W. SIERPIŃSKI.

Przyczynek do różniczkowalności funkcyj.

(Contribution à la dérivabilité des fonctions).

W pracy niniejszej zajmę się bliższem zbadaniem pewnej funkcyi, posiadającej różne ciekawe osobliwości i przedstawiającej przez to pouczający przykład dla teoryi funkcyj, zwłaszcza, że odnośne rozważania dadzą się przeprowadzić w sposób prawie całkiem elementarny.

Oznaczmy przez $\mathrm{E}x$ największą całość, zawartą w x, i połóżmy dla $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2nx - \mathrm{E}nx - 1)\,\frac{\mathrm{E}nx}{n^4}; \tag{1}$$

ta właśnie funkcya będzie przedmiotem naszych badań.

Połóżmy przez skrócenie:

$$(2nx - \mathrm{E}nx - 1)\,\mathrm{E}nx = \varphi_n(x); \tag{2}$$

powiadam, że dla $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (nx - k + |\,nx - k\,|). \tag{3}$$

Zauważymy przedewszystkiem, że suma $u + |\,u\,|$ jest równa zeru dla $u < 0$ i równa $2u$ dla $u \geqslant 0$: możemy więc w sumie (3) rozciągnąć sumowanie tylko na wartości $k \leqslant nx \leqslant n$ i napisać:

$$\sum_{k=1}^{n}(nx-k+|nx-k|)=2\sum_{k=1}^{Enx}(nx-k)=(2nx-Enx-1)\,Enx,$$

co było do okazania.

Z równości (3) znajdujemy dla x i y, leżących w przedziale (0, 1):

$$\varphi_n(x)-\varphi_n(y)=n^2(x-y)+\sum_{k=1}^{n}(|nx-k|-|ny-k|). \tag{4}$$

Powiadam, że dla wszelkich rzeczywistych a i b:

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|.$$

W samej rzeczy, każda z dwóch nierówności, na które się wypisana rozpada, wyraża tylko znane twierdzenie, że moduł różnicy nie jest mniejszy od różnicy modułów.

W szczególności, kładąc $a=nx-k$, $b=ny-k$, otrzymamy:

$$||nx-k|-|ny-k||\leqslant n|x-y|.$$

Stąd, wobec wzoru (4) i twierdzenia, że moduł sumy nie przenosi sumy modułów, otrzymujemy w jednej chwili:

$$|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|\leqslant 2n^2|x-y|. \tag{5}$$

W szczególności, dla $y=0$, wobec $\varphi_n(0)=0$, dostajemy dla $0\leqslant x\leqslant 1$:

$$|\varphi_n(x)|\leqslant 2n^2x,$$

skąd wnosimy natychmiast o zbieżności szeregu (1).

Wobec (2) możemy dalej napisać:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{n^4}. \tag{6}$$

W myśl (5) mamy przy wszelkiem naturalnem p:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{n^4}-\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{\varphi_n(y)}{n^4}\right|\leqslant\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|}{n^4}\leqslant 2|x-y|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

a że:

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{p}, \tag{7}$$

więc:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{n^4}-\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{\varphi_n(y)}{n^4}\right|\leqslant\frac{2}{p}|x-y|. \tag{8}$$

Kładąc w szczególności $p=1$ i zważywszy, że w myśl (5):

$$|\varphi_1(x)-\varphi_1(y)|\leqslant 2|x-y|,$$

otrzymamy z łatwością:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 4|x-y|,$$

co dowodzi, że funkcya $f(x)$ spełnia w przedziale (0, 1) tak zwany warunek Lipschitza. Stąd też wynika natychmiast, że funkcya $f(x)$ jest ciągła w uważanym przedziale.

Zajmiemy się teraz obliczaniem pochodnych naszej funkcyi.

Jeżeli dla h stale dodatnich, zmierzających do zera, stosunek

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

zmierza do oznaczonej granicy, to powiadamy, że funkcya $f(x)$ posiada w punkcie x_0 prawostronną pochodną, którą oznaczamy symbolem

$$f'_+(x_0).$$

Podobnież, jeżeli wypisany wyżej stosunek zmierza do oznaczonej granicy dla h stale ujemnych, zmierzających do zera, to wartość tej granicy oznaczamy symbolem

$$f'_-(x_0)$$

i nazywamy lewostronną[1] pochodną funkcyi $f(x)$ w punkcie x_0.

Możnaby z łatwością udowodnić (tak jak to się robi dla pochodnych zwykłych), że jeżeli dla danej wartości x_0 istnieje pochodna lewostronna (lub prawostronna) każdego z pewnej skończonej liczby składników, to istnieje też pochodna lewostronna (względnie prawostronna) ich sumy i równa jest sumie lewostronnych (względnie prawostronnych) pochodnych uważanych składników.

