

W. RYBCZYŃSKI.

Przyczynek do teorii uginania promieni röntgenowskich.

(Contribution à la théorie de la diffraction des rayons de Röntgen).

Już od dłuższego czasu toczy się spór w kwestyi uginania promieni Röntgena. Gdyby przyczyną tych promieni był nieprzerwany ciąg fal elektromagnetycznych, uginanie nie ulegałoby wątpliwości. Według teorii elektronowej rzecz ma się inaczej. Elektron, zatrzymany nagle przez ścianę rurki katodowej, staje się źródłem zaburzenia eteru, które z prędkością światła rozchodzi się w przestrzeni; każdej bowiem nagłej zmianie prędkości elektronu towarzyszy promieniowanie. Jeden elektron, zahamowany w biegu, wysyła „impuls“, którego szerokość, na podstawie teorii Plancka o quantum energii, obliczono na $3-6 \cdot 10^{-9}$ cm., zależnie od twardości promieni.

Liczne doświadczenia (Fomm, Maier, Haga, Wind, Walter, Pohl), choć najściślej wykonane, nie dały dotychczas rozstrzygających rezultatów. Wyniki teoretyczne potwierdzają, że istnieć musi uginanie, którego rodzaj zależy od jakości przyjętego „impulsu“. Ponieważ kształt impulsu nie jest znany, jest rzeczą ciekawą zbadać, do jakich wyników doprowadzają rozmaite co do tego kształtu założenia. Jednym takim przypadkiem zajmijmy się w tej rozprawie.

Najpierw rozpatrzmy uginanie promieni przez krawędź „półpłaszczyzny“. Dla uproszczenia przyjmijmy, że zaburzenie nie zależy od kierunku (z), równoległego do krawędzi uginającej. Zadanie polegać będzie na rozwiązaniu równania różniczkowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

gdzie u jest składową siły elektrycznej, względnie magnetycznej. Użyć tu można zasady Huygensa lub prostszej metody stosowanej przez prof. Sommerfelda (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 46, str. 11, 1901), polegającej na utwo-

rzeniu funkcji rozgałęziającej się na dwulistnej powierzchni Riemanna o jednym punkcie rozgałęzienia w miejscu przecięcia się z krawędzią uginającą. Jeden liść ma znaczenie fizyczne, drugi czysto matematyczne. Rozprzestrzenianie się zaburzenia w tym drugim jest optycznie stracone i odpowiada absorpcji energii przez zasłonę. Użycie powierzchni o nieskończonej liczbie liści odpowiadałoby zasłonie idealnie czarnej; w wyniku jednak różnica jest nieznaczna. Ta metoda daje przy drobnej szerokości impulsu, (λ), jak jest w istocie, te same rezultaty, co stosowanie zasady Huygensa.

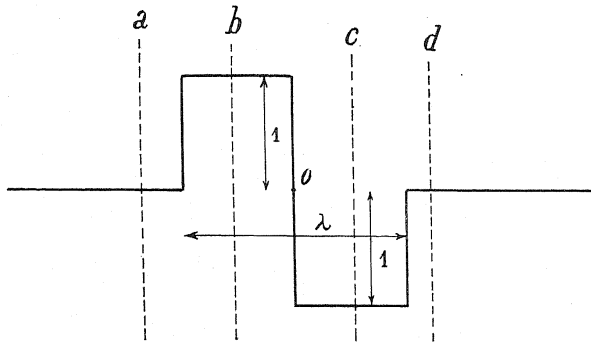
Stosując metodę całkowania zespolonego, przy uwzględnieniu rezydów Cauchy'ego, i przekształcając drogę całkowania, dochodzimy do następującego rozwiązania równania 1. dla impulsu ugiętego (l. c. str. 40):

$$u = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{r(1-\cos\psi)}, \int_{ct-r}^{-\infty} \frac{f(z)}{ct-r\cos\psi-z} \frac{dz}{\sqrt{ct-r-z}} \quad (2)$$

gdzie r jest odległością od krawędzi uginającej, czas liczony od przejścia środka impulsu przez krawędź, ψ kąt zawarty między r a granicą cienia geometrycznego, $f(z)$ funkcja dowolna, charakteryzująca jakość impulsu. O tej funkcji zakładamy:¹⁾

$$\begin{aligned} f(z) &= 0, & \text{gdy} & \quad |z| > \frac{\lambda}{2}; \\ f(z) &= +1, & \text{gdy} & \quad z < 0; \\ f(z) &= -1, & \text{gdy} & \quad z > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Fig. 1.



¹⁾ Założenie Sommerfelda: $f(z) = 0$ dla $|z| > \frac{\lambda}{2}$; $f(z) = +1$ dla $|z| < \frac{\lambda}{2}$.

Tu należy rozróżnić cztery przypadki ze względu na położenie przedziału całki 2) wobec przedziału, w którym funkcja $f(z)$ jest różna od zera. Te przedziały mogą się: a) wykluczać; albo b) pierwszy może zawierać część dodatniej połowy drugiego; albo c) całą dodatnią i część ujemnej połowy; albo wreszcie d) całkowity drugi przedział.

