L. LICHTENSTEIN.

Bemerkung über die nicht linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

Konvergente Folgen von Lösungen.

Uwaga o równaniach różniczkowych cząstkowych nieliniowych typu eliptycznego. Ciągi zbieżne rozwiązań.[1])

Es sei T irgendein einfach zusammenhängendes, von einer stetig gekrümmten Kurve S begrenztes endliches Gebiet in der Ebene der Variablen x und y. Es sei $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, $u_3(x, y), \ldots$ eine unendliche Folge positiver, in T regulärer Potentialfunktionen. Ist die unendliche Reihe

$$u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + \cdots$$

auch nur in einem in T gelegenen Punkte konvergent, so konvergiert sie, einem bekannten Satze von Harnack zufolge, in jedem ganz im Innern von T gelegenen Gebiete und zwar gleichmässig. Ihre Summe ist eine in T reguläre Potentialfunktion.

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit habe ich einen Satz bewiesen, der als eine Verallgemeinerung des soeben erwähnten Harnack'schen Satzes anzusehen ist. Es sei

$$(1) \qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0\,, \quad ac - b^2 > 0$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Über ihre Koeffizienten werden der Einfachheit halber folgende Voraussetzun-

[1]) Praca przedstawiona na posiedzeniu Wydziału Towarzystwa Naukowego Warszawskiego dnia 23 listopada 1911 r.

gen gemacht. Die Funktionen a, b, c haben stetige partielle Ableitungen der drei ersten Ordnungen, die Funktionen d und e stetige Ableitungen der ersten und der zweiten, f die der ersten Ordnung. Es sei $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, $u_3(x, y)$,... eine unendliche Folge positiver, in T mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetiger oder, wie wir kürzer sagen wollen, regulärer Lösungen der Differentialgleichung (1). Ist die unendliche Reihe

$$u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + \cdots$$

auch nur in einem in T gelegenen Punkte konvergent, so konvergiert sie in jedem ganz im Innern von T gelegenen Gebiete und zwar gleichmässig. Ihre Summe ist eine in T reguläre Lösung der Differentialgleichung (1). [1]

In der vorliegenden Note möchte ich an einem Beispiele zeigen, dass analoge Sätze für manche nicht lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus gelten.

Betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u. \tag{2}$$

Es sei $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, $u_3(x, y)$,... eine unendliche Folge negativer, in T und auf S stetiger, in T regulärer Lösungen der Differentialgleichung (2) und es sei

$$u_1(x, y) > u_2(x, y) > u_3(x, y) > \cdots \tag{3}$$

Es sei überdies bekannt, dass die Folge (3) wenigstens in einem Punkte in T konvergent ist. Ich behaupte, dass (3) in jedem ganz im Innern von T gelegenen Gebiete konvergiert und zwar gleichmässig. Die Grenzfunktion ist eine in T reguläre Lösung von (2).

Es sei (x_0, y_0) der Punkt, in dem (3) nach Voraussetzung konvergiert, $v_k(x, y)$ diejenige in T reguläre Potentialfunktion, welche auf S gleich $u_k(x, y)$ ist. Bezeichnen wir schliesslich die auf S verschwindende, in $(\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$ wie $\frac{1}{2}\log\{(\overset{*}{x}-x)^2+(\overset{*}{y}-y)^2\}$ unendliche Green'sche Funktion der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ mit $G(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}; x, y)$, so folgt aus (2) offenbar

$$u_k(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_T G(x, y; \xi, \eta)\, e^{u_k(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta + v_k(x, y). \tag{4}$$

[1]) Vergl. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1912, S. 201—211.

Die beiden Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung sind negativ. Da $e^{u_k(\xi, \eta)} < 1$, so ist das Doppelintegral in (4) dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{1}{2\pi}\iint_T |\, G(x, y; \xi, \eta)\,|\, d\xi\, d\eta.$$

Es sei M die obere Grenze dieses Ausdruckes für alle (x, y) in T. Wir finden

$$v_k(x, y) > u_k(x, y) > v_k(x, y) - M. \tag{5}$$

Überdies ist, wie man leicht sieht, in T und auf S

$$v_1(x, y) > v_2(x, y) > v_3(x, y) > \cdots \tag{6}$$

Die Folge $v_k(x, y)$ ist, wie sich aus (5) unmittelbar ergibt, im Punkte (x_0, y_0) gewiss konvergent. Also konvergiert sie nach dem Satze von Harnack in jedem einfach zusammenhängenden, von einer stetig gekrümmten Kurve S' begrenzten Gebiete T', das ganz im Innern von T enthalten ist, und zwar gleichmässig. Aus (5) folgt nunmehr, dass auch $u_k(x, y)$ in T' gewiss konvergiert. Die Grenzfunktion

$$\lim_{k=\infty} u_k(x, y)$$

sei mit $u(x, y)$ bezeichnet.