[1]) Pojęcia te zostały wprowadzone przez du Bois-Reymonda i Dini'ego.

Połóżmy przy danych naturalnych n oraz $k \leqslant n$:

$$|nx - k| = \psi(x). \tag{9}$$

Załóżmy, że x_0 ma daną wartość rzeczywistą.
Rozróżnimy trzy przypadki: 1) $k < nx_0$, 2) $k = nx_0$, 3) $k > nx_0$.

W pierwszym przypadku połóżmy $x_0 - \frac{k}{n} = \delta$: będzie to liczba dodatnia, gdyż $nx_0 > k$. Dla:

$$|x - x_0| \leqslant \delta \quad \text{będzie} \quad x \geqslant x_0 - \delta = \frac{k}{n},$$

zatem

$$nx - k \geqslant 0, \quad \text{skąd} \quad \psi(x) = nx - k.$$

Będzie więc dla $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$:

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} = n,$$

skąd:

$$\psi'_+(x_0) = \psi'_-(x_0) = n.$$

W drugim przypadku będzie dla $x > x_0$

$$\psi(x) = nx - k, \quad \text{skąd} \quad \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} = n, \quad \text{oraz} \quad \psi'_+(x_0) = n,$$

zaś dla $x < x_0$:

$$\psi(x) = -(nx - k), \quad \text{skąd} \quad \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} = -n, \quad \text{oraz} \quad \psi'_-(x_0) = -n.$$

W trzecim przypadku połóżmy $\frac{k}{n} - x_0 = \delta$: będzie to liczba dodatnia. Dla $|x - x_0| \leqslant \delta$ będzie:

$$x \leqslant x_0 + \delta = \frac{k}{n}, \quad \text{zatem} \quad nx - k \leqslant 0, \quad \text{skąd} \quad \psi(x) = -(nx - k)$$

oraz, dla $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$:

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} = -n,$$

skąd:

$$\psi'_+(x_0) = \psi'_-(x_0) = -n.$$

Mamy więc:

$$\psi'_+(x_0) = n \quad \text{dla} \quad k \leqslant nx_0, \quad \text{oraz} \quad \psi'_+(x_0) = -n \quad \text{dla} \quad k > nx_0,$$

zaś

$$\psi'_-(x_0) = n \quad \text{dla} \quad k < nx_0, \quad \text{oraz} \quad \psi'_-(x_0) = -n \quad \text{dla} \quad k \geqslant nx_0.$$

Stąd, wobec (9) i (3) w jednej chwili:

$$\varphi'_{n+}(x_0) = n^2 + n \sum_{k \geqslant 1}^{k \leqslant nx_0} 1 - n \sum_{k > nx_0}^{k \leqslant n} 1$$

$$= n^2 + n\,\mathrm{E}\,nx_0 - n(n - \mathrm{E}\,nx_0) = 2n\,\mathrm{E}\,nx_0,$$

$$\varphi'_{n-}(x_0) = n^2 + n \sum_{k \geqslant 1}^{k < nx_0} 1 - n \sum_{k \geqslant nx_0}^{k \leqslant n} 1;$$

to ostatnie wyrażenie równe jest oczywiście wyrażeniu $\varphi'_{n+}(x_0)$ w razie niecałkowitego nx_0, gdyż wtedy warunek $k < nx_0$ równoważny jest warunkowi $k \leqslant nx_0$, zaś warunek $k \geqslant nx_0$ — warunkowi $k > nx_0$. W razie zaś całkowitości iloczynu nx_0 warunek $k < nx_0$ równoważny jest warunkowi $k \leqslant nx_0 - 1$, zaś warunek $k \geqslant nx_0$ — warunkowi $k > nx_0 - 1$, skąd w jednej chwili znajdujemy:

$$\varphi'_{n-}(x_0) = n^2 + n(\mathrm{E}\,nx_0 - 1) - n(n - \mathrm{E}\,nx_0 + 1)$$

$$= 2n\,\mathrm{E}\,nx_0 - 2n.$$

Oznaczając symbolem $\rho(x)$ liczbę 1 w razie całkowitego x i zero w razie x niecałkowitego, będziemy mogli powiedzieć, że w przedziale $(0, 1)$ stale:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_{n+}(x_0) &= 2n\,\mathrm{E}\,nx_0 \\ \varphi'_{n-}(x_0) &= 2n\,\mathrm{E}\,nx_0 - 2n\rho(nx_0) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Niech teraz ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy liczbę naturalną p, tak wielką, aby było

$$\frac{5}{p} < \varepsilon. \tag{11}$$

Połóżmy dalej:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\varphi_n(x)}{n^4} = s_p(x), \qquad f(x) = s_p(x) + r_p(x). \tag{12}$$