Przypadki te zachodzą, gdy:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & ct - r < -\frac{\lambda}{2}, & \text{czyli} & \quad r > ct + \frac{\lambda}{2}; \\ \text{b)} \quad & -\frac{\lambda}{2} < ct - r < 0, & \text{„} & \quad ct + \frac{\lambda}{2} > r > ct; \\ \text{c)} \quad & 0 < ct - r < +\frac{\lambda}{2}, & \text{„} & \quad ct > r > ct - \frac{\lambda}{2}; \\ \text{d)} \quad & +\frac{\lambda}{2} < ct - r, & \text{„} & \quad ct - \frac{\lambda}{2} > r. \end{aligned} \quad (4)$$

W danym więc czasie trzy koła spółośrodkowe dzielą płaszczyznę na cztery pola, w których zaburzenie przybiera rozmaite wielkości.

W polu (a) według (3) jest $f(z) = 0$, więc

$$u_a = 0, \quad (5)$$

t. j. zaburzenie nie doszło jeszcze do punktów $r = ct + \frac{\lambda}{2}$.

W polu (b) jest:

$$\begin{aligned} u_b &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{r(1-\cos\psi)} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{ct-r} \frac{(+1)}{ct-r\cos\psi-z} \frac{dz}{\sqrt{ct-r-z}} \\ &= \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{ct-r+\frac{\lambda}{2}}{r(1-\cos\psi)}}, \end{aligned} \quad (6)$$

Wyrażenie to przybiera na granicy cienia geometrycznego ($\psi = 0$) wartość $\frac{1}{2}$ i maleje ze wzrostem odległości od zasłony i kąta ugięcia.

W polu (c) jest:

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{r(1-\cos\psi)} \int_0^{ct-r} \frac{(-1)}{ct-r\cos\psi-z} \frac{dz}{\sqrt{ct-r-z}} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sqrt{r(1-\cos\psi)} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^0 \frac{(+1)}{ct-r\cos\psi-z} \frac{dz}{\sqrt{ct-r-z}} \end{aligned} \quad (7a)$$

$$u_c = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctg \sqrt{\frac{ct-r+\frac{\lambda}{2}}{r(1-\cos\psi)}} - 2 \arctg \sqrt{\frac{ct-r}{r(1-\cos\psi)}} \right\} \quad (7b)$$

wyrażenie, przybierające wartość $-\frac{1}{2}$ dla $\psi = 0$.

W polu (d) jest:

$$u_d = \frac{1}{2\pi} \sqrt{r(1-\cos\psi)} \left\{ \int_{-\frac{\lambda}{2}}^0 \frac{(+1)}{ct-r\cos\psi-z} \frac{dz}{\sqrt{ct-r-z}} + \int_0^{+\frac{\lambda}{2}} \frac{(-1)}{ct-r\cos\psi-z} \frac{dz}{\sqrt{ct-r-z}} \right\} \quad (8a)$$

Z powodu krótkości przedziału całek wystarczy przyjąć na z średnią wartość $-\frac{\lambda}{4}$, względnie $+\frac{\lambda}{4}$, wskutek czego otrzymujemy:

$$u_d = \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{r(1-\cos\psi)} \left[\frac{1}{\sqrt{ct-r+\frac{\lambda}{4}(ct-r\cos\psi+\frac{\lambda}{4})}} - \frac{1}{\sqrt{ct-r-\frac{\lambda}{4}(ct-r\cos\psi-\frac{\lambda}{4})}} \right] \quad (8)$$

W polu (d) zaburzenie jest bardzo nieznaczne z powodu czynnika λ i z czasem spada do zera.

Krzywe na figurze 2. przedstawiają wielkość ugiętego impulsu rozmaitego kształtu w związku z kątem ψ . Widoczne jest, że dla naszego impulsu linie są najwięcej strome, więc uginanie najslabsze.

Ważniejszą rzeczą jest obliczenie natężenia impulsu, który można mierzyć sposobem fotometrycznym na kliszy fotograficznej.

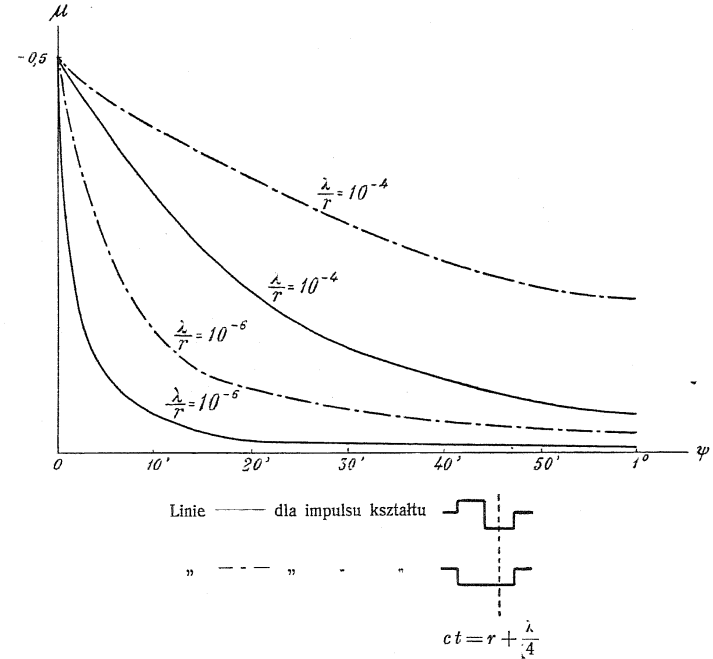
Natężenie impulsu wpadającego jest:

$$J_0 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dt = \frac{\tau}{8\pi}, \quad (9)$$

a ponieważ

$$\tau = \frac{\lambda}{c}, \quad \text{więc} \quad J_0 = \frac{\lambda}{8\pi c}$$

Fig. 2.



