OTTO TOEPLITZ.

Über allgemeine lineare Mittelbildungen.

(O ogólnych utworach średnich liniowych).

1.

Die Theorie der Mittelbildungen bei divergenten Reihen ist von der Theorie der sog. arithmetischen Mittel ausgegangen, d. h. von der Bemerkung, dass die Folge

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
t_1 &= s_1 , \\
t_2 &= \tfrac{1}{2} s_1 + \tfrac{1}{2} s_2 , \\
t_3 &= \tfrac{1}{3} s_1 + \tfrac{1}{3} s_2 + \tfrac{1}{3} s_3 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t_p &= \frac{1}{p} s_1 + \frac{1}{p} s_2 + \ldots + \frac{1}{p} s_p
\end{aligned}
$$

a) für jede convergente Folge $s_1, s_2, \ldots$ selbst convergiert und zwar gegen denselben Grenzwert, $\lim_{n=\infty} t_n = \lim_{n=\infty} s_n$;

b) zuweilen auch dann convergiert, wenn die Folge der s_n divergiert, z. B. für die Folge

$$s_1 = 1 , \quad s_2 = 0 , \quad s_3 = 1 , \quad s_4 = 0 , \quad \ldots , \quad s_{2n-1} = 1 , \quad s_{2n} = 0 , \ldots .$$

Der allgemeine Typus dieser arithmetischen Mittel und aller complicierteren, die man betrachtet hat (Cesàrosche, Höldersche Mittel etc.) ist der folgende [1]:

[1]) bzw. er kann, soweit sie in der Gestalt von Integralen auftretten, durch den hier angegebenen Typus durch Approximation ersetzt werden.

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
t_1 &= a_{11} s_1 + \ldots + a_{1n_1} s_{n_1},\\
t_2 &= a_{21} s_1 + \ldots\ldots + a_{2n_2} s_{n_2},\\
t_3 &= a_{31} s_1 + \ldots\ldots + a_{3n_3} s_{n_3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

wobei also die t_p als Linearformen, jede einzelne von nur endlichvielen der $s_1, s_2, \ldots$ gegeben sind. Jeder Folge (s_n) wird durch (2) eine Folge (t_n) eindeutig zugeordnet, und die Brauchbarkeit einer Mittelbildung ist um so grösser, je weiter das Feld derjenigen Folgen (s_n) ist, für die $\lim\limits_{n=\infty} t_n$ existiert. Die Gesamtheit dieser Folgen (s_n) soll als das „Convergenzfeld" der Mittelbildung (2) bezeichnet werden. Das Convergenzfeld wird allein von der Wahl der Grössen a_{pq} abhängen.

Will man eine allgemeine Theorie der linearen Mittelbildungen vom Typus (2) entwickeln, so erhebt sich als erste Frage die folgende, deren Beantwortung den Gegenstand dieser Seiten bildet: „Wie müssen die a_{pq} beschaffen sein, damit $\lim\limits_{n=\infty} t_n$ für jede Folge (s_n), die einen Limes hat, existiert und den nämlichen Limes hat?"

Zwei notwendige Bedingungen hierfür bieten sich unmittelbar dar. Denn soll $\lim t_n$ für jede convergente Folge (s_n) existieren und denselben Limes haben, so muss dies speciell auch für die Folge

$$(3)\qquad s_1 = 1,\quad s_2 = 1,\quad s_3 = 1, \ldots$$

gelten, d. h. es muss

$$t_p = a_{p1} + a_{p2} + \ldots + a_{pn_p} = \sum_{q=1}^{n_p} a_{pq} = \sum_{(q)} a_{pq}$$

mit wachsendem p gegen $\lim s_n = 1$ convergieren:

$$(4)\qquad \lim_{p=\infty}\Big(\sum_{(q)} a_{pq}\Big) = 1,$$

die Zeilensummen der a_{pq} müssen den Limes 1 haben. In ähnlicher Weise liefert die Betrachtung der Folge

$$(5)\qquad s_1 = 0, \ldots, s_{q-1} = 0,\quad s_q = 1,\quad s_{q+1} = 0, \ldots$$

die andere Bedingung

$$(6)\qquad \lim_{p=\infty} a_{pq} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots):$$

die einzelnen Colonnen (Vertikalreihen) der a_{pq} müssen den

Limes 0 haben. Bei den arithmetischen Mitteln (1) sieht man in der Tat unmittelbar, dass die Zeilensummen der Coefficienten nicht nur im Limes, sondern sogar jede einzeln gleich 1 sind, und dass die Coefficienten jeder einzelnen Colonne den Limes 0 haben.