Będziemy mogli napisać dla x_0 i $x \neq x_0$, należących do przedziału $(0, 1)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{s_p(x) - s_p(x_0)}{x - x_0} + \frac{r_p(x) - r_p(x_0)}{x - x_0} \tag{13}$$

Wobec nierówności (8) mamy:

$$\left| \frac{r_p(x) - r_p(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant \frac{2}{p}. \tag{14}$$

W myśl (12) i (10) i wobec oczywistych własności jednostronnych pochodnych, wnioskujemy, że istnieją pochodne $s'_{p+}(x_0)$ i $s'_{p-}(x_0)$ i że mamy:

$$\left.\begin{aligned} s'_{p+}(x_0) &= \sum_{n=1}^{p} \frac{\varphi'_{n+}(x_0)}{n^4} = 2 \sum_{n=1}^{p} \frac{\mathrm{E}\, n x_0}{n^3} \\ s'_{p-}(x_0) &= \sum_{n=1}^{p} \frac{\varphi'_{n-}(x_0)}{n^4} = 2 \sum_{n=1}^{p} \frac{\mathrm{E}\, n x_0 - \rho(n, x_0)}{n^3} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

W myśl definicyi pochodnej prawo- oraz lewostronnej, jako granicy odpowiedniego stosunku, można do danego naturalnego p dobrać takie dodatnie δ, iżby było dla $0 < x - x_0 < \delta$:

$$\left| \frac{s_p(x) - s_p(x_0)}{x - x_0} - s'_{p+}(x_0) \right| < \frac{1}{p}, \tag{16}$$

zaś dla $-\delta < x - x_0 < 0$:

$$\left| \frac{s_p(x) - s_p(x_0)}{x - x_0} - s'_{p-}(x_0) \right| < \frac{1}{p}. \tag{17}$$

Mamy dla $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$:

$$\mathrm{E}\, n x_0 \leqslant n x_0 \leqslant n,$$

skąd (w myśl (7)):

$$0 \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0}{n^3} \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{p},$$

zaś wobec $0 \leqslant \rho(n x_0) \leqslant 1$ tembardziej:

$$0 \leqslant \sum_{u=p+1}^{\infty} \frac{\rho(n x_0)}{n^3} \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{1}{p},$$

skąd:

$$\left| \sum_{n=p+1} \frac{\mathrm{E}\, n x_0 - \rho(n x_0)}{n^3} \right| < \frac{1}{p}.$$

Zatem, wobec (15):

$$\left| s'_{p+}(x_0) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0}{n^3} \right| = \left| 2 \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0}{n^3} \right| < \frac{2}{p}, \tag{18}$$

$$\left| s'_{p-}(x_0) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0 - \rho(n x_0)}{n^3} \right| = \left| 2 \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0 - \rho(n x_0)}{n^3} \right| < \frac{2}{p}. \tag{19}$$

Wobec (13), (14), (16) i (18) znajdujemy dla $0 < x - x_0 < \delta$:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0}{n^3} \right| < \frac{5}{p} < \varepsilon,$$

— w myśl (11); wobec zaś (13), (14), (17) i (19), znajdujemy dla $-\delta < x - x_0 < 0$:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0 - \rho(n x_0)}{n^3} \right| < \frac{5}{p} < \varepsilon.$$

Stąd w jednej chwili:

$$\left.\begin{aligned} f'_{+}(x_0) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0}{n^3}, \\ f'_{-}(x_0) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0 - \rho(n x_0)}{n^3}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Funkcya $f(x)$ posiada więc w przedziale (0, 1) dla każdego punktu oznaczoną w zupełności pochodną prawostronną oraz oznaczoną w zupełności pochodną lewostronną. Pochodne te są ograniczone w przedziale (0, 1), gdyż wobec (20):

$$| f'_{+}(x) | \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 4$$

i tembardziej:

$$| f'_{-}(x) | < 4.$$

Niech x_0 oznacza liczbę niewymierną. Przy żadnem naturalnem n nie będzie wtedy $n x_0$ liczbą całkowitą: będzie zatem stale $\rho(n x_0) = 0$. Wzory (20) dadzą więc wartości równe dla pochodnych z każdej strony, co dowodzi, że dla niewymiernych wartości x_0 istnieje dla naszej funkcyi oznaczona w zupełności pochodna

$$f'(x_0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x_0}{n^3}.$$

Niech teraz x_0 oznacza liczbę wymierną i niech $\frac{p}{q}$ (q naturalne) będzie jej postacią nieprzywiedlną. Mamy oczywiście $\rho\left(\frac{np}{q}\right) = 1$ tylko dla n podzielnych przez q, t. j. dla $n = q, 2q, 3q, \ldots$