Natężenie impulsu ugiętego jest:

$$J_n = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dt \quad (10)$$

Natężenie względne wynosi:

$$J = \frac{J_n}{J_0} = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dt. \quad (11)$$

W polu (a) mamy:

$$J_a = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u_a^2 dt = 0, \quad (12)$$

t. j. natężenia nie ma wcale.

W polu (b) jest:

$$J_b = \frac{c}{\lambda \pi^2} \int_{a=r-\frac{\lambda}{2}}^{ct=r} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ct-r+\frac{\lambda}{2}}{r(1-\cos\psi)}} \right)^2 dt.$$

Wyjątkowo udaje się tu całkowanie zapomocą podstawienia

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ct-r+\frac{\lambda}{2}}{r(1-\cos\psi)}},$$

wskutek czego otrzymujemy przez całkowanie częściowe:

$$J_b = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{2+s}{2s} \left(\operatorname{arc. tg.} \sqrt{\frac{s}{2}} \right)^2 - \sqrt{\frac{2}{s}} \operatorname{arc. tg.} \sqrt{\frac{s}{2}} + \frac{\log \left(1 + \frac{s}{2} \right)}{s} \right];$$

$$s = \frac{\lambda}{r(1-\cos\psi)}. \quad (13)$$

W polu (c) jest:

$$J_c = \frac{c}{\lambda} \int_{ct=r}^{ct=r+\frac{\lambda}{2}} u e^2 dt.$$

Całkę tę można wyznaczyć w sposób przybliżony; mianowicie: całkę w drugim wyrazie równania (7a) można obliczyć podobnie jak całkę (8a), wskutek czego otrzymujemy:

$$J_c = \frac{c}{\lambda} \int_{ct=r}^{ct=r+\frac{\lambda}{2}} \left\{ -\frac{1}{\pi} \operatorname{arc. tg.} \sqrt{\frac{ct-r}{r(1-\cos\psi)}} + \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{\frac{r(1-\cos\psi)}{ct-r+\frac{\lambda}{4}}} \frac{1}{ct-r\cos\psi+\frac{\lambda}{4}} \right\}^2 dt$$

Wyraz drugi, bardzo mały z powodu czynnika λ , można podczas całkowania uważać za stały o wartości, jaką uzyskuje w czasie średnim $ct=r+\frac{\lambda}{4}$; otrzymujemy więc:

$$J_c = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{2+s}{2s} \left(\operatorname{arc. tg.} \sqrt{\frac{s}{2}} \right)^2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{s}} \operatorname{arc. tg.} \sqrt{\frac{s}{2}} \right. \\ \left. + \frac{\log \left(1 + \frac{s}{2} \right)}{s} + \frac{5s+8}{4(2+s)^2} \right]. \quad (14)$$

W polu (d).

$$J_d = \frac{c\lambda}{16\pi^2} r(1-\cos\psi) \int_{ct=r+\frac{\lambda}{2}}^{ct=\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{ct-r+\frac{\lambda}{4}(ct-r\cos\psi+\frac{\lambda}{4})}} - \frac{1}{\sqrt{ct-r-\frac{\lambda}{4}(ct-r\cos\psi-\frac{\lambda}{4})}} \right]^2 dt,$$

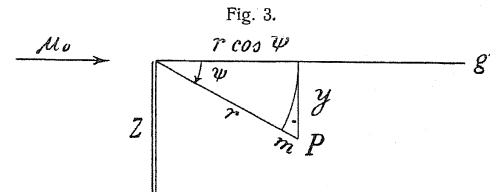
$$J_d = \frac{s}{16\pi^2} \left(\log \frac{3s^2+16s+16}{3s^2} - \frac{16s+32}{3s^2+16s+16} \right) \\ + \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{2}{s+2}} \log \frac{3s^2+8s-2s\sqrt{6s+12}}{3s^2+16s+16-2(3s+4)\sqrt{2s+4}} \\ - \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{2}{s-2}} \left(\operatorname{arc. sin.} \frac{s-4}{s} - \operatorname{arc. sin.} \frac{s-8}{s+4} \right) & \text{dla } s > 2, \\ \frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) & \text{dla } s = 2, \\ \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{2}{2-s}} \log \frac{s^2-8s+2s\sqrt{12-6s}}{s^2-16+2(s+4)\sqrt{4-2s}} & \text{dla } s < 2. \end{cases} \quad (15)$$

Całkowane natężenie w pewnym punkcie jest:

$$J = J_a + J_b + J_c + J_d. \quad (15a)$$

Wartości J_s obliczone dla rozmaitych s , są następujące:

$$J_{20} = 0,250, \quad J_{1600} = 0,226, \quad J_{1000} = 0,215, \quad J_{400} = 0,205, \quad J_{100} = 0,170, \\ J_{40} = 0,136, \quad J_{25} = 0,120, \quad J_{10} = 0,075, \quad J_4 = 0,045, \quad J_2 = 0,026, \\ J_1 = 0,015, \quad J_{1/2} = 0,007, \quad J_{1/4} = 0,005, \quad J_{1/8} = 0,002, \quad J_{1/16} = 0,0008, \\ J_{1/32} = 0,0005, \quad J_0 = 0. \quad (15b)$$



