worin M_3 eine gewisse positive Zahlgrösse bezeichnet. Aus (9) ergibt sich für alle (x, y) und $(x+h, y+h')$ in T'' und auf S'' die weitere Beziehung

$$(10)\qquad |u_k(x+h, y+h') - u_k(x, y)| < M_3[|h| + |h'|],$$

Aus (10) folgt durch Grenzübergang

$$(11)\qquad |u(x+h, y+h') - u(x, y)| \leqq M_3[|h| + |h'|].$$

Die Funktion $u(x, y)$ ist daher in T'' und auf S'', somit überhaupt im Innern von T stetig.

Die unendliche Folge negativer stetiger Funktionen

$$(12)\qquad u_1(x, y) < u_2(x, y) < u_3(x, y) < \dots$$

konvergiert in T gegen eine gleichfalls stetige Funktion. Nach einem bekannten Satze von Herrn Dini ist die Folge (12) in jedem ganz im Innern von T enthaltenen Gebiete gleichmässig konvergent.

Es sei $v_k'(x, y)$ diejenige in T' reguläre Potentialfunktion, die auf S' dieselben Werte wie $u_k(x, y)$ annimmt, $G'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}; x, y)$ die zu T' gehörige klassische Green'sche Funktion. Es ist

$$(13)\qquad u_k(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta)\, e^{u_k(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta + v_k'(x, y).$$

Aus (13) folgt durch Übergang zur Grenze die weitere Beziehung

$$(14)\qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta)\, e^{u(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta + v'(x, y).$$

Hierin bezeichnet $v'(x, y)$ diejenige in T' reguläre Potentialfunktion, welche auf S' gleich $u(x, y)$ ist. Aus (14) schliesst man mit Leichtigkeit nacheinander, dass $u(x, y)$ in T' stetige partielle Ableitungen der ersten, sodann die der zweiten Ordnung hat, endlich, dass $u(x, y)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$$

genügt. Damit ist unsere Behauptung in allen Punkten bewiesen.

A. ROSENBLATT.

Sur les surfaces algébriques irrégulières de genre linéaire $p^{(1)} > 1$.

O powierzchniach algebraicznych nieregularnych rodzaju liniowego $p^{(1)} > 1$.

On sait que depuis quelques dizaines d'années l'Italie est devenue le centre de l'activité des recherches géométriques modernes, auxquelles des savants illustres ont donné un tel dévelloppement que ces recherches constituent aujourd'hui une des plus belles pages de l'Histoire des Sciences mathématiques. Le point culminant de l'édifice construit est sans doute la théorie des surfaces et des variétés algébriques à plus de deux dimensions, que les méthodes de MM. Castelnuovo, Enriques et Severi ont permis de conduire à un haut degré de perfection.

Les recherches mentionnées ont conduit à diviser les surfaces algébriques en trois grandes classes d'après la valeur de l'invariant genre linéaire $p^{(1)}$. Les surfaces possédant $p^{(1)} < 1$ ne présentent pas aujourd'hui d'intèrêt, parce qu'elles sont ou bien rationnelles ou bien transformables en des surfaces reglées. Il en est tout autrement des surfaces de genre $p^{(1)} \geqq 1$, dont l'étude est aujourd'hui bien loin encore d'être achevée. Les surfaces de genre linéaire $p^{(1)} = 1$ constituent une classe tout-à-fait exceptionnelle, qui a été l'objet d'intéressantes recherches. L'étude de la classe générale des surfaces de genre $p^{(1)} > 1$ a été abordée de divers côtés, notamment on a étudié les surfaces régulières correspondant aux plus petites valeurs de $p^{(1)}$ et les surfaces irrégulières possédant certains faisceaux irrationnels de courbes, ou bien certains autres systèmes algébriques ∞^1 de courbes.