Stąd:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho\left(\frac{np}{q}\right)}{n^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(kq)^3} = \frac{1}{q^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3},$$

skąd:

$$f'_+(x_0) - f'_-(x) = \frac{2}{q^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} > \frac{2}{q^3}.$$

Zatem: dla wszystkich wartości wymiernych przedziału (0, 1) pochodne lewostronna i prawostronna funkcyi $f(x)$ są różne[1]). Dla wartości tych nie istnieje zatem pochodna $f'(x_0)$.

Ze wzorów (20) znajdujemy dla $x_0 > 0$:

$$f'_+(x_0) > 0,$$

gdyż wszystkie składniki odpowiedniego szeregu są dla $x_0 > 0$ nieujemne, a dla dostatecznie wielkich n stale dodatnie. Wnosimy stąd z łatwością, że funkcya $f(x)$ jest stale rosnąca w przedziale (0, 1).

Funkcya $f(x)$ przedstawia zatem w przedziale (0, 1) przykład funkcyi ciągłej, stale rosnącej i nie posiadającej pochodnej w pewnej wszędzie gęstej mnogości punktów.

Zauważymy, że przykłady funkcyj o powyższej własności podali: Weierstrass[2]), Schwarz[3]), Dini[4]) i Lüroth[5]).

[1]) Geometrycznie znaczy to, że krzywa $y = f(x)$ posiada we wszystkich punktach o wymiernych odciętych punkty kątowe.

[2]) Przykład ten został ogłoszony dopiero w r. 1882-gim przez Cantora (Mathematische Annalen **19**, p. 591).

[3]) „Beispiel einer stetigen nicht differentiirbaren Function" (Gesammelte Mathemat. Abhandlungen. Berlin 1890. p. 269—274).

[4]) „Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali" Piza 1878, p. 168.

[5]) Dodatek tłomacza w przekładzie dzieła Dini'ego[4]): „Grundlagen für eine Theorie der Functionen etc". Lipsk 1892. Str. 200.

Najprostszym z nich jest przykład Schwarza, który podaje (dla $x \geqslant 0$) funkcyę

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, 2^n x + \sqrt{2^n x - \mathrm{E}\, 2^n x}}{2^{2n}}.$$

Funkcya ta nie spełnia jednak (i to w żadnym przedziale) warunku Lipschitza i nie wszędzie posiada skończone jednostronne pochodne.

Możnaby dalej zapytać, czy nie da się zbudować taka funkcya stale rosnąca, któraby dla żadnej wartości pewnego przedziału nie posiadała pochodnej. Na to pytanie musimy jednak dać odpowiedź odmowną, wynika bowiem z pewnego twierdzenia Lebesgue'a[1]), że każda funkcya ciągła monotoniczna pantachicznie posiada pochodną. To samo da się powiedzieć i o funkcyach, które spełniają w danym przedziale warunek Lipschitza.

Powróćmy do naszej funkcyi. Zajmiemy się teraz bliższem zbadaniem biegu funkcyj $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$. Powiadam, że funkcya $f'_+(x)$ jest stale rosnąca, oraz ciągła dla każdej wartości niewymiernej i nieciągła dla każdej wartości wymiernej. Aby tego dowieść, zauważymy przedewszystkiem, że dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ mamy:

$$0 \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x}{n^3} \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{p},$$

skąd wniosek, że szereg

$$f'_+(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x}{n^3} \tag{21}$$

jest zbieżny jednostajnie w przedziale (0, 1). Stąd, w myśl znanego twierdzenia, wnioskujemy, że $f'_+(x)$ będzie funkcyą ciągłą conajmniej dla wszystkich tych wartości zmiennej, dla których wszystkie składniki będą jednocześnie ciągłe. Zatem $f'_+(x)$ będzie w każdym razie funkcyą ciągłą dla wszystkich wartości niewymiernych, gdyż funkcye $\mathrm{E}\, nx$ mogą być nieciągłe li tylko dla wymiernych x.