W celu lepszego uzmysłowienia przedstawmy graficznie zależność natężenia impulsu, ugiętego przez zasłonę z w punkcie P , od odległości tego punktu (y) od granicy cienia geometrycznego:

$$m = r(1 - \cos \psi), \quad y^2 = 2r \cdot m = 2r \cdot r(1 - \cos \psi) = \frac{2r\lambda}{s}; \quad \sqrt{\frac{2}{s}} = \frac{y}{\sqrt{r\lambda}}.$$

Odcinając na osi odciętych jednostki $\frac{y}{\sqrt{r\lambda}}$, na osi rzędnych odpowiednie natężenia, otrzymamy:

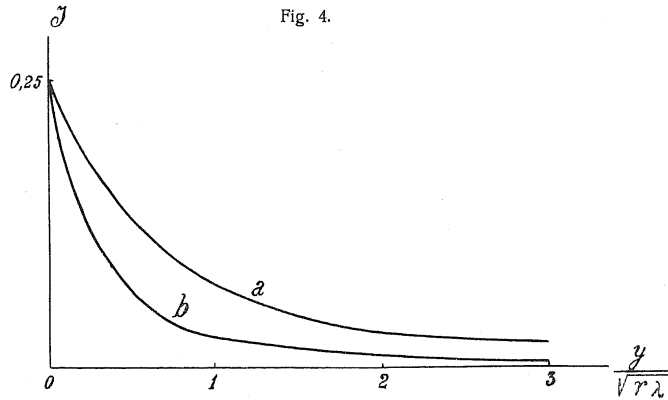
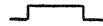



Fig. 4.

Krzywa a dla impulsu kształtu 
 „ b „ „ „ 

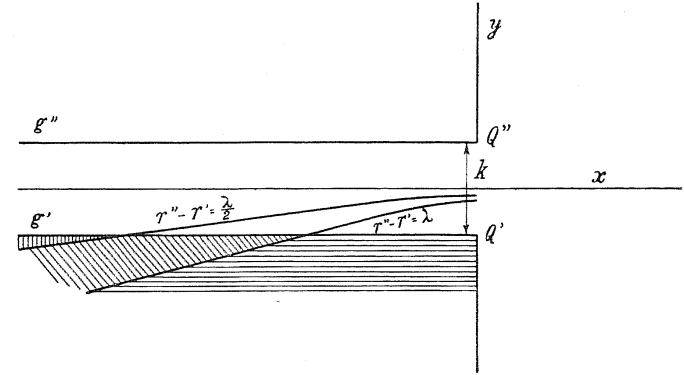
Natężenie, przybierając na granicy cienia geometrycznego wartość $1/4$ natężenia impulsu wpadającego, maleje nagle z odległością od tej granicy. Dla $\lambda = 0$ ugięcie nie następuje.

Sprawdzenie tych rezultatów sposobem fotograficznym jest trudne. Umieszczając bowiem płytę fotograficzną w odległości np. 50 cm. od krawędzi uginającej, otrzymamy w oddaleniu 1μ . od granicy cienia geometrycznego zasłony natężenie 40 razy, a w oddaleniu 3μ . 200 razy mniejsze od natężenia impulsu wpadającego.

O wiele korzystniejsze dla doświadczeń jest uginanie przez szczelinę, i tem się w dalszym ciągu zajmmy.

Zadanie to, uważając je jako zagadnienie dwóch półpłaszczyzn, można rozwiązać sposobem przybliżonym na podstawie zasady Huygensa-Kirchhoffa (l. c. str. 72).

Fig. 5.



Oznaczmy (Fig. 5) przez r' , r'' , odległości punktu od krawędzi szczeliny Q' , Q'' ; odpowiednie ugięte impulsy przez u' , u'' ; granice cienia geometrycznego przez g' , g'' .

W cień geometryczny g' wnika naturalnie tylko ugięty impuls o wielkości $u = u' - u''$.

Bardzo ważne są krzywe $r'' - r' = \lambda$ i $r'' - r' = \frac{\lambda}{2}$; są to gałęzie hiperboli, mających ognisko w punkcie Q' , a osie główne w kierunkach x , y .

Ich równania są:

$$\frac{4y^2}{\lambda^2} - \frac{4x}{x^2 - \lambda^2} = 1, \quad \text{i} \quad \frac{16y^2}{\lambda^2} - \frac{16x}{4x^2 - \lambda^2} = 1. \quad (16)$$

Krzywe te dzielą pole cienia na trzy części. W polu pionowo kreskowanym $r'' - r' < \frac{\lambda}{2}$; w polu skośnie kreskowanym $\frac{\lambda}{2} < r'' - r' < \lambda$; w polu poziomo kreskowanym $r'' - r' > \lambda$.

