = 1$, posiadająca dwie całki pojedyńcze pierwszego gatunku, była hypereliptyczna, jest aby krzywa przecięcia jedynej powierzchni dołączonej rzędu $n-4$ do powierzchni danej albo wcale nie istniała, albo też była rodzaju 0, względnie składała się z krzywych rodzaju 0.

Jak późniejsze badania okazały (E. 22, por. Roz. V, ust. 3), nie muszą jednak powierzchnie rodzaju 1 o dwóch całkach pierwszego gatunku należeć do jednej z dwóch powyżej wymienionych kategoryj, lecz powierzchnia dołączona może na danej powierzchni wycinać krzywą rodzaju większego niż zero. Wówczas powierzchnie nie będą powierzchniami hypereliptycznemi Picarda. Powierzchnie hypereliptyczne Picarda najniższego rzędu są rzędu szóstego (por. ustęp 2). Natomiast mogą istnieć powierzchnie hypereliptyczne niższego rzędu niż sześć, jeżeli punktowi x, y, z na powierzchni odpowiada więcej, aniżeli jeden układ na u, v. Przykładem jest sławna powierzchnia rzędu 4 Kummera.

4. Cykle liniowe na powierzchniach algebraicznych.

Wiadomo, że każdy utwór (nie koniecznie algebraiczny) $m+1$ wymiarowy, zamknięty, położony w przestrzeni o $n \geqq m+1$ wymiarach posiada m liczb charakterystycznych koneksyj $p_1, p_2, \ldots, p_m$, zwanych liczbami Betti'ego (por. P. S. I.), dających liczbę cyklów od siebie różnych, niezależnych i posiadających odpowiednio 1, 2,... m wymiarów, położonych na danym utworze. Między liczbami koneksyj zachodzi związek kapitalny

$$p_i = p_m + 1 - i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

W szczególności: dla powierzchni algebraicznych mamy trzy rodzaje cyklów, które można nazwać cyklami liniowemi, cyklami powierzchniowemi i cyklami przestrzennemi. Mamy więc trzy liczby p_1, p_2, p_3, między któremi zachodzi związek:

$$p_1 = p_3.$$

Otóż ogólne powierzchnie algebraiczne posiadają (Pi. 6, P. S. I.) liczby $p_1 = p_3 = 1$. Każdy cykl liniowy na ogólnej powierzchni algebraicznej można zatem usunąć przez odkształcenie ciągłe, sprowadzając go do cyklu zerowego. Picard podał kilka dowodów tego podstawowego twierdzenia.

Uważajmy najprzód powierzchnię specyalną:

$$z^m = f(x, y). \tag{7}$$

Uważając krzywą

$$f(x, y) = 0,$$

jako określającą x w zależności od y, i nazywając x^0_i, x^0_k, tudzież x^0_l, x^0_m dwie dowolne grupy pierwiastków równania

$$f(x, y) = 0,$$

możemy w ogólnym przypadku znaleść pętlicę, wychodzącą z punktu y_0 i wracającą do tegoż punktu, przemieniającą obie pary pierwiastków na siebie. A że każdy cykl na powierzchni algebraicznej można przekształceniem ciągłem sprowadzić do cyklu położonego na kontinuum dwuwymiarowem

$$y = \text{const.},$$

zatem każdy cykl powierzchni (7) można sprowadzić do pewnego cyklu nieskończenie małego, otaczającego dwa nieskończenie blizkie pierwiastki równania $f(x, y_0) = 0$, gdzie y_0 jest nieskończenie blizkie punktowi rozgałęzienia, a ponieważ powierzchnia nie posiada punktów osobliwych, cykl ostatni daje się sprowadzić do cyklu zero. Ponieważ ogólna powierzchnia rzędu m-tego daje przekształceniem ciągłem się sprowadzić do powierzchni (7) o tej samej liczbie cyklów liniowych, więc dla ogólnych powierzchni algebraicznych wynika stąd $p_1 = 1$.

icm©

5. Całki pojedyńcze trzech gatunków na powierzchniach algebraicznych. Równanie różniczkowe Picarda klasy Fuchsa.

Prócz całek wszędzie skończonych, omówionych w poprzednich ustępach 1—3, wprowadza Picard całki dwóch dalszych gatunków. Całkami gatunków drugiego i trzeciego nazywają się całki (2), posiadające krzywe na powierzchniach, wzdłuż których całka staje się nieskończoną. Weźmy całkę pojedyńczą po cyklu nieskończenie małym otaczającym (na utworze czterowymiarowym) krzywę nieskończoności (dwuwymiarową w owej przestrzeni) w okolicy dowolnego jej punktu. Całka jest gatunku drugiego, jeżeli jej peryod wzdłuż cyklu równa się zeru (Pi. 7, 16, 17, P. S. I.), a krzywą nazywamy polarną.

Całka jest gatunku trzeciego, jeżeli peryod jest od zera odmienny, peryod nazywa się polarnym, a krzywa nieskończoności nazywa się logarytmiczną.

Widzieliśmy, że każdy cykl na powierzchni algebraicznej daje się przekształcić na cykl, położony całkowicie na kontinuum

$$y = \text{const.}$$

Otóż Picard w genialny sposób podjął badanie cykli na powierzchni Riemanna

$$f(x, \bar{y}, z) = 0 \tag{8}$$

($\bar{y}$ stałe), należącej do powierzchni algebraicznej (1). Całki Abela pierwszego i drugiego gatunku, należące do krzywej (8)

$$J = \int \frac{F(x, \bar{y}, z)\, dx}{f'_z}, \tag{9}$$

w których $\bar{y}$ jest parametrem, posiadają peryody, będące funkcyami parametru y. Otóż peryody te spełniają równanie różniczkowe liniowe regularne (klasy Fuchsa) rzędu najwyżej $2p$, gdzie p jest rodzajem krzywej (8). Równanie to różniczkowe odgrywa podstawową rolę w badaniach Picarda nad cyklami liniowemi.

Punktami krytycznemi równania Fuchsa są wartości $\bar{y}$, dla których płaszczyzna styczna powierzchni (1) równoległa jest do płaszczyzny x, z. Krzywa (8) zyskuje nowy punkt podwójny, a całka (9) peryod logarytmiczny, który jest funkcyą holomorficzną wielkości y, ale prócz tego równanie Fuchsa posiada teraz, w zamian za dwa utracone peryody cykliczne, holomorficzne, całkę nieholomorficzną, posiadającą punkt osobliwy logarytmiczny. W ogólnym przypadku równanie Fuchsa jest nieprzywiedlne, a więc można przejść z jednej całki do wszystkich innych, t. j. przez odkształcenie ciągłe, odpowiadające zmianie wartości $\bar{y}$, można od jednego peryodu całki (9) przejść do wszystkich innych w liczbie $2p$. Cykle równania (8) przechodzą wówczas na siebie, i z jednego cyklu można przekształceniem ciągłem otrzymać $2p$ cyklów. Stanowi to drugi dowód na to, że na powierzchni ogólnej mamy $p_1 = 1$.

Jeżeli $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ jest układem $2p$ peryodów całki Abela (9), natenczas peryody te przechodzą za pomocą podstawień grupy Fuchsa na peryody Ω_i takie, że mamy

$$\Omega_i = m^i_1 \omega_1 + \ldots + m^i_{2p} \omega_{2p}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

gdzie liczby m są całkowite. Jeżeli teraz $P_1, P_2, \ldots, P_{2p}$ są peryodami dowolnej całki o różniczkach zupełnych, należącemi do cyklów $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$, które dają peryody $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$, natenczas, ponieważ te cykle przechodzą na nowe cykle, dane przez wzory

$$m^i_1 C_1 + \ldots + m^i_{2p} C_{2p},$$

więc i peryody P_i przekształcają się przy pomocy tych wzorów, czyli że między peryodami mamy związki:

$$P_i = m^i_1 P_1 + \ldots + m^i_{2p} P_{2p} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p). \tag{10}$$

Mamy tyle układów $2p$ takich równań, ile grupa równania Fuchsa posiada podstawień j liniowych niezależnych.

W ogólności równania (10) będą spełnione tylko przez układ wartości

$$P_1 = \ldots = P_{2p} = 0, \tag{11}$$

co jest nowym dowodem na to, że na powierzchni ogólnej mamy $p_1 = 1$.

Jeżeli z równań (11) można $2p - r$ $(p \geqq 0)$ wielkości P obliczyć jako funkcye liniowe jednorodne r pozostałych, natenczas mamy

$$p_1 - 1 \leqq r. \tag{12}$$

Rozważaliśmy przypadek ogólny, gdy równanie Fuchsa jest nieprzywiedlne. Gdy równanie to jest przywiedlne (Pi. 16), natenczas istnieje liczba q, spełniająca nierówności $2p > q \geqq 1$, która jest dzielnikiem liczby $2p$, tak, że każda całka równania Fuchsa spełnia inne równanie nieprzywiedlne też klasy Fuchsa, ale rzędu q. Wówczas powierzchnia algebraiczna posiada $\frac{2p}{q}$ cyklów liniowych, nie dających się sprowadzić jeden do drugiego.

icm©

6. Wartość liczby p. Liczba całek pojedyńczych drugiego gatunku.

Uważając teraz $2p$ całek Abela (9) J_i pierwszego i drugiego gatunku, należących do krzywej (8), można znaleść $2p$ funkcyj wymiernych zmiennej $y\,a_i$, takich że peryody całki

$$\sum_{i=1}^{2p} a_i J_i$$

nie zależą od y.

Peryody tej całki są to właśnie liczby P_i czyniące zadość równaniom (10). Mamy więc r układów funkcyj a_i liniowo niezależnych. Peryody te nie pochodzą od cyklów nieskończenie małych krzywej (8). Przyjmując

$$R = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} a_i F_i}{f'_z}, \qquad S = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{i=1}^{m}\int_{x_0,\,z_i}^{x,\,z} R(x,\,y,\,z)\,dx,$$

gdzie $z_i\,(i=1,\,2\ldots m)$ są pierwiastki równania rzędu m o niewiadomej z

$$f(x_0,\,y,\,z)=0,$$

otrzymujemy całkę o różniczkach zupełnych

$$\int R\,dx + S\,dy, \tag{13}$$

nie posiadającą peryodów, pochodzących od cyklów nieskończenie małych, a więc całkę drugiego gatunku. A że (13) posiada r peryodów, więc stąd mamy równość:

$$p_1 - 1 = r. \tag{14}$$

Równocześnie widzimy, że liczba całek liniowo niezależnych pierwszego i drugiego gatunku nie jest mniejsza aniżeli r, ale ponieważ całka drugiego gatunku, nie posiadająca peryodów cyklicznych, jest funkcyą wymierną zmiennych $x,\,y,\,z$, więc liczba całek liniowo niezależnych pojedyńczych pierwszego i drugiego gatunku wynosi dokładnie p_1.

7. Kształt całek drugiego i trzeciego gatunku.

Przedewszystkiem gdy $p_1 = 1$, całki drugiego gatunku redukują się do funkcyj wymiernych, całki zaś trzeciego gatunku posiadają tylko peryody polarne.

Uważajmy całki drugiego gatunku. Mieliśmy już teoretyczny sposób znalezienia tych całek, szukając grupy równania Fuchsa odpowiadającego. Otrzymujemy układ równań (10), a stąd r całek.

Można stosować inną metodę. Uważajmy najprzód równanie

$$z^2 = f(x,\,y); \tag{15}$$

jego całki drugiego gatunku mają postać

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,\,y)}},$$

gdzie P, Q wyrażają się w ten sposób:

$$P = A_0 x^{m-2} + A_1 x^{m-3} + \ldots, \qquad Q = B_0 x^{m-1} + \ldots,$$

przyczem A i B są funkcye wymierne wielkości y. Spółczynniki A czynią zadość pewnemu układowi równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu. Spółczynniki B są funkcyami liniowemi wielkości A i ich pochodnych. Nareszcie trzeba wyrazić warunki, aby całka (11) nie posiadała peryodów logarytmicznych, co może zachodzić, gdy powierzchnia (15) ma punkty wielokrotne.

W przypadku ogólnym powierzchni (1) uważajmy $2p$ całek J_i drugiego gatunku, należących do krzywej (8). Poprzednio omówiona funkcya R jest funkcyą liniową jednorodną $2p$ funkcyj $A_i\,(i=1,\,2\ldots,\,2p)$ zmiennej y taką, że całka

$$\Sigma A_i J_i$$

posiada peryody niezależne od y. Poprzednio omówiona funkcya S jest funkcyą liniową funkcyj B wymiernych względem y. Na podstawie warunku całkowalności mamy związki między A i B, tak, że A dane są układem równań różniczkowych liniowych o $2p$ równaniach rzędu pierwszego o spółczynnikach wymiernych względem y, zaś B są funkcyami liniowemi wielkości A i jej pochodnych.

Co się tyczy całek trzeciego gatunku, to na powierzchniach o $p_1 > 1$ istnieją z pewnością całki takie, nie redukujące się do postaci

$$\Psi(x,\,y,\,z) + \Sigma A_i \log R_i(x,\,y,\,z), \tag{16}$$

gdzie funkcye Ψ i R są wymierne względem $x,\,y,\,z$. Dla $p_1 = 1$ Picard (P. S. I) sprawy istnienia takich całek nie rozstrzyga. Dopiero znacznie później Severi (Zob. Roz. IV, ustęp 6) okazał równocześnie, że dla $p_1 > 1$ istnieją całki trzeciego gatunku, nie będące sumą całek drugiego gatunku i wyrażeń (16), i że dla $p_1 > 1$ innych całek trzeciego gatunku, prócz wyrażeń (16) niema.

Także całki trzeciego gatunku można redukować do najprostszych postaci. Uważajmy znów równanie (15). Całki trzeciego gatunku redukują się do postaci

icm©

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\,.\,A\,.\,B\ldots.\,L\sqrt{f(x,\,y)}},$$

gdzie P, Q są wielomiany o zmiennych x, y, zaś A, $B,\ldots$, L są wielomiany nieprzywiedlne pierwsze względem $f(x,\,y)$. Powierzchnie $A=0$ etc. przecinają daną powierzchnię według dwóch krzywych

$$z=\frac{P}{R},\quad z=-\frac{P}{R},\quad R=\mathrm{const.}\;\chi(y)\,.\frac{\partial A}{\partial x}\,.\,B\ldots.\,L.$$

Wielomiany A, $B\ldots.$ L muszą być dzielnikami pewnych innych wielomianów kształtu

$$M^2 - N^2 f(x,\,y);$$

jeżeli zaś same są wielomianami tego ostatniego kształtu, natenczas całka

$$\int d\log\frac{M-N\sqrt{f}}{M+N\sqrt{f}}$$

jest całką trzeciego gatunku o krzywych logarytmicznych

$$z=\frac{M}{N}\quad \text{i}\quad z=-\frac{M}{N}.$$

8. Cykle dwuwymiarowe na powierzchniach algebraicznych. Liczba p_2 koneksyj powierzchni algebraicznej.

Każdą powierzchnię cykliczną, t. j. cykl dwuwymiarowy na powierzchni algebraicznej, można sobie wyobrazić (P. S. I.) jako utworzoną ruchem w sobie zamkniętym cyklu liniowego, wracającego do pierwotnego położenia.

Uważajmy całki (9), należące do krzywej (8). Szukajmy takiej całki, która przyjmuje pierwotną wartość, gdy y, opisując drogę zamkniętą, wróci do swego pierwotnego położenia. Chodzi więc o znalezienie całki

$$\Omega=\sum_{i=1}^{2p} A_i\omega_i, \tag{17}$$

nie zmienionej przez podstawienie

$$\Omega_i=\sum_{j=1}^{2p} m_i^j\,\omega_j\qquad (i=1,\,2,\ldots\,2p),$$

czyli, że liczby A_i powinny spełniać równania liniowe

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_1 m_1^1 + A_2 m_2^1 + \ldots. + A_{2p} m_{2p}^1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{2p} &= A_1 m_1^{2p} + A_2 m_2^{2p} + \ldots. + A_{2p} m_{2p}^{2p}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Otóż na ogólnej powierzchni algebraicznej—jak wiemy—nie ma cyklów liniowych, a mogą dopiero wtedy powstać, gdy na powierzchni powstają punkty osobliwe, gdyż równania (10) dla wszystkich podstawień fundamentalnych grupy równania Fuchsa E będą tylko w bardzo specyalnych przypadkach spełnione przez liczby P_i nie wszystkie równe 0. Natomiast na ogólnej powierzchni algebraicznej istnieć będzie pewna liczba układów liczb A_i, spełniających układy równań (18), ale gdy powierzchnia nabywa osobliwości, natenczas też liczby m_i stają się od siebie zależne i liczba niezależnych układów, spełniających równanie (18), będzie się zmniejszała, a temsamem zmniejszy się liczba cyklów dwuwymiarowych.

Chodzi teraz o to, czy istnieją powierzchnie cykliczne, nie sprowadzające się do zera przez odkształcenia ciągłe. Z tego, że zachodzi to dla powierzchni specyalnych, można odrazu wnioskować, że zachodzić będzie dla powierzchni ogólnych (Pi. 16, P. S. I.), ale tego rozumowania nie można było stosować, gdy chodziło o cykle liniowe i o całki o różniczkach zupełnych.

Uważajmy powierzchnię hypereliptyczną Picarda (ust. 3) o czterech układach peryodów

$$\left|\begin{matrix}\omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4\\ \omega_1', & \omega_2', & \omega_3', & \omega'_5\end{matrix}\right|;$$

powierzchnia ta, jak widzieliśmy, posiada całkę podwójną pierwszego gatunku

$$\iint du\,dv,$$

a więc posiada peryody całki tej kształtu

$$\omega_i\,\omega_k' - \omega_k\,\omega'_i\qquad (i,\,k=1,\,2,\,3,\,4).$$

9. Powierzchnie algebraiczne, zezwalające na przekształcenia ciągłe dwuwymierne same na sobie.

Teoryę całek pojedyńczych i podwójnych stosuje Picard do specyalnych powierzchni algebraicznych, badając ciągłe przekształcenia powierzchni na siebie. Przedewszystkiem mamy ważne twierdzenie, analogiczne do twierdzenia Schwarza dla krzywych algebraicznych (Pi. 13, 14, Po. 1).

„Jedyne powierzchnie, które mogą być przekształcone na siebie za pomocą przekształceń zależnych od dwóch parametrów, mogą być tylko powierzchnie rodzaju zero lub 1".

icm©

Dowód tego twierdzenia geometrycznego jest przestępny i opiera się na własnościach całek pierwszego gatunku.

Powierzchnie, zezwalające na przekształcenia ciągłe zależne od jednego parametru (Pi. 16), mogą być dowolnego rodzaju. Uważajmy powierzchnię odwzorowującą jedno-jednoznacznie pary punktów dwóch krzywych algebraicznych, z których pierwsza niechaj będzie rodzaju p, druga rodzaju 1

$$f(\lambda, \mu) = 0, \qquad f'(\lambda', \mu') = 0,$$

$$x = R(\lambda, \mu; \lambda', \mu'), \qquad y = R_1(\lambda, \mu; \lambda', \mu'), \qquad z = R_2(\lambda, \mu; \lambda', \mu').$$

Powierzchnia ta ma rodzaj równy rodzajowi krzywej $f' = 0$. Powierzchnie dołączone rzędu $m-4$ wycinają na niej krzywe eliptyczne, należące do pęku rodzaju p krzywych eliptycznych, a mianowicie powierzchnie te wycinają grupy $2p$-2 krzywych, należące do seryi kanonicznej g_{2p-2}^{p-1} na krzywej $f(\lambda, \mu) = 0$, która jest obrazem pęku.

W ogólnym przypadku powierzchni posiadającej przekształcenie ciągłe zależne od jednego parametru, rodzaju większego od 1, mamy również pęk krzywych tego pęku. Naturę tych powierzchni wyświetlił, jak zobaczymy, w zupełności Enriques (E. 21, 22, roz. V, ust. 3).

Picard uzyskał ważny rezultat, że wszystkie krzywe pęku mają tensam moduł. Zresztą powierzchnie te dadzą się przedstawić zapomocą trzech parametrów α, β, Θ, gdzie między α, β mamy związek $f(\alpha, \beta) = 0$, w kształcie

$$x = R[\alpha, \beta; \Theta, \sqrt{A(\Theta)}], \qquad y = R_1[\alpha, \beta; \Theta, \sqrt{A(\Theta)}],$$

$$z = R_2[\alpha, \beta; \Theta, \sqrt{A(\Theta)}],$$

przyczem $A(\Theta)$ jest wielomianem rzędu (4) względem Θ, którego spółczynniki nie zależą od α, β.

Zakładając, że przekształcenia ciągłe tworzą grupę ciągłą w sensie Liego, możemy stosować teorye Liego:

1. Niechaj grupa posiada dwa parametry i niechaj jej przekształcenia będą przemienne, natenczas spółrzędne powierzchni można przedstawić jako funkcye jednoznaczne dwóch parametrów u, v, otrzymane przez odwrócenie dwóch całek o różniczkach zupełnych

$$\int^{x,y,z} P\,dx + G\,dy = u, \qquad \int^{x,y,z} P_1\,dx + G_1\,dy = v. \tag{19}$$

2. Niechaj grupa posiada dowolną liczbę parametrów niezależnych, natenczas albo na powierzchni istnieje pęk krzywych wymiernych lub rodzaju 1, albo też powierzchnia posiada grupę przemienną dwuparametrową, a więc przypadek ten redukuje się do przypadku 1-go.

Do powierzchni, które otrzymujemy przez inwersyę jednoznaczną całek (19), należą powierzchnie hipereliptyczne, t. j. powierzchnie o czterech parach peryodów, o których była mowa w ustępie trzecim, i dla których u, v są również funkcyami jednoznacznemi zmiennych x, y, z, których rodzaj geometryczny wynosi 1, i które posiadają dwie całki pierwszego gatunku.

Dalej do powierzchni, otrzymujących się z równań (19), należą zniekształcenia powierzchni hypereliptycznych, a mianowicie najprzód należą tu powierzchnie, których spółrzędne posiadają trzy pary peryodów; rodzaj powierzchni wynosi zero, powierzchnia posiada tylko jednę całkę pierwszego gatunku, a jedna para peryodów jest polarna. Na powierzchni leżą dwa pęki: pęk krzywych wymiernych i pęk krzywych eliptycznych. Typem tych powierzchni są powierzchnie, otrzymane przy pomocy równań Jacobi'ego dla całek Abela w przypadku zniekształcenia, badanym przez Rosenhaina:

$$\frac{du}{(u-b)\sqrt{(u-a_1)\ldots(u-a_4)}} + \frac{dv}{(v-b)\sqrt{(v-a_1)\ldots(v-a_4)}} = dx,$$

$$\frac{u\,du}{(u-b)\sqrt{(u-a_1)\ldots(u-a_4)}} + \frac{v\,dv}{(v-b)\sqrt{(v-a_1)\ldots(v-a_4)}} = dy,$$

przyczem spółrzędne X, Y, Z powierzchni są funkcyami symetrycznemi wymiernemi zmiennych u, v i $\sqrt{(u-a_1)\ldots(u-a_4)}$, $\sqrt{(v-a_1)\ldots(v-a_4)}$, a więc potrójnie peryodycznemi funkcyami zmiennych x, y. Jeżeli całki (19) są obie drugiego lub pierwszego rodzaju o mniej niż czterech peryodach, natenczas posiadają tylko dwa peryody. Jeżeli zaś, posiadając mniej niż trzy peryody, posiadają peryody polarne, natenczas x, y, z redukują się do funkcyj wymiernych e^{au} i v, posiadając tylko jeden układ peryodów.

10. Powierzchnie algebraiczne, zezwalające na nieciągłą seryę nieskończoną przekształceń dwuwymiernych w sobie.

Przy pomocy własności niezmiennych powierzchni dołączonych rzędu $m-4$ wyprowadza Picard pierwsze ogólne własności powierzchni, posiadających nieskończoną nieciągłą seryę przekształceń dwuwymiernych powierzchni, których pierwszy przykład istotny podał następnie Humbert (Lit. C R. 1897, 1898, J. L., Ser. 5, T. 5 i 6, 1899 i 1900).

Picard wypowiada następujące twierdzenie:

„Powierzchnie, posiadające własność, o którą teraz chodzi, mają rodzaj geometryczny jeden lub zero". Jednakże w dowodzie nie uwzględnia Picard przypadku, gdy krzywe kanoniczne na powierzchniach rodzaju większego niż jeden przechodzą przy przekształceniach same na siebie, a traktując przypa-

icm©

dek ten, gdy krzywe kanoniczne przechodzą same na siebie dla rodzaju 2, dochodzi do wniosków, które nie są prawdziwe (por. E. 24, A. Rosenblatt R. P. T. 33, 1912).

11. Własności powierzchni, nie posiadających całek Picarda. Prace Humberta i Castelnuovo.

Humbert (Lit. J. L. 1894) stosuje teorye Picarda całek o różniczkach zupełnych do badania własności układów krzywych algebraicznych na powierzchniach, a więc nawiązuje do prac Noethera (Roz. I, ust. 12). Równocześnie Castelnuovo otrzymał niektóre twierdzenia te same co Humbert. Obaj opierają się w badaniu układów krzywych algebraicznych na powierzchniach na rezultatach swych badań nad inwolucyami niewymiernemi, leżącemi na krzywych algebraicznych.

Humbert, uważając całki Abela na krzywych algebraicznych, dochodzi do następujących rezultatów dla inwolucyi J^k_n na krzywych algebraicznych.

Gdy $k > 1$, natenczas albo inwolucya złożona jest grupami inwolucyi J^1, albo też inwolucya jest seryą liniową g^k_n, albo nareszcie jest seryą algebraiczną, utworzoną z grup n dowolnych punktów.

Gdy na krzywej algebraicznej istnieje inwolucya niewymierna J^1 rodzaju $\bar{\omega}$, natenczas krzywa posiada $\bar{\omega}$ całek, dających się sprowadzić do całek rodzaju $\bar{\omega}$, a więc posiadających $2\bar{\omega}$ peryodów.

Uważajmy teraz powierzchnie, posiadające układ ciągły ∞^1 krzywych wymiernych, przecinających się w jednym ruchomym punkcie tak, że przez każdy punkt powierzchni przechodzi $n>1$ krzywych. Powierzchnie te dadzą się odwzorować dwuwymiernie na płaszczyźnie, a więc są wymierne, a krzywe wymierne układu należą do układu liniowego ∞^2 krzywych wymiernych.

Uważajmy dalej powierzchnie, nie posiadające całek Picarda pierwszego gatunku, natenczas każda serya algebraiczna krzywych algebraicznych, przecinających się w $\geqq 1$ punktach ruchomych, zawarta jest w układzie liniowym przynajmniej ∞^2. Gdy krzywe algebraiczne nie mają punktów przecięcia ruchomych, sama serya jest liniowa (pęk liniowy).

Ponieważ krzywe algebraiczne danego rzędu na pewnej powierzchni należą do skończonej liczby układów algebraicznych na powierzchni, więc na powierzchniach, nie posiadających całek Picarda pierwszego gatunku, wszystkie układy algebraiczne krzywych tego rzędu należą do pewnej skończonej liczby układów liniowych krzywych tego rzędu.

Nareszcie Humbert uogólnia twierdzenie poprzednio podane o układach krzywych wymiernych na powierzchniach, okazując, że, gdy dwie krzywe wymierne spotykają się w więcej niż jednym punkcie, powierzchnia jest także

wymierna i istnieje układ liniowy ∞^2 krzywych wymiernych, zawierający krzywe układ poprzedniego.

Równocześnie z Humbertem Castelnuovo odmienną zupełnie drogą, bo—opierając się na teoryi odpowiedniości na krzywych stworzonej przez Hurwitza,—dochodzi do twierdzenia podstawowego o inwolucyach niewymiernych krzywych algebraicznych, które też otrzymał Humbert i któreśmy właśnie podali na początku tego ustępu. Stąd wyprowadza następujące twierdzenie o układach algebraicznych na powierzchniach algebraicznych:

„Układ krzywych taki, że przez $r>1$ punktów powierzchni przechodzi tylko jedna krzywa układu, jest układem liniowym".

„Układ krzywych ∞^1, przecinających się w jednym punkcie ruchomym, taki, że przez punkt powierzchni przechodzi n krzywych układu, więc układ o „indeksie" n, jest zawarty w układzie ∞^2 liniowym krzywych wymiernych, a więc i powierzchnia jest wymierna".

Ostatnie to twierdzenie jest prawie identyczne z poprzednio podanem twierdzeniem Humberta.

Castelnuovo rozważa też przypadek indeksu 2, w którym to przypadku powierzchnia jest wymierna, gdy albo serya krzywych jest wymierna, albo też (jak wyżej—twierdzenie Humberta) krzywe seryi są wymierne.

12. Badania Painlevégo nad powierzchniami algebraicznemi, zezwalającemi na grupy ciągłe przekształceń dwuwymiernych.

Badania Painlevégo nad powierzchniami, posiadającemi grupy ciągłe przekształceń dwuwymiernych (Pa. 2, Pa. 4, Pa. 5), wyłożone są w sławnych jego „Leçons de Stockholm". Painlevé dowodzi, że każda powierzchnia algebraiczna, posiadająca skończoną ciągłą grupę Liego, posiada temsamem grupę ciągłą skończoną przemienną i algebraiczną, t. j. parametry przekształcenia występują w grupie algebraicznie.

Jeżeli grupa przekształcenia nie jest przechodnia, natenczas na powierzchni istnieje pęk krzywych wymiernych lub rodzaju 1. Jeżeli krzywe są wymierne, powierzchnia się daje zawsze odwzorować dwuwymiernie na walcu.

Jeżeli krzywe pęku są eliptyczne, natenczas powierzchnia posiada, gdy ω jest rodzaj pęku, $\omega+1$ całek Picarda, z których jedna całka należy do pęku krzywych eliptycznych i posiada dwa peryody. Spółrzędne powierzchni dadzą się wyrazić jako funkcye algebraiczne pewnego parametru u i jako funkcye podwójnie peryodyczne pewnego parametru t o peryodach stałych.

Nawzajem powierzchnie obu tych gatunków posiadają grupy ciągłe przekształceń dwuwymiernych.

Jeżeli grupa przekształceń dwuwymiernych jest przechodnia, natenczas spółrzędne x, y, z powierzchni można wyrazić jako funkcye jednoznaczne i meromorficzne dwóch parametrów u, v. Parametry te są to wartości dwóch całek Picarda na powierzchni.

Jeżeli obie całki Picarda posiadają cztery pary peryodów od siebie niezależnych, całki są gatunku pierwszego. Fuukcye x, y, z zmiennych u, v są funkcyami Abela, a mianowicie funkcyami hypereliptycznemi zmiennych u, v. Nawzajem powierzchnie, których spółrzędne x, y, z wyrażają się jako funkcye hypereliptyczne zmiennych u, v tak, że zmiennym x, y, z odpowiada jeden układ u, v (jeżeli uważamy za identyczne układy, różniące się o wielokrotności peryodów) posiadają grupę ∞^2 przemienną przekształceń dwuwymiernych

Jeżeli jednak grupa peryodów jest mniejsza od czterech, wówczas przynajmniej jedna z całek

$$\int P(x, y, z)\, dx + \int Q(x, y, z)\, dy = u,$$

$$\int P_1(x, y, z)\, dx + \int Q_1(x, y, z)\, dy = v$$

posiada krzywą, wzdłuż której staje się nieskończoną. Krzywa taka nazywa się *polarną*. Jeżeli całka staje wzdłuż krzywej logarytmicznie nieskończoną, krzywa nazywa się *logarytmiczną*. Jeżeli $x - g(y) = 0$ jest rzutem krzywej polarnej na płaszczyźnie x, y, wówczas kładąc

$$x - g(y) = X^{\nu},$$

gdzie ν jest pewna liczba całkowita, w rozwinięciu całki według X mamy wyraz $A \log X$. Wówczas powierzchnia posiada spółrzędne x, y, z, wyrażalne jako funkcye wymierne zmiennych u, v, albo jako funkcye wymierne wielkości u, e^v, albo też jako funkcye wymierne wielkości e^u, e^v, albo nareszcie spółrzędne x, y, z są funkcyami wymiernemi funkcyj $p(u)$, $p'(u)$, V, gdzie V jest albo równe v, albo też funkcyi $v = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$, lub nareszcie funkcyi $e^v \frac{\sigma(u-\lambda)}{\sigma(u)}$, zaś p, σ są to znane funkcye Weierstrassa. Nawzajem u, v, względnie u, e^v, względnie e^u, e^v, względnie nareszcie p, p', V są funkcyami wymiernemi zmiennych x, y, z. Spółrzędne x, y, z są funkcyami wymiernemi stałych x_0, y_0, z_0, t. j. wartości x, y, z dla wartości początkowych $u = 0$, $v = 0$.

Rozważania Painlevégo prowadzą zarazem do dowodu sławnego *twierdzenia Weierstrassa* o funkcyach, posiadających następującą własność: Jeżeli $x(u+u', v+v')$, $y(u+u', v+v')$ dadzą się wyrazić jako funkcye algebraiczne funkcyj $x(u, v)$, $y(u, v)$; $x(u', v')$, $y(u', v')$, natenczas powiadamy, że funkcye te, zresztą nie podlegające innym ograniczeniom, posiadają „*twierdzenie o dodawaniu*“ (*Additionstheorem*). Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest właśnie, by funkcye $x(u, v)$, $y(u, v)$ były funkcyami algebraicznemi albo funkcyj Abela zmiennych u, v, posiadających te same peryody, albo też były funkcyami algebraicznemi funkcyj, które można uważać jako zniekształcenia tych funkcyj.

13. Prace Humberta nad teoryą powierzchni hypereliptycznych.

Humbert bada w pracy ogłoszonej w r. 1893 (Lit. J. L. Ser. 4, T. 9) powierzchnie hypereliptyczne, a więc powierzchnie wprowadzone do nauki przez Picarda, o których już mówiliśmy w ustępach 3 i 9. Spółrzędne x, y, z dadzą się przedstawić w kształcie

$$x = \frac{\Theta_1(u, v)}{\Theta_0(u, v)}, \quad y = \frac{\Theta_2(u, z)}{\Theta_0(u, v)}, \quad z = \frac{\Theta_3(u, v)}{\Theta_0(u, v)}, \tag{20}$$

gdzie funkcye $\Theta_i(u, v)$, $i = 0, 1, 2, 3$ są funkcyami theta rzędu m, a więc spełniają warunki

$$\Theta_i(u + 2\pi i, v) = \Theta_i(u, v + 2\pi i) = \Theta_i(u, v),$$

$$\Theta_i(u+a, v+b) = e^{-mu+\alpha}\, \Theta_i(u, v), \quad \Theta_i(u+b, v+c) = e^{-mv+\beta}\, \Theta_i(u, v).$$

Funkcye te można sprowadzić do pewnej postaci normalnej. Każda funkcya Θ normalna rzędu m da się wyrazić jako funkcya liniowa o spółczynnikach stałych pewnych oznaczonych m^2 funkcyj Θ, posiadających tę samę „*charakterystykę*“, t. j. układ czterech liczb charakterystycznych $\begin{Bmatrix} \omega, & \omega' \\ \theta, & \theta' \end{Bmatrix}$, z których każda równa się 0 lub 1. Funkcye, wchodzące w skład wyrażeń na x, y, z, mają charakterystykę 0.

Jeżeli powierzchnia hypereliptyczna (20) jest ogólna, to znaczy, że jej peryody a, b, c, $2\pi i$ nie spełniają równości o spółczynnikach całkowitych kształtu

$$Aa + Bb + Cc + D(ac - b^2) + E . 2\pi i = 0 \tag{21}$$

(por. Roz. V, ustęp 5), natenczas każda krzywa algebraiczna na tej powierzchni daje się wyrazić przez przyrównanie do zera pewnej funkcyi normalnej theta o tych samych peryodach i o charakterystyce zero:

$$\Theta(u - \lambda, v - \mu) = 0.$$

Gdy funkcye $\Theta_i(u, v)$, występujące w przedstawieniu (20), są rzędu $m = 2$ normalne o charakterystyce zero, wtedy otrzymuje się sławną powierzchnię czwartego rzędu Kummera.

icm©

Na powierzchni Kummera otrzymuje się każdą krzywą algebraiczną, przyrównywając do zera funkcyę theta normalną o dowolnej charakterystyce rzędu parzystego lub nieparzystego. Jeżeli ta funkcya jest parzysta rzędu parzystego o charakterystyce zero, natenczas jest ona przecięciem zupełnem powierzchni Kummera z pewną powierzchnią algebraiczną. Jeżeli jeden z warunków poprzednich, t. j. parzystości funkcyi, parzystości jej rzędu, lub warunku co do charakterystyki nie jest spełniony, to jednak kwadrat funkcyi jest funkcyą, spełniającą wszystkie warunki, a więc istnieje wówczas powierzchnia, która jest styczna do powierzchni Kummera wzdłuż tej krzywej i zresztą jej nie przecina. Wszystkie krzywe na powierzchni Kummera (algebraiczne) są rzędu parzystego.

Przedstawiając powierzchnię Kummera wzorami (20), mamy dane bezpośrednio znaczenie geometryczne dwóch rodzajów grup czterech funkcyj theta, zwanych grupami Rosenhaina (w liczbie 80) i grupami Göpela (w liczbie 60). Grupy te przedstawia Humbert zapomocą bardzo wygodnego algorytmu. Przy pomocy grup Rosenhaina i Göpela można sklasyfikować wszystkie krzywe algebraiczne na powierzchni. Mamy następujące rodziny krzywych:

1) Gdy rząd krzywych jest kształtu $4m$ mamy albo krzywe, które są przecięciem zupełnem powierzchni Kummera powierzchnią rzędu m, albo krzywe, które, po dodaniu czterech stożkowych tworzących grupę Rosenhaina, stają się przecięciem zupełnem, albo nareszcie krzywe, które po dodaniu dwóch stożkowych stają się przecięciem zupełnem.