1. On connaît depuis longtemps une inégalité importante entre le genre linéaire $p^{(1)}$ d'une surface et son genre géométrique p_g. C'est Noether qui a fait voir qu'on a toujours

(1) $$p^{(1)} - 1 \geqq 2\,(p_g - 2).$$

Noether supposait la surface régulière, possédant la série caractéristique du système canonique linéaire complète. Dans ce cas la limite inférieure donnée par l'inégalité (1), peut être rajointe, et cela n'arrive que si les courbes canoniques sont hyperelliptiques. Mais si la surface est irrégulière, alors la série caractéristique du système canonique linéaire peut être incomplète, et si δ_k est son défaut, on a toujours

$$\delta_k \leqq p_g - p_a.$$

Il n'est pas nécéssaire que δ_k soit égal à sa limite supérieure, car le système linéaire canonique peut avoir la dimension $p_g - 1$ plus grande que celle du système paracanonique général, et alors δ_k sera plus petit que $p_g - p_a$. On doit donc écrire l'inégalité

(1a) $$p^{(1)} - 1 \geqq 2\,(p_g - 2 + \delta_k).$$

Si l'irrégularité de la surface est égale à un, alors*) les systèmes linéaires paracanoniques ont la dimension du système canonique linéaire, car les systèmes paracanoniques linéaires ont leur dimension au moins égale à p_a, donc on a alors $\delta_k = 1$.

L'inégalité (1) a été le point de départ des recherches de M. Enriques sur les surfaces régulières de genres linéaires $p^{(1)} = 2$ et $p^{(1)} = 3$, et sur les surfaces régulières à courbes canoniques hyperelliptiques. Quand on envisage les surfaces irrégulières on peut éliminer de suite le cas $p^{(1)} = 2$**), car alors le degré virtuel du système algébrique canonique est 1. La surface devrait posséder un système ∞^1 elliptique de courbes, car d'après l'inégalité (1a) on ne peut avoir que $p_g = 1$, $p_a = 0$. Or si l'indice d'un tel système est plus grand que 2, la surface est rationnelle et s'il est égal à 2, elle représente les couples de points d'une courbe de genre 2. Donc le genre linéaire ne peut pas être égal à 2, mais il est au moins égal à 3.

2. On trouve de suite une limite supérieure de $p^{(1)}$ pour les surfaces d'irrégularité $p_g - p_a = 1$, dont nous avons parlé. La surface en effet possède dans ce cas un faisceau irrationnel elliptique de courbes. Il résulte alors de l'égalité de Castelnuovo—Enriques

(2) $$12 p_a + 9 - p^{(1)} = \Delta + 4\,(\rho - 1)\,(\rho' - 1) - 4,$$

*) A. Rosenblatt. „Recherches sur certaines classes de surfaces algébriques irrégulières, qui peuvent admettre une série infinie discontinue de transformations birationnelles", Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie. Juillet 1912.

**) A. Rosenblatt, l. c.

dans laquelle ρ signifie le genre des courbes d'un faisceau irrationnel de genre ρ' et Δ est l'équivalent des points doubles des courbes du faisceau l'inégalité

$$p^{(1)} \leqq 13 + 12 p_a.$$

On peut parvenir dans tous les cas à des inégalités importantes*) en s'appuyant sur les résultats de M. Castelnuovo**). Si on a entre les genres p_g et p_a de la surface l'inégalité

$$p_g \geqq 2\,(p_a + 2),$$

alors on a d'abord l'inégalité

(3) $$p^{(1)} \leqq 16 p_a - 2 p_g + 17,$$

donc certainement

$$p^{(1)} \leqq 12 p_a + 9.$$

En combinant l'inégalité (3) avec l'inégalité (1) de M. Noether on parvient à l'inégalité importante

(4) $$p_g \leqq 4\,(p_a + 5).$$

Supposons maintenant qu'on ait l'inégalité

$$p_g < 2\,(p_a + 2),$$

alors on établit l'inégalité

(5) $$p^{(1)} \leqq 16 p_a + 27.$$

3. Nous pouvons compléter nos résultats, donnés dans le n° précédent, au moyen des considérations suivantes, en priant le lecteur de se rapporter à notre travail cité, publié par l'Académie de Cracovie.

Si l'intersection de l'espace $S_{\delta'-1}$, envisagé dans le travail mentionné, avec la variété $V_{2(d-2)}$, se décompose en plusieurs variétés V sans points communs, alors on a plusieurs faisceaux de genres ρ_i', satisfaisant encore aux inégalités

$$2\,(\rho'_i - 2) \geqq p_g - 2\,(p_a + 2) + \varepsilon.$$

Supposons qu'on ait au moins deux faisceaux. On a dans ce cas

*) J'ai donné les inégalités (3), (4) et (5) dans une Note des „Comptes Rendus": „Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques", 3/VI. 1912, sans démonstration. J'ai dévelloppé la démonstration dans le travail, cité au n° 1, publié dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Juillet 1912.