W polu pionowo kreskowanym otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \text{dla} \quad & -\infty < ct < r' - \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = 0, \\
 \text{„} \quad & r' - \frac{\lambda}{2} < ct < r'' - \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_b', \\
 \text{„} \quad & r'' - \frac{\lambda}{2} < ct < r' \quad \dots \quad u = u_b' - u_b'', \\
 \text{„} \quad & r' < ct < r'' \quad \dots \quad u = u_c' - u_b'', \\
 \text{„} \quad & r'' < ct < r' + \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_c' - u_c'', \\
 \text{„} \quad & r' + \frac{\lambda}{2} < ct < r'' + \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_d' - u_c'', \\
 \text{„} \quad & r'' + \frac{\lambda}{2} < ct < +\infty \quad \dots \quad u = u_d' - u_d''.
 \end{aligned} \tag{17}$$

W polu ukośnie kreskowanym:

$$\begin{aligned}
 \text{dla} \quad & -\infty < ct < r' - \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = 0, \\
 \text{„} \quad & r' - \frac{\lambda}{2} < ct < r' \quad \dots \quad u = u_b', \\
 \text{„} \quad & r' < ct < r'' - \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_c', \\
 \text{„} \quad & r'' - \frac{\lambda}{2} < ct < r' + \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_c' - u_b'', \\
 \text{„} \quad & r' + \frac{\lambda}{2} < ct < r'' \quad \dots \quad u = u_d' - u_b'', \\
 \text{„} \quad & r'' < ct < r'' + \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_d' - u_c'', \\
 \text{„} \quad & r'' + \frac{\lambda}{2} < ct < +\infty \quad \dots \quad u = u_d' - u_d''.
 \end{aligned} \tag{18}$$

W polu poziomo kreskowanym:

$$\begin{aligned}
 \text{dla} \quad & -\infty < ct < r' - \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = 0, \\
 \text{„} \quad & r' - \frac{\lambda}{2} < ct < r' \quad \dots \quad u = u_b', \\
 \text{„} \quad & r' < ct < r' + \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_c', \\
 \text{„} \quad & r' + \frac{\lambda}{2} < ct < r'' - \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_d', \\
 \text{„} \quad & r'' - \frac{\lambda}{2} < ct < r'' \quad \dots \quad u = u_d' - u_b'', \\
 \text{„} \quad & r'' < ct < r'' + \frac{\lambda}{2} \quad \dots \quad u = u_d' - u_c'', \\
 \text{„} \quad & r'' + \frac{\lambda}{2} < ct < +\infty \quad \dots \quad u = u_d' - u_d''.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Przez zamianę kresk otrzymujemy analogiczne równania dla drugiego cienia geometrycznego.

Na linii środkowej szczeliny, gdzie $r' = r''$, a więc $u = u' = u'' = u$, wielkość impulsu wynosi:

$$u_m = u_0 - 2u,$$

a natężenie względne:

$$J_m = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0 - 2u)^2 dt = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dt + 4 \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dt - 4 \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 u dt \tag{20}$$

$$\frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dt = \frac{c\tau}{\lambda} |1| = 1$$

całka $4 \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dt$ już jest obliczona (15a) i równa się $4J$.

By obliczyć ostatnią całkę $\frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 u dt$, należy zauważyć, że:

$$u_0 = 0, \quad \text{gdy} \quad |x| + \frac{\lambda}{2} < ct < |x| - \frac{\lambda}{2}, \quad |x| = \text{odległości od szczeliny.}$$

$$u_0 = +1, \quad \text{„} \quad |x| - \frac{\lambda}{2} < ct < |x|,$$

$$u_0 = -1, \quad \text{„} \quad |x| < ct < |x| + \frac{\lambda}{2},$$

$$u = 0, \quad \text{„} \quad ct < r - \frac{\lambda}{2},$$

$$u = u_b, \quad \text{„} \quad r - \frac{\lambda}{2} < ct < r,$$

$$u = u_c, \quad \text{„} \quad r < ct < r + \frac{\lambda}{2}.$$

Powyższą całkę rozłożyć można w sposób następujący:

$$\frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 u dt = K = \frac{c}{\lambda} \int_{r-\frac{\lambda}{2}}^{|x|} u_b dt - \frac{c}{\lambda} \int_{|x|}^r u_b dt - \frac{c}{\lambda} \int_r^{|x|+\frac{\lambda}{2}} u_c dt, \quad \text{pamiętając że} \quad u_0 = \pm 1$$

$$\frac{c}{\lambda} \int_{r-\frac{\lambda}{2}}^{|x|} u_b dt = \frac{1}{2\pi} \left(\text{arc. tg. } \sqrt{\frac{s-2}{2}} - \frac{2\sqrt{\frac{s-2}{2}}}{s} \right),$$

$$\frac{c}{\lambda} \int_{|x|}^r u_b dt = \frac{1}{s\pi} \left[\left(1 + \frac{s}{2}\right) \text{arc. tg. } \sqrt{\frac{s}{2}} - \frac{1}{2\pi} \left(\text{arc. tg. } \sqrt{\frac{s-2}{2}} - 2\frac{\sqrt{\frac{s-2}{2}}}{s} \right) \right],$$

$$\frac{c}{\lambda} \int_r^{|x|+\frac{\lambda}{2}} u_c dt = \frac{1}{\pi} \left(\text{arc. tg. } \sqrt{s-1} - \frac{\sqrt{s-1}}{s} \right) - \frac{1}{s\pi} \left[\left(1 + \frac{s}{2}\right) \text{arc. tg. } \sqrt{\frac{s}{2}} - \sqrt{\frac{s}{2}} \right]$$

$$- \frac{1}{\pi} \left(\text{arc. tg. } \sqrt{\frac{s-2}{2}} - \frac{2\sqrt{\frac{s-2}{2}}}{s} \right),$$

więc:

$$K = \frac{1}{\pi} \left(2 \text{arc. tg. } \sqrt{\frac{s-2}{2}} - \text{arc. tg. } \sqrt{s-1} + \frac{\sqrt{s-1}}{s} - \frac{2\sqrt{2s-4}}{s} \right) \quad (21)$$

$$J_m = 1 + 4J - 4K. \quad (22)$$

Wartości obliczone według tego wzoru dla różnych s są następujące:

$$\begin{aligned} J_0 &= 1, & J_{1/2} &= 1,010, & J_{1/4} &= 1,020, & J_{1/2} &= 1,028, & J_1 &= 1,060, \\ J_{3/2} &= 1,260, & J_2 &= 1,467, & J_{3/2} &= 1,489, & J_3 &= 1,375, & J_4 &= 1,235, \\ J_5 &= 1,100, & J_{10} &= 0,710, & J_{25} &= 0,390, & J_{40} &= 0,257, & J_{100} &= 0,140, \\ J_{400} &= 0,052, & J_{1600} &= 0,020. \end{aligned} \quad (23)$$