2) Gdy rząd krzywych jest kształtu $4m+2$, natenczas albo po dodaniu jednej stożkowej mamy przecięcie zupełne, albo też po dodaniu trzech stożkowych mamy przecięcie zupełne.

W szczególności, na powierzchni Kummera krzywe rzędu czwartego są tylko albo przekrojami płaskiemi, albo są to krzywe bikwadratowe, t. j. zupełny przekrój dwóch powierzchni rzędu drugiego. Krzywe rzędu szóstego również dzielą się na dwie rodziny, mianowicie albo na krzywe, które wraz ze stożkową tworzą przekrój zupełny powierzchni rzędu drugiego, albo mamy krzywe, które razem z trzema stożkowemi tworzą przekrój zupełny powierzchni rzędu trzeciego. Humbert bada zapomocą przedstawienia powierzchni kształtem (20) najrozmaitsze układy powierzchni, wpisanych w powierzchnie Kummera, i konfiguracye czworościenne, również w te powierzchnie wpisane.

Ważnym rezultatem jest, że krzywe jednej rodziny, których rodzaj jest p, tworzą układ ∞^p, wycinają więc na ogólnej krzywej układu zupełną seryę kanoniczną ∞^{p-1}. Ciekawym jest dalej rezultat, że wszystkie krzywe na powierzchni Kummera bez punktów wielokrotnych rzędu $4m$ są specyalne.

Na szczególną uwagę zasługuje kategorya krzywych na powierzchni Kummera, które Humbert nazywa „courbes univoques", a które są wycięte na powierzchni przez takie powierzchnie, które wpisane są w powierzchnie, wpisane z kolei w powierzchnię Kummera, a mianowicie te powierzchnie, w które wpisane są powierzchnie, wycinające owe krzywe, stykają się z powierzchnią Kummera, daną wzdłuż krzywej rzędu $4m$ kategoryi powyżej wymienionej, która z czterema stożkowemi tworzy przekrój zupełny powierzchni.

Humbert studyuje dalej ogólne powierzchnie (20), gdzie funkcye Θ_i znormalizowane są rzędu h o charakterystyce zero. Jeżeli punktowi na powierzchni odpowiada tylko jeden układ u, v, wtedy powierzchnia posiada jednę jedyną całkę wszędzie skończoną (por. ustęp 3), t. j. rodzaj geometryczny powierzchni jest 1. Taksamo ma się rzecz, gdy każdemu punktowi na powierzchni odpowiadają dwa układy wartości parametrów, mianowicie u, v i $-u$, $-v$, jak to zachodzi na powierzchni Kummera; wówczas znowu rodzaj geometryczny jest 1. Gdy każdemu punktowi powierzchni hypereliptycznej odpowiada tylko jeden układ u, v, wtedy powierzchnia posiada dwie całki Picarda pierwszego gatunku (por. ustęp 3).

Rząd powierzchni hypereliptycznej jest $2h^2$, jeżeli niema układów u, v, dla których funkcye Θ_i wszystkie znikają. Tym układom u, v, dla których wszystkie funkcye równocześnie znikają, odpowiadają na powierzchni krzywe wyjątkowe (Noether, por. Roz. I, ust. 8) jednobieżne.

Krzywe algebraiczne danego rzędu tworzą jednę rodzinę, jeżeli się dadzą wszystkie przedstawić równaniem

$$\Theta\,(u-\lambda,\ v-\mu)=0,$$

gdzie charakterystyka funkcyi Θ jest zero, a λ, μ są dwie liczby stałe dowolne. Krzywe tej samej rodziny wycinają na ogólnej krzywej tej rodziny grupy kanoniczne f_{2p-2}, wszakże wymiar seryi kanonicznej nie jest ∞^{p-1}, gdzie p jest rodzaj krzywej, lecz tylko ∞^{p-3}, albowiem na krzywej mamy dwie całki pierwszego gatunku $\int du$, $\int dv$, otrzymujące się z całek pierwszego gatunku Picarda, należących do powierzchni.

Humbert bada również powierzchnie dołączone do powierzchni danej rzędu $n-3$, to znaczy powierzchnie, które w krzywych wielokrotnych i w punktach wielokrotnych powierzchni zachowują się zupełnie taksamo, jak powierzchnie dołączone rzędu $m-4$. Liczba ich równa się rodzajowi przekroju płaskiego powierzchni zmniejszonemu o 1. Humbert bada również powierzchnie dołączone dowolnego rzędu $n+q-4$, $q>0$. Liczba liniowo niezależnych tych powierzchni równa się

icm©

$$\tfrac{1}{2} q (q-1) n + q (p-1) + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{6},$$

wycinają one na danej powierzchni seryę liniową krzywych o

$$\tfrac{1}{2} q (q-1) n + q (p-1) - 1$$

parametrach.

Ogólne twierdzenie Noethera o „reszcie“ (Roz. I, ust. 6) można przy pomocy funkcyi Θ bezpośrednio sprawdzić na powierzchniach hypereliptycznych. Humbert dowodzi dalej twierdzenia, które jest specyalnym przypadkiem ogólnego twierdzenia o układach powierzchni dołączonych (por. ust. 20). Podczas gdy nie wszystkie krzywe dołączone rzędu $n-3$ do krzywej płaskiego przekroju powierzchni są wycięte przez powierzchnie dołączone rzędu $n-3$, to natomiast wszystkie krzywe dołączone rzędu większego niż $n-3$ są wycięte przez powierzchnie dołączone tego samego rzędu.

Widzieliśmy w Rozdziale I, ust. 7 i 10, że istnieje dwojakie pojęcie rodzaju powierzchni, rodzaj geometryczny i rodzaj numeryczny, który później nazwano arytmetycznym (por. Roz. III, ust. 5). Otóż właśnie powierzchnie hypereliptyczne są przykładem powierzchni, na których te dwie liczby nie są sobie równe, albowiem rodzaj geometryczny równa się 1, rodzaj zaś arytmetyczny równa się -1.

Porównywając ogólną dotychczas rozwiniętą teoryę układów krzywych na powierzchniach algebraicznych z własnościami układów krzywych algebraicznych na powierzchniach hypereliptycznych, dochodzi Humbert do kilku ważnych wniosków. Najprzód nie wszystkie układy algebraiczne krzywych na powierzchniach hypereliptycznych wchodzą w skład obszerniejszych układów liniowych krzywych algebraicznych. Pochodzi to stąd, że na tych powierzchniach istnieją dwie całki Picarda pierwszego gatunku $\int du$, $\int dv$, których niema na powierzchni Kummera, gdzie właśnie wszystkie układy krzywych zawarte są w układach liniowych. Powtóre Humbert stwierdza, że gdy się do układów krzywych na powierzchniach hypereliptycznych zastosuje wzór Noethera, uogólniający na powierzchni twierdzenie Riemanna-Rocha dla krzywych algebraicznych (por. Roz. IV, ust. 2), to gdy zastosujemy to twierdzenie do układów krzywych, wyciętych przez powierzchnie dołączone rzędu $n+q-4$, okaże się, że we wzorze tym należy uwzględnić różnicę między rodzajem geometrycznym a rodzajem arytmetycznym, a więc uwzględnić istnienie całek o różniczkach zupełnych. Uwagi te Humberta przedstawią się w jasnem świetle, gdy w dalszym ciągu poznamy rezultaty geometrów włoskich w Teoryi powierzchni algebraicznych nieregularnych (Roz. IV).

Najniższy rząd powierzchni hypereliptycznych może być 6. Humbert

buduje powierzchnie hypereliptyczne rzędu 8, których powierzchnie dołączone rzędu 4 rozpadają się na cztery płaszczyzny.

Powierzchnie, których punktom odpowiadają dwa układy parametrów u, v, dadzą się dwuwymierne odwzorować na powierzchni Kummera, albo też są to powierzchnie podwójnie peryodyczne względem każdej ze zmiennych z osobna. Powierzchnie te posiadają więc tylko jednę powierzchnię dołączoną rzędu $n-4$. Posiadają one $p+1$ powierzchni liniowo niezależnych dołączonych rzędu $n-3$. Nareszcie posiadają teraz

$$\tfrac{1}{2} q (q-1) n + q (p-1) + 2 + \tfrac{1}{6} (q-1)(q-2)(q-3)$$

powierzchni dołączonych rzędu $n+q-4$. W szczególności bada wreszcie Humbert powierzchnie rzędu czwartego, dwuwymiernie odpowiadające powierzchni Kummera. Między temi powierzchniami ważną jest powierzchnia, która jest miejscem geometrycznem wierzchołków stożków, przechodzących przez sześć dowolnych punktów przestrzeni.

14. Całki podwójne drugiego gatunku na powierzchniach algebraicznych.

W dalszych badaniach Picarda nad teoryą całek na powierzchniach algebraicznych występuje nowe pojęcie całek podwójnych nowego rodzaju (Pi. 26, 30, P. S. II). Całka podwójna

$$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{22}$$

gdzie R jest funkcyą wymierną zmiennych x, y, z jest całką drugiego gatunku, jeżeli dla każdego punktu na powierzchni istnieją zawsze dwie funkcye wymierne U, V zmiennych x, y, z takie, że różnica pomiędzy całką (22), a całką

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\, dy \tag{23}$$

jest w okolicy każdego punktu danej powierzchni skończona. W szczególności zatem całka (22) jest całką drugiego gatunku, jeżeli sama posiada postać (23).

Picard uważa najprzód całki kształtu

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{(x-a)^\alpha f_z'},$$

gdzie $\alpha > 0$, P jest wielomianem o zmiennych x, y, z. Jeżeli powierzchnia dana $F(x, y, z) = 0$ nie posiada żadnych osobliwości, natenczas całkę (22) można sprowadzić do postaci

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint \frac{P(x, y, z)}{F_z'}\, dx\, dy, \tag{24}$$

icm©

gdzie U, V są funkcye wymierne zmiennych x, y, z, ale gdzie $P(x, y, z)$ jest wielomianem.

Opierając się na tem, dowodzi Picard, że każdą całkę drugiego gatunku na powierzchni, nie posiadającej osobliwości, można sprowadzić do postaci dopiero co wypisanej. Jeżeli zaś powierzchnia posiada zwyczajne osobliwości, t. zn. krzywą podwójną z punktami potrójnemi, wtedy powierzchnia $P(x, y, z)=0$, występująca we wzorze (24), przechodzi raz jeden przez krzywą podwójną.

W dowodzie posługuje się Picard następującem twierdzeniem Castelnuovo (C. 16, por. Roz. III, ust. 6): „Układ liniowy zupełny powierzchni dany przez pewne linie-„podstawy“ (base) i pewne punkty-„podstawy“, t. j. przez linie i punkty, przez które powierzchnie układu muszą w pewien określony sposób przechodzić, wycina na dowolnej płaszczyźnie, jeżeli tylko rząd powierzchni jest dostatecznie wysoki, układ liniowy krzywych zupełny i regularny (por. co do tych pojęć Roz. III, ust. 2).

Otóż gdy rząd wielomianu $P(x, y, z)$ we wzorze (24) jest dostatecznie wysoki, wtedy przez dodanie całki kształtu (23), gdzie U, V są funkcyami wymiernemi zmiennych x, y, z, można sprowadzić całkę do tej samej postaci, ale gdzie wielomian ten P jest tylko rzędu o jedność mniejszego. Stąd wynika następujące twierdzenie podstawowe dla całek drugiego gatunku: Jeżeli całki te nazwiemy liniowo niezależnemi od siebie, gdy żadna ich kombinacya liniowa do postaci (23) się nie sprowadza, wtedy istnieje oznaczona liczba ρ całek drugiego gatunku $I_1, \ldots, I_\rho$ od siebie niezależnych takich, że każda inna całka drugiego gatunku daje się przedstawić w postaci

$$\alpha_1 I_1 + \ldots + \alpha_\rho I_\rho + \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

gdzie α są pewne stałe (P. S. II). Rząd p wielomianu P spełnia nierówność

$$p \leqq 2m - 4,$$

jeżeli powierzchnia jest zupełnie ogólna danego rzędu m, ale nie każda całka postaci

$$\iint \frac{P}{F_z'}\, dx\, dy \tag{25}$$

jest całką drugiego gatunku. Przedewszystkiem rząd wielomianu P musi być większy, aniżeli liczba $m-4$. Następnie musi być spełnionych $2\pi+m-1$ warunków, aby ta całka była drugiego gatunku, przyczem π jest rodzajem przekroju płaskiego powierzchni.

Całki drugiego gatunku, taksamo jak całki pierwszego gatunku, posiadają własność niezmienności względem przekształceń dwuwymiernych, przyczem przekształcenia te mogą być zupełnie dowolne, a więc mogą wprowadzać lub usuwać krzywe wyjątkowe.

Picard podaje przykład powierzchni, przedstawiających pary punktów dwóch krzywych algebraicznych:

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \quad \varphi'(\alpha', \beta') = 0,$$

$$x = R_1(\alpha, \beta; \alpha', \beta'), \quad y = R_2(\alpha, \beta; \alpha', \beta'), \quad z = R_3(\alpha, \beta; \alpha', \beta').$$

Jeżeli całki

$$\int R(\alpha, \beta)\, d\alpha, \quad \int S(\alpha', \beta')\, d\alpha',$$

wzięte po pewnych cyklach C, C', nie są funkcyami algebraicznemi spółczynników równań $\varphi = 0$ i $\psi = 0$, ale są funkcyami przestępnemi tych spółczynników — co z pewnością w ogólnym przypadku zachodzić będzie — wtedy całka podwójna

$$\iint R(\alpha, \beta)\, S(\alpha', \beta')\, d\alpha\, d\alpha',$$

wzięta po dwuwymiarowem kontinuum, odpowiadającem cyklom C, C', nie redukuje się do postaci (23). Można całki drugiego gatunku zdefiniować inaczej. Uważajmy całkę

$$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy;$$

niechaj dla krzywej

$$z = S(x, y), \quad \varphi(x, y) = 0$$

funkcya wymierna R staje się nieskończoną. Uważamy y jako parametr, i niechaj rezyduum funkcyi wzdłuż krzywej powyższej R będzie $\chi(x, y)$. Rezyduami całki nazywamy wówczas peryody cykliczne i polarne całki Abela.

$$2\pi i \int \chi(x, y)\, dy.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby całka powyższa była drugiego gatunku, jest, by wszystkie rezydua dla wszystkich krzywych na powierzchni, wzdłuż których funkcya R staje się nieskończoną, były zerem.

Picard okazał dalej, że $m-1$ warunków, dotyczących punktów w nieskończoności, potrzebnych na to, aby całka podwójna była drugiego gatunku, są zawsze same przez się spełnione (Pi. 30, P. S. II).

Tak więc tylko 2π warunków musi być spełnionych, aby całka kształtu (25) była drugiego gatunku. Zresztą można dojść do zupełnie tego samego rezultatu, rozważając równanie różniczkowe E, któremu, jak wiemy, czynią zadosyć peryody cykliczne i polarne całki

$$\int \frac{P(x, \bar{y}, z)\, dx}{F_z'}.$$

icm©

15. Całki Picarda o różniczkach zupełnych trzeciego gatunku. Twierdzenie podstawowe Picarda w teoryi tych całek. Niezmiennik ρ Picarda w teoryi tych całek.

W pracy podstawowej dla całego rozwoju dalszego teoryi powierzchni algebraicznych (Pi. 29, P. S. II) przeprowadził Picard bardzo ważne badania nad teoryą całek o różniczkach zupełnych trzeciego gatunku.

Uważajmy więc powierzchnię o zwyczajnych osobliwościach (krzywa podwójna, punkty potrójne). Uważajmy krzywą na powierzchni C rzędu d:

$$z = R(x,\, y)\,, \qquad A(x,\, y) = 0\,;$$

można znaleść całkę Abela trzeciego gatunku I, należącą do krzywej $F(x,\, y,\, z) = 0$, która w d punktach $M_1, M_2, \ldots, M_d$ przecięcia krzywej tej z krzywą C posiada d punktów logarytmicznych o peryodach polarnych $+1$, zaś w nieskończoności posiada, a mianowicie tylko w jednym z m punktów, punkt osobliwy logarytmiczny o peryodzie $-d$.

Całka ta posiada $2p+1$ peryodów (p rodzaj przekroju płaskiego) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$, 1. Jeżeli y opisze kontur zamknięty, otrzymujemy następujące podstawienie peryodów

$$(S)\quad \begin{cases} \omega'_1 = m^1{}_1\,\omega_1 + \ldots. + m^1{}_{2p}\,\omega_{2p} + \mu^{(1)}\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \omega'_{2p} = m_1{}^{2p}\,\omega_1 + \ldots. + m^{2p}_{2p}\,\omega_{2p} + \mu^{(2p)}\,, \end{cases}$$

$$1 = 1\,.$$

Spółczynniki całkowite m nie zależą od obioru krzywej C, natomiast zależą od tego obioru liczby całkowite μ. Punkty osobliwe całek ω nie zależą też od krzywej C. Są to, jak wiemy punkty, którym odpowiada rodzaj krzywej C mniejszy niż p.

Uważajmy teraz $2p$ całek drugiego gatunku $J_1, J_2, \ldots, J_{2p}$ liniowo niezależnych i utwórzmy λ całek $I_1, I_2 \ldots, I_\lambda$ trzeciego gatunku, należących do krzywych logarytmicznych $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$. Przypuśćmy, że $2p$ peryodów cyklicznych pewnej całki Abela

$$\sum_{i=1}^{2p} a_i J_i + \sum_{i=1}^{\lambda} c_i I_i \tag{26}$$

nie zależy od y, przyczem $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ są funkcyami wymiernemi zmiennej y, zaś c_i są stałemi. Przypuśćmy, że do całek $I_1, I_2, \ldots, I_\lambda$ należą odpowiednio układy $2p$ liczb poprzednich $\mu^{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots, 2_p)$, a mianowicie $\mu^{(i)}, \nu^{(i)}, \ldots, \pi^{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$. Jeżeli peryody cykliczne całki

(26) nie zależą od y, natenczas, nazywając je $K_1, \ldots, K_{2p}$, mamy:

$$K_i = m^i{}_1\,K_1 + \ldots. + m^i{}_{2p}\,K_{2p} + c_1\,\mu^{(i)} + \ldots. + c_\lambda\,\pi^{(i)} \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2p)\,. \tag{27}$$

Jeżeli istnieją liczby K_i i c_i, czyniące zadość tym równaniom dla wszystkich punktów osobliwych, wtedy można znaleść funkcye wyżej wymienione wymierne a.

Przyrównajmy peryody całki (26) odpowiednio do $K_1, K_2, \ldots, K_{2p}$:

$$E_i = K_i\,, \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2p),$$

gdzie E_i są to wyrażenia na peryody, utworzone dla całki (26). Z powodu odpowiedniego obrania wielkości K_i funkcye a, obliczone z równań powyższych, nie zmienią się, gdy y opisze kontur zamknięty, gdyż układ równań, na który układ powyższy przejdzie

$$\begin{cases} m^1{}_1\,E_1 + \ldots. + m^1{}_{2p}\,E_{2p} + c_1\,\mu^{(1)} + \ldots. + c_\lambda\,\pi^{(1)} = K_1\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ m_1{}^{2p}\,E_1 + \ldots. + m^{2p}_{2p}\,E_{2p} + c_1\,\mu^{(2p)} + \ldots. + c_\lambda\,\pi^{(\lambda)} = K_{2p}\,, \end{cases}$$

jest równoważny układowi pierwotnemu.

Teraz zupełnie taksamo, jak dla całek o różniczkach zupełnych pierwszego i drugiego gatunku, tworzy się całkę

$$\int R\,dx + S\,dy\,, \tag{28}$$

gdzie $\int R(x,\, y,\, z)\,dx$ jest całką Abela, otrzymaną w sposób powyższy, funkcya zaś S ma kształt:

$$S = \frac{1}{m}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\sum_{i=1}^{m}\int_{x_0,\, z_i}^{x,\, z} R(x,\, y,\, z)\,dx\,, \qquad F(x_0,\, y,\, z_i) = 0\,.$$

Całka (28) może jeszcze, prócz krzywych $C_1, \ldots, C_\lambda$, posiadać krzywą logarytmiczną w nieskończoności; zresztą niektóre z liczb c mogą się równać zeru.

Otóż jeżeli teraz będziemy uważali jednę krzywą C_1, natenczas może się zdarzyć, że nie dla każdej krzywej nieprzywiedlnej C_1 będzie można uczynić zadość równaniom (27), przyjmując na c_1 wielkość od zera odmienną, zaś na inne liczby c wartość zero. Taksamo może się zdarzyć, że do tej krzywej będzie można dołączyć drugą taką krzywą C_2, tak że tylko kładąc $c_1 = c_2 = 0$, będzie można spełnić równania (27), przyczem $\lambda = 2$. Ale widoczna, że będzie istniała taka liczba λ, że wprawdzie będzie istniał taki układ krzywych $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$, iż będzie można uczynić zadość układowi równań (27) tyl-

icm©

ko kładąc $c_1 = c_2 = \ldots = c_\lambda = 0$, ale gdy się do tego układu λ krzywych dołączy dowolną krzywę $C_{\lambda+1}$, wówczas zawsze będzie można uczynić zadość układowi równań (27), przyjmując na $c_{\lambda+1}$ liczbę od zera odmienną. Wówczas niema całki Picarda trzeciego gatunku, której krzywe logarytmiczne należałyby tylko do układu owych λ krzywych $C_1, \ldots, C_\lambda$ i krzywej w nieskończoności; ale jakąkolwiek byłaby $\lambda+1$-sza krzywa $C_{\lambda+1}$, istnieje całka Picarda, której krzywą logarytmiczną jest ta krzywa $C_{\lambda+1}$, nadto krzywemi logarytmicznemi mogą być albo wszystkie krzywe albo tylko niektóre krzywe układu $C_1, \ldots, C_\lambda$ wraz z ewentualnie z krzywą w nieskończoności. To twierdzenie jest właśnie fundamentalnem twierdzeniem dla całek trzeciego gatunku Picarda.

Można to twierdzenie tak zmodyfikować, by w wysłowienie jego nie wchodziła wcale krzywa w nieskończoności. Istnieje pewna liczba ρ taka, że nie ma całki, której krzywemi logarytmicznemi byłyby pewne krzywe $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ i żadna inna krzywa, przyczem nie wszystkie krzywe tego układu muszą być logarytmicznemi; ale można dołączywszy do układu krzywych $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ dowolną krzywą $C_{\rho+1}$, znaleść całkę taką, aby fakt powyższy zachodził dla krzywej $C_{\rho+1}$, która ma być logarytmiczną, i dla układu $C_1, \ldots, C_\rho$, w którem albo wszystkie krzywe albo tylko część są logarytmiczne. Liczba ρ nie jest niezmiennikiem bezwzględnym, lecz zmienia się, gdy powstają lub znikają na powierzchni krzywe wyjątkowe. Ale Castelnuovo i Enriques okazali w pracy, o której w Rozdziale III będziemy mówili, (C. E. 5), że, z wyjątkiem powierzchni przekształcalnych dwuwymiernie na powierzchnie prostokreślne, w każdej klasie powierzchni dwuwymiernie równoważnych istnieją powierzchnie bez krzywych wyjątkowych. Na tych powierzchniach liczba ρ jest niezmiennikiem w zupełności określonym.

Podstawową jest kwestya (którą jednak dopiero Severi rozwiązał w zupełności, por. Roz. IV, ust. 6), czy istnieją powierzchnie posiadające $p_1 = 1$, ale których całki trzeciego gatunku nie wszystkie się sprowadzają do kombinacyj algebraiczno-logarytmicznych:

$$\Sigma A_k \log R_k(x, y, z) + P(x, y, z),$$

gdzie R_k, P są wymierne względem zmiennych x, y, z. Jeżeli na powierzchni danej wszystkie całki trzeciego gatunku są algebraiczno-logarytmiczne, wtedy, jeżeli dowolnie obierzemy $\rho+1$ krzywych na powierzchni, istnieje funkcya wymierna, której zera i nieskończoności są tylko położone wzdłuż pewnych z tych krzywych z pewnemi wielokrotnościami (Pi. 32, P. S. II).

Jako przykład, podaje Picard powierzchnię Kummera, badaną przez Humberta (ust. 13). Humbert okazał, jak widzieliśmy, że wszystkie krzywe na powierzchni są parzyste rzędu $2d$ tak, że istnieje powierzchnia rzędu d styczna do powierzchni Kummera wzdłuż tej krzywej i zresztą jej

nie przecinająca. Zatem mamy tu $\rho = 1$. Picard bada dalej inne przykłady dla teoryi ogólnej, a mianowicie całki różniczek zupełnych powierzchni

$$z^2 = f(x)\, F(y),$$

które się wszystkie sprowadzają do kombinacyj algebraiczno-logarytmicznych, i całki dla powierzchni

$$z^m = x^m + P(y),$$

gdzie wielomian $P(y)$ jest rzędu m, której całki również sprowadzają się do kombinacyj algebraiczno-logarytmicznych.

16. Liczba całek podwójnych drugiego gatunku liniowo niezależnych. Wzór fundamentalny Picarda.

Przechodzimy do podania rezultatów Picarda, dotyczących wyznaczenia liczby liniowo niezależnych całek podwójnych drugiego gatunku (Pi. 32, P. S. II). Przedewszystkiem, gdy całka

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}\, dx\, dy,$$

gdzie wielomian $Q(x, y, z)$ znika na krzywej podwójnej powierzchni, jest kształtu

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\, dy$$

wtedy funkcye wymierne A, B zmiennych x, y, z są kształtu

$$A = \frac{U(x, y, z)}{g\, G\, \varphi_1 \ldots \varphi_r F_z'}, \qquad B = \frac{V(x, y, z)}{g\, G\, \varphi_1 \ldots \varphi_r F_z'},$$

gdzie U i V są wielomiany zmiennych x, z ze spółczynnikami wymiernemi względem y; dalej

$$g, \quad G, \quad \varphi_i$$

są wielomianami zmiennych x, y, przyczem g jest rzutem pozornego konturu powierzchni na płaszczyznę x, y, zaś G jest rzutem krzywej podwójnej na tę samą płaszczyznę. Funkcye $\frac{U}{G}$, $\frac{V}{G}$ znikają na krzywej podwójnej, funkcye zaś $\frac{U}{g}$, $\frac{V}{g}$ na konturze pozornym. Otóż wyrażenia na A, B dadzą się przedstawić w kształcie prostszym:

$$A = \frac{M(x, y, z)}{g_1 \ldots g_{\rho-1} . F_z'}, \qquad B = \frac{N(x, y, z)}{g_1 \ldots g_{\rho-1} . F_z'},$$

icm©

gdzie M i N są wielomiany o zmiennych x, z, znikające na krzywej podwójnej, zaś $g_1, \ldots, g_{p-1}$ są rzuty krzywych $C_1, \ldots, C_{p-1}$ spełniających warunki, o których w poprzednim ustępie była mowa; nareszcie stosunki

$$\frac{M}{g_i}, \quad \frac{N}{g_i}$$

znikają dla dowolnego y tylko wzdłuż krzywych C_i. Krzywe $C_1, \ldots, C_{p-1}$ wraz z krzywą w nieskończoności (ewentualnie) i ewentualnie wraz z krzywemi położonemi na płaszczyznach $y = \text{const.}$ są jedynemi krzywemi logarytmicznemi, które całka trzeciego gatunku oprócz krzywej dowolnie obranej może posiadać. Na podstawie tego okazuje Picard, że do każdej krzywej C_i można znaleść wielomian $Q_i(x, y, z)$ taki, że całka

$$\iint \frac{Q_i(x, y, z)}{F_z'}\, dx\, dy$$

sprowadza się do postaci (23) i taki, że każde inne wyrażenie $\frac{Q(x, y, z)}{F_z'}$, sprowadzające się do tejże postaci, jest kształtu:

$$\frac{A_1 Q_1 + \ldots + A_{p-1} Q_{p-1}}{F_z'} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{F_z'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{F_z'}\right),$$

gdzie liczby A są stałe, zaś U, V są wielomiany o zmiennych x, z wymierne względem y, znikające na krzywej podwójnej. Stąd wynika, że każda całka kształtu (25), gdzie P znika na krzywej podwójnej, do której to całki przez odjęcie całek (23) sprowadza się każda całka drugiego gatunku, sprowadza się znów do ograniczonej liczby całek kształtu

$$\iint \frac{M_i(x, y, z)\, dx\, dy}{F_z'},$$

gdzie wielomiany $M_i(x, y, z)$ znikają na krzywej podwójnej, przez odjęcie całek kształtu

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{F_z'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{F_z'}\right)\right] dx\, dy;$$

U, V są wielomiany o zmiennych x, z, znikające na krzywej podwójnej, wymierne względem y. Całka ogólna (25), niekoniecznie drugiego gatunku, ma $2p$ rezyduów na linii w nieskończoności na powierzchni. Możemy utworzyć $2p$ całek $J_1, \ldots, J_{2p}$ takich, że wyznacznik rezyduów tych całek jest od zera odmienny, i odejmując całkę

$$\sum_{i=1}^{2p} A_i J_i,$$

gdzie A_i są liczby stałe, od całki (25), otrzymujemy całkę drugiego gatunku. Można zatem znaleść pewną oznaczoną liczbę s całek kształtu

$$\iint \frac{P_i(x, y, z)}{F_z'}\, dx\, dy,$$

tak że każda całka kształtu (25) da się przedstawić w postaci:

$$\sum \alpha_i \iint \frac{P_i(x, y, z)}{F_z'}\, dx\, dy + \iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{F_z'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{F_z'}\right)\right] dx\, dy.$$

Uważajmy znów całkę pierwszego gatunku

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{F_z'}\, dx\, dy$$

i należące do niej równanie Fuchsa (Pi. 34, 36, P. S. 11).

Jeżeli $b_1, \ldots, b_N$ są punkty krytyczne równania, przyczem N jest klasą powierzchni, wtedy do każdego punktu należy całka (peryod całki Abela) $\Omega_i(y)$ holomorficzna dla punktu b_i i taka, że pewna druga całka równania nieholomorficzna w punkcie b_i rośnie o $\Omega_i(y)$, gdy y opisze drogę zamkniętą około b_i. Gdy więc y opisze tor zamknięty, mamy:

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0, \tag{29}$$

gdzie m_i są liczby całkowite, zaś wartością całki

$$\int_C \omega(y)\, dy$$

na tym torze jest

$$\sum m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy, \tag{30}$$

gdzie a jest punktem dowolnym. Na odwrót, gdy zachodzi tożsamość (29), istnieje cykl dwuwymiarowy całki podwójnej taki, że wartość całki po tym cyklu dana jest przez wzór (30).

Otóż teraz uważajmy dowolny cykl powierzchniowy, położony całkowicie w skończoności. Cykl ten możemy utworzyć przez odkształcenie cyklów

icm©

peryodów $\omega(y)$ całek równania E Picarda. Jeżeli równanie E jest nieprzywiedlne, wtedy funkcye $\Omega(y)$ liniowo niezależne są w liczbie $2p$ (p jest rodzajem przekroju płaskiego). Należą one do $2p$ z punktów osobliwych równania E w liczbie N (N jest klasa powierzchni). Dochodzimy stąd do rezultatu, że liczba peryodów wynosi najwyżej $N-2p$. Ale Picard uzupełnia ten rezultat dalszym rezultatem, orzekającym, że liczba peryodów jest najwyżej $N-4p$; odnosi się to do takich całek pierwszego gatunku podwójnych, że dla dowolnego stałego y mamy całkę pierwszego gatunku Abela. Jeżeli teraz będziemy uważali dowolną całkę podwójną

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{F_z'} dx\, dy,$$

wtedy odpowiadająca jej całka Abela

$$\int \frac{P(x, \bar{y}, z)}{F_z'} dx$$

posiada $2p+m-1$ peryodów, z których $m-1$ wielomianów y odpowiadających punktom w nieskończoności; zatem mamy $N-2p-(m-1)$ peryodów całki podwójnej. $N-4p-(m-1)$ z tych peryodów odpowiada cyklom położonym całkowicie w skończoności.

Dla całek podwójnych drugiego gatunku otrzymujemy stąd twierdzenie, że warunkiem dostatecznym, aby wyrażenie $\frac{Q}{F_z'}$ dało się sprowadzić do kształtu

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}$$

jest, by wszystkie peryody całki

$$\iint \frac{Q}{F_z'} dx\, dy$$

były zerem. Twierdzenie to jest prawdziwe dla dowolnej wartości liczby ρ, a dla wartości liczby $\rho=1$ warunek powyższy jest i konieczny. Stąd otrzymujemy liczbę całek drugiego gatunku ρ_0, nie zależnych liniowo na powierzchni, dla której mamy $\rho=1$. Dana jest ona przez wzór fundamentalny Picarda:

$$\rho_0 = N - 4p - (m-1) \qquad (31$$

i równa się liczbie peryodów całki podwójnej, położonych całkowicie w skończoności. Jeżeli powierzchnia posiada liczbę $\rho>1$, wtedy liczba ρ_0 zmniejsza się o $\rho-1$ i mamy wówczas wzór:

$$\rho_0 = N - 4p - (m-1) - (\rho-1). \qquad (32)$$

Liczba ρ_0 jest niezmiennikiem bezwzględnym.

Jeżeli jednak tylko $h \leqq 2p$ funkcyj Ω_i jest liniowo niezależnych, natenczas nasza powierzchnia posiada $2p-h$ całek o różniczkach zupełnych drugiego gatunku.

Można też warunek, aby powierzchnia posiadała $r=2p-h$ całek o różniczkach zupełnych drugiego gatunku, wyrazić w innej postaci:

„Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby powierzchnia posiadała r całek drugiego gatunku jest, by równanie E było spełnione przez r wielomianów y liniowo niezależnych“.

Uważajmy teraz dowolną całkę (25), przyczem P przechodzi przez krzywą podwójną. Wówczas mamy równanie różniczkowe E rzędu $2p+m-1$, którego $m-1$ całkami są wielomiany. Otóż warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby powierzchnia posiadała r całek liniowo niezależnych, jest, by $2p+m-1-r$ całek Ω_i było liniowo niezależnych. Otrzymujemy stąd twierdzenie, które jest rozszerzeniem twierdzenia poprzednio podanego i daje liczbę peryodów całki (25) w przypadku, gdy powierzchnia posiada r całek drugiego gatunku. Ponieważ w liczbie funkcye Ω_i $2p+m-1-r$ są liniowo niezależne, więc całka ta ma

$$N-2p-(m-1)-r$$

peryodów.

Otrzymujemy stąd liczbę warunków na to, aby całka dana, gdzie funkcya P przechodzi przez krzywe podwójne, była drugiego gatunku. Mianowicie liczba ta warunków wynosi $2p-r$, jeżeli powierzchnia posiada r całek Picarda drugiego gatunku.

Można teraz rozszerzyć wzór (32), otrzymany w założeniu, że powierzchnia nie posiada całek Picarda drugiego gatunku na przypadek, kiedy posiada r takich całek. Wówczas mamy wzór

$$\rho_0 = N - 4p - (m-1) + 2r - (\rho-1). \qquad (33)$$

Jeżeli powierzchnia posiada d punktów stożkowych odosobnionych, natenczas we wzorze (32) należy zastąpić N przez $N+d$ i otrzymuje się wzór ogólniejszy

$$\rho_0 = N + d - 4p - (m-1) + 2r - (\rho-1). \qquad (34)$$

Uważajmy teraz dwie powierzchnie F, w ten sposób odpowiadające sobie dwuwymiernie, że na powierzchni F mamy A punktów fundamentalnych przekształcenia, prostych punktów powierzchni albo punktów podwójnych, na powierzchni zaś F' mamy A' punktów fundamentalnych. Natenczas mamy

$$\rho + F = \rho' + F',$$

icm©

a stąd otrzymuje się związek

$$N + d - 4p - (m-1) + F = N' + d' - 4p - (m'-1) + F'. \quad (35)$$

Otóż, jak widzieliśmy (Roz. I, ust. 10), mamy niezmiennik dwuwymierny arytmetyczny

$$n' - 2a + 3n + \Sigma\mu = n_1' - 2a_1 + 3n_1 + \Sigma\mu_1.$$

(n rząd powierzchni, n' klasa powierzchni, a rząd stożka stycznego do powierzchni z dowolnego punktu, teraz

$$a = m(m-1) = 2(m-1) + 2p).$$

Związek zatem powyższy Rozdziału I napisze się przy obecnych znakowaniach w postaci

$$N - (m-4) - 4p + \Sigma\mu = N' = (m'-4) - 4p' + \Sigma\mu',$$

czyli jest to związek tensam, co (35), bo do $\Sigma\mu$ wliczają się prócz punktów fundamentalnych F też punkty podwójne odosobnione, podwójnie liczone, w liczbie d. Liczby ρ, ρ_0 zależą od natury arytmetycznej powierzchni, nietylko od jej krzywych i punktów wielokrotnych. I tak ogólna powierzchnia rzędu większego lub równego 4 (N. 12, 13) posiada tylko krzywe algebraiczne, które są przecięciem zupełnem powierzchni inną powierzchnią algebraiczną, więc na takiej powierzchni mamy:

$$\rho = 1, \qquad \rho_0 = (m \quad 1)(m^2 - 3m + 3).$$

Ale nie każda powierzchnia bez punktów osobliwych rzędu większego od 4 lub równego 4 posiada $\rho = 1$, a więc i liczba ρ_0 nie ma wartości stałej.

17. Liczba całek Picarda pierwszego i drugiego gatunku. Związek podstawowy.

Liczbę całek pierwszego i drugiego gatunku na powierzchniach algebraicznych zbadali dopiero matematycy włoscy, opierając się na teoryi układów algebraicznych krzywych na powierzchniach algebraicznych, o czem będziemy mówili w Rozdziale czwartym, referując odnośne prace Castelnuovo, Enriquesa i Severi'ego, w związku jednak z wykładem dotychczasowym rezultatów prac Picarda podamy już tu jego rezultaty; uzyskane znacznie później w tej samej kwestyi liczby całek pierwszego i drugiego gatunku metodami, które były zreferowane w ciągu tego Rozdziału (Pi. 41, 42, P. S. 11).