**) Castelnuovo: „Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. 20. 1905.

sur les courbes d'un quelconque de ces faisceaux des involutions de genres égaux aux genres des autres faisceaux. Or on a la formule de Zeuthen

$$y = 2(\rho - 1) - 2\, d_i\, (\rho_i' - 1),$$

où ρ est le genre de la courbe et où ρ_i' sont les genres des involutions, tandis que d_i sont les ordres des involutions. Or on peut supposer $d_i > 1$, autrement la surface, possédant deux faisceaux de courbes se coupant en un point, rentrerait dans une classe connue de surfaces. Donc on a

$$\rho - 1 \geqq 2(\rho_i' - 1) \geqq p_g - 2p_a - 2,$$

et il vient

$$p^{(1)} \leqq 12\, p_a + 13 - 2(p_g - 2\, p_a - 2)^2.$$

L'inégalité de Noether (1) donne alors

$$2\, p_g - 3 \leqq 12\, p_a + 13 - 2(p_g - 2p_a - 2)^2,$$

donc

$$(p_g - 2p_a - 2)^2 \leqq 6p_a - p_g + 8,$$

$$\left(p_g - 2p_a - \frac{3}{2}\right)^2 \leqq 4p_a + \frac{25}{4},$$

$$(6) \qquad p_g \leqq 2p_a + \frac{3}{2} + \sqrt{4p_a + \frac{25}{4}}.$$

Remarquons que, si l'on peut employer l'inégalité (1a) avec $\delta_k = p_g - p_a$, alors un calcul immédiat donne au lieu de l'inégalité (4) l'inégalité

$$p_g \leqq 3p_a + \frac{10 - \varepsilon}{3},$$

et au lieu de l'inégalité (6) l'inégalité

$$p_g \leqq 2p_a + 1 + \sqrt{3p_a + \frac{11}{2}}.$$

Aux espaces linéaires $S_{\rho'-1}$ correspond dans l'espace S un espace linéaire S' de dimension $\sum \frac{\rho'(\rho'-1)}{2} - 1$. Supposons que les faisceaux de genres $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_k'$ ont comme images dans l'espace S_{d-1} les espaces linéaires correspondant aux groupes de $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_k'$ coordonnées successives, c'est à dire qu'on obtient dans S l'espace image des droites de ces espaces $S_{\rho_i'-1}$ en coupant la variété $V_{2(d-2)}$ avec l'espace linéaire S' de dimension $\sum \frac{\rho'(\rho'-1)}{2} - 1$, obtenu en annullant toutes les coordonnées $x_{h,k}$ telles

que ou bien un des nombres h, k dépasse le nombre

$$R = \sum_{i=1}^{k} \rho_i',$$

ou bien que ces nombres h, k appartiennent à deux groupes différents parmi les groupes de nombres

$$1, 2, \ldots\, \rho_1'; \quad \rho_1' + 1, \rho_1' + 2, \ldots\, \rho_1' + \rho_2'; \ldots$$

S'il n'y a pas d'autres identités que celles provenant de ces faisceaux en nombre de $\sum \frac{\rho'(\rho'-1)}{2}$, alors on a $\delta' = \sum \frac{\rho'(\rho'-1)}{2}$. Or on a $\Sigma \rho' \leqq d$, donc

$$\sum \frac{\rho'(\rho'-1)}{2} - 1 + 2(d-2) - \frac{d(d-1)}{2} + 1 = \sum \frac{\rho'(\rho'-1)}{2}$$

$$- \frac{(d-2)(d-3)}{2} - 1 \leqq \frac{\Sigma \rho'(\rho'-1)}{2} - \frac{(\Sigma\rho' - 2)(\Sigma\rho' - 3)}{2} - 1 =$$

$$= 2 \sum \rho' - \sum_{i<j} \rho_i' \rho_j' - 4 \leqq 2(\rho_i' - 2),$$

car on a $\rho_i' \geqq 2$, donc on a

$$\rho_1'(\rho_2' + \ldots + \rho_k') + \rho_2'(\rho_3' + \ldots + \rho_k) + \ldots + \rho'_{k-1}\rho_k' + 2\rho_i' \geqq 2(\rho_1' + \rho_2' + \ldots + \rho_k').$$

On ne peut avoir de signe d'égalité, que si i est égal à 2, ou bien à 1 et dans le premier cas les deux ρ' doivent être égaux à 2, tandis que dans le second cas on a toujours l'inégalité

$$\frac{\rho'(\rho'-1)}{2} + 2(d-2) - \frac{d(d-1)}{2} < 2(\rho' - 2),$$

si on a $\rho' < d$. Donc la dimension des variétés d'intersection V ne peut dans le cas envisagé être égale à la dimension de la variété générale d'intersection d'une variété $V_{2(d-2)}$ avec un espace linéaire S' de dimension $\sum \frac{\rho'(\rho'-1)}{2} - 1$ général.