Chcąc obliczyć zmianę natężenia w zależności od odległości od zasłony $|x|$, musimy zauważyć, że

$$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2},$$

a przyjąwszy k zabadzco małe w porównaniu z $|x|$, otrzymujemy:

$$r = |x| + \frac{k^2}{8|x|},$$

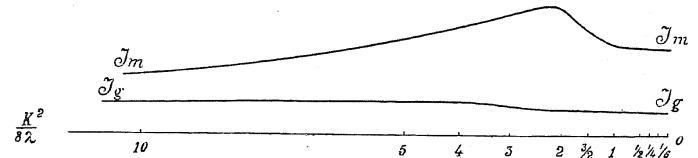
a stąd:

$$|x| = \frac{k^2}{8\lambda} s. \quad (24)$$

Na linii środkowej rośnie natężenie wraz z odległością od szczeliny od 1 aż do maximum 1,489, które osiąga w odległości $x = \frac{15k^2}{56\lambda}$; od tego punktu maleje z oddaleniem aż do zera.

Przyjąwszy $\lambda = 0$, otrzymalibyśmy maximum w nieskończoności, czyli na całej linii byłoby natężenie równe 1.

Fig. 6.



Natężenie na granicy cienia geometrycznego g' jest $J_g' = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_0}{2} - u'\right)^2 dt$ (uwzgl. 15b), więc:

$$J_g' = \frac{1}{4} + J - K = \frac{J_m}{4} \quad (25)$$

dla tego samego s , a ponieważ

$$r = \sqrt{x^2 + k^2} = |x| + \frac{k^2}{2|x|},$$

przeto

$$|x| = \frac{k^2}{2\lambda} s.$$

Porównyując z (24), widzimy, że natężenie impulsu na granicy cienia jest cztery razy mniejsze, niż na linii środkowej w punkcie cztery razy bliższym szczeliny.

Na granicy cienia rośnie natężenie wraz z odległością od szczeliny od $1/4$ aż do maximum 0,372, które osiąga w odległości $|x| = \frac{15k^2}{14\lambda}$, od tego punktu maleje do zera.

Przebieg obu natężeń jest przedstawiony na fig. 6.

Dla innych punktów między granicami cienia geometrycznego jest:

$$\bar{J}_a = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0 - u' - u'')^2 dt = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0^2 + u'^2 + u''^2 - 2u_0 u' - 2u_0 u'' + 2u' u'') dt,$$

$$\bar{J} = 1 + J' + J'' - 2K' - 2K'' + 2K'''.$$
 (26)

Prócz ostatniego wyrazu znane są nam wszystkie z równań 15b i 21.

By obliczyć $K''' = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u' u'' dt$, musimy wiedzieć, na jakiej hyperboli $r'' - r'$ (w razie $r'' > r'$) dany punkt się znajduje, czyli na którym z trzech wyżej wymienionych pól. Przypuśćmy, że $r'' - r' = \frac{\lambda}{2}$, wówczas:

$$K_{\lambda}''' = \frac{c}{\lambda} \int_{r'' - \frac{\lambda}{2}}^{r''} u_c' u_b'' dt + \frac{c}{\lambda} \int_{r''}^{r'' + \frac{\lambda}{2}} u_d' u_c'' dt + \frac{c}{\lambda} \int_{r'' + \frac{\lambda}{2}}^{+\infty} u_d' u_d'' dt.$$
 (27)

Wartość pierwszej całki będzie ujemna, dwóch następnych dodatnia. Z powodu małych przedziałów można je traktować przybliżenie, nadając wielkościom całkowanym wartości średnie. W ten sposób postępując i przy oznaczeniach $s' = \frac{\lambda}{r' - |x|}$, $s'' = \frac{\lambda}{r'' - |x|}$, otrzymujemy:

$$K_{\lambda}''' = \frac{1}{2\pi^2} \left(\text{arc. tg. } \sqrt{\frac{3s'}{4}} - 2 \text{ arc. tg. } \sqrt{\frac{s'}{2}} \right) \text{arc. tg. } \sqrt{\frac{s''}{4}}$$

$$+ \frac{s''}{8\pi^2} \left(\frac{2}{s''+2} \sqrt{\frac{1}{s'}} - \sqrt{\frac{2}{s'}} \right) \left(\text{arc. tg. } \sqrt{\frac{3s''}{4}} - 2 \text{ arc. tg. } \sqrt{\frac{s''}{4}} \right)$$
 (28)
$$+ \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{4s'}{4+s'} \log \frac{27s''^2 + 144s'' + 144}{32s''^2 + 128s'' + 128} - \frac{4s''^3}{(4+3s'')(4+s'')(2+s'')} \right)$$