Picard opiera się znowu na równaniu różniczkowem E, dowodząc następującego twierdzenia, które udowodnił pierwszy Severi (S. 8, 11): „Powierzchnie regularne, t. j. powierzchnie, których rodzaj geometryczny równa się rodzajowi arytmetycznemu, nie posiadają całek Picarda pierwszych dwóch gatunków".

Dowód Picarda opiera się zresztą na twierdzeniu geometrycznem Castelnuovo, że na powierzchniach regularnych dołączone powierzchnie dowolnego rzędu wycinają na dowolnym przekroju płaskim układ zupełny krzywych dołączonych krzywej płaskiej przekrojowej. Dalej opiera się Picard na własności peryodów całek Abela (Picard „Sur la détermination du nombre des périodes des intégrales abéliennes" B. S. M. 1883), że liczba peryodów pewnej liczby liniowo niezależnych całek Abela nie może być mniejsza od podwójnej liczby tych całek.

Picard wyznacza dalej liczbę całek pierwszego i drugiego gatunku w sposób następujący. Jeżeli układ powierzchni dołączonych rzędu $m-3$ wycina na dowolnym przekroju płaskiej powierzchni układ liniowy krzywych $\infty^{p-\omega_{m-3}-1}$ dołączonych przekroju płaskiego rzędu $m-3$, natenczas mamy nierówność:

$$r \leqq 2\omega_{m-3}.$$

Ale ponieważ (Roz. III, ust. 5) zachodzi nierówność

$$\omega_{m-3} \leqq p_g - p_a,$$

więc otrzymuje się stąd następującą nierówność zasadniczą

$$r \leqq 2(p_g - p_a), \quad (36)$$

gdzie r jest liczbą całek Picarda pierwszego i drugiego gatunku. Liczba ta jest, jak okazuje Picard, parzysta.

Liczba r_0 całek Picarda pierwszego gatunku spełnia nierówność

$$r_0 \leqq \frac{r}{2},$$

a więc mamy:

$$r_0 \leqq p_g - p_a,$$

Nareszcie w związku z temi pracami Picarda jest jego następujący ważny rezultat (Pi. 43, P. S. 11) o seryach grup punktów, wyciętych na krzywej płaskiej przekrojowej powierzchni. Mianowicie powierzchnie dołączone rzędów $\geqq m-2$ wycinają na dowolnym przekroju płaskim układy zupełne grup punktów, wyciętych przez krzywe dołączone płaskie tych samych rzędów. A więc liczba ω_{m-2} dla każdej powierzchni algebraicznej równa się $p_g - p_a$, mianowicie ze wzoru Enriquesa (Roz. III, ust. 5)

icm©

$$p_g - p_a = \sum_{m-3}^{l-1} \omega_h$$

i ze wzoru poprzedniego

$$r \leqq 2\,\omega_{m-3}$$

wynika natychmiast:

$$r \leqq 2\,\omega_{m-3} \leqq 2 p_g - p_a,$$

ale ponieważ, jak zobaczymy w Rozdziale IV, zachodzi związek, odkryty przez Castelnuovo, Enriquesa i Severi'ego i o którym właśnie przed chwilą była mowa

$$r = 2\,(p_g - p_a),$$

więc stąd natychmiast wynika:

$$p_g - p_a = \omega_{m-3}, \tag{37}$$

co wyraża właśnie, że tylko powierzchnie dołączone rzędu $m-3$ mogą na krzywej płaskiej wycinać seryę punktów niezupełną.

18. Pogląd na rezultaty uzyskane drogą przestępną przez Picarda.

Badania Picarda, wyłożone w obecnym Rozdziale, wyświetliły związek między koneksyą powierzchni w sensie Analysis situs i między jej całkami pojedyńczemi i podwójnemi Badanie tych całek doprowadziło do kilku nowych niezmienników, jednych z nich dopiero później zrozumiano znaczenie geometryczne, znaczenie geometryczne innych dotąd nie jest znane. Potężnym środkiem badania okazało się pewno równanie różniczkowe liniowe klasy Fuchsa. Uwieńczeniem tych badań jest otrzymanie pewnego wzoru, łączącego nowe niezmienniki ρ, ρ_0 z charakterami rzutowemi powierzchni lub — co na jedno wychodzi — z pewnym niezmiennikiem liczbowym powierzchni, otrzymanym już przez Zeuthena i Noethera. Widzieliśmy jednak, że szereg pytań, tyczących się zarówno całek pojedyńczych pierwszego, drugiego i trzeciego gatunku, jak i całek podwójnych drugiego gatunku pozostał w tych badaniach bez odpowiedzi. Wspomnieliśmy też już, że dopiero na drodze geometrycznej uzyskano uzupełnienie rezultatów Picarda, a mianowicie głównie geometrzy włoscy kombinując metody funkcyjno-teoretyczne i geometryczne, odpowiedzieli na szereg z tych pytań. Jak wspomnieliśmy, badania te będą przedmiotem wywodów Rozdziału IV, wprzód jednak musimy w Rozdziale III poznać teoryę układów liniowych na powierzchniach algebraicznych, którą, nawiązując do prac Noethera, ugruntowali geometrzy włoscy w ostatniem dziesięcioleciu ubiegłego stulecia.

ROZDZIAŁ III.

Rozwój Teoryi układów liniowych krzywych algebraicznych na powierzchniach algebraicznych, który zawdzięczamy geometrom włoskim. Prace Castelnuovo i Enriquesa.

1. Wstęp.

Widzieliśmy w poprzednim Rozdziale, że badania przestępne matematyków francuskich doprowadziły do odkrycia pewnych własności układów liniowych i ogólnych układów algebraicznych na powierzchniach algebraicznych. Natomiast badania czysto geometryczne, rozpoczęte przez Noethera nad temi układami krzywych doznały po jego pracach długiej przerwy. W latach osiemdziesiątych rozwija się natomiast Teorya układów liniowych krzywych na płaszczyźnie we Włoszech, a rozwijają ją Jung, Bertini, Guccia i wielu innych. Teorya ta bada te układy, redukując je do pewnych typów kanonicznych. Z początkiem ostatniego dziesięciolecia ubiegłego stulecia nadaje Castelnuovo Teoryi tej nowy kierunek i potężny rozwój, wprowadzając do niej geometryę na krzywych algebraicznych, stworzoną przez Brilla i Noethera (Lit.). W ten sposób wprowadza nowe podstawowe pojęcia dla układów liniowych krzywych na płaszczyźnie i równocześnie stosuje te teorye do badania pewnych powierzchni, posiadających pewne układy krzywych, a dających się dwuwymiernie odwzorować na płaszczyźnie.

Analogicznie do tej Teoryi stwarza niedługo potem Enriques teoryę ogólną geometryczną układów liniowych krzywych na ogólnych powierzchniach algebraicznych, teoryę, która wysuwa się na pierwsze miejsce w całej Teoryi powierzchni algebraicznych i daje podstawę do świetnego rozwoju Teoryi tych powierzchni we Włoszech, tak dalece, że odtąd Teorya powierzchni algebraicznych przechodzi prawie zupełnie w ręce Włochów.

Chociaż przedstawienie teoryi rozwojów układu liniowych krzywych algebraicznych na płaszczyźnie nie jest wcale przedmiotem niniejszego referatu, jednakże z konieczności musimy krótko wyłożyć podstawowe jej pojęcia. Streścimy w tym celu główną pracę Castelnuovo w tej teoryi (C. 1).

2. Podstawowe pojęcia w Teoryi układu krzywych na płaszczyźnie. Treść pracy „Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane" Castelnuovo (1891).

Układem liniowym krzywych algebraicznych rzędu n, przechodzących przez punkty A_i z wielokrotnościami ν_i przepisanemi, wirtualnemi,

icm©

nazywa się układ wszystkich krzywych, spełniających te warunki. Układ ten może prócz punktów A_i posiadać jeszcze inne punkty stałe, wspólne wszystkim krzywym układu, pojedyńcze lub wielokrotne. Wymiarem wirtualnym $\varkappa$ tego układu nazywa się wymiar jego w ten sposób obliczony, jak gdyby warunki przejścia krzywej układu przez punkty A_i były wszystkie od siebie niezależne. Wymiar ten może być równy lub mniejszy od wymiaru prawdziwego k, wymiaru istotnego układu; różnica tych liczb nazywa się nadmiarem (sovrabbondanza) układu.

Układem dołączonym (sistema aggiunto) pewnego rzędu do układu danego nazywa się układ liniowy krzywych pewnego rzędu, które przechodzą $\nu_i - 1$ razy przez punkt A_i, będący dla krzywych układu danego rzędu n punktem wirtualnym ν_i-krotnym. Układy dołączone rzędu $n-3$, gdzie n jest rzędem krzywej, są najważniejsze. Wymiar tych ostatnich układów, powiększony o jedność, nazywa się, jeżeli jest wirtualnie obliczony, rodzajem wirtualnym, jeżeli zaś jest istotnie obliczony rodzajem istotnym danego układu krzywych.

Stopniem wirtualnym, (grado virtuale) układu nazywa się liczba

$$n^2 - \sum \nu_i^2 \tag{1}$$

punktów przecięcia dwóch krzywych układu oprócz punktów wirtualnych. Stopniem istotnym (grado effettivo) d nazywa się liczba istotna ruchomych punktów spotkania dwóch krzywych układu.

Uważajmy dwie krzywe algebraiczne, należące do dwóch różnych układów liniowych, oznaczając indeksami 1, 2 liczby charakterystyczne obu układów. Liczbą wirtualną I punktów przecięcia ruchomych obu krzywych nazywamy liczbę

$$I = n^{(1)} n^{(2)} - \sum \nu_i^{(1)} \nu_i^{(2)}. \tag{2}$$

Przekształcając teraz układy liniowe za pomocą przekształceń dwuwymiernych płaszczyzny, otrzymujemy twierdzenia, wyrażające niezmienności powyższych liczb charakterystycznych względem tych przekształceń. Nazwijmy grupą punktów A na pierwotnej płaszczyźnie grupę punktów A_i powiększoną o grupę punktów fundamentalnych przekształcenia, nie będących punktami A_i; nazwijmy dalej grupą A^* punktów grupę, którą na przekształconej płaszczyźnie tworzą punkty fundamentalne tej płaszczyzny i punkty nie będące fundamentalnemi, na które punkty A_i pierwotnej płaszczyzny przechodzą. Natenczas liczby

$$k, \quad \varkappa, \quad p, \quad \pi, \quad \delta, \quad I$$

są niezmienne w przekształceniu, t. j. równają się liczbom na płaszczyźnie

przekształconej, jeżeli te liczby tak obliczymy dla punktów A^*, jak na pierwotnej płaszczyźnie dla punktów A. Nadto proste, które w przekształceniu odpowiadają punktom fundamentalnym A, nie należącym do punktów A_i, należy razem z krzywemi przekształconemi krzywych dołączonych rzędu $n-3$ danego układu uważać jako krzywe dołączone rzędu n^*-3 układu, otrzymanego przez przekształcenie układu danego krzywych.

Pojęcia powyższe, utworzone dla krzywych nieprzywiedlnych, można w ten sposób uogólnić, aby się stosowały do krzywych przywiedlnych. A mianowicie uważajmy krzywę przywiedlną

$$C = C^{(1)} + C^{(2)} + \ldots + C^{(l)},$$

możemy wówczas liczby dające charaktery wirtualne krzywych C wyrazić przez liczby dające charaktery wirtualne krzywych nieprzywiedlnych $C^{(i)}$ w sposób następujący:

$$\varkappa = \sum_{i=1}^{l} + \sum_{i,j=1}^{l} I_{i,j}, \qquad i \neq j, \qquad i < j, \tag{3}$$

$$\pi = \sum_{i=1}^{l} \pi_i + \sum_{i,j=1}^{l} I_{i,j} - l + 1, \qquad i \neq j, \qquad i < j, \tag{4}$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{l} \delta_i + \sum_{i,j=1}^{l} I_{i,j}, \qquad i \neq j. \tag{5}$$

Układ krzywych C może być układem nieprzywiedlnym lub przywiedlnym.

Między liczbami charakterystycznemi istotnemi krzywych C i krzywych $C^{(i)}$ składowych nie można oczywiście ustalić związku równości, tak jak dla liczb charakterystycznych wirtualnych; mamy jednakże pewne nierówności: i tak wymiar istotny układu C nie jest mniejszy od sumy wymiarów istotnych układów krzywych $C^{(i)}$, a równa się tej sumie tylko wtedy, gdy albo tylko jeden z układów składowych jest nieskończony a wszystkie inne krzywe są odosobnione (wymiaru ∞^0), albo też wszystkie układy nieskończone są utworzone z krzywych jednego i tego samego układu pęku krzywych.

Co się tyczy rodzaju istotnego, to rodzaj istotny krzywych C nie jest mniejszy od rodzaju istotnego krzywych składowych.

Seryą charakterystyczną układu liniowego nazywa się serya liniowa zupełna, wycięta na jednej krzywej układu przez wszystkie inne. Jest to więc w oznaczeniach poprzednio wprowadzonych serya g_δ^{k-1}. Układ linio-

icm©

wy krzywych jest regularny, t. j. o nadmiarze zero, lub nieregularny, t. j. o nadmiarze większym niż zero, zależnie od tego, czy serya charakterystyczna jest niespecyalna czy też specyalna. Castelnuovo wprowadza dalej pojęcie układów rezydualnych. Uważajmy układ krzywych C rzędu n z punktami-podstawami A_i o wielokrotnościach istotnych ν_i, które również uważajmy jako wirtualne. Jeżeli układ krzywych C' rzędu $n' < n$, posiadający w punktach A_i wielokrotności wirtualne $\nu_i' \leqq \nu_i$, zawarty jest w układzie C, t. j. jeżeli istnieje układ liniowy krzywych C'' rzędu $n - n'$ o wielokrotnościach wirtualnych $\nu_i - \nu_i'$ w punktach A_i, wtedy układy C', C'' nazywają się rezydualne względem siebie w układzie liniowym krzywych C.

Aby krzywe układu C rozpadały się na krzywe C' i na krzywe C'', należy na te krzywe nałożyć pewną liczbę warunków, a mianowicie, jeżeli k, k', k'' są odpowiednio istotne wymiary układów C, C', C'', wtedy liczba warunków, które należy nałożyć na układ C, aby się rozpadał na pewną stałą krzywą C'' i na układ C' jest $k - k'$; jeżeli $k - k' = 1$, wtedy krzywe są jednowartościowe (monovalenti).

Krzywemi podstawowemi (curve fondamentali) względem układu C nazywają się krzywe, nie posiadające punktów ruchomych przecięcia z krzywemi C; krzywe te są więc jednowartościowe, bo warunek, aby krzywe C miały punkt wspólny z krzywą podstawową, powoduje rozpadnięcie się C na krzywą podstawową i na układ rezydualny.

Wymiar istotny krzywych podstawowych jest zero z wyjątkiem przypadku, gdy układ C jest pękiem, a krzywa fundamentalna zawiera krzywe tego pęku. Rodzaj istotny krzywych podstawowych nie przewyższa nadmiaru układu C. Nareszcie stopień wirtualny krzywych podstawowych nie przewyższa zera.

Ponieważ układ liniowy krzywych dołączonych rzędu $n - 3$ układu danego wycina na krzywych układu danego serye kanoniczne, nie posiadające punktów stałych, przeto krzywe stałe wspólne wszystkim krzywym dołączonym są podstawowe dla układu C. Układ liniowy krzywych dołączonych bez krzywych stałych nazywa się układem dołączonym czystym (sistema aggiunto puro).

Układ dołączony czysty jest nieprzywiedlny z wyjątkiem przypadku, gdy układ C składa się z krzywych hypereliptycznych, wtedy układ dołączony jest pękiem liniowym, a krzywe dołączone tworzą grupy $p - 1$ krzywych pęku.

Układ liniowy krzywych C wymiaru k spełniającego nierówność

$$k \geqq (\mu + 2)\left(\frac{p}{\mu} + 2\right),$$

gdzie p jest rodzajem krzywych C, zaś μ liczbą całkowitą $\geqq 1$, daje się sprowadzić albo do układu wszystkich krzywych płaskich rzędu $m \leqq 2\mu + 1$, albo też do układu krzywych rzędu M z punktem podstawy $\geqq M - \mu$-krotnym.

Wszystkie pojęcia, wprowadzone przez Castelnuovo do Teoryi układów liniowych krzywych na płaszczyźnie, uogólnił, jak zobaczymy, Enriques dla ogólnych powierzchni algebraicznych. Z tego też powodu podaliśmy obszernie treść pracy Castelnuovo.

3. Badania nad specyalnemi klasami powierzchni.

Równocześnie z Teoryą układów liniowych krzywych na płaszczyźnie zajęli się geometrzy włoscy specyalnemi klasami powierzchni, a mianowicie powierzchniami algebraicznemi, na których leżą pewne układy liniowe krzywych algebraicznych. Prace te są wcześniejsze od Teoryi ogólnych układów liniowych, którą Enriques stworzył około r. 1893.

Powierzchnie, których przekroje płaskie są krzywemi wymiernemi, są wymierne. Picard (por. Roz. I, ust. 12, Pi. 1, 2, P. S. II) i Guccia (Lit.) okazali, że te powierzchnie są albo prostokreślne wymierne, albo też są powierzchniami Steinera rzędu czwartego.

Powierzchniami, których przekroje płaskie są krzywemi eliptycznemi i hypereliptycznemi, zajmuje się Castelnuovo (C. 3), zakładając, że wzory postulacyi Noethera (Roz. I, ust. 9) dają liczbę powierzchni dołączonych liniowo niezależnych dla rzędów $\geqq n - 3$ tych powierzchni (co się później okazało prawdziwem) i że liczba liniowo niezależnych powierzchni dołączonych rzędu $n - 4$, t. j. rodzaj geometryczny powierzchni, również jest dana przez wzór Noethera; wyklucza więc powierzchnie prostokreślne eliptyczne i hypereliptyczne, a uważa tylko te powierzchnie, dla których wzór Noethera daje wartość zero, która się równa rodzajowi geometrycznemu powierzchni. Jak się później okazało, istnieją też inne powierzchnie (a mianowicie uważane już przez Picarda powierzchnie eliptyczne), które również posiadają rodzaj arytmetyczny ujemny, dany przez wzór Noethera; także i te powierzchnie wyjęte są z rozumowań Castelnuovo.

Rezultat, do którego dochodzi Castelnuovo, jest ten, że powyższe powierzchnie o przekrojach eliptycznych i hypereliptycznych są wymierne.

Enriques (E. 4) dowodzi wymierności powierzchni o przekrojach płaskich hypereliptycznych bez wszelkich ograniczeń, wykluczając jednak naturalnie powierzchnie prostokreślne.

Castelnuovo udowodnił następnie również bez poprzednich ograniczeń (z wyjątkiem wykluczenia powierzchni prostokreślnych) wymierność powierzchni o przekrojach płaskich eliptycznych (C. 11).

icm©

Również i te powierzchnie algebraiczne, które posiadają układ ∞^2 przekrojów płaskich przywiedlnych, sprowadzają się, jak to okazał Castelnuovo (C. 9), do znanych powierzchni, a mianowicie do powierzchni prostokreślnych i do powierzchni Steinera rzędu czwartego, tak że poprzednio omówione twierdzenie o powierzchniach, których przekroje płaskie są wymierne, można uważać jako specyalny przypadek obecnie podanego twierdzenia.

Powierzchnie, na których istnieje układ liniowy ∞^2 krzywych hypereliptycznych, bada Castelnuovo (C. 12). Zakładając, że serye liniowe grup punktów, wycięte na tych krzywych przez inne krzywe układu (serye, które Enriques nazwał analogicznie do seryi charakterystycznych układów liniowych na płaszczyźnie seryami charakterystycznemi układów na powierzchni), nie są specyalne, otrzymuje rezultat, że powierzchnie te albo są wymierne, albo się dadzą dwuwymiernie odwzorować na powierzchniach prostokreślnych eliptycznych lub hypereliptycznych.

Dowód opiera się na ważnem twierdzeniu, które udowodnił Castelnuovo (C. 10), opierając się na ogólnych zasadach Teoryi układów liniowych. Uważajmy dowolną inwolucyę na płaszczyźnie, a więc powierzchnię przedstawiającą tę inwolucyę, której spółrzędne są funkcyami wymiernemi spółrzędnych x, y na płaszczyźnie. Otóż Castelnuovo dowodzi wymierności tej powierzchni, a więc wymierności inwolucyj na płaszczyźnie.

Nareszcie bada Castelnuovo (C. 5) powierzchnie o krzywych płaskich przekrojowych rodzaju 3. Badania te prowadzi w dalszym ciągu G. Scorza (Lit.).

4. Teorya układów liniowych krzywych algebraicznych na powierzchniach algebraicznych. „Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche" Enriquesa (1893).

Uogólniając pojęcia i metody, które Castelnuovo wprowadził do Teoryi krzywych na płaszczyźnie, na układy liniowe na ogólnych powierzchniach algebraicznych, tworzy Enriques podstawę geometryczną Teoryi tych powierzchni, wykładając ją w dwóch wielkich pracach: „Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche" (1893) i „Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche" (1896). W drugiej z prac tych uwalnia Teoryę od pierwotnych ograniczeń, wprowadzając zarazem pewien symbolizm znakowania, który się okazał bardzo praktyczny.

Układ algebraiczny krzywych algebraicznych na powierzchni algebraicznej jest liniowy wymiaru k, jeżeli przez $k \geqq 1$ punktów powierzchni przechodzi jedna i tylko jedna krzywa i jeżeli można odnieść rzutowo elementy układu, t. j. krzywe układu, do punktów przestrzeni liniowej k-wymiarowej S_k. Gdy k jest większe od jedności, z pierwszego warunku wynika już drugi (E. 2).

Układ liniowy jest prosty — sistema semplice —, gdy nie wszystkie krzywe, przechodzące przez punkt ogólny na powierzchni, muszą zarazem przejść przez pewne oznaczone inne punkty, w przeciwnym razie mamy na powierzchni inwolucyę. Za pomocą układów liniowych można przekształcać dwuwymiernie powierzchnie tak, że krzywe układów przechodzą na przekroje płaskie w przestrzeni S_r o $r \geqq 3$ wymiarach. Krzywa ogólna, należąca do ogólnego układu liniowego, jest nieprzywiedlna. Jeżeli jednak wszystkie krzywe układu liniowego są przywiedlne, wtedy: a) albo wszystkie krzywe składają się z części stałej (lub kilku części stałych) i z jednej części, tworzącej układ liniowy krzywych na ogół nieprzywiedlnych; b) albo wszystkie krzywe składają się z tej samej liczby krzywych, należących do jednego i tego samego pęku krzywych liniowego albo nieliniowego; c) albo też zachodzą obie okoliczności równocześnie.

Ogólna krzywa w układzie liniowym, złożonym z krzywych nieprzywiedlnych, nie posiada punktów wielokrotnych ruchomych, z wyjątkiem punktów, położonych na krzywych wielokrotnych powierzchni.

Układy liniowe są normalne, jeżeli nie są zawarte w innych układach tego samego stopnia, t. j. w układach posiadających tę samą liczbę punktów ruchomych spotkania dwóch krzywych układu. Układy liniowe są zupełne, jeżeli nie są zawarte w innych układach liniowych krzywych tego samego rodzaju, co ogólna krzywa danego układu. Układ zupełny zawsze jest normalny, ale nie na odwrót.

Każdy układ liniowy danego stopnia zawarty jest w jednym oznaczonym układzie normalnym. Natomiast nie zawsze układ liniowy danego rodzaju zawarty jest w oznaczonym układzie liniowym zupełnym, chociaż zawsze, jeżeli zawarty jest w pewnym układzie zupełnym, zawarty jest tylko w tym jednym układzie. Dwie krzywe, dające razem krzywą przywiedlną układu zupełnego K, nazywają się rezydualnemi jedna względem drugiej w układzie K. Układ krzywych rezydualnych krzywej C, nie posiadających składowych krzywych wymiernych względem układu zupełnego K, jest również zupełny. Układ krzywych rezydualnych krzywej C dowolnej względem układu normalnego jest normalny, jeżeli posiada pewien stopień. Ponieważ każdy układ liniowy zawarty jest w oznaczonym układzie normalnym, więc można zawsze dodawać układy normalne do siebie, otrzymując układy normalne lub tworzyć wielokrotności danego układu normalnego.

Powierzchnie dołączone danej powierzchni są to powierzchnie, wycinające na ogólnym przekroju płaskim danej powierzchni, krzywe dołączone, a które na przekroju płaskim, przechodzącym przez punkt wielokrotny odosobniony powierzchni, wycinają krzywą, która razem z dowolną prostą przez punkt wielokrotny daje krzywą dołączoną.

Powierzchnie dołączone rzędu $n-4$ wycinają na powierzchni danej układ liniowy krzywych — system kanoniczny — posiadający kapitalną własność następującą. Krzywe tego układu wycinają na ogólnej krzywej dowol-

icm©

nego układu liniowego seryę liniową, która jest rezydualną seryi liniowej charakterystycznej względem seryi kanonicznej (seryą charakterystyczną nazywa się serya liniowa, wycięta przez wszystkie inne krzywe układu liniowego na danej krzywej). Na krzywych układu liniowego rezydualnego układu danego względem krzywych fundamentalnych układu, t. j. krzywych nie posiadających punktów ruchomych przecięcia z krzywemi układu danego, krzywe kanoniczne również wycinają seryę rezydualną seryi charakterystycznej układu częściowego.

Układ kanoniczny posiada własność niezmienności względem przekształceń dwuwymiernych w sensie następującym. Uważajmy układ liniowy posiadający i-krotny punkt-podstawę w punkcie zwyczajnym powierzchni f, t. j. punkt, przez który wszystkie krzywe układu i razy przechodzą. Przy przekształceniu układu na układ przekrojów płaskich nowej powierzchni F, punkt-podstawa przechodzi na krzywą wyjątkową (curva eccezionale) rzędu i, wspólną wszystkim powierzchniom dołączonym rzędu $n-4$ powierzchni przekształconej F, albo też może przejść na punkt wyjątkowy F, t. j. punkt, przez który przechodzą również wszystkie powierzchnie dołączone rzędu $n-4$. Enriques zakłada możność takiego przekształcenia dwuwymiernego powierzchni, aby wszystkie krzywe wspólne wszystkim powierzchniom dołączonym rzędu $n-4$, które się dadzą przekształcić na proste punkty powierzchni, zostały rzeczywiście przekształcone na te punkty. Na powierzchni przekształconej można odróżnić w sposób niezmienny względem przekształceń dwuwymiernych układy czyste i nieczyste (sistemi puri i sistemi impuri), t. j. układy, posiadające punkty-podstawy i układy bez punktów-podstaw.

Powierzchnie dołączone powierzchni danych a będące rzędu dowolnego można zdefiniować niezależnie od natury osobliwości, jakie posiada dana powierzchnia, ustanawiając, że zachowanie się ich w punktach osobliwych powierzchni jest takie same, jak zachowanie się niezmiennych przy przekształceniu dwuwymiernem powierzchni dołączonych rzędu $n-4$, z tym wyjątkiem, że punkty wyjątkowe nie nakładają żadnych warunków. Przekroje płaskie przecinają powierzchnie dołączone w krzywych dołączonych do krzywych przekrojowych.

Ponieważ serya charakterystyczna powierzchni rodzaju geometrycznego $p>0$ jest specyalna, więc wynika stąd, że na tych powierzchniach każda krzywa zawarta jest w układzie zupełnym, który—jak wiemy—jest jedyny.

Układem krzywych dołączonym układu przekrojów płaskich na powierzchni nazywa się układ liniowy krzywych, wycinający na przekrojach płaskich powierzchni seryę kanoniczną, a seryę liniową równą sumie seryi kanonicznej i seryi wyznaczonej przez i punktów, schodzących się w punkcie osobliwym i-krotnym na przekroju płaskim powierzchni, przechodzącym przez ten punkt. Układem dołączonym dowolnego układu liniowego wymiaru $\geqq 3$ prostego nazywa się układ liniowy, wycinający na krzywych układu danego seryę kanoniczną, a na krzywych rezydualnych krzywej fundamentalnej układu danego seryę, zawartą w sumie seryi liniowej kanonicznej układu rezydualnego, a różnicy seryi wyciętej przez układ dany na krzywej rezydualnej i seryi charakterystycznej układu rezydualnego.

Układ dołączony krzywych płaskich wycięty jest przez powierzchnie dołączone powierzchni danej. Układ dołączony dowolnego układu liniowego krzywych wycina na krzywych układu seryę kanoniczną zupełną lub niezupełną, posiadającą niedostatek (diffetto di completezza) ω. Jeżeli π jest rodzaj krzywych, wtedy wymiar istotny układu dołączonego dany jest przez wzór:

$$r = p_g + \pi - \omega - 1. \tag{6}$$

Wymiarem wirtualnym nazywa się liczba $p_g+\pi-1$, przechodząca na wymiar istotny, gdy $\omega=0$. Nazwijmy $\delta(rC)$ niedostatek, jaki na krzywych r-krotnego układu rC układu krzywych przekrojowych płaskich C wycina układ dołączony do układu krzywych rC. Niedostatek $\delta(rC)$ rośnie lub przynajmniej nie maleje, gdy r rośnie. Dla każdego układu krzywych C_1 można znaleść taką liczbę całkowitą ρ, aby, gdy $r\geqq\rho$, zachodziła nierówność

$$\delta(rC) \geqq \delta(C_1),$$

gdzie $\delta(C_1)$ jest niedostatek seryi wyciętej przez układ dołączony układu C_1 na krzywych tego układu.

Liczba $\delta(rC)$ posiada maximum skończone. W istocie, jeżeli p_g jest rodzajem geometrycznym powierzchni, a p_a jest rodzajem arytmetycznym wirtualnym, danym przez wzory postulacyi Noethera, zachodzi ważna nierówność

$$\delta(rC) \leqq p_g - p_a. \tag{7}$$

Enriques przypuszcza, że maximum właśnie równa się stronie prawej, coby było równocześnie dowodem niezmienności liczby p_a we wszystkich tych przypadkach, gdzie powierzchnia posiada osobliwości, występujące we wzorach postulacyi Noethera.

Enriques dowodzi, że jeżeli

$$\delta(2C) = 0,$$

natenczas:

$$\delta(rC) = 0$$

nie tylko dla $r=1$, ale i dla wszystkich $r\geqq 2$. Mamy więc twierdzenie następujące:

icm©

„Jeżeli układ czysty C na powierzchni rodzaju $p_g > 0$ posiada taką własność, że $\delta(2C) = 0$, wtedy każdy układ dołączony dowolnego układu czystego wycina na nim seryę kanoniczną zupełną". Stąd wynika, że na powierzchniach rodzaju $p_g > 0$ i na których dla układu czystego C mamy $\delta(2C) = 0$, zachodzi równość

$$p_g = p_a \tag{8}$$

i wzory postulacyi Noethera są prawdziwe dla powierzchni dołączonych rzędów $\geqq n - 4$. Na odwrót, jeżeli te wzory są prawdziwe, mamy dla każdego układu czystego C

$$\delta(C) = 0.$$

Powierzchnie dołączone dowolnego rzędu wycinają na powierzchniach, dla których zachodzi równość (8), układ zupełny, do którego należy dana krzywa zupełna.

Uważajmy teraz układ nieczysty, posiadający punkty-podstawy i_1, $i_2, \ldots, i_s$-krotne. Układ dołączony posiada punkty te odpowiednio jako $i_1 - 1$, $i_2 - 1, \ldots, i_s - 1$-krotne. Każdy układ nieczysty można otrzymać z układu czystego, albo też posiadającego proste tylko punkty-podstawy, nakładając punkty-podstawy na krzywe tego ostatniego układu. Nareszcie układ dołączony układu nieczystego posiada wymiar $p_g + \pi - 1$. Wszystko to zachodzi w założeniu (8), albo też w założeniu równoważnem $\delta(2C) = 0$. Jeżeli serya charakterystyczna układu przekrojów płaskich danej powierzchni jest zupełna, wtedy z równości

$$\delta(C) = 0$$

wynika równość

$$\delta(2C) = 0, \tag{9}$$

a stąd równość (8), ale z równości (8) lub z równości (9) nie musi koniecznie wynikać, że serya charakterystyczna układu jest zupełna. Jeżeli $p_g > 2$, i nadto układ kanoniczny powierzchni jest nieprzywiedlny, wtedy z dwóch następujących warunków: a) istnienia dowolnego układu czystego prostego o seryi charakterystycznej zupełnej, i b) wymiaru $p_g + \pi - 1$ układu dołączonego, wynikają równości (8) i (9).

Na powierzchniach, dla których mamy $p_g = p_a > 0$, serya charakterystyczna każdego układu czystego jest zupełna, jeżeli jest zupełna serya charakterystyczna układu kanonicznego.

Enriques zakłada w dalszym ciągu pracy, że powierzchnia posiada seryę charakterystyczną układu kanonicznego zupełną. Dowodzi następnie nadzwyczaj ważnego twierdzenia, które stanowi analogon do znanego twierdzenia Riemanna-Rocha dla krzywych algebraicznych i daje wymiar układu liniowego krzywych algebraicznych, położonego na danej powierzchni.

Twierdzenie to nazywa się twierdzeniem Riemanna-Rocha dla powierzchni.

Uważajmy dowolny układ liniowy C. Niechaj n, π będą stopniem i rodzajem tego układu; niechaj dalej i będzie indeksem specyalności tego układu, t. j. liczbą liniowo niezależnych krzywych układu kanonicznego, przechodzących przez krzywą danego układu liniowego C; nareszcie niechaj ω będzie niedostatkiem seryi liniowej, jaką na krzywej C wycinają krzywe kanoniczne. Wtedy wymiar r układu C równa się

$$r = n - \pi + p + 1 + \omega - i.$$

Jeżeli mamy dwa układy liniowe C i C_1, które są rezydualne jeden względem drugiego, to znaczy że ich suma daje układ kanoniczny danej powierzchni, wtedy między liczbami n, π, ω charakterystycznemi układu C i między liczbami n_1, π_1, ω_1 charakterystycznemi układu C_1 zachodzą następujące związki:

$$n - \pi = n_1 - \pi, \qquad \omega = \omega_1.$$

Liczba $\omega - i$ nazywa się nadmiarem (sovrabbondanza), układu liniowego C.

Enriques dowodzi następującego ważnego twierdzenia: Układ C' dołączony do układu C bez punktów-podstaw posiada nadmiar ω' równy zeru. Układy takie nazywają się regularnemi.

Liczba $n - \pi + p + 1$ nazywa się wymiarem wirtualnym ρ układu, zaś liczba r wymiarem istotnym. Mamy więc równość:

$$r - \rho = \omega - i.$$

Wzór na wymiar wirtualny układu liniowego

$$\rho = n - \pi + p + 1 - i$$

można także wyprowadzić niezależnie od założenia, że serya charakterystyczna układu kanonicznego jest zupełna, ale nie można bez tego założenia naogół okazać, że liczba ω nie może być ujemna. Uważajmy jednakże układy C, których wymiar istotny nie jest mniejszy od liczby $\frac{p^{(1)} - 1}{2}$, przyczem $p^{(1)}$ jest rodzajem krzywych kanonicznych. Dla tych układów można dowieść, że liczba ω nie może być ujemna, a więc wymiar istotny tych układów spełnia nierówność

$$r \geqq n - \pi + p + 1 - i.$$

Szczególnie ważnemi dla danego układu krzywych są jego krzywe fundamentalne, t. j. krzywe, które są zawarte w ∞^{r-1} krzywych danego

icm©

układu. Mamy następującą równość między liczbami ω, i danego układu C, liczbami ω_1, i_1 układu rezydualnego względem krzywej fundamentalnej i rodzajem Π tej krzywej fundamentalnej

$$\omega - i = \omega_1 - i_1 + \Pi.$$

Stąd wynika w szczególności, że układ C regularny wymiaru większego niż rodzaj p powierzchni nie może posiadać krzywych fundamentalnych rodzaju większego niż zero.

Uważajmy teraz układy mC, m-krotne danego układu liniowego, nie posiadającego punktów-podstaw i nieprzywiedlnego. Enriques okazuje, że gdy m jest dostatecznie wielkie, układ taki jest regularny. Krzywe fundamentalne układu C są również krzywemi fundamentalnemi układu mC.

Między krzywemi fundamentalnemi szczególne miejsce zajmują krzywe rodzaju zero. Krzywe te są również fundamentalne dla układu krzywych kanonicznych, t. j. nie nakładają warunku na powierzchnie kanoniczne rzędu $n-4$, a więc jeżeli daną powierzchnię tak przekształcimy, że krzywe kanoniczne przejdą na przekroje płaskie danej powierzchni, wtedy krzywe fundamentalne przejdą na punkty podwójne powierzchni przekształconej. Albo też krzywe fundamentalne nakładają warunki na krzywe kanoniczne, a wówczas, przy powyższem przekształceniu, krzywe fundamentalne przechodzą na krzywe wymierne, położone na przekształconej powierzchni. Albo nareszcie krzywe fundamentalne mogą być krzywemi wyjątkowemi, i wtedy dadzą się przekształcić na zwyczajne punkty powierzchni.

Nareszcie Enriques bada układy liniowe złożone, t. j. takie, że krzywe, przechodzące przez jeden punkt powierzchni, przechodzą zarazem przez pewne inne punkty powierzchni. Mówi się, że układ C złożony jest przez inwolucyę I_m.