Indessen, diese beiden notwendigen Bedingungen (4) und (6) sind allein nicht auch hinreichend. Man erkennt dies aus dem Beispiel der Mittelbildung

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
t_1 &= s_1\\
t_2 &= -s_1 + 2s_2\\
t_3 &= \qquad -2s_2 + 3s_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_p &= \qquad\qquad -(p-1)\, s_{p-1} + p s_p\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

die gewissermassen zu (1) invers ist — aus (1) folgt nämlich

$$p t_p - (p-1)\, t_{p-1} = (s_1 + \ldots + s_p) - (s_1 + \ldots + s_{p-1}) = s_p$$

—, und die also nicht für alle convergenten Folgen convergiert, da (1) umgekehrt für mehr als alle im gewöhnlichen Sinne convergenten Folgen convergiert. Trotzdem erfüllt (7) die beiden Bedingungen (4) und (6).

Es ist nun die wesentliche Bemerkung, um die es sich hier handelt, dass man (4) und (6) durch Hinzufügung einer sehr einfachen dritten Bedingung zu einem System von notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergänzen kann. Der Inhalt dieser dritten Bedingung ist, dass die Summen der **Beträge** der einzelnen Zeilen von Grössen a_{pq} unter einer festen, vom Zeilenindex p unabhängigen Grenze gelegen sein müssen:

$$(8)\qquad \sum_{(q)} |\, a_{pq}\,| \leqq M \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Beweis, dass die genannten drei Bedingungen hinreichend sind. Es soll zuerst gezeigt werden, dass für jede Folge $s_1 = \varepsilon_1$, $s_2 = \varepsilon_2, \ldots$, die den Limes 0 hat, auf Grund der zweiten und dritten Bedingung $\lim t_n = 0$ ist. Ist nämlich $\lim \varepsilon_n = 0$, so kann man n so gross wählen, dass ε_{n+1}, $\varepsilon_{n+2}, \ldots$ dem Betrage nach unter $\varepsilon/2M$ gelegen sind, wo ε eine beliebig vorgegebene Zahl, M die in der dritten Bedingung vorkommende, durch die a_{pq} gegebene obere Schranke ist. Die Behauptung ist, dass

$$t_p = a_{p1}\,\varepsilon_1 + \ldots + a_{pn}\,\varepsilon_n + a_{p\,n+1}\,\varepsilon_{n+1} + \ldots$$

für $p=\infty$ den Limes 0 hat. Wegen der dritten Bedingung ist

$$|\,a_{p\,n+1}\,\varepsilon_{n+1} + \ldots\,| \leqq |\,a_{p\,n+1}\,|\;|\,\varepsilon_{n+1}\,| + \ldots$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2M}\,(\,|\,a_{p\,n+1}\,| + \ldots) \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

und zwar allein vermöge passender Wahl von n, unabhängig von p, also für jedes $p=1, 2, \ldots$. Der zweiten Bedingung nach kann man aber, nachdem einmal n fest gewählt ist, p so gross bestimmen, dass für diesen und jeden grösseren Wert von p

$$|\,a_{p1}\,\varepsilon_1\,| + \ldots + |\,a_{pn}\,\varepsilon_n\,| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, und somit $|\,t_p\,| \leqq \varepsilon$, $|\,t_{p+1}\,| \leqq \varepsilon, \ldots$. Man kann also p so gross wählen, dass $t_p, t_{p+1}, \ldots$ dem Betrage nach unter einer beliebig klein vorgegebenen Grösse ε liegen, d. h. es ist $\lim t_p = 0$.

Die erste Bedingung ergiebt sodann, dass für jede beliebige convergente Folge $s_1, s_2, \ldots$ vom Limes s auch $\lim t_n$ existiert und $=s$ ist. Denn setzt man $s_n - s = \varepsilon_n$, so ist $\lim \varepsilon_n = 0$ und

$$t_p = a_{p1}\,s_1 + \ldots = a_{p1}\,(s+\varepsilon_1) + \ldots$$

$$= (a_{p1} + \ldots)\,s + (a_{p1}\,\varepsilon_1 + \ldots);$$

der zweite Summand hat, wie eben bewiesen, mit wachsendem p den Limes 0; dass der erste den Limes s hat, ist gerade der Inhalt der ersten Bedingung.

Beweis für die Notwendigkeit der dritten Bedingung. Voraussetzung ist hier, dass (2) für jede convergente Folge (s_n) convergiert und den nämlichen Limes hat. Alsdann ist bereits gezeigt, dass notwendig die beiden ersten Bedingungen erfüllt sind; insbesondere kann also die Giltigkeit von (6) vorausgesetzt werden. Gesetzt nun, die Behauptung wäre falsch, d. h. die Summen $Z_p = \sum_q |\,a_{pq}\,|$ der Beträge der a_{pq} der einzelnen Zeilen wären nicht beschränkt, so soll gezeigt werden, dass man eine Folge (s_n) vom Limes 0 construieren könnte, für die t_p über jeden Betrag wächst, also überhaupt keinen Limes hat, geschweige denn ebenfalls den Limes 0.