Niech teraz x i $y > x$ będą dwie liczby przedziału (0, 1). Mamy oczywiście przy wszelkiem naturalnem n:

$$\mathrm{E}\, nx \leqslant \mathrm{E}\, ny,$$

co dowodzi, że składniki szeregu $f'_+(x)$ są odpowiednio nie większe od skład-

[1]) Leçons sur l'intégration etc. Paryż 1904, p. 128. Dowód tego twierdzenia uprościł następnie G. Faber: Math. Annalen 69 (1910), str. 381 i nast.

ników szeregu $f'_+(x)$. Jeżeli teraz okażemy, że choć jeden ze składników tego ostatniego szeregu jest większy od odpowiedniego składnika szeregu $f'_+(x)$, to stąd będzie wynikało natychmiast, że $f'_+(x) < f'_+(y)$, czyli że funkcya $f'_+(x)$ stale rośnie w przedziale $(0, 1)$.

Między każdemi dwiema nierównemi liczbami leży, jak wiemy, nieskończenie wiele liczb wymiernych. Oznaczmy przez $\frac{p}{q}$ (q naturalne) jakąkolwiek liczbę wymierną, leżącą między x i y. Wobec

$$x < \frac{p}{q} < y,$$

będzie:

$$qx < p < qy.$$

Wobec $qx < p$ będzie tembardziej $\mathrm{E}qx < p$; symbol $\mathrm{E}qy$ oznacza największą całość, nie większą od qy: skoro więc p jest całością $< qy$, to będzie $p \leqslant \mathrm{E}qy$. Jest zatem:

$$\mathrm{E}qy < p \leqslant \mathrm{E}qy, \quad \text{skąd} \quad \mathrm{E}qx < \mathrm{E}qy,$$

co dowodzi, że q-ty składnik szeregu $f'_+(y)$ jest większy od q-tego składnika szeregu $f'_+(x)$. Dowiedliśmy zatem, że funkcya $f'_+(x)$ jest stale rosnąca.

Zbadamy teraz zachowanie się funkcyi $f'_+(x)$ dla wartości wymiernych. Niech $x_0 = \frac{p}{q}$ (q naturalne) oznacza liczbę wymierną przedziału $(0, 1)$. Usuńmy składnik $\frac{2\mathrm{E}qx}{q^3}$ z szeregu na $f'_+(x)$: pozostały przez to szereg będzie oczywiście szeregiem zbieżnym funkcyj nie malejących, a sumą jego będzie funkcya nie malejąca $f'_+(x) - \frac{2\mathrm{E}qx}{q^3}$. Będzie więc przy wszelkiem $x < x_0$:

$$f'_+(x) - \frac{2\mathrm{E}qx}{q^3} \leqslant f'_+(x_0) - \frac{2\mathrm{E}qx_0}{q^3},$$

skąd:

$$f'_+(x_0) - f'_+(x) \geqslant 2\,\frac{\mathrm{E}qx_0 - \mathrm{E}qx}{q^3} \tag{22}$$

Wobec $x < x_0$ będzie $qx < p$ oraz tembardziej $\mathrm{E}qx < p$, co wobec całkowitości obu stron równoważnem jest nierówności $\mathrm{E}qx \leqslant p - 1$. Jest więc

$$\mathrm{E}qx_0 - \mathrm{E}qx \geqslant 1,$$

skąd, wobec (22):

$$f'_+(x_0) - f'_+(x) \geqslant \frac{2}{q^3}$$

przy wszelkiem $x < x_0$. Dowodzi to, że funkcya $f'_+(x)$ jest nieciągła dla $x = x_0$ i to nieciągła ze strony lewej. Opierając się na uwadze, że wszystkie składniki szeregu $f'_+(x)$ są funkcyami ciągłemi ze strony prawej dla każdej wartości przedziału $(0, 1)$, możnaby, wobec jednostajnej zbieżności szeregu wnioskować o prawostronnej ciągłości funkcyi $f'_+(x)$ w całym uważanym przedziale.

Zajmiemy się teraz funkcyą $f'_-(x_0)$. Połóżmy przy wszelkiem x:

$$\mathrm{E}x - \rho(x) = G(x). \tag{23}$$

$G(x)$ będzie oczywiście największą całością mniejszą od x. Wobec wzorów (20) i (23) będzie:

$$f'_-(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(nx)}{n^3}.$$

Wzór ten pozwoliłby nam badać funkcyę $f'_-(x)$ zupełnie taksamo, jak badaliśmy funkcyę $f'_+(x)$. Doszlibyśmy do wniosku, że $f'_-(x)$ jest funkcyą stale rosnącą, ciągłą dla wszystkich liczb niewymiernych, dla liczb zaś wymiernych ciągłą ze strony lewej i nieciągłą ze strony prawej.

Pochodne prawostronna i lewostronna funkcyi $f(x)$ są więc funkcyami pantachicznie nieciągłemi, a zarazem pantachicznie ciągłemi.