Obrazem inwolucyi na danej powierzchni F' jest pewna powierzchnia F. Otóż, jeżeli m punktom na powierzchni F odpowiada jeden punkt powierzchni F', wtedy mamy związek następujący między układami kanonicznemi obu powierzchni. Układ kanoniczny powierzchni F równa się sumie układu liniowego krzywych przekształconych krzywych kanonicznych powierzchni F' i krzywych koincydencyi inwolucyi na powierzchni F. Jeżeli $p^{(1)}$, $P^{(1)}$ oznaczają odpowiednio rodzaj krzywych kanonicznych na F' i na F, jeżeli τ jest rodzaj krzywej koincydencyi na F, zaś δ liczba punktów przecięcia krzywej koincydencyi na F z krzywą, odpowiadającą krzywej kanonicznej na F', wtedy mamy związek następujący:

$$P^{(1)} = m\,(p^{(1)} - 1) + \tau + \tfrac{3}{2}\,\delta.$$

Specyalnym przypadkiem inwolucyj są inwolucye wymierne, których

obrazem są powierzchnie wymierne. Sieć (układ liniowy ∞^2) krzywych na powierzchni daje zawsze taką inwolucyę wymierną. Jeżeli grupy inwolucyi takiej składają się z dwóch punktów, natenczas krzywe sieci są hypereliptyczne, a krzywe kanoniczne powierzchni są też hypereliptyczne i utworzone przez pary punktów inwolucyi.

5. Dalszy rozwój ogólnej teoryi układów liniowych na powierzchniach. „Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche" Enriquesa.

W dalszej pracy podstawowej dla teoryi układów liniowych uogólnia Enriques znacznie teoryę, wyłożoną w „Ricerche". Uogólnienie to obejmuje przedewszystkiem zarówno powierzchnie, dla których jest spełniony warunek (8), t. j. powierzchnie regularne, jak i powierzchnie o $p_g > p_a$ t. j. nieregularne. Następnie rodzaj geometryczny nie podlega już ograniczeniu $p_g > 0$, ale może być równy zeru. Dalej uogólniając podstawowe pojęcia teoryi, rozważa Enriques równocześnie z układami nieprzywiedlnemi układy przywiedlne.

Dzięki twierdzeniu fundamentalnemu, które panuje nad całą pracą, nie podlegają już rozważane powierzchnie żadnym ograniczeniom, wyrażającym się rzutowo w ograniczeniach co do natury krzywych wielokrotnych i punktów wielokrotnych, a więc ograniczające krzywe fundamentalne na powierzchni. Bardzo wygodny symbolizm znakowania pozwala Enriquesowi ujednostajnić traktowanie wszystkich krzywych, w szczególności zaś krzywych wyjątkowych, tak że rezultaty i twierdzenia stosują się w brzmieniu jednostajnem do wszystkich powierzchni dwuwymiernie równoważnych.

Uważajmy więc utwór algebraiczny podwójnie nieskończony (*ente doppiamente infinito*). Punktem utworu jest albo punkt właściwy, albo punkt niewłaściwy, t. j. krzywa wyjątkowa przekształcona pojedyńczego punktu w przekształceniu dwuwymiernem. Tak samo przez krzywą na utworze rozumie się pewną liczbą właściwych krzywych nieprzywiedlnych wraz z pewną liczbą krzywych wyjątkowych.

Jako obraz rzutowy utworu ∞^2 możemy uważać powierzchnię F, położoną w pewnej przestrzeni n-wymiarowej R_n bez punktów osobliwych. Można interpretować części rzeczywiste i urojone spółrzędnych jako spółrzędne przestrzeni czterowymiarowej Riemanna. Krzywa na F przedstawiona jest w tej przestrzeni przez powierzchnię Riemanna.

Podstawowem działaniem na powierzchni jest dodawanie punktu O do krzywej C, na której punkt O leży. Jeżeli punkt O będziemy uważali za nie należący do krzywej C, t. j. jeżeli powierzchnia Riemanna, przedstawiająca krzywą C będzie posiadała otwór w punkcie O, wtedy

$$C + O$$

oznacza krzywą C z punktem O, uważanym za należący do krzywej C.

icm©

A więc obrazem krzywej $C+O$ jest powierzchnia Riemanna bez otworu. Jeżeli zaś O bywa uważane za należące do C, natenczas $C+O$ oznacza sumę krzywej C i krzywej wyjątkowej O, która przez przekształcenie dwuwymierne z punktem fundamentalnym w O przejdzie na rzeczywistą krzywą wyjątkową na powierzchni przekształconej. Z tego wynika co następuje: Jeżeli krzywa C posiada punkt O jako i-krotny, natenczas krzywa

$$C+O^{\rho}$$

posiada ten sam punkt jako $i-\rho$-krotny.

Rozumowanie Enriquesa jest następujące. Krzywa C mająca w O punkt i-krotny posiada w tym punkcie $\frac{i(i-1)}{2}$ przejść od jednego liścia powierzchni Riemanna do drugiego, a więc jeżeli będziemy uważali odpowiadającą powierzchnię Riemanna i wykonamy otwór w O, wtedy odpadnie tych $\frac{i(i-1)}{2}$ przejść. Jeżeli następnie dołączymy do tej powierzchni pojedyńczy liść Riemanna i połączymy z każdym z i liści tej powierzchni, będziemy mieli $i-1$ nowych przejść między liśćmi powierzchni Riemanna, a więc zostało teraz usuniętych

$$\frac{i(i-1)}{2}-(i-1)=\frac{(i-1)(i-2)}{2}$$

przejść tyle, ile usuwa otwór w punkcie $i-1$-krotnym powierzchni Riemanna.

Jeżeli jest dana jedna jedyna krzywa, nie będzie można znaleść takiej powierzchni, aby na niej było można w zupełności krzywą określić, to znaczy określić jej koneksyę. Należałoby dla każdego punktu z osobna określić, czy go należy uważać za zwyczajny punkt powierzchni Riemanna odpowiadającej krzywej, czy za otwór tej powierzchni. Jeżeli jednak dany jest nieskończony układ krzywych, wystarczy określić krzywą w punktach wspólnych wszystkim krzywym, t. j. w punktach-podstawach.

Punkty-podstawy układu bez krzywych stałych należy uważać jako otwory w odpowiadającej krzywej powierzchni Riemanna.

Jeżeli krzywa układu ciągłego C jest sumą dwóch krzywych

$$C=C'+C'',$$

wtedy C' i C'' nazywają się krzywemi częściowemi krzywej C. Częściami krzywych mogą być też krzywe wyjątkowe. Resztą punktu O ρ-krotnego O^{ρ} względem układu krzywych C jest układ krzywych, należących do układu poprzedniego i posiadających punkt O jako ρ-krotny. Punkt O nie należy

wtedy do krzywych, t. j. na powierzchni Riemanna odpowiadającej krzywym resztującym mamy w punkcie O otwór; możemy symbolicznie napisać

$$C'=C-O^{\rho}.$$

Jeżeli C posiada punkt O jako $i-\rho$-krotny, wtedy C' posiada tensam punkt jako i-krotny.

Układem liniowym ∞^r na utworze algebraicznym ∞^2 i na każdej powierzchni dwuwymiernie równoważnej danej nazywamy układ takich krzywych, że przez r dowolnych punktów na tym utworze przechodzi jedna i tylko jedna krzywa i że każdą krzywą można jednoznacznie odnieść do punktów pewnej przestrzeni liniowej S_r, a więc każdemu punktowi w S_r odpowiada układ liniowy ∞^{r-1} krzywych, zawarty w układzie ∞^r krzywych. Jeżeli $r=1$, mamy pęki wymierne, każdemu punktowi pewnej prostej odpowiada krzywa pęku i nawzajem.

Łatwo udowodnić, że druga własność układów krzywych wynika z pierwszej własności (por. ust. poprzedni). Dla $r=1$ natomiast istnieją układy nieliniowe, pęki nieliniowe, czyniące zadosyć pierwszemu warunkowi.

Jeżeli do układu $|C|$ dodamy krzywą stałą C' i jeżeli punkt O jest i-krotny dla $|C|$ zaś ρ-krotny dla krzywej C', natenczas na powierzchni Riemanna mamy punkt $i+\rho$-krotny, w którym jest otwór, i punkt ten jest punktem-podstawą $i+\rho$-krotnym dla układu $|C|+C'$.

Układ ∞^1 krzywych nie posiada punktów ruchomych spotkania dwóch krzywych układu; jeżeli jednak wymiar $r>1$, wtedy punkty ruchome opisują całą powierzchnię. Nie jest rzeczą możliwą, aby punkty ruchome spotkania opisywały tylko pewną linię a nie całą powierzchnię. Natomiast jeżeli wogóle niema punktów ruchomych spotkania dla $r>1$, wtedy układ utworzony jest z krzywych, z których każda składa się z $m>1$ krzywych, należących do pęku wymiernego lub niewymiernego. Pojęcia stopnia istotnego, rodzaju istotnego, wymiaru istotnego i seryi charakterystycznej zostały już poprzednio zdefiniowane. Między liczbami wymiaru r układu i stopnia n układu zachodzi nierówność

$$n \geqq r-1.$$

Układy liniowe są albo proste albo złożone. Układ ∞^r krzywych jest prosty, jeżeli układ ∞^{r-1} krzywych, przechodzących przez dowolny punkt powierzchni, ma stopień $n-1$. Natomiast układ jest złożony, jeżeli układ krzywych ∞^{r-1} ma stopień $n-m$, $m>1$. Wtedy mamy inwolucyę I_m na powierzchni i zachodzi równość:

$$n=ms.$$

icm©

Jeżeli $r=2$ i jeżeli powierzchnia nie jest wymierna $(n>1)$, wtedy mamy właśnie inwolucyę I_n na powierzchni.

Daną powierzchnię można odwzorować w przestrzeni S_r zapomocą układu krzywych na powierzchni. Krzywym układu odpowiadają hyperpłaszczyzny w S_r. Krzywym przechodzącym przez punkt dowolny na powierzchni odpowiadają hyperpłaszczyzny, przechodzące przez punkt dowolny w przestrzeni S_r, gdy układ obrany na powierzchni jest prosty. Rzędem powierzchni w S_r jest istotny stopień układu krzywych n. Jeżeli układ na powierzchni należy do inwolucyi I_m, wówczas mamy powierzchnię rzędu $\frac{n}{m}$.

Można w inny jeszcze sposób tak odwzorować powierzchnię daną, aby mieć zawsze odpowiedniość jedno-jednoznaczną, mianowicie uważając oprócz układu ∞^r pęk wymierny krzywych na pierwotnej powierzchni i odwzorowując w przestrzeni S_{n+1} tak, aby krzywym układu $|C|$ odpowiadały hyperpłaszczyzny, przechodzące przez punkt O, zaś pękowi odpowiadały hyperpłaszczyzny, przechodzące przez pewno S_{r-1}, nie zawierające O.

Przekształcenia poprzednie służą do dowodu następujących twierdzeń (por. ustęp poprzedni):

Jeżeli układ liniowy jest przywiedlny, wtedy albo $n=0$, i układ składa się z krzywych złożonych z krzywych pęku, albo krzywe układu składają się z części stałej i z krzywej nieprzywiedlnej ruchomej, albo nareszcie zachodzą obie okoliczności powyższe równocześnie. Ogólna krzywa układu liniowego nieprzywiedlnego nie posiada punktów wielokrotnych ruchomych, nie leżących na liniach wielokrotnych powierzchni.

Uważajmy układ $|O|$ i krzywą C' i załóżmy że krzywa C' zawarta jest całkowicie w krzywych układu $|C|$; będzie wówczas istniał pewien układ $|C''|$ o wymiarze $\geqq 0$ krzywych pozostałych resztujących układu $|C|$ względem krzywej C'

$$|C| - C' = |C''|.$$

Jeżeli $|C'|$ ma punkt 0 jako punkt-podstawę ρ-krotny, zaś $|C|$ tego punktu-podstawy nie posiada, wtedy O^ρ jest krzywą stałą układu $|C''|$, gdyż C nie posiada tego punktu jako punktu-podstawy.

Mamy dalej następujące ważne twierdzenie: jeżeli układ $|C|$ zawarty jest częściowo w układzie $|C'|$, wtedy stopień układu $|C'|$ przewyższa stopień układu $|C|$.

Krzywą fundamentalną nazywa się krzywa, która jest częścią składową krzywych układu ∞^r $(r>1)$, przez jeden jej punkt przechodzących. Do krzywej fundamentalnej K należy dołączyć krzywe stałe częściowe K_i układu rezydualnego, otrzymanego po odłączeniu krzywej X i jego punktów-podstaw O^ρ, które nie są punktami-podstawami dla C tak, że układ rezydualny przyjmuje kształt

$$|C'| = |C| - K - O^\rho - \Sigma K_i.$$

Enriques rozróżnia krzywe fundamentalne właściwe, których rodzaj C' jest mniejszy, aniżeli rodzaj krzywych C i krzywe fundamentalne niewłaściwe, dla których te oba rodzaje są sobie równe.

Odwzorowując utwór ∞^2 jako powierzchnię rzutową, której przekrojami płaskiemi są krzywe układu $|C|$, widzimy, że krzywa fundamentalna staje się punktem zwyczajnym lub wielokrotnym na tej powierzchni. Jeżeli rodzaj przekroju płaskiego przez ten punkt jest mniejszy, aniżeli rodzaj przekroju ogólnego płaskiego (np. dla punktów wielokrotnych odosobnionych), wtedy mamy krzywą fundamentalną właściwą, w przeciwnym jednak razie mamy krzywę fundamentalną niewłaściwą.

Ponieważ każdą powierzchnię można odwzorować w pewnej przestrzeni S_r tak, żeby nie posiadała żadnych punktów osobliwych, aby więc jej płaskie przekroje miały wszystkie ten sam rodzaj i były nieprzywiedlne, można więc na każdej powierzchni w przestrzeni S_3 znaleść układ liniowy nieprzywiedlny, prosty i bez krzywych fundamentalnych. Układy takie nazywa Enriques układami nieosobliwemi.

Podstawowem jest pojęcie układów normalnych (por. ustęp poprzedni). Są to układy, które nie są zawarte w innych układach tego samego stopnia $n>0$, ale są większego wymiaru.

Pęki nieprzywiedlne $n=0$ uważa się zawsze za normalne.

Ponieważ mamy

$$n \geqq r-1,$$

więc najwyższy wymiar układu jest $r=n+1$. W tym ostatnim przypadku przekształcając przestrzeń $n+1$-wymiarową przy pomocy wzorów postaci

$$X_1 = \frac{L_1}{L_{n+2}}, \quad \ldots\ldots, \quad X_{n+1} = \frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}$$

otrzymuje się powierzchnię wymierną, bo zawierającą układ ∞^r krzywych wymiernych jako krzywych n-tego rzędu w S_{n+1}.

Podstawowem twierdzeniem dla układów liniowych jest twierdzenie:

„Na utworze algebraicznym każdy układ liniowy nieprzywiedlny albo jest normalny, albo jest zawarty w jednym jedynym układzie normalnym tego samego stopnia".

Mając dane układy liniowe normalne, możemy w rozmaity sposób tworzyć nowe układy liniowo normalne.

Pierwszym sposobem tworzenia jest dodawanie układów. Z dwóch układów $|C_1|$, $|C_2|$ tworzy się trzeci układ, który zawiera wszystkie krzywe C_1+C_2, a jest nieprzywiedlny; na stopień tego nowego układu mamy wzór

$$n = n_1 + n_2 + 2_i, \tag{10}$$

icm©

gdzie i jest liczbą ruchomych przecięć krzywych C_1 i C_2. Układ taki zawsze istnieje, jest jedyny i jest nieprzywiedlny, wyjąwszy gdy $|C_1|$ i $|C_2|$ należą do jednego i tego samego pęku. Wtedy układ ten jest przywiedlny.

W ten sam sposób definiujemy układ $|nC|$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

Pojęcie układów normalnych można uogólnić dla układów przywiedlnych. W ogólności nazywa się układ normalnym, jeżeli jego krzywe nie należą jako krzywe całkowite do układu o większym wymiarze. Twierdzenie o jednoznacznie określonym układzie normalnym stosuje się i do układów przywiedlnych, więc zupełnie ogólnie każda dowolna krzywa na powierzchni zawarta jest w jednym układzie normalnym wymiaru $\geqq 0$.

Także twierdzenie o istnieniu sumy dwóch układów zupełnych stosuje się do dowolnych układów liniowych nieprzywiedlnych lub przywiedlnych o wymiarze $\geqq 0$.

W teoryi układów liniowych górującem jest twierdzenie o reszcie. Opiera się ono na lemmacie następującym:

Uważajmy dwa dowolne układy liniowe $|C_2|$ $(r \geqq 1)$ i $|C_1|$ $(r \geqq 0)$ normalne, wtedy układ

$$|C_2| - |C_1| = |C|,$$

gdzie C_1 jest krzywą dowolną układu $|C_1|$, jest układem normalnym.

Jeżeli $|C_2|$ ma wymiar $r \geqq 2$, zaś $|C_1|$ ma wymiar $\geqq 1$, wtedy układ

$$|C| = |C_2| - C_1$$

nie zależy od krzywej C_1 układu $|C_1|$, a więc istnieje układ $|C|$ taki, że mamy

$$|C_1 + C| = |C_2|.$$

Układ

$$|C_2| - C_1$$

pisze się w kształcie

$$|C_2 - C_1|.$$

Każdy układ $|C_1|$ można uważać za wycięty częściowo przez układ nieprzywiedlny prosty $|C|$ tak, że układ resztujący jest też prosty.

Ale układ $|C_1|$ może posiadać punkty-podstawy $O_1^{\rho_1}, \dots O_s^{\rho_s}$, których $|C|$ nie posiada. Mamy więc ogólnie:

$$|C_1| = |C - C_2 - O_1^{\rho_1} - \dots - O_s^{\rho_s}|.$$

Każdy układ $|C_1|$ można uważać zawsze za różnicę dwóch układów nieprzywiedlnych

$$|C_1| = |C - C_2|.$$

Na podstawie wywodów poprzednich można wprowadzić pojęcie stopnia wirtualnego, które zastępuje stopień istotny, gdy definicya tego ostatniego zawodzi. Mianowicie mieliśmy wzór (10)

$$n = n_1 + n_2 + 2i$$

w przypadku, gdy układy $|C_1|$ i $|C_2|$ są wymiaru > 0 i nieprzywiedlne. Jeżeli $|C_1|$ jest przywiedlne i ma wymiar $\geqq 0$, można znaleść układy nieprzywiedlne $|C|$ i $|C_2|$ tak, że mamy

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

a wtedy liczba

$$n_1 = n - n_2 - 2i$$

nazywa się stopniem wirtualnym układu $|C_1|$. Liczba ta nie zależy od układu obranego $|C_2|$. Nu podstawie tego rezultatu dwa jakiekolwiek układy (nieprzywiedlne i przywiedlne o wymiarze $\geqq 0$) o stopniach wirtualnych n_1, n_2, mają sumę $|C_1 + C_2|$ stopnia wirtualnego $n_1 + n_2 + 2i$. Możemy więc w szczególności obliczyć stopień wirtualny krzywej O^ρ, uważając dwa układy $|C|$ i $|C - O^\rho|$

$$|O^\rho| = |C| - |C - O^\rho|.$$

Stopień ten wynosi $\rho(\rho - 2)$.

Na stopień wirtualny układu $|C|$, który jest różnicą dwóch układów nieprzywiedlnych $|C'|$, $|C''|$, mamy, jeżeli

$$|C| = |C' - C'' - \Sigma O^\rho|,$$

wzór:

$$n = n' - n'' - 2i - \Sigma\rho^2,$$

gdzie i jest liczbą przecięć krzywych C i C''.

Jak pojęcie stopnia można tak zmodyfikować, ażeby się stosowało do wszystkich układów krzywych, podobnie możemy rozszerzyć pojęcie rodzaju, wprowadzając rodzaj wirtualny. Mianowicie jeżeli krzywa ogólna układu przywiedlnego składa się z s krzywych nieprzywiedlnych o rodzajach $\pi_1 \dots, \pi_s$, złączonych z sobą w ρ punktach tak, że w tych punktach mamy $i_1, \dots i_\rho$ przejść, łączących po dwa liście s powierzchni Riemanna odpowiadających tym s krzywym (w każdym punkcie i-krotnym jest $\frac{i(i-1)}{2}$ przejść), wtedy rodzaj krzywej wynosi:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s + i_1 + i_2 + \dots + i_s - s + 1. \qquad (11)$$

Stosując wzór ten do układu krzywych $|C_1|$, który otrzymano jako re-

icm©

zydualny wzledem układu nieprzywiedlnego $|C|$ nieprzywiedlnego układu $|C_2|$

$$|C_1| = |C - C_2 - \Sigma O^\rho|,$$

mamy wzór

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \sum \frac{\rho(\rho-1)}{2} + i - 1. \tag{12}$$

Przechodzimy do przedstawienia najważniejszego działania na powierzchni, wprowadzonego przez Enriquesa, które okazała się nader płodnem dla odkrywania nowych własności niezmiennych powierzchni. Jest to konstrukcya układów poddołączonych (subaggiunte) danego układu. Przedewszystkiem należy wyjaśnić pojęcie tych powierzchni poddołączonych. Są to powierzchnie, wycinające na dowolnej płaszczyźnie krzywe dołączone do krzywych przekroju płaskiego danej powierzchni. Układ powierzchni poddołączonych danego rzędu jest identyczny z układem powierzchni, których przekroje pękiem płaszczyzn, przechodzących przez dowolną prostą, są dołączone do przekrojów powierzchni danej przez te płaszczyzny.

Krzywemi poddołączonemi szczebla r na powierzchni nazywa Enriques krzywe, wycinające na płaskich przekrojach powierzchni rodzaju π grupy seryi $g_{2\pi-2+rn}$, wycięte przez krzywe dołączone rzędu $n-3+r$ $(r \gtreqless 0)$ krzywej płaskiej. Powierzchnie zatem poddołączone wycinają na powierzchni danej, prócz krzywych wielokrotnych, krzywe poddołączone. Otóż jest rzeczą ważną, że zachodzi i odwrotne twierdzenie, t. j. twierdzenie następujące: Każda krzywa poddołączona szczebla r na powierzchni, nie będącej prostokreślną i której przekroje płaskie są rodzaju > 0, jest wycięta przez pewną powierzchnię poddołączoną Ψ_{n-3+r} rzędu $n-3+r$. Dowód opiera się na twierdzeniu Castelnuovo (ust. 3), że powierzchnie, które posiadają ∞^2 przekrojów płaskich rozpadających się, albo są prostokreślne, albo są powierzchniami Steinera rzędu czwartego.

Dalszem pojęciem podstawowem jest pojęcie krzywych poddołączonych układu liniowego nieprzywiedlnego $|C|$.

Enriques nazywa seryą grup punktów $g_{2\pi-2+rn}$ seryę zupełną następującą:

1) Gdy $\pi > 0$, $r \geqq 0$, sumę seryi kanonicznej $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ na krzywej układu danego i r-krotnej seryi charakterystycznej, a więc dla pęku $(n=0)$ seryę kanoniczną $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$. Tak samo dla $r=0$.

2) Gdy $\pi > 0$, $r = -\rho < 0$, różnicę między seryą kanoniczną $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ i ρ-krotną seryą charakterystyczną, zakładając, że ta serya ρ-krotna jest specyalna.

3) Gdy $\pi = 0$, $r > 0$, seryę g^{rn-2}_{rn-2} wszystkich grup punktów $rn-2$ na krzywej.

Krzywe poddołączone wycinają na układzie $|D|$ seryę $g_{2\pi-2+rn}$. Oznaczmy ten układ przez K_r. Suma K_r i krzywych fundamentalnych danego układu jest też układem K_r.

Suma $K_r + sC$ jest krzywą układu K_{r+s}.

Każda krzywa, wycinająca na krzywych pęku należącego do układu $|C|$, seryę $g_{2\pi-2+rn}$ i nie przechodząca przez punkty-podstawy pęku nie będące punktami-podstawami układu $|C|$, jest krzywą poddołączoną.

Dla r dostatecznie wielkiego istnieje zawsze nieskończenie wiele krzywych poddołączonych. Układem $|K_r|$ nazywa się ten układ krzywych bez części stałych fundamentalnych dla układu danego. Jeżeli się odniesiemy do powierzchni F_n w przestrzeni S_3 rzędu n, której przekroje są rodzaju $\pi > 0$ i która nie jest prostokreślna, wtedy każda krzywa, która przekroje płaskie pęku ogólnego przecina w seryi $g_{2\pi-2+rn}$ i nie przechodzi przez punkty przecięcia osi pęku z powierzchnią F_n, jest krzywą poddołączoną K_r.

Jeżeli układ normalny $|C|$ daje jako rezyduum układu nieprzywiedlnego $|C''|$ układ nieprzywiedlny $|C'|$:

$$|C'| = |C - C''|,$$

jeżeli dalej $|K|$ oznacza układ poddołączony szczebla 0 układu $|C|$ i jeżeli istnieje układ

$$|K - C''|,$$

wtedy ten układ jest układem poddołączonym szczebla 0 układu $|C'|$. Tak samo, jeżeli istnieje układ

$$|K_r'| = |K_r - (r+1)\,C''|,$$

jest on układem krzywych poddołączonych szczebla r układu $|C'|$.

Można obrać r tak wielkie, aby układ $|K_r|$ zawierał układ $|(r+1)\,C''|$ i aby układ

$$|K_r - (r+1)\,C''|$$

był wymiaru dowolnie wielkiego.

Mamy dalej twierdzenie: Jeżeli

$$|C| = |C' + C''|,$$

i jeżeli krzywe fundamentalne układu $|C'|$ są krzywemi fundamentalnemi układu $|C|$, to

$$K_r' + (s+1)\,C''$$

są krzywemi poddołączonemi szczebla s dla układu $|C|$, t. j. należą do układu $|K_s|$. Z równości

$$|(r+1)\,C| = |C + rC|$$

wynika, że krzywe poddołączone szczebla $r > 0$ względem układu $|C|$ są poddołączone szczebla 0 względem układu $|(r+1)\,C|$, i nawzajem.

Mamy dalej następujące twierdzenie:

Jeżeli mamy układ

$$|C| = |C' + C'' + \Sigma\, O^{\rho}|,$$

wtedy otrzymamy krzywe poddołączone układu $|C'|$ z krzywych poddołączonych układu $|C|$, odejmując C'' i nakładając punkty-podstawy $\Sigma\, O^{\rho-1}$, tak że będzie:

$$|K'| = |K - C'' - \Sigma\, O^{\rho-1}|.$$

Ogólnie otrzymuje Enriques następujące twierdzenie podstawowe:

„Uważajmy układy $|C|$, $|C'|$ nieprzywiedlne proste i nie posiadające krzywych, które krzywe tych układów przecinają tylko w jednym punkcie. Jeżeli

$$|C''| = |C - C' - \Sigma\, O^{i}|$$

i jeżeli układ $|C|$ ma punkty-podstawy A, które nie są punktami-podstawami dla układu $|C'|$, wtedy:

1) jeżeli istnieje układ

$$|K - C'' - \Sigma\, O^{i-1}|,$$

jest to układ krzywych poddołączonych $|K'|$;

2) nawzajem, jeżeli układ $|K'|$ jest układem poddołączonym dla układu $|C'|$ i jeżeli dalej krzywe fundamentalne układu $|C'|$ są krzywemi fundamentalnemi układu $|C|$ z wyjątkiem punktów A, które są fundamentalne tylko dla układu $|C'|$, wtedy układ

$$|K' + C'' + \Sigma\, A + \Sigma\, O^{i-1}|$$

jest układem krzywych poddołączonych układu $|C|$.

Najważniejszemi układami na powierzchniach są układy dołączone (aggiunte) systemów danych.

Uważajmy najprzód układ przekrojów płaskich powierzchni nieprostokreślnej bez osobliwości w pewnej przestrzeni S_r. Układem dołączonym układu krzywych płaskich przekrojowych nazywamy układ poddołączony powierzchni, posiadający ewentualnie punkty stałe, nie będące punktami-podstawami układu $|C|$.

Krzywe dołączone $|nC|$ czyli krzywe dołączone szczebla $n-1$ układu $|C|$ są określone w sposób następujący:

$$|(nC)_a| = |(n-1)\,C + C_a|.$$

Na podstawie tej definicyi można teraz zdefiniować układ dołączony do krzywych układu $|C'|$ nieosobliwego bez krzywych, które w jednym punkcie przecinają krzywe układu i z punktami-podstawami $\Sigma\, A^{i}$. Możemy znaleść liczbę n tak wielką, że układ

$$|C''| = |nC - C' - \Sigma\, A^{i}|$$

będzie układem nieprzywiedlnym bez punktów-podstaw przypadkowych. Wtedy układ $|C_a'|$ krzywych dołączonych jest określony jako układ

$$|C_a'| = |(nC)_a - C'' - \Sigma\, A^{i-1}| = |(n-1)\,C + C_a - C'' - \Sigma\, A^{i-1}|.$$

Jest to układ poddołączony względem układu $|C'|$, posiadający ewentualnie krzywe wyjątkowe fundamentalne dla układu $|C'|$.

Jeżeli mamy dwa układy $|C'|$, $|C''|$ nieosobliwe i jeżeli B są punkty-podstawy dla układu $|C'|$, nie będące punktami-podstawami dla układu $|C''|$, zaś punkty A, podstawy dla układu $|C''|$, nie są punktami-podstawami dla układu $|C'|$ i jeżeli

$$|C'| = |C'' + C''' + \Sigma\, A^{i}|,$$

wtedy:

$$|C_a'| = |C_a'' + C''' + \Sigma\, A^{i-1} + \Sigma\, B|.$$

Możemy teraz te definicye uogólnić, stosując je do dowolnego układu nieprzywiedlnego $|C|$.

Uważajmy układ $|L|$, spełniający warunki następujące: Jest on nieosobliwy i nie posiada pęku krzywych, przecinających krzywe układu w jednym punkcie. Jeżeli mamy

$$|L| = |C + C' + \Sigma\, A^{i}|$$

i jeżeli punkty B są punktami-podstawami układu $|L|$, a nie układu $|C|$, wtedy układ dołączony układu $|C|$ zdefiniowany jest w sposób następujący:

$$|C_a| = |L_a - C' - \Sigma\, A^{i-1} - \Sigma\, B|. \tag{13}$$

Uważajmy teraz dwa dowolne układy $|C|$, $|C'|$, podlegające jedynie temu ograniczeniu, by były nieprzywiedlne. Jeżeli mamy związek

$$|C| = |C' + C'' + \Sigma\, A^{i}|,$$

i jeżeli B są punkty-podstawy układu $|C|$, nie będące punktami-podstawami układu $|C'|$, wtedy zachodzi zupełnie ogólny związek podstawowy:

$$|C_a| = |C_a' + C'' + \Sigma\, A^{i-1} + \Sigma\, B|. \tag{14}$$

icm©

Związek ten nazywa Enriques twierdzeniem fundamentalnem teoryi dołączania na powierzchniach.

W istocie dalsza teorya układów liniowych, a w szczególności teorya układów niezmiennych krzywych, odkrytych przez Enriquesa, otrzymuje się przez stosowanie tego twierdzenia.

Zdefiniowaliśmy układ dołączony danego układu krzywych na pewnej powierzchni, obrazie uważanego utworu geometrycznego ∞^2. Dla różnych powierzchni mamy różne układy dołączone, ponieważ mogą powstawać i znikać krzywe wyjątkowe. Jeżeli istnieje powierzchnia bez krzywych wyjątkowych, wtedy można na niej całkowicie określić układ dołączony. Krzywe fundamentalne układu danego dzielą się na niewłaściwe, t. j. takie krzywe, których krzywa rezydualna ma ten sam rodzaj, co krzywa układu, i na krzywe właściwe, gdzie rodzaj krzywej rezydualnej jest mniejszy od krzywej układu danego.

Pierwsze krzywe nie wpływają na układ krzywych dołączonych w tym sensie, że układ krzywych dołączonych różni się od układu poddołączonego tylko o krzywe stałe.

Inaczej jednak jest, jeżeli układ liniowy posiada właściwe krzywe fundamentalne. Wtedy krzywe dołączone układu $|C|$ nietylko wycinają na krzywych C grupy kanoniczne, ale na krzywych C_1 rezydualnych krzywych C względem krzywej właściwej fundamentalnej Θ wycinają seryę, która jest sumą seryi kanonicznej $g_{2\pi'-2}^{\pi'-1}$ tej krzywej i seryi, której grupę tworzą punkty wspólne krzywych. Powierzchnie, posiadające pęk krzywych wymiernych, mają własność następującą: krzywe układu dołączonego układu krzywych, przecinających w $\rho>1$ punktach krzywe owego pęku, przecinają krzywe pęku najwyżej w $\rho-2$ punktach. Więc jeżeli istnieje układ, dla którego mamy $\rho=1$, wtedy niema układu krzywych dołączonych tego układu.

Enriques wprowadza dalej pojęcie powierzchni dołączonych.

Są to powierzchnie poddołączone, wycinające na powierzchni krzywe dołączone układu płaskiego. Są to więc powierzchnie poddołączone rzędu $n-3$, wycinające krzywe dołączone na przekrojach płaskich, na przekroju płaskim zaś, przechodzącym przez punkt i-krotny powierzchni, wycinają one krzywe dołączone po dodaniu prostej, przechodzącej przez punkt i-krotny. A więc mają w punkcie i-krotnym punkt $i-2$-krotny (porów. ust. poprzedni).

Ogólnie powierzchniami dołączonemi φ_{n-4+r} rzędu $n-4+r$, albo powierzchniami dołączonemi szczebla dodatniego lub ujemnego $r-1$, nazywają się powierzchnie, które wycinają krzywe dołączone szczebla $r-1$, a więc układ krzywych

$$| C_a + (r-1)\, C | = | (r\, C)_a | .$$

Dla powierzchni wymiernych mamy następujące twierdzenie. Jeżeli powierzchnię wymierną odwzorujemy na płaszczyźnie, wtedy krzywe płaskie rzędu $n-3$ dołączone krzywych płaskich rzędu n, przedstawiających krzywe płaskie powierzchni, przedstawiają krzywe przekroju powierzchni z powierzchniami dołączonemi rzędu $m-3$, jeżeli rząd powierzchni jest m, i nawzajem.

Dla powierzchni prostokreślnych mamy co następuje: Powierzchnie dołączone rzędu $n-3+r$ wycinają na tworzących $r-1$ punktów prócz krzywej wielokrotnej; dla $r=0$ niema powierzchni dołączonych. Na powierzchni prostokreślnej rzędu n krzywe dołączone układu, wyciętego przez powierzchnie rzędu $r+1$ $(r>0)$, są wycięte przez powierzchnie dołączone rzędu $n-3+r$.

Z twierdzenia fundamentalnego wypływa natychmiast twierdzenie Nöthera o powierzchniach dołączonych krzywych przestrzennych. Jeżeli mamy na powierzchni układ liniowy $|K|$, który posiada krzywą rezydualną K' względem powierzchni rzędu dostatecznie wysokiego m, wtedy powierzchnie dołączone, przechodzące przez K', rzędu $n+m-4$ i posiadające w punktach-podstawach i-krotnych $|K|$ punkty-podstawy $i-1$-krotne, wycinają krzywe dołączone układu $|K|$, i nawzajem, a więc wycinają na krzywych układu grupy kanoniczne, i nawzajem.

Chodzi teraz o obliczenie wymiaru układu powierzchni dołączonych. Dla obliczenia tego podstawowem jest następujące twierdzenie Enriquesa:

„Powierzchnie poddołączone rzędu $n-2+h$, gdzie h jest liczbą dostatecznie wielką, wycinają na dowolnej płaszczyźnie wszystkie krzywe poddołączone szczebla h przekroju płaskiego".

Stąd wynika, że i powierzchnie dołączone rzędu $n-4+r$ dla r dosyć wielkiego wycinają na przekrojach płaskich wszystkie krzywe dołączone przekrojów płaskich.

Jeżeli N_{n-4+s} oznacza liczbę powierzchni dołączonych stopnia s, gdzie s jest liczbą dostatecznie wielką, natenczas mamy związek:

$$N_{n-4+s+1} = N_{n-4+s} + \pi + sn + \frac{s\,(s-3)}{2}. \tag{15}$$

Znając liczbę N_{n-4+s} dla s dostatecznie wielkiego, którą dają wzory postulacyi Nöthera, możemy przy pomocy wzoru (15) obliczyć wszystkie liczby N_{n-4+r}, które właśnie będą te same, co liczby, obliczone przy pomocy wzorów postulacyi Nöthera. Istotne wartości wymiarów układów dołączonych nie będą mniejsze od tych liczb.

Nazwijmy $\delta(s\,C)$ niedostatek (defizienza) seryi grup kanonicznych, wyciętych na krzywych układu $|s\,C|$ przez krzywe układu $|(s\,C)_a|$; wtedy, jeżeli założymy, że dla $s \geqq r$ stosują się wzory (15), mamy:

$$\delta((s+1)\, C) = \delta(s\, C)$$

dla $s \geqq r$. Natomiast dla $s < r$ zachodzi nierówność:

$$\delta((s+1)\,C) \geqq \delta(s\,C).$$

Liczby $\delta(s\,C)$ rosną zatem, lub przynajmniej nie maleją, gdy s rośnie (por. ust. poprzedni), i mają skończone maximum. Wprowadźmy oznaczenie

$$\omega_i = \delta(i\,C) - \delta((i-1)\,C),$$

wtedy ω_i jest niedostatkiem układu liniowego krzywych, wyciętego przez powierzchnie dołączone rzędu $n-4+i$ na przekrojach płaskich. Otrzymujemy wzór podstawowy:

$$N_{n-4+r} = N_{n-4} + \pi_r + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2} - \sum_1^r \omega_i. \qquad (16)$$

Stąd wynika wzór:

$$\delta(r\,C) = \sum_1^r \omega_i, \qquad (17)$$

mamy zaś $\omega_{r+1} = \omega_{r+2} = \ldots = 0$.