Na hyperboli $r'' - r' = n\lambda$, $n \geq 1$

$$K'''_{n\lambda} = \frac{c}{\lambda} \int_{r'' - \frac{\lambda}{2}}^{r''} u_d' u_b'' dt + \frac{c}{\lambda} \int_{r''}^{r'' + \frac{\lambda}{2}} u_d' u_c'' dt + \frac{c}{\lambda} \int_{r'' + \frac{\lambda}{2}}^{+\infty} u_d' u_d'' dt$$

$$K'''_{n\lambda} = \frac{s''}{8\pi^2} \left[\sqrt{\frac{1}{ns'}} - \sqrt{\frac{2}{(2n-1)s'}} \frac{2}{2-s''} \right] \text{arc. tg. } \sqrt{\frac{s''}{4}}$$

$$+ \left(\sqrt{\frac{2}{(2n+1)s'}} \frac{2}{s''+2} - \sqrt{\frac{1}{us'}} \right) \left(\text{arc. tg. } \sqrt{\frac{3s''}{4}} - 2 \text{ arc. tg. } \sqrt{\frac{s''}{4}} \right)$$
 (29)
$$+ \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2s'}{2+n s'} \log \frac{(n+1)^2 (4+s'')(4+3s'')}{(2+s'')^2 (2n+3)(2n+1)} - \frac{4s''^3}{(4+3s'')(4+s'')(2+s'')} \right)$$

Dla punktów położonych w cieniu geometrycznym:

$$J_c = \frac{c}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} (u' - u'')^2 dt = J' + J'' - 2K'''.$$
 (30)

Powyższe wzory wystarczają do obliczenia natężenia w każdym punkcie.

Fig. 7¹⁾ przedstawia rozkład natężeń przy ugięciu impulsu przez otwór klinowy, zwążający się ku dołowi, a więc przez szereg szczelin o różnych szerokościach (k). Daje to nam możliwość porównania teorii z wynikami dotychczasowych doświadczeń.

Linia MM odpowiada linii środkowej otworu, a linia g' rzutowi jednej krawędzi szczeliny. Płaszczyzna rysunku jest równoległa do płaszczyzny zasłony.

Przyjmijmy dowolnie, że płaszczyzna rysunku jest oddalona od szczeliny o $\frac{k_1^2}{8\lambda}$, gdzie k_1 oznacza szerokość szczeliny w wysokości linii poziomej 1. Rzecz naturalna, że odległość linii oznaczonej liczbą $1/2$ od szczeliny jest

¹⁾ Por. komunikat autora w Phys. Zeitschrift № 15. 1912

Dla światła zwykłego maximum jest większe niż 1620, dla impulsu \square 1200, dla naszego impulsu \square 1489.

Najbardziej wpada w oczy różnica w dolnych częściach cienia geometrycznego. Na fig. 7 znać na linii odpowiadającej hyperboli $r'' - r' = \frac{\lambda}{2}$ tworzenie się maximum, którego brak zupełnie w rysunku dla impulsu \square . W ogólności w naszym przypadku obraz szczeliny koncentruje się bardziej w jej rzucie geometrycznym.

Przypatrmy się doświadczeniom, mającym na celu okazanie lub zaprzeczenie uginania promieni röntgenowskich.

Pominąwszy doświadczenia F o m m a i innych autorów, którym krytyka naukowa nie przyznała znaczenia, wymienimy publikację pochodzącą z roku 1899 (H. Haga i C. H. Wind, Kön. Akad. te Amsterdam 25:IV). Z rurki röntgenowskiej wydzielono wiązkę promieni przez szczelinę o wysokości 1 cm, szerokości 14, 18, 25 μ . Ta padała w odległości 75 cm. na szczelinę uginającą kształtu klina, 3 cm. wysokiego, zwężającego się od 14 do kilku μ . Za tą szczeliną w odległości 75 cm. umieszczono płytę fotograficzną. Naświetlanie trwało 29—200 godzin. Na kliszy dopatrzili się autorowie śladów ugięcia, na podstawie których Sommerfeld obliczył szerokość impulsu na 0.13 $\mu\mu$ (Phys. Zeit. 1, 1900, 2. 1901).

Doświadczenie to powtórzył Walter (Phys. Zeit. 3, 1902), lecz z wynikiem ujemnym. Następnie Haga i Wind (Kön. Akad. 22/X. 1902) powtórzyli znów doświadczenie, używając pierwszej szczeliny o szerokości 15 μ , a drugiej o wysokości 4 cm. zwężającej się od 27 μ do 0. Zdejmując 3 razy, otrzymali obrazy cokolwiek różne; na wszystkich jednak znać było rozszerzenie w dolnych częściach.

Na to Walter i Pohl (Ann. d. Phys. 25, 1908) wyrazili przekonanie, że to rozszerzenie się obrazu polega na optycznym złudzeniu kontrastu, mianowicie daje się zaobserwować tam dopiero, gdzie się kończy ciemny rdzeń obrazu szczeliny; pozatem zarzucili autorom błędy, wynikające z pomiarów szczeliny sposobem fotograficznym. Zwrócili też uwagę na możliwość zmiany wzajemnego położenia płyty i szczeliny podczas długiego naświetlania, co wywołałoby znaczne błędy.