4. Retournons au cas général, où on a établi l'existence d'un faisceau irrationnel comme conséquence de l'inégalité

$$p_g \geqq 2(p_a + 2).$$

Si ρ' est le genre du faisceau, alors en partant du système linéaire canonique

$|K|$ on parvient à $\infty^{\rho'}$ systèmes paracanoniques non équivalents de la façon suivante. Nous envisageons la série algébrique des groupes de $m \geqq \rho'$ courbes du faisceau $\{c\}$ de genre ρ'. Alors si $\Sigma_1 c$ et $\Sigma_2 c$ dénotent deux groupes de m courbes quelconques du faisceau, tels que les séries linéaires, déterminées par ces groupes, soient différentes, alors le système linéaire

$$(7) \qquad |K + \Sigma_1 c - \Sigma_2 c|$$

n'est pas équivalent au système canonique linéaire et il est d'ailleurs effectif, car sa dimension virtuelle est égale à p_a, et on a $p_a \geqq 0$. Donc on a $\infty^{\rho'}$ systèmes linéaires (7) paracanoniques non équivalents. Ces systèmes linéaires découpent sur les courbes c des séries linéaires équivalentes. Inversement on sait que si deux systèmes linéaires $|K_1|$ et $|K_2|$ découpent sur les courbes c du faisceau $\{c\}$ des séries linéaires équivalentes, ils sont équivalents, ou bien il existe deux groupes $\Sigma_1 c$, $\Sigma_2 c$ de courbes c en nombre égal, telles qu'on ait

$$|K_1 + \Sigma_1 c| = |K_2 + \Sigma_2 c|.$$

On peut supposer que le nombre des courbes c appartenant à un de ces groupes est précisément égal à ρ'.

Il résulte de ces considérations que le nombre des systèmes paracanoniques, découpant sur les courbes c une même série linéaire, est précisément égal à $\infty^{\rho'}$. Donc comme on a $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes linéaires paracanoniques, on a $\infty^{p_g - p_a - \rho'}$ séries linéaires non équivalentes sur chaque courbe c, donc le genre ρ des courbes c satisfait à l'inégalité

$$(8) \qquad \rho \geqq p_g - p_a - \rho'.$$

D'autre part ce genre est, comme nous le savons déjà, au moins égal à deux.

Or nous avons, d'après ce qui a été dit, l'inégalité

$$2p_g \leqq 12p_a + 16 - 4(\rho' - 1)(\rho' - 1) \leqq 12p_a + 16 - 4(p_g - p_a - \rho' - 1)(\rho' - 1).$$

La fonction de ρ'

$$(p_g - p_a - \rho' - 1)(\rho' - 1)$$

atteint dans un intervalle fini quelconque son minimum en un point frontière. Comme on suppose

$$\rho' \geqq \frac{p_g - 2p_a}{2},$$

et comme d'autre part on peut poser

$$\rho' \leqq p_g - p_a - 2,$$

on a les deux valeurs de la fonction de ρ'

$$\frac{(p_g - 2p_a - 2)(p_g - 2)}{4} \quad \text{et} \quad p_g - p_a - 3.$$

Or on a

$$(p_g - 2p_a - 2)(p_g - 2) - 4(p_g - p_a - 3) =$$

$$= (p_g - 2p_a - 4)(p_g - 4) \geqq 0.$$

Donc nous pouvons écrire l'inégalité

$$2p_g \leqq 16 + 12p_a - 4(p_g - p_a - 3),$$

donc on a

$$(9) \qquad p_g \leqq \frac{8}{3} p_a + \frac{14}{3}.$$

Si le genre du faisceau dérpasse le nombre $p_g - p_a - 2$, alors comme on a toujours $\rho \geqq 2$, on a

$$2p_g \leqq 16 + 12p_a - 4(p_g - p_a - 2),$$

donc

$$p_g \leqq \frac{8}{3} p_a + 4.$$

L'inégalité (9) est donc toujours valable.