Widzimy więc, że obliczając liczbę N_{n-4} przy pomocy wzorów postulacyi Noethera i nazywając ją wówczas N'_{n-4}, mamy równość:

$$N'_{n-4} = N_{n-4} - \sum_1^r \omega_i.$$

Enriques na podstawie poprzednio wyłożonej teoryi wprowadza niezmienniki powierzchni algebraicznych w sposób dwuwymiernie niezmienny. Otrzymuje się je z twierdzenia fundamentalnego. Jeżeli ΣA^i są punktami-podstawami układu $|C|$ ale nie układu $|C''|$, zaś $\Sigma A''^i$ są punktami-podstawami układu $|C''|$ ale nie układu $|C'|$, wtedy mamy związek:

$$|C' + C_a'' + \Sigma A'| = |C_a' + C'' + \Sigma A''|.$$

Stąd otrzymujemy ważną równość:

$$|C_a' - C' - \Sigma A'| = |C_a'' - C'' - \Sigma A''|. \qquad (18)$$

Jeżeli układ $|C_a'|$ zawiera układ $|C'|$, wtedy każdy inny układ na powierzchni $|C''|$ ma też tę własność, że układ $|C_a''|$ zawiera układ $|C''|$. Punkty A' występują dla układu $|C_a' - C'|$ jako części stałe; tak samo punkty A'' dla układu $|C_a'' - C''|$. Krzywe te rezydualne, pozbawione części stałych, nazywają się kanonicznemi. Krzywe zatem kanoniczne wycinają na ogólnej krzywej układu nieprzywiedlnego $|C|$ grupę specyalną rezydualną seryi charakterystycznej układu $|C|$ i punktów-podstaw układu $|C|$.

Krzywe układu kanonicznego są wycięte przez powierzchnie dołączone rzędu $n-4$, prócz krzywych osobliwych i krzywych wyjątkowych. Liczbę liniowo niezależnych krzywych układu kanonicznego nazywamy właśnie rodzajem geometrycznym p_g.

Twierdzenie fundamentalne pozwala teraz otrzymać dalsze niezmienniki; mianowicie z równości (18) otrzymujemy natychmiast równość:

$$|2\,C_a' - 2\,C' - 2\,\Sigma A'| = |2\,C_a'' - 2\,C'' - 2\,\Sigma A''|. \qquad (19)$$

Otóż może być, że obie strony równości (19) przedstawiają rzeczywiście pewien układ krzywych, ale że obie strony równości (18) rzeczywistych układów krzywych nie przedstawiają. W każdym razie krzywe, określone przez (19) tworzą wtedy pewien układ liniowy, zwany układem bikanonicznym.

Liczbę P krzywych bikanonicznych liniowo niezależnych nazywa Enriques drugim rodzajem powierzchniowym (bigenere).

Nareszcie można przedstawić układ dany symbolicznie za pomocą wyrażenia:

$$|i\,C_a - i\,C - i\,\Sigma A|, \qquad i = 2, 3 \ldots. \qquad (20)$$

Jeżeli istnieje układ kanoniczny, wtedy układ (20) jest układem i-krotnym danego układu kanonicznego, jednak mogłoby zajść, że nie istnieje ani układ kanoniczny ani układ bikanoniczny, ale istnieje układ przedstawiony przez wyrażenie (20) dla $i > 2$. Mamy zatem nowe liczby niezmienne.

Układ bikanoniczny posiada wielkie znaczenie dla Teoryi powierzchni. W istocie podaje Enriques przykład powierzchni, dla której mamy $p_g = 0$, ale natomiast zachodzi $P_2 > 0$.

Jest to powierzchnia rzędu szóstego z sześcioma prostemi podwójnemi, które są krawędziami prostego czworościanu, a więc mamy $n-4=2$. Zatem niema powierzchni rzędu $n-4$, dołączonej do powierzchni danej. Enriques przytacza inny przykład, który podał był Castelnuovo (por. ust. 6). Jest to powierzchnia rzędu 7-go o prostej potrójnej i o krzywej stożkowej podwójnej, nie przecinającej prostej powyższej, posiadająca nadto trzy punkty tacnodalne, których płaszczyzny tacnodalne przechodzą przez prostą powyższą. Powierzchnia ta posiada niezmienniki

$$p_g = 0, \qquad P_2 = 2.$$

Dalej definiuje Enriques w sposób niezmienny dwuwymiernie rodzaj liczbowy, arytmetyczny, danej powierzchni.

Jeżeli niedostatek seryi wyciętej na układzie $|C|$ przez krzywe układu

icm©

dołączonego nazwiemy $\delta(C)$, wtedy gdy układ $|C_1|$ zawarty jest w układzie $|C|$, mamy nierówność (por. ust. poprzedni):

$$\delta(C) \geqq \delta(C_1).$$

Gdy układ $|C_1|$ nie jest zawarty w układzie $|C|$, układ zaś $|C|$ jest układem prostym, można obrać r dostatecznie wielkie, aby układ $|rC|$ zawierał układ $|C_1|$, albowiem przekształcając tak, aby układ $|C|$ stał się układem przekrojów płaskich, gdy $|C|$ jest układem prostym, a wycinając krzywą podwójną przez pewną powierzchnię stałą S, jeżeli r jest dosyć wielkie, nazywając D krzywą podwójną, a D_1 rezydualną krzywą krzywej D względem krzywej wyciętej przez S, mamy rezultat taki, że układ

$$|rC + D + D_1|$$

zawiera układ $|C_1|$, a krzywe D i D_1 zawiera jako części stałe.

Otóż niedostatek $\delta(rC)$ ma maximum skończone k, które jest większe od zera lub równe zeru. Otóż definiujemy rodzaj arytmetyczny p_a przy pomocy równości:

$$k = p_g - p_a = \sum_1^r \omega_i. \tag{21}$$

Liczba k jest największym niedostatkiem seryi, wyciętej na dowolnej krzywej przez układ dołączony. Zatem liczba p_a, rodzaj arytmetyczny powierzchni, spełnia nierówność:

$$p_a \leqq p_g.$$

Gdy mamy równość

$$p_g = p_a,$$

natenczas zawsze zachodzi

$$\delta(rC) = 0,$$

jeżeli $r > 0$. Nawzajem (por. ust. poprzedni), gdy mamy równości

$$\delta(C) = 0, \qquad \delta(2C) = 0,$$

wtedy $\delta(rC) = 0$ dla $r > 2$ i $p_g = p_a$. Zobaczymy, że Castelnuovo okazał (ust. następny), iż równość

$$\delta(C) = 0$$

pociąga za sobą równość

$$\delta(2C) = 0.$$

Następnie wprowadza Enriques znów na podstawie swej teoryi niezmienniki, które już wprowadził był Noether (Roz. I, ust. 8), rodzaj liniowy (genere lineare) $p^{(1)}$, t. j. rodzaj krzywych kanonicznych i stopień

wirtualny krzywych kanonicznych $p^{(2)}$. Enriques określa te wielkości niezależnie od istnienia krzywych kanonicznych na powierzchni, a więc i dla wartości niezmienników $p_g = 1$, 0. Mianowicie zachodzą następujące związki:

$$p^{(1)} = \pi_a - 3(\pi - 1) + n + r, \tag{22}$$

$$p^{(2)} = n_a - 4(\pi - 1) + n + r. \tag{22a}$$

W związkach tych π i n są to rodzaj i stopień dowolnego układu liniowego $|C|$, zaś liczby π_a i n_a są odpowiednie liczby dla układu dołączonego $|C_a|$; liczba r jest to liczba punktów-podstaw układu $|C|$. Między wielkościami $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ zachodzi związek Noethera:

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1, \tag{23}$$

a więc mamy związek mu równoważny:

$$n_a - \pi_a = \pi - 2. \tag{24}$$

Otóż prawe strony wzorów (22) i (22a) nie zależą od wyboru układu $|C|$. Są one zawsze niezmienne w przekształceniach dwuwymiernych powierzchni, nie posiadającej krzywych wyjątkowych, jeżeli te przekształcenia krzywych wyjątkowych nie wprowadzają krzywych wyjątkowych.

Tak samo zachodzi równość (24) zawsze dla dowolnej wartości p_g.

Najpoważniejszą trudnością w badaniu niezmiennych własności powierzchni algebraicznych jest występowanie krzywych wyjątkowych, t. j. krzywych, które się dadzą przekształcić na zwyczajne punkty powierzchni. Gdy $p_g > 0$, istnieje tylko skończona liczba krzywych wyjątkowych. Opierając się na lemmacie, że dla powierzchni, dla której $p_g = p_a > 0$, układ dołączony układu, nie posiadającego krzywych właściwych fundamentalnych, również nie posiada krzywych właściwych fundamentalnych, dowodzi Enriques, że powierzchnie o niezmiennikach powyższych dadzą się przekształcić na powierzchnie, nie posiadające krzywych wyjątkowych.

Enriques przyjmuje bez dowodu, że dla powierzchni nieregularnych, a więc gdy $p_g > p_a$ i jeżeli nadto $p_g > 0$, można również wykonać przekształcenie, usuwające krzywe wyjątkowe powierzchni.

6. Prace Castelnuovo i Enriquesa nad dalszym rozwojem teoryi układów liniowych krzywych algebraicznych na powierzchniach algebraicznych.

Widzieliśmy w poprzednim ustępie znaczenie dwóch utworów geometrycznych, związanych z danym układem liniowym krzywych na powierzchni, mianowicie seryi charakterystycznej g_n^{r-1} danego układu wymiaru r i stopnia n i układu dołączonego (szczebla zero) układu danego.

icm©

Utwory te bada Castelnuovo (C. 13). Serya charakterystyczna może być albo zupełna, np. na powierzchniach wymiernych lub na ogólnych powierzchniach danego rzędu, albo też niezupełna, jak np. na powierzchniach prostokreślnych lub na powierzchniach hypereliptycznych. Otóż własność ta seryi charakterystycznej pozostaje w ścisłym związku z własnością regularności lub nieregularności danej powierzchni.

Nazwijmy δ_ν niedostatek seryi, wyciętej przez układ krzywych dołączonych rzędu ν na przekroju płaskim. Uważajmy, jak w poprzednim ustępie, sumę niedostatków układów dołączonych rzędów od $n-3$ aż do rzędu $l-1$, zakładając, że dla układów dołączonych wyższych rzędów niedostatki znikają. Kładąc wówczas

$$\Delta = \sum_{\nu=n-3}^{l=1} \delta_\nu ,$$

otrzymujemy już poprzednio podaną równość

$$r_{n-4} - r'_{n-4} = \Delta ,$$

gdzie r_{n-4} oznacza wymiar istotny układu powierzchni dołączonych rzędu $n-4$, zaś r'_{n-4} jest wymiarem wirtualnym.

Uważajmy teraz $\Delta+1$ płaszczyzn dowolnego pęku; istnieją wówczas zawsze, jak to okazuje Castelnuovo, powierzchnie dołączone rzędu $n-3+\Delta$, wycinające na tych płaszczyznach z góry oznaczone krzywe dołączone rzędu $n-3$, a nadto zawierające Δ razy prostą pęku, nierozpadające się. Stąd można udowodnić następujące twierdzenie, które jest punktem wyjścia badań Castelnuovo (C. 13, por. C. 16). „Jeżeli na powierzchni mamy układ prosty krzywych i jeżeli grupa punktów, należąca do punktów ruchomych przecięcia dwóch krzywych, jest seryą specyalną g_m^1 dla p_g-p_a+1 krzywych pęku wyznaczonego przez te dwie krzywe, wtedy jest ona tak samo specyalną seryą g_m^1 dla wszystkich krzywych pęku".

W szczególnym przypadku, gdy układ dołączony rzędu $n-3$ wycina na układzie danym seryę kanoniczną zupełną, wtedy grupa punktów na krzywej układu danego, która jest specyalną dla tej krzywej, jest też specyalną dla każdej innej krzywej układu, która przez nią przechodzi.

Stąd wynika ważne twierdzenie:

„Układ liniowy prosty nieprzywiedlny bez właściwych krzywych fundamentalnych taki, że układ dołączony wycina seryę kanoniczną zupełną, posiada seryę charakterystyczną również zupełną".

Stąd opierając się na lemmacie z teoryi grup punktów na krzywych, orzekającym, że suma minimalna seryi kanonicznej i dowolnej seryi zupełnej jest też zupełna, otrzymuje się twierdzenie następujące, o którem już mówiliśmy w poprzednim ustępie:

„Jeżeli dla pewnego dowolnego układu prostego i nieprzywiedlnego bez krzywych fundamentalnych zachodzi równość

$$\delta_{n-3} = 0 , \tag{25}$$

wtedy zachodzą też równości następujące:

$$\delta_{n-3+r} = 0 , \qquad r = 1, 2, 3 \ldots . \tag{26}$$

a więc mamy:

$$p_g = p_a$$

i dla każdego układu nieprzywiedlnego na powierzchni będzie:

$$\delta_{n-3+r} = 0 , \qquad r = 0, 1, 2, 3 \ldots .$$

Na powierzchni regularnej, $p_g = p_a$, każdy układ liniowy zupełny posiada seryę charakterystyczną zupełną".

Dalej uważa Castelnuovo powierzchnie nieregularne. Nazwijmy regularnym układ niespecyalny na powierzchni i taki, że między jego rodzajem π, stopniem n i wymiarem s zachodzi związek następujący:

$$s = n - \pi + p_a - 1 . \tag{27}$$

Układ dołączony szczebla k dostatecznie wysokiego do dowolnego układu nieosobliwego jest regularny, a więc mamy:

$$s_k = n_k - \pi_k + p_a - 1 .$$

Dla układów regularnych niedostatek δ seryi charakterystycznej spełnia nierówność:

$$\delta \geqq p_g - p_a ,$$

a mianowicie, gdy serya charakterystyczna jest niespecyalna, wówczas mamy $p_g = 0$, a więc zachodzi równość:

$$\delta = p_g - p_a = -p_a .$$

Zatem warunkiem koniecznym i dostatecznym, by serya charakterystyczna była nietylko zupełna, ale by istniały układy o seryi charakterystycznej niespecyalnej, jest, aby zachodziła równość:

$$p_g = p_a = 0 .$$

Wiemy, że Castelnuovo (C. 7, por. ust. 3) udowodnił wymierność inwolucyj na płaszczyźnie. Zamocą rozumowań analogicznych do rozumowań przeprowadzonych w owej pracy, można udowodnić, że serya charaktery-

icm©

styczna układu liniowego na powierzchni, przedstawiającej inwolucye na powierzchni regularnej, jest zupełna. Stąd wynika:

„Powierzchnia, której spółrzędne są funkcyami wymiernemi spółrzędnych powierzchni, posiadającej niezmienniki $p_g = p_a$, również posiada niezmienniki $p_g = p_a$".

Stąd, ponieważ powierzchnie prostokreślne posiadają $p_g = 0$, $p_a = -p$, wynika w szczególności, że powierzchnie, posiadające pęk niewymierny krzywych, są z pewnością nieregularne, t. j. mają

$$p_g > p_a.$$

W pracy równoczesnej z poprzednią (C. 5) dochodzi Castelnuovo do następującego ważnego rezultatu:

„Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dana powierzchnia była wymierna jest, by oprócz równości

$$p_g = p_a = 0,$$

zachodziła równość

$$P_2 = 0,$$

gdzie P_2 jest drugim rodzajem powierzchniowym (bigenere) powierzchni, przyczem z pierwszych równości bynajmniej nie wynika równość ostatnia".

Rzutowo: mając daną powierzchnię rzędu n z linią podwójną rzędu D, rodzaju π, z T punktami potrójnemi, otrzymuje się następujące warunki konieczne i dostateczne wymierności powierzchni:

1) $\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)D + 2T + \pi - 1 = 0$, t. j. $p_a = 0$.

2) Niema powierzchni rzędu $2(n-4)$, przechodzącej podwójnie przez krzywę podwójną, oprócz powierzchni złożonych z samej powierzchni danej i dowolnej powierzchni rzędu $n-8$, t. j. mamy $P_2 = p_g = 0$.

Widzieliśmy, że powierzchnie, posiadające niezmienniki $p_g = p_a = 0$, można scharakteryzować w ten sposób, że wszystkie układy liniowe posiadają seryę charakterystyczną zupełną i że istnieją układy, których serya charakterystyczna jest niespecyalna. Otóż można układ taki tak obrać, by był prosty i nie posiadał krzywych fundamentalnych właściwych.

Układ dołączony $|C'|$ jest wtedy i tylko wtedy przywiedlny, gdy układ dany $|C|$ składa się z krzywych hypereliptycznych. Jest on złożony wtedy i tylko wtedy, gdy w układzie $|C|$ zawarty jest układ krzywych hypereliptycznych, posiadający wymiar o jedność mniejszy od wymiaru układu $|C|$. Gdy układ $|C|$ nie podlega ani jednemu ani drugiemu ograniczeniu, a nadto nie posiada krzywych fundamentalnych właściwych i ma seryę cha-

rakterystyczną specyalną, wtedy układ $|C'|$ nie posiada też krzywych fundamentalnych właściwych i ma seryę charakterystyczną niespecyalną.

Otóż teraz możemy uważać układ $|C''|$ dołączony do układu $|C'|$, układ $|C'''|$ dołączony do układu $|C''|$ i t. d. Otóż, gdy powierzchnia jest wymierna, wtedy ciąg układów dołączonych

$$|C'|,\ |C''|, \ldots, |C^i|, \ldots$$

nie może być nieskończony, a więc jeden z tych układów nie spełnia tych warunków, które spełnia układ $|C|$. Otóż, gdy, oprócz p_g i p_a, jest też P_2 zerem, wtedy właśnie ciąg ten musi się kończyć, a stąd naodwrót wynika wymierność powierzchni.

Przykład Enriquesa, podany w ustępie poprzednim, okazuje że w istocie może być $p_g = p_a = 0$, ale jednak $P_2 > 0$. Krzywe bikanoniczne w przykładzie owym nie istnieją, są rzędu zero.

Castelnuovo podaje przykład, o którym już mówiliśmy w poprzednim ustępie, gdzie

$$p_g = p_a = 0, \qquad P_2 = 2.$$

Rodzajem liniowym $p^{(1)}$ powierzchni, zdefiniowanym niezmienniczo przez Enriquesa, zajmuje się też Castelnuovo (C. 15). Widzieliśmy, że tę liczbę można zdefiniować jako niezmiennik

$$n + \pi_a - 3(\pi - 1) \tag{22}$$

na powierzchni bez krzywych wyjątkowych, przyczem n, π są charaktery układu $|C|$ bez punktów-podstaw. Otóż dla układów, posiadających punkty-podstawy, wyrażenie (22) daje wartość mniejszą niż $p^{(1)}$. Możemy więc zdefiniować nowy niezmiennik, mianowicie maximum wyrażenia (22) i to też na powierzchniach, posiadających skończoną liczbę krzywych wyjątkowych.

Wszystkie powierzchnie algebraiczne można podzielić na dwie wielkie kategorye. Do pierwszej należą powierzchnie, na których istnieją układy dołączone wszystkich rzędów, t. j. istnieją układy $|C^{(i)}|$, $i = 1, 2, \ldots$, do drugiej kategoryi należą powierzchnie, na których działanie dołączanie kończy się po pewnej skończonej liczbie działań.

Dla pierwszych powierzchni mamy dla każdego układu $|C|$:

$$n \leqq 2\pi - 2 \qquad \text{i} \qquad \pi \leqq \pi_a, \tag{28}$$

dla drugich istnieją zawsze układy liniowe, dla których:

$$n > 2\pi - 2 \qquad \text{i} \qquad \pi > \pi_a. \tag{29}$$

Uważajmy teraz dowolną powierzchnię i układy krzywych położone na

icm©

tej powierzchni, spełniające nierówność (28). Liczba (22), którą nazwijmy ω, spełnia, jeżeli ją obliczymy dla układu krzywych spełniającego nierówność (28), pewną nierówność, którą otrzymamy, obliczając liczbę liniowo niezależnych krzywych bikanonicznych, t. j. krzywych układu (20) ustępu poprzedzającego. Otrzymamy wówczas nierówność:

$$P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1); \tag{30}$$

zatem, ponieważ $P_i \geqq 0$, więc liczba ω posiada pewne skończone maximum, jeżeli ją obliczymy dla wszystkich tych układów, dla których zachodzi nierówność (28).

Otóż to właśnie maximum definiuje Castelnuovo jako rodzaj liniowy $p^{(1)}$.

Zachodzą zatem następujące okoliczności:

1) gdy mamy $p^{(1)} > 1$, wtedy, od pewnego układu począwszy, istnieją wszystkie układy dalsze i-kanoniczne.

2) gdy mamy $p^{(1)} = 1$, wtedy albo układy i-kanoniczne istnieją i składają się z krzywych eliptycznych pęku, albo też nie istnieją. Na powierzchniach pierwszej kategoryi każdy układ krzywych spełnia warunki (28), a więc rodzaj liniowy zawsze jest $p^{(1)} \geqq 1$. Powierzchnie zatem, dla których rodzaj liniowy $p^{(1)}$ jest $\leqq 0$, należą do drugiej kategoryi. Na powierzchniach drugiej kategoryi istnieją układy liniowe, dla których zachodzi nierówność (29). Nawzajem, gdy mamy $p^{(1)} \geqq 1$, wtedy powierzchnia należy do pierwszej kategoryi.

Uważajmy teraz na powierzchniach drugiej kategoryi wszystkie układy liniowe, spełniające nierówności (29). Dla tych układów liczba ω też posiada maximum skończone, które nazywa Castelnuovo drugim rodzajem liniowym (genere lineare secondario), znacząc go przez $\mathfrak{p}^{(1)}$.

Powierzchnie, na których mamy

$$\mathfrak{p}^{(1)} \leqq 1$$

są dwuwymiernie równoważne albo powierzchniom prostokreślnym, albo też powierzchniom posiadającym ∞^1 stożkowych.

Do powierzchni, na których mamy

$$\mathfrak{p}^{(1)} > 1,$$

należą powierzchnie wymierne, dla których:

$$\mathfrak{p}^{(1)} = 10,$$

ale Castelnuovo nie wyklucza też możności należenia do tej kategoryi także innych powierzchni.

Opierając się na teoryi układów krzywych na płaszczyźnie rozwija Castelnuovo (C. 16) podstawowe własności układów liniowych powierzchni, określonych pewnemi krzywemi-podstawami i punktami-podstawami, przez które to utwory powierzchnie układu liniowego powierzchni mają w pewien określony sposób przechodzić. Badanie powierzchni dołączonych do danej powierzchni, tworzących zatem układ liniowy, prowadzi Castelnuovo do podstawowego twierdzenia, dającego górną granicę niedostatku δ seryi charakterystycznej dowolnego nieskończonego układu liniowego na powierzchni. Mianowicie niedostatek ten nie przewyższa różnicy $p_g - p_a$, mamy więc nierówność ważną:

$$\delta \leqq p_g - p_a. \tag{31}$$

Prosty dowód nierówności Castelnuovo (30) podał w kilka lat później Severi (S. 6). Dowód polega na następujących rozważaniach:

Jeżeli układ uważany jest za układ przekrojów płaskich powierzchni w przestrzeni S_3, posiadającej tylko krzywą podwójną z punktami potrójnemi, i jeżeli n_k, π_k, r_k są stopniem, rodzajem i wymiarem układu $|kC|$, zaś r_k jest wymiarem układu $|(kC)_a|$, wtedy mamy równość

$$r_k' = \pi_k + p_a - 1.$$

Stąd znajdziemy już twierdzenie Riemanna-Rocha dla układu $|kC|$, gdzie k jest liczba dostatecznie wielka:

$$r_k \geqq n_k - \pi_k + p_a + 1.$$

Otóż na podstawie lemmatu, orzekającego, że powierzchnie dołączone dowolnego rzędu do krzywej przestrzennej, będącej przecięciem powierzchni danej z powierzchnią dowolną, wycinają oprócz punktów podwójnej krzywej seryę liniową zupełną (gdy rząd powierzchni dowolnej jest dostatecznie wysoki, jest to twierdzenie Castelnuovo (C. 8)), otrzymujemy następujący rezultat: gdy $p_g > 0$, wtedy powierzchnie dołączone rzędu $n-4$ wycinają na krzywej kC, gdy k jest dostatecznie wielkie, seryę zupełną, gdy zaś $p_g = 0$, wtedy serya charakterystyczna układu $|kC|$ nie jest specyalna. Z twierdzenia ostatniego wynika nierówność Castelnuovo.

Twierdzenie podstawowe o seryi charakterystycznej układów liniowych daje natychmiast twierdzenie o wymiarze układów liniowych, znane jako twierdzenie Riemanna-Rocha (por. ust. 4). Już Noether (N. 8) uogólnił twierdzenie Riemanna-Rocha z teoryi krzywych algebraicznych na układy liniowe krzywych na powierzchni. Zakładając, że powierzchnie algebraiczne posiadają zawsze $p_g = p_a = p$ i że serya charakterystyczna jest zupełna, oznaczając dalej przez i indeks specyalności układu $|C|$, t. j. liczby

icm©

liniowo niezależnych powierzchni kanonicznych, przechodzących przez ogólną krzywą układu $|C|$, otrzymuje Noether nierówność:

$$r \geqq n - \pi + p + 1 - i,$$

wyrażającą właśnie twierdzenie, o które chodzi. Widzieliśmy w ustępie 4, o ile Enriques uzupełnił rezultaty Noethera. Jeszcze dalej posunął się Castelnuovo, posługując się nierównością

$$\delta \leqq p_g - p_a.$$

Uważając seryę zupełną rezydualną seryi charakterystycznej względem seryi kanonicznej, wprowadźmy wielkości

$$k = p_g - p_a - \delta$$

tudzież η, niedobór (diffetto di completezza) seryi, wyciętej przez krzywe kanoniczne na krzywych C. Wtedy mamy nierówność:

$$r \geqq n - \pi + p_a + 1 - i,$$

wyrażającą właśnie twierdzenie Riemanna Rocha na powierzchni, a mianowicie mamy równość:

$$r = n - \pi + p_a + 1 - i + k + \eta.$$

Możemy teraz wprowadzić pojęcie nadmiaru (sovrabbondanza) układu $|C|$

$$s = k + \eta.$$

Jeżeli mamy $s = 0$, wtedy zarówno serya charakterystyczna posiada maximum niedostatku, jak i serya wycięta przez krzywe kanoniczne jest zupełna, i na odwrót w założeniu, że układ $|C|$ nie posiada punktów-podstaw. Układy takie nazywają się regularnemi.

Układy regularne można otrzymać w nieskończonej liczbie na dowolnej powierzchni. Castelnuovo dowodzi bowiem, że jeżeli układ $|C|$ jest układem nieprzywiedlnym przynajmniej ∞^2 i jeżeli taksamo układ $|C' + kC|$ jest nieprzywiedlny, wtedy układ ten dla liczby k dostatecznie wielkiej jest regularny, jeżeli punkty-podstawy $|C|$ są i punktami-podstawami przepisanymi układu $|C' + kC|$ (por. ust 6).

Podstawową własność powierzchni regularnych podaje Enriques (E. 15). Istnieją powierzchnie, na których istnieje układ algebraiczny krzywych algebraicznych, nie zawarty całkowicie w układzie liniowym, np. powierzchnie, posiadające niewymierny pęk krzywych dowolnego rodzaju. Otóż Enriques okazuje, że fakt powyższy nie zachodzi dla powierzchni regularnych. Na powierzchniach regularnych każdy układ ciągły krzywych algebraicznych zawarty jest w układzie liniowym.

Powierzchnie algebraiczne można też klasyfikować według natury krzywych kanonicznych powierzchni. Przypadek, gdy krzywe kanoniczne posiadają rodzaj $p^{(1)} = 1$, jest wyjątkowy i bardzo zawiły. Enriques bada przypadek (E. 7), w którym krzywe kanoniczne są hypereliptyczne, są dalej nieprzywiedlne i nie posiadają też punktów składowych, wspólnych wszystkim krzywym kanonicznym. Powierzchnie te albo posiadają pęk wymierny krzywych rodzaju 2, albo się też dadzą odwzorować na podwójnej płaszczyźnie o krzywej rozgałęzienia rzędu osiem lub dziesięć.

Płaszczyznami podwójnemi nazywamy powierzchnie o równaniu postaci

$$z^2 = f(x, y);$$

krzywa algebraiczna $f(x, y) = 0$ nazywa się krzywą rozgałęzienia.

Clebsch (M. A.) i Noether (N. 9) pierwsi zajęli się własnościami płaszczyzn podwójnych. Clebsch odwzorował te płaszczyzny na płaszczyźnie pojedyńczej i okazał wymierność pewnych płaszczyzn podwójnych, mianowicie, prócz płaszczyzny podwójnej z krzywą rozgałęzienia rzędu drugiego, także płaszczyzny z krzywą rozgałęzienia rzędu czwartego.

Noether okazał naodwrót, że jeżeli płaszczyzna podwójna jest odwzorowalna na płaszczyźnie pojedyńczej t. j. jest wymierna, wtedy krzywa rozgałęzienia daje się dwuwymiernie przekształcić albo na krzywą rzędu $2n$ z punktem $2n - 2$-krotnym, albo na krzywą rzędu szóstego z dwoma punktami potrójnemi nieskończenie sobie blizkiemi.

Z twierdzenia o wymierności inwolucyj położonych na płaszczyźnie (C. 7) można również korzystać dla wyprowadzenia typów płaszczyzn podwójnych wymiernych, a mianowicie mamy trzy typy inwolucyi na płaszczyźnie, z których można otrzymać odpowiednie typy płaszczyzn podwójnych. Inne kryteryum wymierności płaszczyzn podwójnych podali Castelnuovo i Enriques (C. E. 4). Płaszczyzna podwójna z krzywą rozgałęzienia rzędu $2n$ C_{2n} jest wymierna lub odwzorowalna na powierzchni prostokreślnej, jeżeli „plurigeneri" $P_2 = P_3 = \ldots = P_{\left[\frac{2n}{3}\right]}$ są równe zeru. Przytem $\left[\frac{2n}{3}\right]$ jest największą liczbą całkowitą zawartą w liczbie $\frac{2n}{3}$.

Z twierdzenia tego wynika, że powierzchnie, posiadające pęki liniowe krzywych hypereliptycznych rodzaju $p > 1$ z $> 2p - 2$ punktami-podstawami, są wymierne lub odwzorowalne na powierzchniach prostokreślnych.

Płaszczyznami podwójnemi niewymiernemi zajmuje się Enriques (E. 6). Płaszczyzny te rodzajów $p_g = p_a = P_2 = 1$ dzielą się na cztery klasy:

icm©

1. Płaszczyzny podwójne z krzywą rozgałęzienia rzędu szóstego.

2. Płaszczyzny podwójne z krzywą rozgałęzienia rzędu ósmego i dwoma punktami poczwórnemi.

3. Płaszczyzny podwójne z krzywą rozgałęzienia rzędu dziesiątego z punktem 7-krotnym i z dwoma punktami potrójnemi nieskończenie blizkiemi.

4. Płaszczyzny podwójne z krzywą rozgałęzienia rzędu dwunastego z punktem 9-krotnym i z trzema punktami potrójnemi nieskończenie blizkiemi.

Powierzchnie o niezmiennikach $p_g = p_a = P_2 = 1$, jeżeli nie posiadają krzywej kanonicznej, mają rodzaj liniowy, zdefiniowany za pomocą wzoru Enriquesa poprzedniego ustępu. Otóż Enriques dowodzi, że, gdy mamy $p_g = p_a = P_2 = 1$, wtedy nie istnieje krzywa kanoniczna istotna, a więc należy przyjąć $p^{(1)} = 1$. Zatem na powierzchniach o niezmiennikach $p_g = p_a = P_2 = 1$ każdy układ liniowy czysty (bez punktów-podstaw i nieprzywiedlny) rodzaju wirtualnego π ma wymiar π i stopień $2\pi - 2$.

Jeżeli powierzchnia o tych niezmiennikach jest odwzorowalna na płaszczyźnie podwójnej, wtedy albo powierzchnia posiada sieć (układ ∞^2) bez punktów-podstaw rodzaju i stopnia drugiego, należącą do inwolucyi, wyznaczonej przez układ na powierzchni, albo też posiada czysty pęk krzywych eliptycznych, również należący do inwolucyi. Stąd otrzymuje się klasyfikacyę tych płaszczyzn podwójnych, wyżej podaną.

Otrzymujemy pewne płaszczyzny podwójne, uważając powierzchnie, których krzywe kanoniczne są rodzaju $p^{(1)} = 2$ lub $p^{(1)} = 3$.

Jeżeli mamy $p^{(1)} = 2$ (E. 9), przyczem przez rodzaj należy rozumieć w przypadku, gdy krzywe mają punkty-podstawy, rodzaj wirtualny, wtedy gdy powierzchnia jest regularna, $p_g = p_a$, albo ją można dwuwymiernie odwzorować na powierzchni rzędu szóstego o trzech prostych ostrzowych, położonych na jednej płaszczyźnie, albo też, gdy $p^{(1)} = 2$, $p_g = p_a = 2$, wówczas mamy płaszczyznę podwójną o krzywej rozgałęzienia rzędu dziesiątego i o dwóch punktach pięciokrotnych nieskończenie blizkich.

Powierzchnie rodzaju $p^{(1)} = 3$ regularne, $p_g = p_a > 0$, przyczem znowu przez $p^{(1)}$ należy rozumieć rodzaj wirtualny, albo mają $p_g = 3$, a wtedy mamy płaszczyznę podwójną o krzywej rozgałęzienia rzędu ósmego, albo też mają $p_g = 2$, a wtedy też krzywą rozgałęzienia rzędu dziesiątego, złożoną z prostej i z krzywej rzędu dziewiątego z trzema punktami potrójnemi na tej prostej i z dwoma dalszemi punktami potrójnemi nieskończenie blizkiemi do tamtych. Albo mamy $p_g = 1$, a wówczas: albo mamy powierzchnię rzędu ósmego z krzywą podwójną rzędu czternastego, która jest krzywą podwójną ogólnej powierzchni rzędu siódmego o krzywych przekrojowych hypereliptycznych, albo też mamy płaszczyznę podwójną rzędu dziesiątego z pun-

ktem poczwórnym i z czterema parami punktów potrójnych nieskończenie blizkich.

7. Dalsze postępy teoryi układów liniowych krzywych na powierzchniach algebraicznych. Prace Castelnuovo i Enriquesa: „Sopra alcune questioni nella teoria delle superficie“.

W poprzednio wyłożonych rezultatach Teoryi powierzchni algebraicznych przedewszystkiem jest jedna rzecz niezupełna. Mianowicie jest to kwesya krzywych wyjątkowych na powierzchni, a w szczególności kwestya powierzchni, zawierających nieskończenie wiele krzywych wyjątkowych. Zbadaniu krzywych wyjątkowych poświęcona jest przedewszystkiem wspólna praca obu autorów Castelnuovo i Enriquesa (C. E. 5), którzy stworzyli teoryę układów krzywych na powierzchniach algebraicznych.

W pracy tej najprzód, streszczając podstawowe wyniki teoryi układów liniowych, rozszerzają autorowie kilka twierdzeń poprzednich. I tak rozszerzają twierdzenie Riemanna-Rocha (ust. 6) na układy liniowe zupełnie dowolne przywiedlne lub nieprzywiedlne.

Badają następnie związki między niezmiennikami powierzchni bezwzględnemi, t. j. niezależnemi od krzywych wyjątkowych, i względnemi, t. j. zależnemi od krzywych wyjątkowych.

Pierwszym takim związkiem jest związek między niezmiennikiem względnym (ust. 6), danym przez wzór poprzednio podany

$$\omega = \pi_a - 3(\pi - 1) + n,$$

a rodzajem i-krotnym (i-genere) P_i powierzchni. Niechaj będzie

$$n < 2\pi - 2,$$

wtedy mamy nierówność

$$P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1) + 1, \qquad i > 1. \tag{32}$$

Jeżeli układ $|iC_a|$ wycina na krzywych układu $|C|$ seryę niespecyalną, zachodzi nierówność (32) również, gdy mamy $n = 2\pi - 2$ (por. ustęp poprzedni).

Drugi związek między niezmiennikami otrzymamy, wprowadzając nowy niezmiennik względny Zeuthena i Segrego (Zeuthen Lit., Segre A. T., T. 31, 1896). Jeżeli δ jest liczbą podwójnych punktów pęku liniowego krzywej na powierzchni, n liczbą punktów-podstaw pęku, π rodzajem krzywych pęku, wtedy niezmiennik ten określony jest jako wyrażenie

$$I = \delta - n - 4\pi. \tag{33}$$

icm©

Względny ten niezmiennik zmienia się, gdy na powierzchni powstają albo znikają krzywe wyjątkowe, przeciwnie aniżeli ω. A więc suma $\omega+I$ jest niezmiennikiem bezwzględnym, a mianowicie mamy związek

$$\omega+I=12p_a+9. \tag{34}$$

Jest to wzór, nie różniący się od wzoru (20) Roz. I.

Niezmienniki I, ω zależą od krzywych wyjątkowych na powierzchni. A mianowicie, gdy powierzchnia posiada e krzywych wyjątkowych, wtedy, gdy powierzchnia przekształcona nie posiada krzywych wyjątkowych, niezmiennik ω rośnie o liczbę e; dalej niezmiennik I rośnie o e, gdy powierzchnia zyskuje e krzywych wyjątkowych, a więc zachowuje się wprost przeciwnie.

Niezmiennik I daje się też obliczyć zapomocą pęku niewymiernego Γ na powierzchni. Jeżeli ρ, ρ', Δ są odpowiednio rodzajem krzywej pęku, rodzajem pęku i liczbą krzywych pęku, posiadających punkt podwójny, wtedy mamy wzór:

$$I=\Delta+4(\rho-1)(\rho'-1)-4. \tag{35}$$

Przy pomocy równości (34) i (35) otrzymuje się ważną nierówność:

$$5\pi+r\geqq-11p_a+\omega-8, \tag{36}$$

gdzie π, r są rodzajem wirtualnym i wymiarem układu, nie posiadającego wirtualnie punktów-podstaw.

Castelnuovo i Enriques otrzymują następujące rezultaty dla krzywych wyjątkowych. Nazwijmy krzywą wyjątkową krzywą drugiego gatunku, jeżeli nie może być przekształcona na punkt prosty powierzchni, zaś krzywą wyjątkową pierwszego gatunku, jeżeli takie przekształcenie da się uskutecznić.