Ponownie więc poczynili doświadczenia (Ann. d. Phys. 29. 1909), przy zachowaniu jak największych ostrożności, których rezultatem było twierdzenie, że, jeżeli w ogóle rozszerzenie istnieje, to zaczyna się ono o wiele niżej, niż podają Haga i Wind, a mianowicie w wysokości, odpowiadającej 2.5 μ szerokości szczeliny. Obliczona jednak według tego szerokość impulsu wynosi około $1,5 \cdot 10^{-9}$, podczas gdy Stark oblicza na $2,4 \cdot 10^{-9}$ cm. a Wien $6,75 \cdot 10^{-9}$ cm. dla twardych a $4,9 \cdot 10^{-9}$ cm. dla miękkich promieni röntgenowskich.

Jak się rzecz ma w naszym przypadku?

Na fig. 7 ciemny rdzeń obrazu szczeliny odpowiadałby polu ograniczonemu linią o natężeniu 250. W górnych częściach linia ta jest prawie identyczna z rzutem krawędzi szczeliny, u dołu zaś sięga mniej więcej aż po kreskę $\sqrt{\frac{1}{40}}$; tu dopiero będzie można spostrzedz rozszerzenie się obrazu. Według Waltera i Pohla następuje to w wysokości, odpowiadającej szerokości szczeliny $k \sqrt{\frac{1}{40}} = 2,5 \mu$.

Według 31 (licząc w cm.):

$$2.5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{\sqrt{40}} \sqrt{8 \cdot \lambda \cdot 75}$$

gdyż

$$x = 75 \text{ cm. ,}$$

stąd

$$\lambda = 4.17 \cdot 10^{-9} \text{ cm.} \quad (32)$$

Zarzut Waltera i Pohla staje się dla naszego przypadku bezprzedmiotowym.

Linia — — — — na fig. 7 łączy punkty, w których natężenia są cztery razy mniejsze niż na linii środkowej w tej samej wysokości. Ponieważ oko ludzkie jest zdolne rozróżniać tylko względne natężenia, możemy uważać tę linię za granicę zaobserwowanego rozszerzenia, zwłaszcza, że u góry jest ona prawie identyczna z rzutem geometrycznym krawędzi szczeliny. W końcu muszę dodać, że rezultaty wyżej wspomnianych obserwacji nie są zbyt pewne, czy to z powodu nierównomiernej czułości płyty fotograficznej lub względności wrażeń wzrokowych. Nie ogłoszone dotąd pomiary fotometryczne K o c h a większe budzą zaufanie.

Wprawdzie dowolne przyjęcie zbyt regularnego impulsu nie odpowiada rzeczywistości; w każdym razie sposób uginania promieni röntgenowskich jest czemś pośrednim pomiędzy uginaniem zwykłego światła a uginaniem pojedynczego impulsu z tą różnicą, że wnikiwość tych promieni w geometryczny cień szczeliny jest daleko mniejsza niż w obu przypadkach skrajnych.

W ostatnim zeszycie Ann. d. Phys. ogłosił prof. Sommerfeld rozprawę o wpływie rozciągłości źródła promieni röntgenowskich na obraz ugięcia w dotychczasowych doświadczeniach. Autor na podstawie zasad Optyki czyisto geometrycznej dochodzi do wniosku, że grubość pierwszej szczeliny powoduje prawie całkowite zniknięcie maximumów. Ta okoliczność bardzo zaciemnia sprawę i podkopuje wiarę w możliwość eksperymentalnego rozstrzygnięcia uginania promieni röntgenowskich.

W końcu niech mi będzie wolno złożyć na tem miejscu najszczersze podziękowanie P. prof. Sommerfeldowi za inicjatywę i serdeczne poparcie w każdym kierunku oraz P. prof. Smoluchowskiemu za cenne wskazówki.

Monachium w kwietniu 1912.

ALFRED ROSENBLATT.

Postępy Teorii powierzchni algebraicznych.

Referat przedstawiony na XI Zjeździe lekarzy i przyrodników polskich w Krakowie w lipcu 1911.

(Les progrès de la Théorie des surfaces algébriques. Mémoire présenté au XI Congrès des médecins et naturalistes polonais en juillet 1911 à Cracovie).

WSTĘP.

Przedstawiając referat o postępach Teorii powierzchni algebraicznych Sekcji Nauk ścisłych XI Zjazdu lekarzy i przyrodników polskich, miałem na celu zaznajomienie polskiego ogółu matematycznego z działem Geometrii, który się w ostatnich latach dzięki znakomitym badaniom matematyków francuskich i włoskich tak świetnie rozwinął, że nazwać go można jedną z najpiękniejszych zdobyczy Nauk matematycznych lat ostatnich.

Jeżeli mimo to, że Teoria powierzchni algebraicznych musi posiadać urok niepospolity dla każdego, kto się z nią bliżej obznajmi, dotychczas posiada bardzo niewielu pracowników, nawet we Włoszech, gdzie się prawie wyłącznie w ostatnich latach rozwija, tego szukać należy z jednej strony w tem, że zrozumienie prac tej Teorii wymaga znajomości szeregu działów Geometrii, któremi również dopiero stosunkowo niedawno się zajęto i to również prawie wyłącznie we Włoszech, z drugiej strony w tem, że metody stworzone przez tych kilku matematyków, którzy zbudowali Geometrię na powierzchniach algebraicznych, nie zostały dotąd wyłożone w żadnym podręczniku, ani nie przedstawione w żadnym artykule encyklopedycznym. Wielkie dzieło Teorii powierzchni algebraicznych Picarda przedstawia rozwój badań kierunku