5. Envisageons les deux classes bien connues de surfaces, dont la première représente les couples de points de deux courbes algébriques de genres p_1, p_2 et l'autre représente les couples non ordonnés de points d'une courbe de genre p. La première classe de surfaces possède les invariants

$$p_g = p_1 p_2, \quad p_a = p_1 p_2 - p_1 - p_2, \quad p^{(1)} = 8p_a + 9.$$

On a ici

$$p_g - 2(p_a + 2) = -(p_1 - 2)(p_2 - 2).$$

Donc si un des nombres p_1, p_2 est égal à 1 ou à 2, tandis que l'autre est arbitraire, alors on a

$$p_g - 2(p_a + 2) \geqq 0,$$

et le genre $\rho' > 2$ d'un tel faisceau satisfait à l'inégalité

$$2(\rho' - 2) > p_g - 2(p_a + 2).$$

On a ici

$$\frac{d(d-1)}{2} - p_g = \frac{(p_1 + p_2)(p_1 + p_2 - 1)}{2} - p_1 p_2 = \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} + \frac{p_2(p_2 - 1)}{2}$$

et

$$\frac{p_1(p_1 - 1)}{2} + \frac{p_2(p_2 - 1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} + 2(d-2) = -(p_1 - 2)(p_2 - 2),$$

c'est à dire qu'on a ici le cas, dont on a parlé dans le n° 4.

Les surfaces de la seconde classe ont les invariants

$$p_g = \frac{p(p-1)}{2}, \quad p_a = \frac{p(p-1)}{2} - p, \quad p^{(1)} = (4p-5)(p-2),$$

donc on a

$$p_g - 2(p_a + 2) = -\frac{(p-2)(p-3)}{2} - 1,$$

c'est à dire un nombre négatif.

6. Nous avons dit dans le n⁰ 1. que la limite inférieure de $p^{(1)}$ est atteinte dans le cas des courbes canoniques hyperelliptiques. Plus généralement, si la série caractéristique du système canonique est telle que tous ses groupes passant par un point de la courbe passent par $k-1$ autres points, on a l'inégalité

$$p^{(1)} \geqq k(p_g - 2 + \delta_k) + 1,$$

δ_k désignant encore le défaut de la série caractéristique du système canonique linéaire. Mais dans le cas général, où tous les groupes contenant un point ne contiennent pas nécéssairement d'autres points, on a d'après M. Castelnuovo*) l'inégalité

(10) $$p^{(1)} \geqq 3(p_g - 2 + \delta_k).$$

Nous avons alors

$$3p_g - 6 \leqq 12p_a + 13 - 4(p_g - p_a - 3),$$

donc on a l'inégalité

(11) $$p_g \leqq \frac{16}{7} p_a + \frac{31}{7}.$$

Remarquons que si le défaut δ_k est égal à $p_g - p_a$, on a

$$p_g \leqq \frac{19}{10} p_a + \frac{31}{10},$$

mais on a supposé $p_g \geqq 2(p_a + 2)$. Donc la série caractéristique du système canonique linéaire ne peut pas dans ce cas avoir le défaut maximum.

*) M. Castelnuovo a bien voulu nous signaler cette inégalité importante de son Mémoire: „Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie. Nota II". Rendiconti del Reale Istituto Lombardo Ser. II. Vol. XXIV. 1891. Qu'il nous soit permis de lui exprimer ici nos plus vifs remerciments.

G. A. MILLER.

Gauss's Lemma and some related group theory.

(Lemmat Gaussa i niektóre twierdzenia dotyczące teoryi grup).

According to Gauss's Lemma any number m, which is not divisible by the prime number p, is a quadratic residue or a quadratic non-residue of p accordnig as the series

$$m, \quad 2m, \quad \ldots, \quad \frac{p-1}{2} m \tag{A}$$

includes an even or an odd number of numbers whose least absolute residues (mod p) are negative. We shall give a proof of this lemma, which is explicitly based upon well known properties of abelian groups and will suggest various more general statements. The main objects of this note are to exhibit, in an elementary manner, the setting of this lemma in the theory of abelian groups and to show how readily its proof may be deduced from this theory.

Let G be any abelian group of order g, and let

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_g$$

be the operators of G. Consider the set of operators

$$s_1^n, \quad s_2^n, \ldots, \quad s_g^n \tag{B}$$

and let d be the highest common factor of g and n. Since d divides g it results that G involves a subgroup of order d, and that the total number of operators of G whose orders divide d constitute a group H of order h. As the order of a subgroup divides the order of the group it results that $g = kh$, $k \geqq 1$. The subgroup H is composed of all the operators of G which reduce