Otóż Castelnuovo i Enriques dowodzą, że jeżeli na powierzchni istnieje skończona ale zresztą dowolna liczba krzywych wyjątkowych pierwszego gatunku, wtedy, gdy żadne takie dwie krzywe nie przecinają się, można wszystkie te krzywe usunąć: przypadek ostatni zachodzi wówczas, gdy dla każdego układu liniowego krzywych na powierzchni mamy spełnioną nierówność:

$$n\leqq 2\pi-2.$$

A ponieważ, gdy istnieje na powierzchni układ liniowy, dla którego mamy spełnioną nierówność

$$n>2\pi-2,$$

wszystkie rodzaje P_i $(i=1, 2\ldots)$ są równe zeru, więc każda powierzchnia, dla której przy pewnem i dostatecznie wielkiem mamy spełnioną nierówność $P_i>0$, daje się przekształcić na powierzchnię, nie posiadającą krzywych wyjątkowych. Wykonywając kolejno działania dołączenia układów przekrojów płaskich w pewnej przestrzeni S_r na powierzchni, można dojść do układów przywiedlnych $|C^i|$. Jeżeli układy te posiadają, jako części stałe, krzywe fundamentalne układu rezydualnego, krzywe te są wyjątkowe pierwszego gatunku rzędu $<i$, a rodzaj $\pi^{(i)}$ układu $|C^i|$ jest niższy od rodzaju $\pi_k^{(i)}$ układu $|C^i-h\gamma|$, gdzie γ krzywa jest wyjątkowa, o $\frac{h(h+1)}{2}$ jednostkach. Natomiast, gdy krzywe stałe nie są fundamentalne dla układu $|C^i-h\gamma|$, wtedy mamy nierówność $\pi^{(i)}\geqq\pi_k^{(i)}$; może to tylko zajść na powierzchniach, nie posiadających krzywych wyjątkowych pierwszego gatunku.

Najważniejszym wynikiem badań Castelnuovo i Enriquesa nad własnościami układów dołączonych kolejnych jest dowód, że powierzchnie, dla których wszystkie „plurigeneri" równają się zeru, przekształcają się na powierzchnie prostokreślne.

Noether okazał (N. 5) że powierzchnie, zawierające pęk krzywych liniowy wymiernych, są przekształcalne na powierzchnie prostokreślne. Castelnuovo i Enriques (C. E. 4) okazali, że ogólnie powierzchnie, zawierające układ liniowy rodzaju $p>2$ i wymiaru $r\geqq 3p-5$, są albo wymierne albo się przekształcają na powierzchnie prostokreślne; taksamo się rzecz ma, gdy mamy $p=2$ i gdy powierzchnia zawiera pęk krzywych z punktami-podstawami, których suma wielokrotności jest >2; taksamo również, gdy mamy pęk krzywych rodzaju $p=1$ z przynajmniej jednym punktem-podstawą. Jeżeli działanie dołączenia względem układów przekrojów płaskich $|C|$ kończy się na powierzchni po pewnej liczbie działań, wtedy istnieją układy liniowe, dla których mamy nierówność:

$$n>2\pi-2,$$

i nawzajem, gdy takie układy istnieją, działanie dołączenia kończy się. Autorowie dowodzą, że wówczas powierzchnia daje się przekształcić na powierzchnię prostokreślną wymierną lub niewymierną. Mamy zatem ważne twierdzenie:

„Jeżeli powierzchnia rodzaju $p_g=0$ posiada układ liniowy nieprzywiedlny albo przywiedlny wymiaru $\geqq 0$ i rodzaju $\pi>0$, stopnia $n>2\pi-2$, wówczas powierzchnia przekształcalna jest na powierzchnię prostokreślną". Jako bezpośredni wniosek wynika stąd, że powierzchnia posiadająca układ ∞^1 krzywych wymiernych, nie będących pękiem, jest wymierna, albo że inwolucye na powierzchniach prostokreślnych są wymierne lub odwzorowalne na powierzchniach prostokreślnych.

Powierzchnia, posiadająca krzywe wyjątkowe drugiego gatunku, lub nieskończenie wiele krzywych wyjątkowych, przekształca się na po-

icm©

wierzchnię prostokreślną. Powierzchnia, nie prostokreślna i nierównoważna dwuwymiernie powierzchni prostokreślnej, daje się zawsze przekształcić na powierzchnię bez krzywych wyjątkowych. Jest to najważniejszy wynik pracy Castelnuovo i Enriquesa.

Niezmiennik względny ω, o którym była mowa, pozostaje w następującym związku z rodzajem liniowym Noethera $p^{(1)}$, zdefiniowanym dla powierzchni o $p_g > 0$:

$$p^{(1)} = \omega + e,$$

gdzie e jest liczbą krzywych wyjątkowych. Na powierzchniach wymiernych i na powierzchniach przekształcalnych na powierzchnie prostokreślne można zdefiniować liczbę $p^{(1)}$ jako maximum niezmiennika ω na wszystkich powierzchniach dwuwymiernie równoważnych tym powierzchniom. Liczbę tę nazywają autorowie rodzajem liniowym głównym (genere lineare principale).

Powierzchnie o skończonej liczbie krzywych wyjątkowych mają rodzaj $p^{(1)} \geqq 1$; jeżeli mamy $p^{(1)} > 1$, wtedy mamy na „plurigeneri" P_i nierówność:

$$P_i \geqq \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)}-1) + p_a + 1.$$

Powierzchnie prostokreślne mają rodzaj liniowy $p^{(1)} = -8(p-1)+1$, przyczem mamy $p = -p_a$; powierzchnie wymierne mają rodzaj liniowy $p^{(1)} = 10$. Zatem reasumując, mamy wynik:

Jeżeli jest $p^{(1)} \geqq 1$, wtedy powierzchnie są albo wymierne, gdy istnieje układ, dla którego zachodzi $n > 2\pi - 2$, albo też są przekształcalne na powierzchnie prostokreślne. Jeżeli zaś takiego układu niema, wówczas można działanie dołączenia przedłużyć w nieskończoność. Jeżeli zachodzi $p^{(1)} < 1$, wtedy powierzchnię można przekształcić na powierzchnię prostokreślną rodzaju $p > 1$, rodzaju liniowego $p^{(1)} = -8(p-1)+1$.

Dalej wprowadzają autorowie pojęcie rodzaju liniowego wtórnego (genere lineare secondario) $p^{(1)}$. Jest to maximum niezmiennika ω, obliczone jednak nie na wszystkich powierzchniach dwuwymiernie równoważnych danej powierzchni, lecz tylko na tych powierzchniach, których rząd n i rodzaj π przekroju płaskiego spełniają nierówność $n \leqq 2\pi - 2$. Liczba ta równa się zeru na płaszczyźnie i na powierzchniach eliptycznych prostokreślnych. Tak więc zawsze warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby powierzchnia była równoważna dwuwymiernie powierzchni prostokreślnej, jest, by zachodziła nierówność $p^{(1)} \leqq 0$.

8. Pogląd na epokę rozwoju teoryi powierzchni algebraicznych omówioną w Roz. III.

Widzieliśmy, że zasługa zupełnego rozwoju teoryi układów liniowych krzywych algebraicznych na powierzchni, którego doniosłość dla Teoryi powierzchni występowała jasno w wywodach poprzednich, należy się wyłącznie Castelnuovo i Enriquesowi. Uogólnili oni dla dowolnych powierzchni teoryę układów liniowych krzywych na płaszczyźnie, a w szczególności Enriques wprowadził ważne pojęcie krzywych dołączonych do krzywych danych na powierzchni i odkrył fundamentalne twierdzenie, wyrażające niezmienność układu kanonicznego krzywych na powierzchni, wprowadzając równocześnie nowe niezmienniki powierzchni.

Prace tych autorów, omówione w tym Rozdziale, były wyłącznie natury geometrycznej. Niebawem jednak nastała potrzeba zdania sobie sprawy ze związku, jaki zachodzi między temi geometrycznemi rozważaniami a teoryą przestępną, którą poznaliśmy w Rozd. II. Równocześnie w rozmaitych rozważaniach tego Rozdziału występowały układy nieliniowe na powierzchniach algebraicznych. Nastała potrzeba zbadania układów nieliniowych na powierzchniach, które jako specyalny przypadek obejmują układy liniowe. Dalszy rozwój Teoryi powierzchni algebraicznych, wyłożony w następnym Rozdziale, idzie właśnie w tych dwóch kierunkach i prowadzi ostatecznie do zupełnego wyświetlenia podstawowych zagadnień tej Teoryi.

ROZDZIAŁ IV.

Rozwój ogólnej Teoryi powierzchni algebraicznych w ostatnich latach (1903 — 1912) we Włoszech. Prace Severi'ego.

1. Układy algebraiczne krzywych na powierzchniach algebraicznych. Pojęcie seryi charakterystycznej tych układów.

Każdy układ liniowy krzywych na powierzchni algebraicznej należy do pewnego oznaczonego układu algebraicznego krzywych algebraicznych pewnego rzędu (w przestrzeni S_r) i pewnego rodzaju. Wszystkie krzywe danego rzędu i rodzaju na powierzchni należą do pewnej skończonej liczby nieprzywiedlnych układów algebraicznych (N. 12, 13).

Poznawanie coraz to nowszych klas powierzchni, na których leżą liniowe układy linij krzywych algebraicznych zawarte w obszerniejszych układach algebraicznych, dały powód do ogólnych badań nad układami algebraicznemi krzywych. Badania te równocześnie wyświetliły związek zachodzący między teoryą przestępną a teoryą algebraiczną powierzchni algebraicznych.

icm©

Już w roku 1896 (E. 15) otrzymał Enriques ważny rezultat, dający związek między układami algebraicznemi krzywych na powierzchniach a niezmiennikami powierzchni. Widzieliśmy w ust. 6 poprzedniego Rozdziału, że na powierzchni regularnej $p_g = p_a$ dowolny układ algebraiczny krzywych zawarty jest w układzie liniowym.

Badając układy ogólne krzywych na powierzchniach algebraicznych, należy przedewszystkiem uogólnić pojęcie seryi charakterystycznej dla tych układów. Pojęcie to uogólna Severi (S. 4). Severi definiuje najprzód seryę charakterystyczną na dowolnej krzywej układu liniowego, która także może być odosobniona, t. j. należeć do układu liniowego wymiaru zero. Przeprowadźmy przez tę krzywę C układ liniowy nieskończony $|E|$ tak, iż krzywa C nie jest częścią stałą tego układu i niechaj układem rezydualnym będzie układ $|D|$, wtedy zupełna serya charakterystyczna na krzywej C zdefiniowana jest jako serya zupełna, do której należy różnica dwóch seryj

$$|EC| - |DC|,$$

gdzie $|EC|$ jest serya zupełna, do której należą przecięcia krzywych układu $|E|$ z krzywą C, i taksamo $|DC|$ jest serya zupełna, do której należą przecięcia układu $|D|$ z krzywą C. Serya ta nie zależy od obioru układu liniowego $|E|$. Rząd seryi tej równa się stopniowi wirtualnemu krzywej C, ale serya sama nie musi istnieć nawet, gdy stopień wirtualny jest $\geqq 0$. Gdy jednak stopień wirtualny jest większy lub równy rodzajowi krzywej, z pewnością serya charakterystyczna istnieje. Gdy serya charakterystyczna istnieje, wtedy suma jej i seryi wyciętej przez krzywe kanoniczne daje sumę seryi kanonicznej i par punktów leżących w punktach podwójnych krzywej C.

Uważajmy teraz układ algebraiczny ∞^r nieprzywiedlny, to znaczy układ, którego obrazem jest utwór algebraiczny r-wymiarowy V_r nieprzywiedlny, układ, którego krzywą całkowitą jest dana krzywa. Severi dowodzi, że jeżeli mamy $p \geqq 1$, wtedy na krzywej C istnieje serya liniowa charakterystyczna, której grupy wycięte są przez ∞^{r-1} krzywych układu algebraicznego nieskończenie blizkich krzywej C. Jeżeli mamy $r = 1$ i jeżeli układ krzywych jest pękiem, wtedy również istnieje serya charakterystyczna na krzywej i jest rzędu zero.

Do krzywej C odosobnionej, na której istnieja serya charakterystyczna, stosuje się też twierdzenie Castelnuovo o wymiarze tej seryi, a mianowicie:

$$\rho \leqq -1 + p_g - p_a. \tag{1}$$

Zatem na powierzchni regularnej, $p_g = p_a$, serya charakterystyczna na krzywej odosobnionej nie istnieje. Natomiast jeżeli mamy $p_g > p_a$, istnieją

zawsze krzywe odosobnione o seryi charakterystycznej wymiaru $p_g - p_a + 1$, czyli warunkiem koniecznym i dostatecznym nieregularności powierzchni jest istnienie krzywej odosobnionej z seryą charakterystyczną $\geqq 0$.

Opierając się na twierdzeniu Castelnuovo i uważając układ algebraiczny zupełny wymiaru R, którego krzywe należą do układów liniowych zupełnych wymiaru r, mamy nierówność:

$$R \leqq r + p_g - p_a. \tag{2}$$

Z nierówności (2) wynika natychmiast twierdzenie Enriquesa, o którem przed chwilą była mowa, gdyż dla $p_g = p_a$ mamy $R = r$, a zatem na powierzchni regularnej każdy układ algebraiczny jest całkowicie zawarty w układzie liniowym. W szczególności dla powierzchni, posiadających niewymierny pęk krzywych algebraicznych, które (Roz. III, ust. 6) są nieregularne, mamy twierdzenie, że nieregularność $p_g - p_a$ tych powierzchni nie jest mniejsza od rodzaju p pęku, t. j. że

$$p \leqq p_g - p_a.$$

Enriques (E. 18) udowodnił, że powierzchnie, posiadające p całek Picarda pierwszego gatunku o $2p$ peryodach, posiadają układ algebraiczny nieliniowy i nie należący do układu liniowego, a więc są nieregularne.

Severi podaje w omówionej pracy bardzo prosty dowód tego twierdzenia, otrzymując ważny dalszy rezultat, a mianowicie, że nieregularność tych powierzchni nie jest mniejsza od liczby całek Picarda wszędzie skończonych na powierzchni, t. j.

$$p \leqq p_g - p_a;$$

specyalnie, gdy mamy $p = 1$, t. j. gdy na powierzchni mamy jedną całkę wszędzie skończoną Picarda, powierzchnia posiada pęk niewymierny rodzaju 1 krzywych algebraicznych.

Dalszym ważnym krokiem naprzód w naszej teoryi jest podstawowy rezultat Enriquesa (E. 19), otrzymany w r. 1904. Enriques okazał, że na każdej powierzchni nieregularnej istnieją układy nieliniowe krzywych algebraicznych, nie zawarte w układach liniowych, a mianowicie na każdej powierzchni nieregularnej wszystkie krzywe danego rzędu należą do pewnej skończonej liczby układów algebraicznych na ogół nieliniowych.

Enriques odwzorowuje powierzchnię daną na płaszczyźnie s-krotnej, gdzie s jest rzędem powierzchni. Posługuje się lemmatem, który sam przez się jest bardzo ciekawy i orzeka, że krzywa, która się w ciągły sposób zmienia na powierzchni, nie może rozpaść się na dwie lub więcej części, nie zyskując przez to nowych punktów podwójnych lub wielokrotnych. Na podstawie tego

icm©

lemmatu dowodzi, że serya charakterystyczna układu algebraicznego zupełnego jest zupełna. Stąd wynika, że układ regularny liniowy, mający wymiar

$$r = n - \pi + p_a + 1,$$

należy do układu algebraicznego zupełnego o wymiarze

$$r = n - \pi + p_g + 1,$$

złożonego z $\infty^{p_g - p_a}$ liniowych układów nierównoważnych.

Severi (S. 10) dowodzi również tego samego twierdzenia przy pomocy podanego wyżej lemmatu Enriquesa, postępując zresztą zupełnie taksamo jak przy definicyi (S. 4, por. wyżej) seryi charakterystycznej krzywej dowolnej.

2. Twierdzenie Riemanna-Rocha dla układów algebraicznych krzywych.

Kilka razy już w ciągu poprzednich wywodów była mowa o uogólnieniu dla powierzchni klasycznego twierdzenia Riemanna-Rocha.

W pracy o układach algebraicznych krzywych na powierzchni (S. 9) dowodzi Severi następujących twierdzeń, odnoszących się do uogólnienia twierdzenia Riemanna-Rocha: „Niechaj n, π, i będą odpowiednio stopniem wirtualnym, rodzajem wirtualnym i indeksem specyalności (t. j. liczbą powierzchni kanonicznych, przechodzących przez daną krzywą) krzywej nieprzywiedlnej lub przywiedlnej C tak, że zachodzi następująca nierówność:

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0;$$

wtedy C należy do układu liniowego o wymiarze

$$r \geqq p_a + n - \pi + 1 - i,$$

i do układu ciągłego algebraicznego o wymiarze

$$R \geqq p_g + n - \pi + 1 - i,$$

składającego się z $\infty^{p_g - p_a}$ układów liniowych nierównoważnych".

Dowód opiera się na następującym lemmacie: Uważajmy krzywą C na powierzchni i przeprowadźmy przez nią powierzchnię S, wycinającą na powierzchni danej krzywą resztującą K. Powierzchnie dołączone do krzywej K, przechodzące przez krzywą C i przez punkty podwójne K, wycinają na krzywej K seryę liniową zupełną.

3. Krzywe wirtualne na powierzchniach algebraicznych.

Severi (S. 16) wprowadza pojęcie krzywych wirtualnych (nierzeczywistych), nader ważne dla ogólnej teoryi układów krzywych na powierzchniach, w sposób następujący:

Uważajmy dwie krzywe rzeczywiste A, B: różnicę krzywych tych

$$C = A - B$$

definiuje Severi zapomocą umów następujących:

1. Jeżeli istnieje układ

$$|D + A - B| = |E|,$$

układ ten nazywa się sumą krzywej D i krzywej wirtualnej C. Krzywa wirtualna C nazywa się różnicą układów E i D:

$$C \equiv E - D.$$

2. Dwie krzywe wirtualne C, C_1:

$$C \equiv A - B, \qquad C_1 \equiv A_1 - B_1,$$

są równoważne, jeżeli zachodzi równość

$$A + B_1 \equiv A_1 + B.$$

Krzywym wirtualnym można nadać stopień wirtualny i rodzaj wirtualny zupełnie taksamo, jak krzywym rzeczywistym $A - B$. Taksamo można wprowadzić pojęcie indeksu specyalności i, jako liczby liniowo niezależnych krzywych układu liniowego

$$|L + B - A|,$$

gdzie L jest układem kanonicznym, nie pozbawionym krzywych wyjątkowych. Jeżeli $A - B$ jest krzywą wirtualną, wtedy indeks specyalności zmienia się, jeżeli krzywe wyjątkowe odejmiemy od układu $|L|$. Np. dla układu

$$|C| = |A - 2A| = |-A|$$

mamy

$$|L - C| \equiv |L + A|,$$

to znaczy układ dołączony do $|A|$. Natomiast, odejmując krzywe wyjątkowe powierzchni od układu $|L|$, otrzymamy układ $|L + A - \Sigma O|$, który to układ na ogół ma inny wymiar aniżeli $|L + A|$.

Możemy dla krzywych wirtualnych uogólnić twierdzenie Riemanna-Rocha, dochodząc do niego drogą zupełnie podobną do tej, którą się to twierdzenie otrzymuje dla krzywych istotnych. Otrzymamy wówczas

$$r \geqq p_a + n - \pi + 1 - i,$$

gdzie n, π są wirtualne charaktery krzywej $A - B$. Jeżeli krzywa ta nie jest istotna, wtedy mamy $r = -1$, a więc zachodzi nierówność:

$$-1 \geqq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

icm©

Nareszcie S e v e r i stosuje pojęcie grup wirtualnych do punktów na krzywej. Jeżeli układ grup punktów $A-B$ nie istnieje, ale układ $|L+B-A|$ istnieje i ma wymiar $i+1$, wtedy $(i \geqq 0)$ mamy

$$r = n - p + i,$$

przyczem $r \geqq -1$.

W odczycie, wygłoszonym na Kongresie Rzymskim w r. 1908 (S. 25), zastanawia się S e v e r i nad przyczynami nieregularności układów liniowych; pierwszą jest to, że niedostatek seryi charakterystycznej układu liniowego może być mniejszy od nieregularności $p_g - p_a$ powierzchni, drugą zaś jest niezupełność seryi liniowej, wyciętej na krzywej C przez powierzchnie dołączone rzędu $n - 4$.

Otóż S e v e r i dowodzi, że jeżeli stopień i rodzaj wirtualne układu liniowego spełniają nierówność

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geqq 0,$$

wtedy niedostatek seryi charakterystycznej układu liniowego nieprzywiedlnego dany jest przez związek

$$\delta = p_g - p_a.$$

Dowód jednak twierdzenia tego (por. R o s e n b l a t t R. P. T. 33) nasuwa pewne wątpliwości, a samo twierdzenie z pewnością nie zawsze jest prawdziwe. Mianowicie, jeżeli jeden z układów $|C|$, tworzących układ $\{C\}$ o $p_g - p_a$ układach liniowych, ma wymiar większy, niż pozostałe, wtedy bardzo dobrze być może, że serya charakterystyczna, wycięta na krzywych C przez układ $|C|$, jest zupełna, albowiem niema krzywych układów $|C|$ liniowych innych, aniżeli krzywe układów, należących do układu $\{C\}$, nieskończenie blizkich krzywej C uważanej.

Oznaczając zatem przez $|D|$ układ $|E-D|$, można wprawdzie obrać układ ten tak, aby układ $|D|$ był regularny, ale stąd jeszcze nie wynika, aby niedostatek seryi charakterystycznej krzywej C układu $|C|$, równający się niedostatkowi seryi charakterystycznej krzywej D układu $|D|$, musiał być równy $p_g - p_a$.

Ta sama uwaga odnosi się do przypadku, gdy nierówność

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geqq 0$$

dla układu $|C|$ nie jest spełniona, i jeżeli układ $|C|$ należy do układu algebraicznego, złożonego z ∞^i, $i < p_g - p_a$, układów liniowych. I teraz niekoniecznie, jak S e v e r i twierdzi, wszystkie te układy liniowe muszą być tego samego wymiaru.

Na uwagę zasługuje następujący rezultat S e v e r i'ego (S. 19):

„Jeżeli między charakterami wirtualnemi n, π krzywej C na powierzchni spełnia się nierówność

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geqq 0,$$

wtedy istnieje j e d e n i t y l k o j e d e n układ algebraiczny zupełny, utworzony z $\infty^{p_g - p_a}$ układów liniowych nierównoważnych, do którego krzywa C należy jako krzywa całkowita".

W związku z badaniami poprzednio wyłożonemi pozostają badania nad kwestyą, jakie układy krzywych na powierzchni są regularne. Widzieliśmy, że P i c a r d (Roz. II, ust. 20) okazał drogą przestępną, że niedostatek, wycięty na przekrojach płaskich powierzchni przez krzywe dołączone rzędu $2\pi - 2$, t. j. wycięte przez powierzchnie dołączone rzędu $n-3$, wynosi dokładnie:

$$\omega_{m-3} = p_g - p_a.$$

S e v e r i dowodzi (S. 20) drogą geometryczną twierdzenia ogólniejszego od twierdzenia P i c a r d a:

Jeżeli krzywa C należy do układu ciągłego przynajmniej ∞^1, a l e k t ó r y n i e j e s t p ę k i e m n i e w y m i e r n y m, i jeżeli zawarta jest w układzie liniowym $|D|$ tak, że istnieje układ liniowy

$$|E| = |D - C|,$$

wtedy serya, wycięta przez układ $|E|$ na dowolnej krzywej układu liniowego $|D|$, jest zupełna.

Stąd wynika regularność układu $|C'|$ dołączonego do krzywej C, należącej do układu ciągłego przynajmniej ∞^1, który nie jest pękiem niewymiernym. Stąd też wynika następujące znaczenie nadmiaru (sovrabbondanza) układu $|C|$: jest to niedostatek seryi, wyciętej przez układ $|C'|$ na krzywej układu $|2C|$.

Ogólna krzywa układu algebraicznego zupełna nie może należeć do układu algebraicznego, któryby nie był całkowicie zawarty w układzie (S. 19). Ale i d o w o l n a szczególna krzywa układu (S. 24) nie może należeć do układu, któryby nie należał całkowicie do układu S. A więc gdy rodzaje wirtualne krzywej spełniają nierówność

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geqq 0,$$

wtedy istnieje j e d e n j e d y n y układ algebraiczny zupełny, którego dana krzywa jest krzywą całkowitą, złożony z $\infty^{p_g - p_a}$ układów liniowych nierównoważnych.

icm©

Opierając się na poprzednio podanem twierdzeniu o zupełności seryi, wyciętej przez układ $|E|$ na krzywych układu $|D|$, dowodzi Severi (S. 24), w sposób odmienny od poprzednio podanego sposobu (S. 20), istnienia układów regularnych na każdej powierzchni, a więc taksamo jak w pracy poprzednio omówionej (S. 20) regularności układu $|C'|$ dołączonego do układu $|C|$, który nie jest pękiem niewymiernym. Twierdzenie o zupełności seryi wyciętej przez układ $|E|$ na D pozwala również (S. 20) na dowód twierdzenia o istnieniu krzywej wirtualnej $A-B$ rodzaju π, stopnia n i indeksu specyalności i. Wystarczy, aby zachodziła nierówność:

$$r \geqq n - \pi + p_a + 1 - i \geqq 0.$$

4. Związek podstawowy między liczbą całek Picarda pierwszego i drugiego gatunku na powierzchni algebraicznej a nieregularnością powierzchni.

Mówiliśmy już w Roz. II, że dopiero wspólnym usiłowaniom Castelnuovo, Enriquesa i Severi'ego udało się znaleść liczby całek Picarda pierwszego i drugiego gatunku. Pierwszy krok w tym kierunku poczynił Enriques (E. 18), okazując, że na powierzchniach, które posiadają p całek Picarda pierwszego gatunku o $2p$ peryodach, zawsze istnieją układy algebraiczne, nie zawarte w układach liniowych, a więc powierzchnia jest nieregularna. Severi (S. 8) dowodzi, że powierzchnie o koneksyi liniowej $p^{(1)}>1$ są nieregularne. Dowodząc (ust. 1), że na powierzchniach nieregularnych istnieją układy zupełne nieliniowe, nie zawarte w układach liniowych, odwrócił Enriques poprzednie twierdzenie Severi'ego, albowiem z twierdzenia Humberta (Roz. II, ust. 11), że gdy powierzchnia nie posiada całek Picarda drugiego gatunku, wtedy każdy układ algebraiczny zawarty jest w układzie liniowym, wynika, że powierzchnie nieregularne posiadają całki Picarda pierwszego gatunku, że więc na nich zachodzi $p_1 > 1$.

Twierdzenie to rozwija Severi (S. 11), opierając się na lemmacie, że liczby całek Picarda pierwszego i drugiego gatunku p, q spełniają nierówność:

$$q - p \geqq p_g - p_a. \tag{3}$$

Uważajmy mianowicie całkę drugiego gatunku, posiadającą tylko jedną krzywą polarną pierwszego rzędu $I(x, y, z)$. Nazwijmy funkcyą rezydualną na tej krzywej C spółczynnik rozwinięcia całki Abela drugiego gatunku $I(x, \bar{y}, z)$ ($\bar{y}$ stałe) w okolicy przecięć płaszczyzny $y=\bar{y}$ z krzywą C, stojący przy $\frac{1}{x-x_0}$, jeżeli $(x_0, \bar{y}, z_0)$ jest punktem przecięcia. Grupa punktów na krzywej C, w której funkcya ta rezydualna $\varphi(x, y, z)$ posiada zera na krzywej C i jest w nich regularna, a więc grupa punktów, w których całka $I(x, \bar{y}, z)$ jest regularna, jest grupą seryi charakterystycznej, istniejącej na krzywej.

Jeżeli całka I jest funkcyą wymierną, wtedy grupa charakterystyczna jest grupą punktów-podstaw pęku krzywych $I=\text{const}$.

Otóż na każdej powierzchni F, na której $p_1>1$, istnieją całki Picarda drugiego gatunku, które przez dodanie funkcyi wymiernej nie dadzą się sprowadzić do całek pierwszego gatunku. Grupa seryi charakterystycznej, należąca do całki Picarda drugiego gatunku, nie jest grupą charakterystyczną wyciętą na krzywej C przez układ liniowy $|C|$. A więc serya charakterystyczna układu tego nie jest zupełna, czyli, że powierzchnia na podstawie twierdzenia Castelnuovo jest nieregularna. Ponieważ przez dodanie funkcyi wymiernej można każdą całkę drugiego gatunku sprowadzić do całki posiadającej jedną krzywę polarną pierwszego rzędu, więc powyższe twierdzenie jest zupełnie udowodnione. Ponieważ dalej każdej z $q-p$ liniowo niezależnych całek Picarda drugiego gatunku, których żadna kombinacya liniowa nie jest całką pierwszego gatunku, odpowiada grupa niezależna seryi charakterystycznej na jedynej wspólnej krzywej polarnej pierwszego rzędu, więc stąd wynika nierówność (3). Jak już mówiliśmy, Enriques odwrócił twierdzenie Severi'ego, okazując, że na powierzchni algebraicznej każdy układ ciągły zupełny posiada seryę charakterystyczną zupełną, a więc na podstawie twierdzenia Castelnuovo i na podstawie twierdzenia Humberta istnieją całki pierwszego gatunku, a więc i gatunku drugiego, gdyż mamy $q-p \geqq p_g - p_a$.

Otóż opierając się na tych rezultatach, dowodzi Severi (S. 12) równości

$$q - p = p_g - p_a, \tag{4}$$

tudzież nierówności

$$q \geqq 2p, \tag{5}$$

skąd wynikają natychmiast następujące nierówności:

$$p \leqq p_g - p_a \tag{6}$$

$$q \leqq 2(p_g - p_a). \tag{7}$$

Już na tem miejscu powiemy, że w tym samym roku 1905 Castelnuovo (C. 18, 19) poczynił ostatni krok, który jeszcze pozostawał do wykonania, dowodząc, że zachodzi następująca nierówność

$$p \geqq p_g - p_a; \tag{8}$$

jako ostateczny wniosek otrzymuje się więc podstawowe równości:

$$p = p_g - p_a, \tag{9}$$

icm©

$$q = 2(p_g - p_a), \tag{10}$$

które w zupełności rozwiązują nasz problemat.

Równocześnie z poprzedniemi badaniami Picard, jak widzieliśmy w Roz. II, opierając się na równaniu różniczkowem $|E|$, wyprowadził również (Pi. 41, 42, 44) równości (4), (9) i (10).

Severi w dowodzie równości (4) opiera się na lemmacie: jeżeli krzywa na powierzchni zawarta jest w układzie algebraicznym nieskończonym, wtedy istnieje całka drugiego gatunku, której krzywą polarną pierwszego rzędu jest tylko krzywa C, zaś grupą charakterystyczną należącą do całki jest dowolna grupa seryi charakterystycznej na krzywej C. Rozważając zupełną seryę charakterystyczną na krzywej C, dochodzi Severi do równości (4). Rozważania, tyczące się rzeczywistości peryodów całek Picarda, dają następnie nierówność (5), skąd wypływają nierówności (6) i (7). Ale najważniejszym krokiem — jak już powiedzieliśmy — był krok ostatni, którego dokonał Castelnuovo dowodząc nierówności (8).

Wiadomo, że jeżeli na krzywej rodzaju p mamy dowolną grupę $n \geqq h$ punktów, wtedy n stałych, określających położenia tych punktów, można podzielić na dwie grupy, mianowicie na grupę $n-p$ stałych, od których grupa zależy wymiernie, i na grupę p stałych, od których grupa zależy niewymiernie. Mianowicie funkcye symetryczne odciętych i rzędnych punktów grupy, które są funkcyami Abela $2p$-peryodycznemi p wartości sum całek Abela w punktach grupy, zależą wymiernie od $p+1$ funkcyj Abela, związanych równaniem algebraicznem (twierdzenie Weierstrassa).

Podobnie ma się rzecz ze stałemi, określającemi równania krzywych na powierzchniach. Układ regularny o wymiarze

$$r = n - \pi + 1 + p_a$$

zawarty jest w układzie algebraicznym $\infty^{r+p_g-p_a}$, utworzonym z $\infty^{p_g-p_a}$ układów liniowych ∞^r. Obrazem tych układów jest utwór $p_g - p_a$-wymiarowy, który zależy algebraicznie od $p_g - p_a = p$ parametrów $\xi_1, \ldots, \xi_p$ tak, że mamy równanie algebraiczne

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{p+1}) = 0.$$

Taki utwór Castelnuovo nazywa utworem Picarda, ponieważ Picard badał pierwszy te utwory (Pi. 21). Otóż istnieje grupa ∞^p przekształceń, przekształcających układy liniowe regularne na powierzchni na inne, należące do tego samego układu algebraicznego zupełnego, co dawne. Każdym dwom układom odpowiada jedno oznaczone przekształcenie, przemieniające te układy na siebie, a więc grupa jest przechodnia; nadto jej przekształcenia są przemienne, a więc utwory wielowymiarowe Picarda posiadają grupę ∞^p przechodnią przekształceń dwuwymiernych przemiennych.

Przypadkowi $p=1$ odpowiadają krzywe rodzajów 1 i 0. Przypadkiem $p=2$ zajmuje się Picard i dochodzi do rezultatu (Roz. II, ust. 9), któryśmy już poprzednio poznali. Na utwory algebraiczne, więcej niż dwuwymiarowe, uogólnia również Picard rezultaty, otrzymane dla przypadku $p=2$.

Utwór algebraiczny p-wymiarowy, posiadający grupę ∞^p przekształceń przemiennych, posiada p całek kształtu

$$u_i = \sum_{k=1}^{p} \int P_k^{(i)}\, d\,\xi_k, \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

z których się otrzymuje ξ_i, jako funkcye jednoznaczne o $2p$ peryodach:

$$\xi_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_p) \qquad (i = 1, \ldots, p+1).$$

Całki te, jak okazał Painlevé (Pa. 7), są wszędzie skończone na utworze algebraicznym.

Utwór algebraiczny V_p posiada, oprócz grupy ∞^p przekształceń, seryę ∞^p przekształceń, które wprawdzie nie tworzą grup, ale dają inwolucye g_n^{n-1} punktów na utworze algebraicznym. Rozważając grupę powyższą i podgrupy tudzież serye inwolucyi na utworze, dochodzi Castelnuovo do podanej już poprzednio nierówności (8), z której wynikają nierówności (9), (10), również już wyżej podane.

5. Twierdzenie Abela na powierzchniach algebraicznych. Teorya równoważności krzywych na powierzchniach algebraicznych.

Sławne twierdzenie Abela, dające przestępne kryteryum równoważności grup punktów na krzywej algebraicznej, uogólnia Severi dla powierzchni algebraicznych (S. 17, 18).

Pierwszem twierdzeniem Abela na powierzchniach nazywa Severi twierdzenie następujące:

„Jeżeli $I_1, \ldots, I_p$ są p całkami Abela na powierzchni pierwszego gatunku, wtedy warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby układ ciągły należał do układu liniowego jest, by—jeżeli nazwiemy $x_1, \ldots, x_n$ punkty przecięcia dwóch krzywych układu, zaś I całkę Picarda pierwszego gatunku—zachodziły równości

$$\sum_{i=1}^{n} I_h(x_i) = C_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

w których C_h $(h = 1, 2, \ldots, p)$ są pewne stałe

icm©

Mamy więc analogię do twierdzenia Abela na krzywych, które orzeka, iż warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dwie grupy punktów ξ i η należały do tego samego układu liniowego, jest:

$$\sum_i u_k(\xi_i) = \sum_i u_k(\eta_i), \qquad (k=1,\ldots,p)$$

gdzie u_k są całkami pierwszego gatunku.

Dowód opiera się na następującym lemmacie, który sam przez się jest bardzo interesujący: „Jeżeli na krzywej algebraicznej serya ∞^1 grup ν punktów jest taka, że n grup, przechodzących przez punkt dowolny, tworzy grupę $n\nu$ punktów z owym punktem jako n-krotnym, należącą do seryi liniowej, wtedy i serya ∞^1 grup ν punktów należy również do seryi liniowej".

Pierwsze twierdzenie Abela na powierzchniach można przedstawić w innej postaci, opierając się na następującem kryteryum równoważności dwóch krzywych na powierzchni: „Jeżeli dwie krzywe wycinają na krzywych pęku nieprzywiedlnego grupy równoważne, wtedy krzywe te albo są równoważne, albo się mogą różnić o krzywe pęku".

Stąd wynika następująca postać pierwszego twierdzenia Abela:

„Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby ciągły układ krzywych zawarty był w układzie liniowym jest, by suma wartości każdej całki pierwszego gatunku Picarda w punktach wspólnych krzywej układu a krzywej stałej nieprzywiedlnej, należącej do pęku liniowego, nie zależała od obranej krzywej układu ciągłego". Z twierdzenia tego wynika nierówność (8), więc twierdzenia (9) i (10) Castelnuovo.

Z twierdzenia poprzedniego wynikają dalsze ważne twierdzenia:

1. Jeżeli krzywe układu ciągłego wycinają na krzywej stałej, należącej do układu liniowego, grupy równoważne, wtedy ten układ ciągły zawarty jest w układzie liniowym.

2. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby układ algebraiczny zawarty był w układzie liniowym jest, by grupy krzywych, przechodzące przez punkty na powierzchni, należały do jednego i tego samego układu liniowego.

Drugie twierdzenie Abela na powierzchni, odnoszące się do inwolucyi I_n^r n punktów na powierzchni, podaje warunek konieczny i dostateczny, aby te inwolucye były regularne, t. j. aby ich obrazem był utwór algebraiczny regularny. Warunkiem tym jest, by suma wartości dowolnej całki Picarda w punktach grup inwolucyi była stała.