Es sei M_1 irgendeine positive Zahl, die so gewählt ist, dass für alle (x, y) in T' und auf S' und für alle k die Ungleichheitsbedingung besteht

$$|\, v_k(x, y)\,| < M_1. \tag{7}$$

Es sei T'' irgendein ganz im Innern von T' enthaltenes Gebiet, S'' seine Begrenzung. Nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie folgt aus (7), das die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $v_k(x, y)$ in T'' und auf S'' für alle k dem absoluten Betrage nach kleiner sind, als eine gewisse positive Zahl M_2. Aus

$$\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\iint_T \frac{\partial}{\partial x} G(x, y; \xi, \eta)\, e^{u_k(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta + \frac{\partial v_k(x, y)}{\partial x} \tag{8}$$

und aus einer analogen Gleichung für $\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial y}$ ergeben sich für alle (x, y) in T'' und auf S'' die Ungleichheitsbedingungen

$$\left|\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x}\right| < M_3, \quad \left|\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial y}\right| < M_3, \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

worin M_3 eine gewisse positive Zahlgrösse bezeichnet. Aus (9) ergibt sich für alle (x, y) und $(x+h, y+h')$ in T'' und auf S'' die weitere Beziehung

$$(10)\qquad |u_k(x+h, y+h') - u_k(x, y)| < M_3[|h| + |h'|],$$

Aus (10) folgt durch Grenzübergang

$$(11)\qquad |u(x+h, y+h') - u(x, y)| \leqq M_3[|h| + |h'|].$$

Die Funktion $u(x, y)$ ist daher in T'' und auf S'', somit überhaupt im Innern von T stetig.

Die unendliche Folge negativer stetiger Funktionen

$$(12)\qquad u_1(x, y) < u_2(x, y) < u_3(x, y) < \ldots$$

konvergiert in T gegen eine gleichfalls stetige Funktion. Nach einem bekannten Satze von Herrn Dini ist die Folge (12) in jedem ganz im Innern von T enthaltenen Gebiete gleichmässig konvergent.

Es sei $v_k'(x, y)$ diejenige in T' reguläre Potentialfunktion, die auf S' dieselben Werte wie $u_k(x, y)$ annimmt, $G'(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}; x, y)$ die zu T' gehörige klassische Green'sche Funktion. Es ist

$$(13)\qquad u_k(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta)\, e^{u_k(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta + v_k'(x, y).$$

Aus (13) folgt durch Übergang zur Grenze die weitere Beziehung

$$(14)\qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{T'} G'(x, y; \xi, \eta)\, e^{u(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta + v'(x, y).$$

Hierin bezeichnet $v'(x, y)$ diejenige in T' reguläre Potentialfunktion, welche auf S' gleich $u(x, y)$ ist. Aus (14) schliesst man mit Leichtigkeit nacheinander, dass $u(x, y)$ in T' stetige partielle Ableitungen der ersten, sodann die der zweiten Ordnung hat, endlich, dass $u(x, y)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$$

genügt. Damit ist unsere Behauptung in allen Punkten bewiesen.

A. ROSENBLATT.

Sur les surfaces algébriques irrégulières de genre linéaire $p^{(1)} > 1$.

O powierzchniach algebraicznych nieregularnych rodzaju liniowego $p^{(1)}>1$.

On sait que depuis quelques dizaines d'années l'Italie est devenue le centre de l'activité des recherches géométriques modernes, auxquelles des savants illustres ont donné un tel dévelloppement que ces recherches constituent aujourd'hui une des plus belles pages de l'Histoire des Sciences mathématiques. Le point culminant de l'édifice construit est sans doute la théorie des surfaces et des variétés algébriques à plus de deux dimensions, que les méthodes de MM. Castelnuovo, Enriques et Severi ont permis de conduire à un haut degré de perfection.

Les recherches mentionnées ont conduit à diviser les surfaces algébriques en trois grandes classes d'après la valeur de l'invariant genre linéaire $p^{(1)}$. Les surfaces possédant $p^{(1)}<1$ ne présentent pas aujourd'hui d'intérêt, parce qu'elles sont ou bien rationnelles ou bien transformables en des surfaces reglées. Il en est tout autrement des surfaces de genre $p^{(1)}\geqq 1$, dont l'étude est aujourd'hui bien loin encore d'être achevée. Les surfaces de genre linéaire $p^{(1)}=1$ constituent une classe tout-à-fait exceptionnelle, qui a été l'objet d'intéressantes recherches. L'étude de la classe générale des surfaces de genre $p^{(1)}>1$ a été abordée de divers côtés, notamment on a étudié les surfaces régulières correspondant aux plus petites valeurs de $p^{(1)}$ et les surfaces irrégulières possédant certains faisceaux irrationnels de courbes, ou bien certains autres systèmes algébriques ∞^1 de courbes.

1. On connaît depuis longtemps une inégalité importante entre le genre linéaire $p^{(1)}$ d'une surface et son genre géométrique p_g. C'est Noether qui a fait voir qu'on a toujours