Severi (S. 19) podaje także czysto algebraiczny dowód poprzednio podanego kryteryum, pozwalającego orzec, że dany układ ciągły krzywych algebraicznych zawarty jest w układzie liniowym, jeżeli wiadomo jest, że krzywe układu tego wycinają na krzywej należącej do nieskończonego układu krzywych, który jednak nie jest pękiem niewymiernym, grupy seryi liniowej. Twierdzenie to rozszerza nawet Severi w tej pracy, okazując, że wystarczy wiedzieć, że grupy kA ($k>1$) tworzą seryę liniową na krzywej, aby orzec, że krzywe układu $\{A\}$ należą do obszerniejszego układu liniowego. Dowód opiera się na ważnem twierdzeniu Castelnuovo (C. 20), dającem kryteryum, aby serya algebraiczna grup punktów na krzywej rodzaju p należała do seryi liniowej. Jeżeli n, ν są rzędem i indeksem tej seryi, wtedy warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby serya ta należała do seryi liniowej jest, by serya ta posiadała $2\nu(n+p-1)$ punktów podwójnych.

Warunek, by układ, do którego krzywa C należy, nie był pękiem niewymiernym, jest konieczny; można utworzyć układ $\{A\}$, którego krzywe wycinają grupy seryi liniowej na krzywej C, mimo to jednak $\{A\}$ nie należy do układu liniowego. Nareszcie niedawno rozszerzył Severi (S. 27) twierdzenie, dające kryteryum równoważności dwóch krzywych A, B algebraicznych, podane w poprzednio omówionej pracy (S. 17). Jeżeli dwie krzywe A, B wycinają na krzywych układu ciągłego grupy równoważne, wtedy albo są równoważne, albo się różnią o krzywe fundamentalne układu.

6. Teorya podstawy (basis) układów krzywych algebraicznych na powierzchni algebraicznej.

Najważniejsze jednak badania Severi'ego w teoryi układów algebraicznych na powierzchni są badania nad podstawą (basis) układów krzywych na powierzchni.

Dawniej już znane były obszerne klasy powierzchni, posiadające tę ważną własność, że każdy układ krzywych algebraicznych na takiej powierzchni lub przynajmniej jego wielokrotność daje się otrzymać przez dodawanie albo przez odejmowanie pewnej liczby układów algebraicznych krzywych, raz na zawsze stale na powierzchniach obranych. Układy te, za pomocą których każdy inny układ da się wyrazić w sposób powyższy, tworzą właśnie podstawę na powierzchni algebraicznej.

I tak na płaszczyźnie każdy układ liniowy krzywych bez punktów-podstaw jest wielokrotnością układu liniowego prostych. A więc i na powierzchniach wymiernych istnieje podstawa. Na ogólnej powierzchni dowolnego rzędu (N. 13, 14) każda krzywa algebraiczna jest przecięciem zupełnem tej powierzchni powierzchnią pewnego rzędu, zatem podstawę stanowią przekroje płaskie.

Na powierzchni Kummera (Humbert Lit. J. L., Ser. IV, T. 9) również przekroje płaskie tworzą podstawę. W Rozdziale V poznamy dalsze przykłady takich powierzchni. Severi (S. 13, 15) wprowadza pojęcie podstawy na zupełnie dowolnej powierzchni algebraicznej. Niechaj dwie krzywe C_1, C_2 należą do tego samego układu algebraicznego, co piszemy symbolicznie:

$$C_1 \equiv C_2;$$

krzywe te mogą być złożone z pewnej $\geqq 1$ liczby krzywych, posiadających pewne wielokrotności. Nazwijmy krzywe składowe tych dwóch krzywych $C_1, C_2, \dots, C_l$, wtedy mamy równość:

$$\lambda_1 C_1 + \dots . \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \dots . + \mu_l C_l, \tag{11}$$

gdzie liczby λ, μ są liczby całkowite dodatnie, albo pisząc $-\lambda_i = \mu_i$ dla $i = t+1, \dots, l$ mamy:

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i C_i \equiv 0. \tag{11a}$$

Mówi się, że krzywe są algebraicznie ze sobą związane (algebraicamente legate). Jeżeli te krzywe należą nie do układu ogólnego, ale do układu liniowego, mówi się o liniowym związku między krzywemi (linearmente legate). Podstawowem pojęciem dla układu l krzywych jest pojęcie macierzy tych krzywych (matrice discriminante). Niechaj $m_1, \dots, m_l$ będą rzędy tych l krzywych, niechaj dalej $n_{i,k}$, $i \neq k$, będą liczby punktów ruchomych przecięcia się krzywych C_i i C_k, zaś n_{ii} niechaj będzie stopniem wirtualnym krzywej C_i. Uważajmy macierz

$$\left|\begin{matrix} n_{11}, & n_{12}, & \dots, & n_{1l} \\ n_{22}, & n_{22}, & \dots, & n_{2l} \\ . & . & . & . \\ n_{l1}, & n_{l2}, & \dots, & n_{ll} \\ m_1, & m_2, & \dots, & m_l \end{matrix}\right| \tag{12}$$

Jest to właśnie macierz, należąca do krzywych $C_1, \dots, C_l$. Wyznacznik pierwszych n wierszy nazywa się wyznacznikiem tych krzywych.

Uważajmy najprzód dwie krzywe A, B, związane równaniem algebraicznem

$$\lambda A + \mu B \equiv 0,$$

wtedy musi być $\mu = -\lambda$, a więc:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

krzywe zatem A, B posiadają charaktery, spełniające równości

$$n_{11} = n_{12} = n_{22}.$$

Nawzajem, gdy stopnie wirtualne krzywych spełniają warunki

$$n_{11} = n_{12} = n_{22} > 0,$$

zachodzi równość

$$\lambda A \equiv \lambda B.$$

Gdy dalej mamy

$$n_{11} = n_{12} = n_{22} = 0$$

wtedy, gdy C jest przekrojem płaskim powierzchni, zachodzi równość

$$\lambda C + \lambda A \equiv \lambda C + \lambda B.$$

Przekrój płaski C można zastąpić krzywą dowolną, której stopień wirtualny jest > 0. Łatwo stąd dojść do warunku koniecznego i dostatecznego, aby krzywe $C_1, \dots, C_l$ były algebraicznie ze sobą związane. Warunkiem tym jest, aby macierz (12) tudzież wszystkie jej wyznaczniki stopnia l były zerami. Nawzajem, gdy ta macierz jest zerem i jeżeli liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ są dodatnie, zaś liczby $\lambda_{t+1}, \dots, \lambda_l$ są ujemne, to oznaczając

$$\mu_{t+1} = -\lambda_{t+1}, \dots, \mu_l = -\lambda_l,$$

i uważając krzywe A, B

$$A \equiv \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_t C_t, \qquad B \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \dots + \mu_l C_l$$

mieć będziemy równości:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

jeżeli zachodzą związki:

$$| AA | = | AB | = | BB | > 0.$$

Jeżeli stopnie wirtualne równają się zeru, wtedy znów mamy

$$\lambda C + \lambda A \equiv \lambda C + \lambda B,$$

gdzie C jest krzywą dowolną stopnia wirtualnego większego niż zero, albo też stopnia zero, ale przecinającą krzywe A i B przynajmniej w jednym punkcie.

Uważajmy teraz układ algebraiczny ∞^1 krzywych, do którego należą krzywe algebraicznie sobie równoważne A, B, gdy odwzorowujemy układ ten krzywą

$$\varphi(\xi, \eta) = 0.$$

Severi, uważając z jednej strony całki Abela trzeciego gatunku tej krzywej, z drugiej strony całki Picarda trzeciego gatunku na powierzchni, dochodzi do następującego ważnego twierdzenia.

„Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby krzywe $C_1, \dots, C_l$ były algebraicznie związane, jest istnienie całki trzeciego gatunku Picarda, której osobliwości logarytmiczne są położone tylko na krzywych $C_1, \dots C_l$".

Dwie całki trzeciego gatunku Picarda, posiadające te same krzywe logarytmiczne, mają peryody polarne do siebie proporcyonalne i zarazem pro-

icm©

porcyonalne do liczb λ, jeżeli nie wszystkie wyznaczniki $l-1$ stopnia macierzy (12) równają się zeru.

Widzieliśmy w Roz. II, ust. 7, że Picard, badając istnienie na powierzchni całek trzeciego gatunku, postawił pytanie, czy na powierzchniach o koneksyi liniowej $p_1=1$ istnieją całki trzeciego gatunku, nie sprowadzające się do kombinacyj algebraiczno-logarytmicznych.

Otóż warunkiem koniecznym i dostatecznym aby całki Picarda trzeciego gatunku sprowadzały się do kombinacyj algebraiczno-logarytmicznych, jest regularność powierzchni.

Najważniejszym jednak rezultatem Severi'ego jest twierdzenie następujące o podstawie krzywych na powierzchni. Picard udowodnił istnienie liczby ρ charakterystycznej dla powierzchni (Roz. II, ust. 15), posiadającej własność następującą:

„Każdy układ $\rho+1$ dowolnych krzywych stanowi całkowity układ krzywych algebraicznych tego rodzaju, że istnieje pewna całka Picarda trzeciego gatunku, która tylko na tych krzywych może się stać logarytmicznie nieskończoną, ale nie każdy układ ρ dowolnych krzywych na powierzchni posiada tę własność. Stąd na podstawie twierdzenia wyżej podanego można znaleść pewną liczbę ρ krzywych algebraicznych od siebie niezależnych $C_1,\ldots, C_\rho$ tak, aby każda krzywa C była związana z temi krzywemi równaniem postaci:

$$\lambda C+\sum_{i=1}^{\rho}\lambda_i C_i\equiv 0 \qquad \lambda\neq 0.$$

Dla powierzchni regularnych twierdzenie to orzeka, że wprawdzie można obrać ρ krzywych tak, aby nie istniała funkcya wymierna, której zera i bieguny leżą tylko na tych ρ krzywych, ale jeżeli do tych ρ krzywych dołączymy dowolną $\rho+1$-szą krzywą, wtedy istnieć będzie funkcya wymierna, której zera i bieguny są położone tylko na tych krzywych.

Aby otrzymać układ ρ krzywych, który tworzy podstawę na danej powierzchni, potrzeba i wystarcza, aby ich wyznacznik był od zera odmienny. Wszystkie układy krzywych, które tworzą różne podstawy, mają ten sam znak wyznacznika.

Badając własności niezmienne względem przekształceń dwuwymiernych liczby ρ, dochodzi się do rezultatów następujących:

Jeżeli powierzchnia F przechodzi na powierzchnię F' w ten sposób, że znika e krzywych wyjątkowych na powierzchni F, powstaje zaś e' krzywych takich na powierzchni F' i jeżeli wszystkie te krzywe wyjątkowe są pierwszego gatunku, wtedy mamy związek:

$$\rho+e'=\rho'+e.$$

Nareszcie zapomocą podstawy krzywych na powierzchni można uogólnić wzór Bézouta dla krzywych płaskich, a więc znaleść wzór, dający liczbę przecięć dwóch krzywych algebraicznych na powierzchniach algebraicznych. Niechaj na powierzchni, której podstawę stanowią krzywe $C_1,\ldots, C_\rho$, będą dwie krzywe C, D, wtedy jeżeli mamy

$$\lambda C+\sum_{i=1}^{\rho}\lambda_i C_i\equiv 0, \qquad \mu D+\sum_{i=1}^{\rho}\mu_i C_i\equiv 0,$$

liczba punktów przecięcia krzywych C, D wynosi:

$$|C, D|=\frac{1}{\lambda\mu}\Sigma\lambda_i\mu_k\,.\,n_{i,k} \qquad (i, k=1,\ldots \rho)$$

Stopień wirtualny krzywej C, nie posiadającej punktów-podstaw przepisanych wynosi

$$n=\frac{1}{\lambda^2}\Sigma\lambda_i\lambda_k n_{ik}.$$

Nareszcie rodzaj wirtualny tych krzywych równa się

$$\pi=\frac{1}{2\lambda^2}\Sigma\lambda_i\lambda_k n_{ik}-\frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{\rho}\lambda_i\Theta_i+1,$$

$$\Theta_i=2\pi_i-2-n_{ii}.$$

Dalszy ciąg badań nad teoryą podstaw układów krzywych na powierzchni ogłosił Severi w r. 1908 (S. 21), zajmując się głównie pojęciem podstawy minimalnej (basis minima) krzywych na powierzchniach.

Podstawa minimalna układu krzywych na powierzchniach jest to podstawa, posiadająca tę własność, że w związku, jaki zachodzi między dowolną krzywą na powierzchni a ρ krzywemi tworzącemi podstawę, spółczynnik przy krzywej równa się jedności, a więc mamy:

$$C\equiv\sum_{i=1}^{\rho}\lambda_i C_i.$$

Podstawa minimalna jest specyalnym przypadkiem podstawy, którą Severi nazwał podstawą pośrednią (basis intermediaria). Podstawę taką tworzą ρ krzywe wtedy, jeżeli liczba λ, która występuje przy krzywej C w związku

$$\lambda C\equiv\sum_{i=1}^{\rho}\lambda_i C_i,$$

icm©

dzieli wszystkie liczby λ_i. Podstawę pośrednią tworzy ρ krzywych algebraicznych takich, że ich wyznacznik ma ze wszystkich wyznaczników należących do różnych podstaw wartość bezwzględną najmniejszą.

W przypadku gdy $\rho = 1$, może być, że krzywa C, posiadająca najmniejszy stopień wirtualny lub najmniejszy rząd, nie daje podstawy pośredniej, jest bowiem wirtualną, a nie istotną, ale w każdym razie można otrzymać podstawę pośrednią, złożoną z dwóch krzywych istotnych.

Jeżeli dla dwóch krzywych A_1, A_2 zachodzą związki

$$n_{11} = n_{12} = n_{22},$$

wtedy, jak widzieliśmy, mamy

$$\lambda A_1 \equiv \lambda A_2,$$

i oba układy $\{A_1\}$ i $\{A_2\}$ są tego samego rzędu, stopnia wirtualnego i rodzaju. Jeżeli σ nazwiemy liczbę układów $\{A_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots \sigma)$, posiadających tensam stopień, rząd i rodzaj, wtedy liczba ta σ jest zawsze skończona i nie zależy od obioru układu krzywych na powierzchni.

Severi wprowadza nowe działanie na układach krzywych algebraicznych na powierzchni. Jest nią dzielenie układu B przez układ A, określone następującym związkiem między temi układami:

$$\lambda A \equiv B.$$

Jeżeli działanie to jest możliwe, niekoniecznie musi być możliwe w jeden tylko sposób. Może być kilka układów takich, że

$$\lambda_1 A_1 \equiv \lambda_2 A_2 \equiv \ldots . \equiv \lambda_\delta A_\delta \equiv C,$$

ale z pewnością mamy nierówność $\delta \leqq \sigma$ to znaczy, że liczba układów, otrzymanych przez dzielenie układu B przez liczbę λ jest skończona i $\leqq \sigma$.

Przykładami powierzchni, na których dzielenie jest jednoznacznie wykonalne, albowiem $\sigma = 1$, są powierzchnie, których podstawa minimalna utworzona jest tylko z jednej krzywej, a więc np. najogólniejsze powierzchnie danego rzędu, $\rho = 1$, albo powierzchnie wymierne, $\rho = 1$. Taksamo na powierzchniach rodzaju geometrycznego 1 o krzywej kanonicznej rzędu zero, t. j. gdzie mamy $|C_a| = |C|$, zachodzi tasama okoliczność, albowiem dla tych powierzchni — jak zobaczymy — mamy albo $p_a = 1$, albo $p_a = -1$. W pierwszym przypadku otrzymuje się natychmiast $\sigma = 1$, ponieważ każdy układ zupełny na powierzchni regularnej jest liniowy. W drugim przypadku powierzchnia (Roz. V, ust. 5) jest hypereliptyczna szczebla $r = 1$. Jeżeli dzielnik (divisor) powierzchni (Roz. V, ust. 5) $\delta = 1$, wtedy powierzchnia jest powierzchnią Jacobi'ego, należącą do krzywych hypereliptycznych rodzaju 2, a więc (S. 2) mamy $\sigma = 1$. Taksamo ma się rzecz, gdy mamy $\delta > 1$.

Podaje też Severi przykłady powierzchni, na których dzielenie nie daje jednego układu krzywych. Są to powierzchnie regularne, posiadające liczby charakterystyczne (Roz. V, ust. 6)

$$p_g = 0, \quad p_a = 0, \quad P_2 = 1, \quad P_3 = 0,$$

i powierzchnie nieregularne hypereliptyczne szczebla $r > 1$ o liczbach charakterystycznych

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1$$

W dowodzie istnienia podstawy minimalnej na powierzchniach należy odróżnić dwa przypadki $\rho > 1$ i $\rho = 1$.

1. W przypadku $\rho > 1$ niechaj $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ tworzą podstawę pośrednią. Niechaj dalej krzywe $D_1, D_2, \ldots, D_{\sigma-1}$ w liczbie $\sigma - 1$ będą krzywemi od siebie niezależnemi i niezależnemi od krzywej C_1, ale posiadającemi stopnie wirtualne i liczby przecięć dane przez równości

$$|C_1 C_1| = |C_1 D_i| = |D_i D_i|, \qquad i = 1, 2, \ldots, \sigma - 1,$$

wtedy krzywe $C_1, \ldots, C_\rho, D_1, \ldots, D_{\sigma-1}$ tworzą podstawę minimalną i są wszystkie krzywemi istotnemi.

2. Niechaj będzie $\rho = 1$, wtedy krzywe $C_1, D_1, \ldots, D_{\sigma-1}$ tworzą również podstawę minimalną. Jednak teraz krzywa C_1 może być wirtualna, a jeżeli chcemy mieć same krzywe istotne, zastępujemy C_1 przez $A - B$ i otrzymujemy $\rho + \sigma$ krzywych istotnych $A, B, D_1, \ldots, D_{\sigma-1}$.

Najnowsze badania Severi'ego nad podstawą układów algebraicznych na powierzchniach algebraicznych wyłożone są w pracy, ogłoszonej w r. 1910 (S. 26). Praca ta jest głównie poświęcona powierzchniom algebraicznym, zezwalającym na nieciągłą nieskończoną seryę przekształceń dwuwymiernych, ale zawiera szereg rezultatów, odnoszących się do ogólnej powierzchni.

Severi otrzymuje warunek konieczny i dostateczny, aby dzielenie, określone równaniem

$$\lambda A \equiv B$$

było tylko w jeden sposób możliwe. Potrzeba i wystarcza, aby liczby λ i σ były pierwsze względem siebie.

Nazwijmy krzywą A_1 arytmetycznie istotną (aritmeticamente effettiva), jeżeli jest istotną, określa układ zupełny ciągły, do którego należy i jeżeli wszystkie krzywe tego samego rzędu, stopnia i rodzaju posiadają te same własności, co ta krzywa. Uważając tych σ krzywych, dla których

$$|A_i A_i| = |A_i A_k| = |A_k A_k|, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \sigma),$$

mamy dla pewnej liczby całkowitej λ równości:

icm©

$$\lambda A_1 \equiv \lambda A_2 \equiv \ldots . \equiv \lambda A_\sigma .$$

Uważajmy krzywe wirtualne

$$A_1 - A_1, \quad A_1 - A_2, \quad \ldots ., \quad A_1 - A_\sigma ,$$

nazywając je $M_1, M_2, \ldots, M_\sigma$, mamy wtedy σ działań, polegających na dodawaniu tych krzywych do dowolnej krzywej arytmetycznie istotnej B_1. Układ σ krzywych $B_1, B_2, \ldots, B_\sigma$, w ten sposób otrzymanych, przechodzi przez te działania na siebie, a więc mamy grupę Abela G_σ, albowiem działania te są przemienne. Jeżeli μ jest rząd podgrupy G_σ złożonej z działań, których peryody dzielą λ, wtedy dzieląc przez λ, otrzymamy μ krzywych od siebie odmiennych. Uważajmy układy liniowe na powierzchni nieregularnej. Liczba układów liniowych, otrzymanych przez dzielenie danego układu przez liczbę λ, spełnia nierówność: $\leqq \sigma\lambda^{2(p_g - p_a)}$. Istnieją układy liniowe, posiadające tę liczby maksymalną układów ilorazowych.

Teorya podstawy na powierzchni pozwala wyznaczyć wszystkie układy krzywych danego wirtualnego stopnia na powierzchni. Jeżeli $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ jest podstawą pośrednią, wtedy krzywa, dla której

$$\lambda C \equiv \lambda (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots . + \lambda_\rho C_\rho), \tag{13}$$

posiada stopień wirtualny

$$n = \sum_{i,\, k=1}^{\rho} n_{ik} \lambda_i \lambda_k . \tag{14}$$

Formę, występującą po prawej stronie wzoru (14), nazywa Severi formą fundamentalną kwadratową podstawy.

Dla danego n mamy pewną liczbę rozwiązań $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)$. Dla każdego rozwiązania i dla każdej liczby λ dostatecznie wielkiej należą krzywe arytmetyczne istotne, należące do σ układów ciągłych, otrzymujących się z jednego układu przez działania grupy G_σ. Dwie podstawy pośrednie związane są ze sobą związkami kształtu

$$\lambda_i \Gamma_i \equiv \lambda_i \lambda_{1i} C_1 + \ldots . + \lambda_i \lambda_{\rho i} C_\rho , \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

tak że formy fundamentalne kwadratowe, odpowiadające tym podstawom, przechodzą przy pomocy przekształceń liniowych o module ± 1 na siebie.

Uważajmy teraz powierzchnie regularne $p_g = p_a$; jeżeli te powierzchnie posiadają grupę nieskończoną nieciągłą przekształceń dwuwymiernych, wtedy grupa ta jest albo holoëdrycznie albo meryedrycznie ze skończonym indeksem izomorficzna z nieskończoną grupą przekształceń liniowych o module ± 1, przekształcających na siebie formę fundamentalną kwadratową powierzchni.

Jako przykład powierzchni, dla której, posługując się ogólną teoryą podstawy, można wyznaczyć wszystkie przekształcenia dwuwymierne tej powierzchni na siebie, uważa Severi powierzchnię zbudowaną przez Fano (F. 3) czwartego rzędu z krzywą drugiego rodzaju i szóstego rzędu, którą poznamy w Roz. V.

7. Pogląd na rozwój Teoryi powierzchni algebraicznych w ostatnich latach.

Ogólna teorya układów algebraicznych na powierzchniach została właściwie dopiero ugruntowana dzięki wyłożonym w tym Rozdziale podstawowym twierdzeniom o związku między nieregularnością powierzchni i własnościami seryi charakterystycznej układów liniowych na powierzchni. Głównym rezultatem są tu twierdzenia, tyczące się istnienia układu algebraicznego zupełnego, do którego pewien dany układ należy, o seryi charakterystycznej zupełnej. Niedostatek $p_g - p_a$ seryi charakterystycznej układu liniowego regularnego daje właśnie liczbę całek Picarda pierwszego gatunku. Widzieliśmy jednak, że rezultaty w tym kierunku otrzymane są dotąd niezupełne. Tylko jeżeli spełnione są pewne nierówności, możemy orzec coś bliższego o wymiarach tych układów.

Drugim podstawowym rezultatem jest teorya podstaw układów krzywych na powierzchni, stworzona przez Severi'ego. Tu chodzi przedewszystkiem o znalezienie liczby krzywych tworzących podstawę na powierzchni, co przedstawia często wielkie trudności. Ważnym jest dowód istnienia podstawy minimalnej i stosowanie teoryi podstawy do znalezienia przekształceń dwuwymiernych powierzchni samej na siebie.

W następnym Rozdziale omówimy szereg prac, stosujących te teorye układów algebraicznych w konkretnych specyalnych przypadkach.

ROZDZIAŁ V.

Specyalne klasy powierzchni algebraicznych.

1. Wstęp.

Znaczenie ogólnych metod geometrów włoskich, omówionych w poprzednich dwóch Rozdziałach, występuje w całej pełni w zastosowaniu ogólnych twierdzeń do specyalnych klas powierzchni. Ci sami uczeni, którzy położyli podwaliny Geometryi krzywych na powierzchniach algebraicznych, posunęli znakomicie naprzód całym szeregiem prac badania nad różnemi klasami powierzchni algebraicznych, podając oprócz badań dwuwymiernie niezmiennej natury, przedstawienie rzutowe tych powierzchni w przestrzeniach S_r. Te metody rozjaśniły dopiero prawdziwą naturę tych rozmaitych klas powierzchni. Mimo, że wiele w tym kierunku zdziałano, pozostało jednak jeszcze rozległe pole do dalszych poszukiwań.

Nie omówimy wszystkich badań nad rozmaitemi klasami powierzchni, lecz ograniczymy się do najważniejszych, tak że z wywodów tych będzie można sobie wyrobić obraz, jak powierzchnie się dzielą na różne typy zależnie od rozmaitych wartości niezmienników.

2. Powierzchnie, przedstawiające pary punktów jednej lub dwóch krzywych algebraicznych.

Powierzchnie, przedstawiające pary punktów jednej lub dwóch krzywych algebraicznych, badają De Franchis (R. P. 1903), Maroni (Lit.) i Severi (S. 2, 3). Severi bada (S. 2) powierzchnie, odpowiadające dwuwymiernie parom punktów krzywej rodzaju $\pi \geqq 3$. Gdy rodzaj wynosi 2, mamy, jak wiadomo, powierzchnie hypereliptyczne, albo ich zniekształcenia, gdy zaś rodzaj wynosi 1, mamy (S. 3) powierzchnie prostokreślne eliptyczne. Powierzchnie, badane przez Severi'ego, posiadają niezmienniki

$$p_g = \tfrac{1}{2}\pi(\pi-1), \quad p_a = \tfrac{1}{2}\pi(\pi-1) - \pi, \quad p^{(1)} = (\pi-2)(4\pi-5).$$

Severi bada powierzchnie te, odwzorowując je dwuwymiernie zapomocą kongruencyi linij prostych cięciw krzywej kanonicznej $C_\pi^{2\pi-2}$, rzędu $2\pi-2$, rodzaju π, w przestrzeni $S_{\pi-1}$.

Ogólna teorya tych powierzchni, rozwinięta przez Severi'ego, opiera się na teoryi odpowiedniości na krzywej algebraicznej; teoryę tę stworzył Hurwitz (M. A. T. 28), a Severi rozwinął ją metodami geometrycznemi. Severi definiuje geometrycznie odpowiedniości wartościowe i zupełnie ogólne odpowiedniości. Dowodzi, że istnieje skończona liczba odpowiedniości na krzywej, tak że każda inna odpowiedniość jest zależna od tych odpowiedniości w znaczeniu określonem przez Severi'ego.

Teorye te natychmiast można stosować do badania układów krzywych na powierzchni, której punkty odpowiadają jednoznacznie parom punktów dwóch krzywych. Powierzchnie te posiadają dwa pęki krzywych, odpowiadające tym dwom krzywym. Severi wprowadza pojęcie niezależności i zależności krzywych na powierzchni. Krzywe $\Gamma', \Gamma'', \ldots, \Gamma^k$ są zależne, jeżeli istnieją liczby całkowite dodatnie, albo ujemne takie, że krzywa

$$\lambda_1\Gamma' + \lambda_2\Gamma'' + \ldots + \lambda_k\Gamma^k$$

posiada wartościowość (valenza) zero, to znaczy daje się wyrazić, jako kombinacya liniowa pewnej liczby krzywych obu pęków na powierzchni. Istnieje

maximum liczby krzywych niezależnych na powierzchni, a więc istnieje podstawa układów krzywych na powierzchni (por. Roz. IV, ust. 6).

Podstawą minimalną (por. Roz. IV, ust. 6) nazywa się taka podstawa, że w związku liniowym, jaki daną dowolną krzywą Γ wyraża przez krzywe podstawy $\Gamma', \Gamma'', \ldots, \Gamma^{(k)}$, spółczynnik przy Γ równa się jedności. Wyznaczniki różnych podstaw podzielne są przez wyznacznik podstawy minimalnej, który jest tą samą liczbą dla wszystkich podstaw minimalnych.

Za pomocą podstawy na powierzchni można wyrazić liczbę punktów przecięcia dwóch krzywych na powierzchni tudzież rodzaj i stopień dowolnej krzywej na powierzchni. Szczególnie interesującym jest przypadek, gdy obie krzywe, na których leżą pary punktów, są identyczne; wówczas na powierzchni będącej obrazem par punktów uporządkowanych, t. j. par punktów krzywej algebraicznej, opatrzonych wskaźnikami porządkowemi 1 i 2, podstawa utworzona jest przez krzywe obu pęków, odpowiadających punktom krzywej, i przez dowolną krzywą, która każdą krzywą pęków przecina w jednym punkcie.

Nareszcie uważa Severi powierzchnie, przedstawiające pary punktów krzywej algebraicznej nieuporządkowane. Także i na tych powierzchniach istnieją podstawa i podstawa minimalna. W specyalnym przypadku krzywej eliptycznej, gdy pary punktów nie są uporządkowane, mamy powierzchnię prostokreślną eliptyczną.

3. Powierzchnie algebraiczne, zezwalające na ciągłe grupy przekształceń dwuwymiernych. Powierzchnie nieregularne rodzaju geometrycznego zero.

W Rozdziale II zreferowaliśmy prace matematyków francuskich nad powierzchniami, zezwalającemi na grupy ciągłe przekształceń dwuwymiernych. Matematycy włoscy zajęli się najprzód powierzchniami, zezwalającemi na nieskończenie wiele przekształceń rzutowych. Powierzchnie te bada Enriques (E.) i otrzymuje następujące rezultaty. Albo przekształcenia te należą do grupy ∞^2 Liego przekształceń rzutowych przechodnich, wtedy powierzchnia jest zawsze wymierna; albo też przekształcenia te należą do nieprzechodniej grupy Lie'go ∞^1, a wtedy pęk trajektoryi grupy albo złożony jest z krzywych przestępnych i powierzchnia jest wymierna, albo złożony jest z krzywych algebraicznych i powierzchnia jest odwzorowalna na powierzchni prostokreślnej.

G. Fano (F. 1, 2) określa bliżej rzutowo powierzchnie, posiadające grupę przechodnią przekształceń rzutowych. Dadzą się one odwzorować albo na płaszczyźnie, albo na powierzchni rzędu 2 w przestrzeni S_3, albo nareszcie na stożku wymiernym normalnym w pewnej przestrzeni S_{n+1}, tak że grupie przekształceń rzutowych odpowiadają odpowiednio na płaszczyźnie grupa homografii, a w przestrzeni pewna grupa przekształceń rzutowych, przeprowadzających powyższe powierzchnie w siebie.

Teorya powierzchni ogólnych, zezwalających na grupy ciągłe przekształceń, doznała znakomitego rozwoju przez badania Enriquesa, ogłoszone w r. 1905 (E. 21, 22). Najprzód bada Enriques powierzchnie nieregularne rodzaju geometrycznego $p_g = 0$. Mamy tu dwa przypadki do odróżnienia, a mianowicie przypadek $p_a < -1$ i przypadek $p_a = -1$.

Gdy $p_a < -1$, powierzchnia daje się dwuwymiernie odwzorować na powierzchni prostokreślnej. W istocie podał Castelnuovo sposób konstrukcyi pęków niewymiernych krzywych na powierzchniach nieregularnych rodzaju geometrycznego zero (por. E. 18). Uważając taki pęk, ponieważ mamy $p^{(1)} \geqq 1$, gdyż w przypadku $p^{(1)} < 1$ powierzchnia jest już odwzorowalna na powierzchni prostokreślnej, z wzoru Castelnuovo-Enriques (por. Roz. III, ust. 7)

$$\Delta + 4(\rho - 1)(\pi - 1) = 13 - 12p - p^{(1)}, \tag{1}$$

w którym Δ jest liczba krzywych pęku posiadających punkty podwójne, ρ rodzaj pęku, π rodzaj krzywych pęku i gdzie $p = -p_a$, otrzymujemy wówczas $\pi = 0$. Jeżeli zaś $p_a = -1$, krzywe pęku powyższego są rodzaju $\pi \geqq 1$. Pęk ten jest eliptyczny. Jeżeli $\pi > 1$, wtedy na powierzchni, oprócz pęku niewymiernego, istnieje drugi pęk wymierny krzywych eliptycznych, przecinających krzywe pęku niewymiernego w $n > 1$ punktach. Jeżeli rodzaj geometryczny powierzchni jest $p_g > 0$, ów pęk ostatni jest też, jak zobaczymy, niewymierny. Pęk ten zawsze jest bez punktów-podstaw. Jeżeli $\pi = 1$, wtedy znów na powierzchni mamy pęk krzywych wymierny, jeżeli $p_g = 0$, niewymierny, jak zobaczymy, jeżeli $p_g > 0$, zawsze bez punktów-podstaw. Moduły krzywych każdego pęku są tesame, nie zmieniają się z krzywą.

Powierzchnie, posiadające niezmienniki $p_g = 0$, $p_a = -1$, zezwalają na grupę ciągłą algebraiczną ∞^1, której trajektorye są krzywe eliptyczne pęku wymiernego; a więc grupę eliptyczną (Pa. 5). Nawzajem: każda powierzchnia, posiadająca grupę ciągłą ∞^1, której trajektoryami są krzywe eliptyczne pęku wymiernego lub niewymiernego, a więc grupę eliptyczną, posiada, prócz tego pęku, drugi pęk eliptyczny. Gdy pęk trajektoryi jest niewymierny, z pewnością mamy $p_g > 0$, gdy pęk ten jest wymierny, wtedy zachodzi $p_g = 0$.

Powierzchnie eliptyczne dadzą się analitycznie przedstawić w sposób następujący. Spółrzędne X, Y, Z są funkcyami wymiernemi parametrów v, w, związanych równaniem

$$f(v, w) = 0$$

funkcyami wymiernemi funkcyj

$$p(U; \Omega, \Omega'), \qquad p'(U; \Omega, \Omega'),$$

związanych równaniem Weierstrassa. Przytem parametr U i peryody Ω, Ω'

wyrażają się zapomocą parametru u i peryodów ω, ω' równania eliptycznego pęku eliptycznego krzywych w sposób następujący:

$$U = u + \lambda\omega + \mu\omega', \quad \Omega = a\omega + b\omega', \quad \Omega' = a'\omega + b'\omega'.$$

Liczby a, b, a', b' są cztery liczby całkowite o wyznaczniku

$$ab' - a'b' = n > 0,$$

zaś liczby λ, μ są układy n wartości całkowitych tak, że $\lambda\omega + \mu\omega'$ dla tych n układów wartości przybiera n wartości, nieprzystających do siebie modulo peryodów Ω, Ω'.

Dopiero, gdy każdy układ v, w skojarzymy z n układami liczb λ, μ, otrzymamy całą powierzchnię. Powierzchnie te posiadają równania

$$X = \sum_{\lambda=0}^{n=0} \varepsilon^{\lambda} p_{\nu}(u + \lambda\omega_{\nu}) \sqrt[n]{(z - a_1)^{h_1} \ldots (z - a_t)^{h_t}}, \tag{2}$$

$$Y = p'(u; \omega, \omega'), \qquad Z = z,$$

gdzie ε jest n-tym pierwiastkiem jedności, liczby całkowite h_i są mniejsze niż n, zaś suma ich jest określona kongruencyą

$$\Sigma h_i \equiv 0 \pmod{n}.$$

Funkcye p_ν dla $\nu = 0, 1, \ldots n$ są odpowiednio funkcyami $p(u; \Omega, \Omega')$ o peryodach

$$\Omega = \omega - \nu\omega', \quad \Omega' = n\omega, \quad \nu = 0, 1, \ldots n-1,$$

$$\text{i} \quad \Omega = n\omega, \quad \Omega' = \omega', \quad \nu = n.$$

Liczba ω_ν jest równa ω' dla $\nu = 0, 1, \ldots n-1$, zaś równa ω dla $\nu = n$.

Wartości niezmienników P_i $(i = 1, 2 \ldots)$ pozwalają teraz odróżnić powierzchnie eliptyczne prostokreślne od powierzchni eliptycznych nieprostokreślnych. Oba te rodzaje powierzchni eliptycznych posiadają $p_a = -1$, ale powierzchnie prostokreślne mają wszystkie liczby P_i $(i = 1, 2 \ldots)$ równe zeru, natomiast powierzchnie nieprostokreślne posiadają albo $P_4 > 0$, albo $P_6 > 0$.

W dalszej pracy (E. 22), poświęconej również powierzchniom, zezwalającym na grupy ciągłe przekształceń dwuwymiernych, nie ogranicza się Enriques do przypadku $p_g = 0$. Opiera się na twierdzeniach, otrzymanych równocześnie przez de Franchisa (R. P. T. 20), Castelnuovo (C. 17) i twierdzeniach własnych, odnoszących się do pęków niewymiernych krzywych algebraicznych na powierzchniach. De Franchis okazał, że jeżeli powierzchnia posiada dwie całki Picarda pierwszego lub drugiego gatunku, z których jedna jest funkcyą drugiej, wtedy posiada pęk krzywych niewymiernych. Twierdzenie to jest specyalnym przypadkiem ogólniejszego twierdzenia Castelnuovo i Enriquesa (C. 17), orzekającego, że jeżeli zachodzi nierówność

$$p_g \geqq 2(p_a + 2),$$

wtedy powierzchnia posiada niewymierny pęk rodzaju $\geqq 2$.

Z twierdzenia tego wyprowadza Castelnuovo następujący rezultat. Powierzchnie rodzaju arytmetycznego ujemnego albo dadzą się odwzorować na powierzchniach prostokreślnych (rezultat Enriquesa), albo też posiadają pęk krzywych eliptycznych, albo nareszcie są powierzchniami hypereliptycznemi pojedyńczemi lub wielokrotnemi. W tych trzech przypadkach mamy odpowiednio:

$$p_g = 0, \quad p_a < -1; \quad p_g \geqq 0, \quad p_a = -1; \quad p_g = 1, \quad p_a = -1.$$

Na podstawie tych rezultatów otrzymuje Enriques podstawowe własności powierzchni rodzaju arytmetycznego $p_a = -1$, geometrycznego $p_g > 0$. Gdy zachodzi $p_g > 1$, wtedy powierzchnie posiadają pęk krzywych eliptycznych rodzaju $\rho > 1$, w którym wszystkie krzywe mają ten sam moduł. Otóż rodzaj ρ tego pęku właśnie się równa p_g, a krzywe kanoniczne powierzchni są złożone z krzywych tego pęku, a mianowicie krzywą kanoniczną tworzą $2p_g - 2$ krzywych tego pęku, należących do grupy kanonicznej pęku, prócz tego wszystkie krzywe kanoniczne mogą zawierać pewną część składową stałą, którą tworzą części rozpadających się krzywych pęku.

Jeżeli mamy $p_g = 1$, $p_a = -1$, wtedy powierzchnia posiada dwie niezależne od siebie całki Picarda pierwszego gatunku. Jest ona albo prostą powierzchnią hypereliptyczną, to znaczy spółrzędne x, y, z wyrażają się jako funkcye hypereliptyczne argumentów u, v, albo też jest przekształceniem wymiernem powierzchni hypereliptycznej, czyli powierzchnią hypereliptyczną wielokrotną, to znaczy pewnemu układowi argumentów u, v odpowiada $n > 1$ układów spółrzędnych x, y, z.

Powierzchnie hypereliptyczne pojedyńcze nie posiadają krzywej kanonicznej, a więc wszystkie rodzaje powierzchni P_i równają się 1 ($i = 1, 2, \ldots$). Powierzchnie hypereliptyczne wielokrotne, odwzorowujące się na powierzchniach hypereliptycznych pojedyńczych Φ, tak że punktowi na Φ odpowiada więcej niż jeden punkt na tej powierzchni F, są dwojakiego rodzaju. Jeżeli na powierzchni Φ niema krzywej rozgałęzienia, wtedy i powierzchnia F jest hypereliptyczna; natomiast, jeżeli na powierzchni Φ istnieje krzywa rozgałęzienia, wtedy na powierzchni F istnieje pęk eliptyczny krzywych eliptycznych. Na powierzchni F istnieje wówczas krzywa kanoniczna i utworzona

jest z części krzywych wielokrotnych w pęku. Krzywa s-krotna wchodzi w skład krzywej kanonicznej K dokładnie $s-1$ razy. Mamy więc

$$K = \sum \frac{s-1}{s} k,$$

gdzie k są krzywe, na które się krzywa pęku rozpada. Krzywe tego pęku są trajektoryami grupy ∞^1 eliptycznej. Prócz tego pęku posiada powierzchnia F drugi pęk eliptyczny krzywych rodzaju $\pi > 1$. Mamy nierówność $P_4 > 1$. Teoryą powierzchni, posiadających grupę ∞^2 ciągłych przekształceń przemiennych, zajmuje się też Severi (S. 22). Zakładając, że grupa ta jest bezwzględnie przechodnia, to znaczy, że każdy punkt powierzchni bez wyjątku można przeprowadzić w każdy inny, otrzymuje czysto geometryczną drogą warunki konieczne i dostateczne następujące. Po pierwsze musi być $p_g = 1$, $p_a = -1$, po drugie krzywa kanoniczna musi się równać zeru. Jeżeli $p_g = 1$, $p_a = -1$ i krzywa kanoniczna większa jest od zera, wtedy powierzchnia odwzorowalna jest na powierzchni wielokrotnej o charakterach $p_g = 1$, $p_a = -1$ z krzywą kanoniczną rzędu zero, a więc otrzymuje się rezultaty Picarda, Painlevégo i Enriquesa.

Severi podaje również (S. 29) geometryczny dowód twierdzenia Castelnuovo (por. E. 18), które udowodnił też Enriques w pracy, przed chwilą omawianej (E. 21), o istnieniu pęku niewymiernego na powierzchniach nieregularnych rodzaju geometrycznego zero. Dowód Severi'ego jest następujący. Krzywe rozpadające się, z których każda jest złożona z ν krzywych układu algebraicznego ∞^1 istniejącego na powierzchni nieregularnej, przechodzących przez punkt powierzchni, należą albo do ∞^2 albo do ∞^1 układów liniowych. Jeżeli $p_g = p_a = 1$, wtedy zachodzi tylko pierwszy przypadek. Punkty, z których wychodzą krzywe równoważne, to jest należące do tego samego układu liniowego leżą na krzywych tworzących pęk niewymierny rodzaju 1. Jeżeli zaś mamy $p_g - p_a > 1$, wtedy, gdyby istniały ∞^2-układy liniowe o n krzywych, powierzchnia, przedstawiająca inwolucyę grup n punktów ν-krotnych należących do tych krzywych, przekształca się dwuwymiernie na utwór algebraiczny Jacobi'ego V_p, przedstawiający grupy p elementów układu ∞^1 na powierzchni. Ponieważ utwór V_p posiada grupę przechodnią ∞^p przekształceń na siebie, więc otrzymuje stąd się układ ciągły wymiaru $\geqq p-2$ powierzchni dwuwymiernie równoważnych owej powierzchni, wypełniający cały utwór V_p, ale wówczas na podstawie twierdzenia Severi'ego (S. 27) utwór algebraiczny V_p byłby rodzaju geometrycznego zero. Lecz utwór ten posiada rodzaj geometryczny 1. Zatem na powierzchni F istnieje ∞^1 układów liniowych sobie nierównoważnych, należących do owego układu, skąd wynika, że powierzchnia F posiada właśnie pęk rodzaju $p_g - p_a$.

icm©

4. Powierzchnie hypereliptyczne.

Teorya powierzchni hypereliptycznych, której pierwsze podstawy położył Picard, była, jak widzieliśmy, przedmiotem doniosłych badań Painlevégo i Humberta, z których pierwszy uzupełnił badania Picarda nad przekształceniami dwuwymiernemi powierzchni, drugi zaś badał ogólnie układy krzywych algebraicznych, położone na tych powierzchniach.

Prace matematyków francuskich dotyczyły prawie wyłącznie powierzchni hypereliptycznych prostych, t. j. powierzchni, których punktom odpowiada jeden układ wartości oprócz wielokrotności peryodów, i powierzchni Kummera, gdzie punktowi odpowiadają dwie takie pary. W ostatnich latach podjęli ogólną teoryę powierzchni hypereliptycznych równocześnie Bagnera i De Franchis (Lit. R. L. 1907, M. S. 1908, R. P. 1910), tudzież Enriques i Severi (E. S. 1, 2, 3), badając te powierzchnie metodami geometrycznemi.

Jeżeli punktowi x, y, z odpowiadają $r \geqq 1$ par wartości u, v, wtedy liczbę r nazywają Enriques i Severi stopniem powierzchni hypereliptycznej.

Peryody funkcyj hypereliptycznych można zawsze sprowadzić do postaci normalnej

$$\left\{\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h \\ 0, & \frac{1}{\delta}, & h, & g' \end{matrix}\right\},$$

Liczba całkowita $\delta \geqq 1$ nazywa się dzielnikiem (divisor) funkcyj eliptycznych. Każda powierzchnia hypereliptyczna szczebla r i dzielnika δ może być uważana jako obraz inwolucyi $I_{r\delta}$ na specyalnej powierzchni hypereliptycznej, zwanej powierzchnią Jacobi'ego, która przedstawia pary punktów krzywej hypereliptycznej rodzaju 2. Na powierzchni Jacobi'ego mamy dwa rodzaje przekształcenia powierzchni na siebie samą. Mianowicie przekształcenia rodzaju pierwszego

$$u' + u = \text{const.}, \qquad v' + v = \text{const.}$$

inwolucyjne rzędu drugiego i przekształcenia rodzaju drugiego

$$u' - u = \text{const.}, \qquad v' - v = \text{const.},$$

tworzące grupę ciągłą ∞^2 przemienną. Istnieją przekształcenia rodzaju drugiego, rzędu δ, tworzące inwolucye I_δ takie, że powierzchnie przedstawiające te inwolucye powierzchni Jacobi'ego, są powierzchniami Picarda szczebla 1 (o dzielniku δ).

Powierzchnie Picarda, t. j. powierzchnie szczebla 1, scharakteryzowane są wartościami niezmienników

$$p_g = P_4 = 1, \qquad p_a = -1.$$

Powierzchnie te nie posiadają krzywych wymiernych, oprócz krzywych wyjątkowych; jeżeli zaś posiadają krzywą eliptyczną, wtedy posiadają dwa pęki eliptyczne krzywych eliptycznych.

Na powierzchni Picarda o modułach ogólnych wszystkie układy krzywych są wielokrotnościami jednego z nich.

Enriques i Severi badają dalej inwolucye na powierzchniach hypereliptycznych Jacobi'ego.

Inwolucye te są albo rodzajów $p_g = 0$, $p_a = -1$, a wtedy są to powierzchnie eliptyczne (ust. 4), które mają $P_{12} = 0$, gdy są odwzorowalne na powierzchniach prostokreślnych, mają zaś $P_{12} = 1$ w przeciwnym razie. Albo też inwolucye te przedstawiają powierzchnie hypereliptyczne szczebla 1 o niezmiennikach:

$$p_g = 1, \quad p_a = -1, \quad P_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Albo też mamy powierzchnie wymierne, a więc wartości niezmienników są:

$$p_g = p_a = 0, \qquad P_2 = 0,$$

albo powierzchnie regularne o wartościach niezmienników:

$$p_g = p_a = 0, \quad P_2 = 1, \quad P_3 = 0,$$

albo wreszcie powierzchnie regularne o wartościach niezmienników:

$$p_g = p_a = 1, \quad P_i = 1, \quad i = 1, 2 \ldots.$$

Inwolucye na powierzchni Jacobi'ego są wtedy i tylko wtedy regularne, gdy istnieje tylko skończona liczba przekształceń gatunku drugiego tych inwolucyj na siebie. Zależnie od tego, czy mamy powierzchnie hypereliptyczne, czy też eliptyczne, inwolucya posiada ∞^2 albo ∞^1 przekształceń na siebie samą.

Można dalej klasyfikować inwolucye według koincydencyi. Gdy istnieje krzywa koincydencyi, inwolucya jest wymierna, albo równoważna powierzchni prostokreślnej eliptycznej. Gdy niema wcale koincydencyi, wtedy mamy $p_a = -1$ i $p_g = 0$ albo $p_g = 1$. Nareszcie, gdy istnieje skończona liczba punktów koincydencyi, powierzchnia jest regularna. Mamy twierdzenie ważne następujące. Każda powierzchnia hypereliptyczna szczebla $r > 1$ o dzielniku δ jest odwzorowaniem inwolucyi na powierzchni Picarda o dziel-

icm©

niku δ, która to inwolucya powstaje przez przekształcenie dwuwymierne powierzchni Picarda samej na siebie.

Powierzchnie hypereliptyczne szczebla $r > 1$ mogą zależeć od trzech modułów. Powierzchnie te mają wówczas szczebel $r = 2$ i są regularne. Przypadkowi $\delta = 1$ odpowiadają powierzchnie Kummera. Przypadkowi $\delta > 1$ odpowiadają powierzchnie uogólnione Kummera, które w przestrzeni $S_{2\delta+1}$ stanowią analogon powierzchni Kummera dla przestrzeni S_3.

Powierzchnie nieregularne szczebla $r > 1$ są eliptyczne i posiadają dwa pęki krzywych eliptycznych. Mają one $p_a = -1$, „plurigeneri" zaś równają się zero lub 1, a mianowicie mamy $p_g = 0$. Liczba r może być tylko równa 2, 3, 4 lub 6. Powierzchnie hypereliptyczne regularne rodzajów $p_g = p_a = P_i = 1$ odpowiadają wartościom liczby $r = 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Liczby te odpowiadają grupom przekształceń na siebie same krzywych algebraicznych rodzaju 2, a mianowicie odpowiednio albo grupom cyklicznym rzędu 3, 4, 6, zależąc od jednego modułu, albo grupom bidiedrycznym rzędu 8, albo grupom bidiedrycznym rzędu 12, albo grupom bitetraedrycznym rzędu 24 bez modułów.

Autorowie badają obszernie te powierzchnie, dając obrazy rzutowe w przestrzeni wielowymiarowej lub trójwymiarowej.

Powierzchnie eliptyczne mają, jak widzieliśmy (ustęp poprzedni), dwa pęki krzywych eliptycznych, a mianowicie pęk wymierny, który zawsze powierzchnie posiadają i pęk eliptyczny. (Bagnera, De Franchis R. L. 1907 i Enriques-Severi E. S. 12). Jeżeli krzywe tego ostatniego pęku są eliptyczne, wtedy — jak okazują Enriques i Severi i równocześnie Bagnera i De Franchis — powierzchnie są hypereliptyczne, t. j. posiadają ∞^2 grupę przekształceń przemiennych. Powierzchnie hypereliptyczne rodzajów $p_g = 0$, $p_a = -1$ charakteryzują się wśród powierzchni eliptycznych rodzajów $p_g = 0$, $p_a = -1$ tem, że „plurigeneri" P_i, $i = 1, 2, \ldots$ są równe zeru lub 1.

Równocześnie z Enriquesem i Severim badają też Bagnera i De Franchis ogólne powierzchnie hypereliptyczne. Nazywają oni powierzchniami F powierzchnie, których spółrzędne wyrażają się jako funkcye poczwórnie peryodyczne o peryodach:

$$\left|\begin{matrix} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4 \\ \omega_1', & \omega_2', & \omega_3', & \omega_4' \end{matrix}\right|$$

Punktowi powierzchni odpowiada jeden układ u, v, lub więcej aniżeli jeden układ. Pierwsze powierzchnie są to powierzchnie, zbadane przez Picarda i Humberta i omawiane w Rozdziale II. Autorowie otrzymują, podobnie jak Enriques i Severi, twierdzenie podstawowe, że powierzchnie,

przedstawiające inwolucye na powierzchniach hypereliptycznych, odpowiadają właśnie inwolucyom, utworzonym przez skończone grupy przekształceń dwuwymiernych powierzchni hypereliptycznych na siebie same. Przekształcenia te odpowiadają holoedryczno-izomorficznie grupom podstawień liniowych jednorodnych postaci

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} u' = \alpha u + \beta v, \\ v' = \gamma u + \delta v. \end{cases}$$

Wyznacznik podstawienia $\alpha\delta - \beta\gamma$ nazywa się modułem podstawienia. Rodzaj powierzchni F jest jeden lub zero, zależnie od tego, czy na powierzchni hypereliptycznej istnieje podstawienie o module odmiennym od jedności, czy takiego podstawienia niema.

Powierzchnie F mogą być nieregularne tylko dla rodzaju geometrycznego zero (prócz powierzchni hypereliptycznych szczebla 1). Powierzchnie rodzaju zero są nieregularne, gdy grupa (Γ) jest cykliczna i daje się sprowadzić do kształtu

$$\alpha) \quad u' = u + c_1, \qquad v' = \mu v,$$

gdzie μ jest pierwiastkiem jedności.

Powierzchnie są regularne, gdy w grupie przekształceń istnieje działanie, dające się przedstawić w postaci

$$\beta) \quad u' = \lambda u, \qquad v' = \mu v,$$

gdzie obie liczby λ, μ, które są pierwiastkami jedności, są różne od jedności.

Gdy powierzchnie F są odwzorowaniem inwolucyj odpowiadających grupie α), mamy powierzchnie nieregularne rodzaju geometrycznego zero, a więc powierzchnie eliptyczne. „Plurigeneri" są albo zero albo 1. Autorowie otrzymują 7 typów tych powierzchni. Powierzchnie te, prócz liniowego pęku krzywych eliptycznych, posiadają eliptyczny pęk krzywych eliptycznych i nawzajem powierzchnie eliptyczne tego ostatniego typu (por. wyżej) są hypereliptyczne. Wyznacznik n (ust. 6) tych powierzchni może tylko przyjmować wartości 2, 3, 4, 6, 8, 9. Powierzchnie regularne, przedstawiające grupy cykliczne kształtu β), są wymierne.

Powierzchnie, przedstawiające grupy, w skład których wchodzą grupy cykliczne kształtu (β), ale które same nie są cykliczne, są regularne rodzaju zero, drugiego rodzaju 1 i sprowadzają się do trzech typów.

Nareszcie powierzchnie, odpowiadające grupom złożonym wyłącznie z przekształceń unimodularnych, posiadają rodzaj geometryczny 1. Powierzchnie te można rozklasyfikować na 10 typów. Odpowiadają one albo grupom cyklicznym, albo diedralnym, albo nareszcie grupom tetraedralnym.

icm©

Bagnera i de Franchis (Lit. R. P. 1910) obliczają dla powierzchni hypereliptycznych i dla powierzchni nieregularnych rodzaju zero liczbę ρ Picarda i Severi'ego. Liczby Picarda i Severi'ego nie są sobie równe na powierzchniach, posiadających punkty osobliwe, przechodzące na powierzchni niezmiennej dwuwymiernie bez punktów osobliwych na krzywe fundamentalne, nie dające się zamienić na zwyczajne punkty powierzchni. Tych punktów osobliwych nie potrzeba uwzględniać przy obliczaniu liczby Picarda. Natomiast należy je uwzględniać, obliczając liczbę ρ Severi'ego. Jeżeli ρ_s oznaczać będzie liczbę Severi'ego, wtedy mamy związek

$$\rho_s + \rho_0 = I + 4(p_g - p_a) + 2. \tag{3}$$

Uważajmy funkcye hypereliptyczne, posiadające tablicę peryodów

$$\begin{vmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4 \\ \omega_1', & \omega_2', & \omega_3' & \omega_4' \end{vmatrix},$$

którę sprowadzić można do postaci

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\delta}, & 0, & g, & h \\ 0, & 1, & h, & g' \end{vmatrix},$$

gdzie liczba całkowita δ jest, jak wiemy, niezmienna względem przekształceń peryodów o module 1 i nazywa się dzielnikiem funkcyi.

Między peryodami ω poprzedniej tablicy zawsze istnieje jeden związek kształtu

$$\Sigma\, a_{rs}\, \omega_r \omega_s' = 0, \tag{4}$$

gdzie $a_{r,s}$ są liczbami całkowitemi. Jeżeli istnieje tylko jeden związek taki, to jest, jeżeli powierzchnia hypereliptyczna jest ogólna, wtedy liczba ρ dla takich powierzchni szczebla 1 jest równa jedności.

Jeżeli między peryodami ω mamy więcej niż jeden związek kształtu (4), powierzchnia jest osobliwa. Jeżeli mamy dwa związki kształtu (4), wtedy liczba ρ jest równa 2. Powierzchnie takie nazywają się pojedyńczo-osobliwemi.

Jeżeli między peryodami mamy trzy związki kształtu (4), powierzchnia posiada liczbę ρ równą trzy i nazywa się podwójnie osobliwą. Jeżeli nareszcie mamy między peryodami cztery związki kształtu (4), wtedy liczba ρ równa się 4, a powierzchnia nazywa się potrójnie osobliwą.

Na powierzchniach hypereliptycznych szczebla 1 liczby ρ Picarda i Severi'ego są sobie równe, gdyż niema punktów osobliwych. Liczba ρ_0

Picarda wynosi w czterech powyższych przypadkach odpowiednio $\rho_0 = 5, 4, 3, 2$.

Autorowie badają następnie liczbę ρ dla powierzchni szczebla większego niż jeden (ust. poprzedni). Powierzchnia przedstawia wówczas inwolucye na powierzchni hypereliptycznej szczebla jeden, a grupa punktów inwolucyi otrzymuje się z jednego punktu przy pomocy podstawy grupy Γ liniowej zmiennych u, v rzędu skończonego. Istnieje 20 typów tych powierzchni, 10 typów regularnych rodzaju jeden i 10 typów rodzaju geometrycznego zero.

Powierzchnie szczebla 2 są to uogólnione powierzchnie Kummera (ust. poprzedni) i odpowiadają parom punktów u, v i $-u, -v$ powierzchni hypereliptycznej szczebla jeden. Powierzchnie te mogą znów być albo nieosobliwe albo pojedyńczo, podwójnie lub potrójnie osobliwe. Liczba Picarda równa się $p = 1, 2, 3, 4$, ale ponieważ powierzchnia posiada 16 punktów osobliwych, liczba ρ_s Severi'ego równa się odpowiednio 17, 18, 19, 20. Liczba ρ_0 jest odpowiednio równa 5, 4, 3, 2. Dalej mamy powierzchnie szczebli 3, 4 i 6.

Powierzchnie F_3 szczebla 3 posiadają 9 punktów biplanarnych, zwiększających liczbę ρ o 18. Mamy teraz $\rho_P = 1$ i 2, zatem $\rho_S = 19$ i 20, i $\rho_0 = 3$ i 2.

Powierzchnie F_4 posiadają albo $\rho_P = 1$, $\rho_S = 19$, $\rho_0 = 3$, albo $\rho_P = 3$, albo $\rho_P = 1$, $\rho_S = 20$, $\rho_0 = 2$.

Powierzchnie F_6 posiadają niezmienniki $\rho_P = 1$, $\rho_S = 19$, $\rho_0 = 3$. Mamy następnie powierzchnie F_8 szczebla ośm o niezmiennikach $\rho_P = 1$, $\rho_S = 20$, $\rho_0 = 2$, dalej powierzchnie F_{12} szczebla 12, $\rho_P = 1$, $\rho_S = 20$, $\rho_0 = 2$, nareszcie powierzchnie F_{24} szczebla 24 też o wartościach $\rho_P = 1$, $\rho_S = 20$, $\rho_0 = 2$.

Następnie badają autorowie liczbę ρ dla powierzchni rodzaju geometrycznego zero. Powierzchnie nieregularne rodzaju geometrycznego zero posiadają wartości $\rho_P = \rho_S = 2$, $\rho_0 = 0$. Należą do nich powierzchnie niewymierne prostokreślne. Istnieje 7 typów powierzchni nieregularnych rodzaju zero hypereliptycznych. Są one szczebla 2, 3, 4 i 6. Dla tych powierzchni $\rho_P = \rho_S = 2$.

Powierzchni regularnych rodzaju zero hypereliptycznych mamy trzy rodzaje. Są one szczebla 4 i 8, o rodzaju drugim 1 i posiadają odpowiednie niezmienniki dla szczebla 4 $\rho_P = 2$, $\rho_S = 10$, $\rho_0 = 0$, zaś dla szczebla 8 $\rho_P = 1$, $\rho_S = 10$, $\rho_0 = 0$.

5. Powierzchnie, posiadające nieskończoną nieciągłą seryę przekształceń dwuwymiernych.

W Rozdziale II-im mówiliśmy już o pierwszych badaniach Picarda i Humberta nad powierzchniami algebraicznemi, które nie zezwalając na

icm©

grupy ciągłe przekształceń dwuwymiernych, posiadają nieskończenie wiele przekształceń dwuwymiernych na siebie same (ust. 9).

Pierwsze przykłady powierzchni takich podał Humbert (Lit. C. R. 1897, 1898 i J. L. Ser. V, T. 5 i 6). Są to powierzchnie Kummera, posiadające peryody a, b, c, związane równaniem o spółczynnikach całkowitych kształtu

$$Aa + Bb + Cc + D(ac - b^2) + E = 0.$$

W tym samym czasie podał Painlevé (Pa. 6) prostsze przykłady takich powierzchni regularnych rodzaju geometrycznego $p_g = 1$ z krzywą kanoniczną rzędu zero.

Dalsze klasy powierzchni tych odkryli matematycy włoscy w poprzedniem dziesięcioleciu tego stulecia. Fano (F. 3) odkrył powierzchnię rzędu 4 o wszystkich rodzajach równych jedności:

$$p_g = P_2 = P_3 = \ldots = p_a = 1\,.$$

Jest to powierzchnia ogólna rzędu czwartego, przechodząca przez krzywą rzędu szóstego rodzaju 2.

Równocześnie Enriques (E. 25) okazał, że powierzchnie, które w postaci rzutowej odkrył już był w r. 1896 (E. 5, por. C. 14), a posiadające niezmienniki

$$p_g = p_a = 0\,, \qquad P_2 = 1\,, \qquad P_3 = 0\,,$$

posiadają wszystkie nieskończoną nieciągłą seryę przekształceń dwuwymiernych. Nawzajem, można każdą powierzchnię o niezmiennikach powyższych odwzorować dwuwymiernie na owych powierzchniach Rozdziału III, przechodzących podwójnie przez krawędzie czworościanu. Przekształcenia dwuwymierne tych powierzchni są innego rodzaju, aniżeli przekształcenia powierzchni dotychczas zbadanych, a mianowicie na powierzchniach tych istnieje nieskończenie wiele pęków liniowych krzywych eliptycznych. Każdemu pękowi odpowiada nieskończenie wiele przekształceń dwuwymiernych powierzchni w taki sposób, że krzywe pęku przesuwają się same na siebie, ale mimo to nie należą one do ciągłej grupy przekształceń. Powierzchnie te bada w dalszym ciągu Fano (F. 4).

Przekształceniami dwuwymiernemi powierzchni Kummera i wogóle powierzchni rzędu 4, posiadających $1 < n \leqq 16$ punktów podwójnych, zajmują się w dalszym ciągu Hutchinson (Lit.), Garnier (Lit.) i Remy (Lit. C. R. 1909). Przekształcenia te otrzymuje się właśnie przy pomocy punktów podwójnych, istniejących na tych powierzchniach.

Ogólna teorya powierzchni algebraicznych, posiadających nieskończenie wiele przekształceń na siebie, jest po raz pierwszy traktowana przez Enriquesa (E. 24). Enriques otrzymuje następujące twierdzenie o niezmiennikach tych powierzchni. Rodzaj arytmetyczny tych powierzchni jest $p_a \geqq 0$. Rodzaj geometryczny może się równać zeru, ale wówczas rodzaj drugi P_2 jest większy od zera. Nareszcie rodzaj liniowy powierzchni $p^{(1)}$ równa się dokładnie jedności.

Enriques okazuje dalej, że wszystkie klasy powierzchni, posiadające niezmienniki, spełniające powyższe warunki, posiadają pęki krzywych eliptycznych wymierne lub niewymierne. Wyjątek może stanowić przypadek

$$p_g = P_2 = p_a = p^{(1)} = 1\,,$$

w którym to przypadku krzywa kanoniczna jest rzędu zero. W przypadku tym istnieją zarówno powierzchnie z pękiem krzywych eliptycznych jak i powierzchnie bez krzywych eliptycznych.

Gdy zachodzi $p_g > 1$ i taksamo, gdy wprawdzie $p_g = p_a = 1$, ale $P_2 > 1$, mamy na powierzchni pęki krzywych eliptycznych, z których w pierwszym przypadku złożone są krzywe kanoniczne, w drugim przypadku krzywe bikanoniczne. W przypadku $p_g = p_a = 1$, $P_2 = 1$ istnieją albo nie istnieją, jak powiedzieliśmy, krzywe eliptyczne.

Enriques dowodzi dalej istnienia pęków eliptycznych krzywych eliptycznych na powierzchniach o niezmiennikach $p_g = 1$, $p_a = 0$.

Nareszcie w przypadku rodzaju geometrycznego $p_g = 0$, a więc $p_a = 0$, albo mamy $P_2 > 1$ i krzywe bikanoniczne są złożone z krzywych pęku wymiernego krzywych eliptycznych, albo $P_2 = 1$, $P_3 = 0$, a wówczas powierzchnia — jak widzieliśmy — posiada nieskończenie wiele pęków krzywych eliptycznych. albo nareszcie $P_2 = 1$, $P_3 > 0$, i wtedy istnieją pęki krzywych eliptycznych, z których złożone są krzywe sestikanoniczne, to znaczy, że $P_6 > 1$. Enriques nie bada w pracy tej, jakim dalszym dwuwymiernie niezmiennym warunkom muszą czynić zadosyć niezmienniki powierzchni, aby posiadała nieskończoną nieciągłą seryę przekształceń, natomiast podaje nowy **ważny** sposób otrzymania takiej seryi przekształceń, jeżeli na powierzchni leżą dwie krzywe algebraiczne K_1, K_2, które przecinają wszystkie krzywe eliptyczne pęku w dwóch grupach punktów G_1, G_2, posiadających następującą własność: żadna wielokrotność jednej z tych grup nie jest równoważna żadnej wielokrotności drugiej z nich.

Uważajmy wówczas całkę eliptyczną pierwszego gatunku u, należącą do krzywej eliptycznej pęku. Niechaj wartości całki tej w punkcie $u(x, y, z)$ i w punkcie $v(x', y', z')$ spełniają kongruencyę

$$v + \Sigma u_{G_2} \equiv u + \Sigma u_{G_1}\,,$$

gdzie u_{G_1}, u_{G_2} są wartościami całki eliptycznej w punktach grup G_1 i G_2. Na podstawie twierdzenia Abela spółrzędne punktu (x', y', z') są funkcyami

icm©

wymiernemi spółrzędnych punktu (x, y, z), i parametrów ξ, η, wchodzących wymiernie w równanie krzywej eliptycznej. Stąd wynika, że x', y', z' są funkcyami wymiernemi spółrzędnych x, y, z na powierzchni, i na odwrót x, y, z są funkcyami wymiernemi spółrzędnych x', y', z' na powierzchni. Zatem równania

$$v = u + k\Sigma u_{G_1} - k\Sigma u_{G_2}, \tag{5}$$

dla wartości $k = 1, 2, \ldots$. dają nieskończoną nieciągłą seryę przekształceń dwuwymiernych powierzchni.

Ogólna teorya powierzchni regularnych zezwalających na nieciągłą nieskończoną seryę przekształceń, postąpiła znacznie naprzód w ostatnich czasach dzięki pracom Severi'ego (S. 20), zreferowanym w poprzednim Rozdziale w ust. 6. Widzieliśmy, że przekształceniom powierzchni algebraicznej odpowiadają przekształcenia liniowe pewnej formy kwadratowej samej na siebie. Izoformizm grupy przekształceń powierzchni i grupy przekształceń formy kwadratowej jest albo holoedryczny albo meriedryczny ze skończonym indeksem. Nie wszystkim przekształceniom formy muszą odpowiadać przekształcenia powierzchni.

Severi stosuje te teorye do powierzchni Fano rzędu 4, którą poznaliśmy przed chwilą. Znalezienie przekształceń dwuwymiernych powierzchni sprowadza się do rozwiązania równania Pella

$$t^2 - 7u^2 = 1.$$

Mamy zatem nieskończenie wiele układów ∞^2 krzywych

$$|(t - 3u)C_1 + uC_2|,$$

gdzie C_1 jest ową krzywą szóstego rzędu, a C_2 jest przekrojem płaskim. Krzywe tych układów są rodzaju i stopnia 2.

Stąd otrzymuje Severi rezultat, że jedyne przekształcenia dwuwymierne powierzchni na siebie inwolucyjne są właśnie określone przez układy krzywych poprzednio otrzymanych. Jeżeli jeden z tych układów dany jest przez wzór $lC_1 + mC_2$, gdzie liczby l i m spełniają równanie

$$l^2 + 6lm + 2m^2 = 1,$$

wówczas liczby charakterystyczne przekształcenia

$$\Gamma_1 = \alpha C_1 + \beta C_2, \qquad \Gamma_2 = \gamma C_1 + \delta C_2$$

dane są przez wzory:

$$\alpha = l^2 - 2m^2, \quad \beta = 2m(l + 3m), \quad \gamma = 2l(3l + 2m), \quad \delta = 2m^2.$$

Wszystkie przekształcenia powierzchni otrzymuje się z dwóch przekształceń inwolucyjnych o module -1. Dwa takie przekształcenia są:

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 6 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad S' = \begin{pmatrix} -17, & -6 \\ 48, & 17 \end{pmatrix}.$$

Wszystkie przekształcenia dwuwymierne powierzchni na siebie otrzymuje się:

1) jako przekształcenie modularne, odpowiadające następującemu podstawieniu modularnemu, t. j. o wyznaczniku jeden

$$U = S'S = \begin{pmatrix} -17, & -19 \\ 48, & 271 \end{pmatrix},$$

mianowicie potęgom tego podstawienia;

2) jako przekształcenia dwuwymierne, odpowiadające podstawieniom o module -1, mianowicie przekształcenia, odpowiadające podstawieniom

$$SU^i, \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

które są wszystkie inwolucyjne. Tak więc wszystkie przekształcenia otrzymuje się z dwóch podstawień S, U.

Pierwsze przykłady powierzchni nieregularnych, posiadających nieciągłą nieskończoną seryę przekształceń dwuwymiernych, podaje A. Rosenblatt (C. R. T. 153. 1911, R. P. T. 33. 1912). Przekształcenia tych powierzchni otrzymuje się poprzednio wyłożoną metodą Enriquesa.

Nareszcie w pracy z roku bieżącego (E. 30) wraca Enriques do swych dawniejszych badań nad powierzchniami temi i dowodzi, że powierzchnie, posiadające pęk liniowy krzywych eliptycznych, posiadają wszystkie nieskończenie wiele przekształceń dwuwymiernych, przesuwających krzywe eliptyczne w siebie. Enriques używa do dowodu odwzorowania powierzchni, o których mowa, na płaszczyznach podwójnych.

Kraków w marcu 1912.

icm©

Uzupełnienie spisu literatury Teoryi powierzchni algebraicznych.

G. Bagnera e M. de Franchis.

„Sopra le equazioni algebriche $F(X, Y, Z)=0$, che si lasciano risolvere con X, Y, Z funzioni quadruplamente periodiche di due parametri". A. C. M. T. 2. 1909.

„Intorno alle superficie regolari di genere uno, che ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti". A. C. M. T. 2. 1909.

A. Berry.

„On quartic surfaces which admit of integrals of the first kind of total differentials". C. P. T. T. 18. 1900.

„On certain quintic surfaces which admit of integrals of the first kind of total differentials. Second paper. C. P. T. T. 20. 1904.

„A generalisation of a theorem of M. Picard with regard to integrals of the first kind of total differentials". A. M. T. 27. 1903.

F. Enriques.

„Sui moduli d'una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza par le funzioni algebriche di due variabili". A. T. T. 47. 1912.

M. de Franchis.

„Le superficie irrazionali di 4-o ordine di genere geometrico-superficiale nullo. R. P. T. 14. 1900.

M. de Franchis e G. Bagnera (Vide G. Bagnera e M. de Franchis).

L. Godeaux.

„Sur les systèmes linéaires quadruplement infinis de courbes appartenant à une surface algebrique". Bulletin de l'Académie de Cracovie. 1912.

„Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont elliptiques doubles". M. A. T. 72. 1912.

„Sur les transformations rationnelles entre deux surfaces de genres un". C. R. T. 154. 1912.

É. Picard.*)

„Sur un théorême relatif aux surfaces, pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres". M. A. T. 19. 1882.

„Sur la transformation des surfaces algébriques en elles-mêmes". C. R. T. 103. 1886.

„Sur les résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles". C. R. T. 124. 1897.

„Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques". C. R. T. 127. 1898.

„Sur la réduction des intégrales doubles et sur un nouvel invariant dans la théorie des surfaces algébriques". C. R. T. 126. 1898.

„Quelques remarques sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques". C. R. T. 129. 1899.

„Sur les périodes des intégrales doubles de fonctions algébriques". C. R. T. 125. 1897.

„Sur la réduction des intégrales doubles de fonctions algébriques". C. R. T. 126. 1898.

„Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques". C. R. T. 125. 1897.

„Sur les périodes des intégrales doubles". C. R. T. 133. 1901.

„Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables". C. R. T. 133. 1901.

„Sur les périodes des intégrales doubles et sur une classe d'équations différentielles linéaires". C. R. T. 134. 1902.

„Quelques remarques sur les périodes des intégrales doubles et la transformation des surfaces algébriques". C. R. T. 134. 1902.

„Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables". C. R. T. 132. 1901.

„Sur une propriété curieuse d'une classe de surfaces algébriques". C. R. T. 135. 1902.

„Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls". B. S. M. Sér. 2. T. 26. 1902.

„Sur certaines surfaces algébriques pour lesquelles les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques". C. R. T. 136. 1903.

*) Uzupełnienie to prac Picarda obejmuje prawie wyłącznie noty w C. R., których treść rozwinięta jest obszerniej w pracach poprzednio wyliczonych. Całkowity spis prac Picarda znajduje się w jego biografii przez Lebona (Paryż 1910).

icm©

„Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce“. C. R. T. 137. 1903.

„Sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques de deux variables et de leurs intégrales“. C. R. T. 138. 1904.

„Sur quelques équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques“. C. R. T. 139. 1904.

„Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales“. C. R. T. 137. 1903.

„Sur les résidus et les périodes des intégrales doubles de fonctions rationnelles“. C. R. T. 132. 1901.

A. Rosenblatt.

„Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques“. C. R. T. 154. 1912.

„Sur certaines classes de surfaces algébriques irrégulières et sur les transformations birationnelles de ces surfaces en elles-mêmes“. Bulletin de l'Académie de Cracovie. Juillet 1912.

„Sur les surfaces algébriques irrégulières de genre linéaire $p^{(1)} > 1$“. Prace matematyczno-fizyczne. T. 23. 1912.

W. SIERPIŃSKI.

O krzywych, wypełniających kwadrat.

(Sur les courbes qui remplissent un carré).

ROZDZIAŁ I.

Wywód krzywej Peano.

Pierwszy przykład krzywej ciągłej, wypełniającej kwadrat, podał w r. 1890 G. Peano w postaci czysto analitycznej[1]. Interpretacyę geometryczną krzywej Peano dali A. Schoenflies[2] oraz E. H. Moore[3].

W rozdziale niniejszym zamierzam przedstawić pewien oryginalny sposób otrzymania krzywej Peano. Sposób ten, będący pewną modyfikacyą metody Schoenfliesa, wydaje mi się naturalnym i łatwym do spamiętania, a przytem daje się z odpowiedniemi zmianami zastosować też przy wyprowadzaniu innych krzywych, wypełniających kwadrat, jak to zobaczymy w następnych rozdziałach.

Oznaczmy przez K kwadrat o wierzchołkach przeciwległych (0,0) i (1,1), i weźmy pod rozwagę dowolną daną krzywę ciągłą C_1, przebiegającą w kwa-

---

[1]) Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. Mathematische Annalen, Bd. **36**, p. 157.

[2]) Zob. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, T. I (1900), p. 122.

[3]) On certain crincly curves. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. I (1900), p. 72–90.