Zunächst wähle man p' so gross, dass $Z_{p'} > 10^2$ ist, setze die ersten s_n, soweit sie in $t_{p'}$ tatsächlich vorkommen, $= \pm \frac{1}{10}$ und erteile ihnen je dasselbe Vorzeichen, als es das zugehörige $a_{p'q}$ hat. Ohne noch über die weiteren s_n zu verfügen, kann man dann schon jetzt sicher sein, dass

$$t_{p'} = \frac{1}{10}\,|\,a_{p'1}\,| + \ldots + \frac{1}{10}\,|\,a_{p'n_{p'}}\,| = \frac{1}{10}\sum_{(q)} |\,a_{p'q}\,| > \frac{10^2}{10} = 10$$

ist. Alsdann gehe man, gestützt auf die Giltigkeit von (6), in der Folge der Zeilen von den p'-ten aus bis zu einer solchen Zeile, dass von dieser ab für alle weiteren Zeilen die Summe der Beträge der ersten $n_{p'}$ Coefficienten

$$|\,a_{p1}\,| + \ldots + |\,a_{p,\,n_{p'}}\,|$$

unter 1 gelegen ist, sodass also von diesem bestimmten p ab

$$|\,a_{p1}\,s_1 + \ldots + a_{p\,n_{p'}}\,s_{n_{p'}}\,| < \frac{1}{10}$$

ausfällt. Auch unter diesen Zeilen müsste, der Annahme nach, eine solche vorhanden sein, bei der die Summe der Beträge jede vorgegebene Grösse übersteigt; sei etwa $Z_{p''} > 10^4 + 1 + 10^1$. Man wähle dann die weiteren s_n, soweit sie in $t_{p''}$ vorkommen, also $s_{n_{p'}+1}, \ldots, s_{np''} = \pm \frac{1}{10^2}$, und zwar immer mit demselben Zeichen, wie das zugehörige $a_{p'', q}$; man ist dann sicher dass $t_{p''} > 10^2$ wird. Indem man nach diesem Muster die s_n successive bestimmt, gelangt man in der Tat zu einer Folge s_n vom Limes 0, für die die t_n nach ∞ divergieren, entgegen der Voraussetzung.

Es kann demnach der Satz ausgesprochen werden:

Theorem. *Damit eine Mittelbildung vom Typus (2) für jede convergente Folge $s_1, s_2, \ldots$ convergiert und den nämlichen Limes hat:*

$$\lim_{n=\infty} t_n = \lim_{n=\infty} s_n,$$

ist notwendig und hinreichend, dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\lim\limits_{p=\infty} \Big(\sum\limits_{(q)} a_{pq}\Big) = 1,$

2. $\lim\limits_{p=\infty} a_{pq} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots),$

3. $\sum\limits_{(q)} |\,a_{pq}\,|$ *ist unter einer von p unabhängigen Schranke M gelegen.*

2.

Mit Hilfe dieses Theorems lässt sich auch die weitere Frage beantworten, wann zwei verschiedene Mittelbildungen „äquivalent" sind, d. h. das nämliche Convergenzfeld besitzen und für jede Folge dieses gemeinsamen Convergenzfeldes denselben Grenzwert ergeben. Man kann sich hierbei zweckmässig eines Kalküls der Mittelbildungen bedienen, indem man unter dem Produkt AB der beiden Mittelbildungen A, B diejenige Mittelbildung versteht, die man erhält, wenn man auf eine Folge (s_n) zuerst die Mittelbildung B und auf die resultierende Folge die Mittelbildung A anwendet. Die sog. Hölderschen Mittel sind in dieser Terminologie nichts anderes als die Potenzen der Mittelbildung (1). Es ist unschwer zu zeigen, dass das Produkt zweier Mittelbildungen vom Typus (2) immer wieder eine Mittelbildung vom Typus (2) ist,[1] und dass das Produkt den drei Bedingungen des obigen Theorems genügt, falls die Faktoren dies tun.

Mit E werde insbesondere die „identische" Mittelbildung

$$(9)\qquad \begin{aligned} t_1 &= s_1, \\ t_2 &= s_2, \\ t_3 &= s_3, \\ &\;\;\cdots \end{aligned}$$

bezeichnet, deren Convergenzfeld dasjenige der im gewöhnlichen Sinne convergenten Folgen ist. Falls man zu einer Mittelbildung A vom Typus (2) eine andere B vom selben Typus hinzubestimmen kann, sodass

$$AB = E \quad \text{und} \quad BA = E$$

ist, soll $B = A^{-1}$ als die „Reziproke" von A bezeichnet werden. Die Mittelbildungen (1) und (7) bilden in ihrem gegenseitigen Verhältnis ein Beispiel für diese Reziprozität. Man kann zeigen, dass jede Mittelbildung höchstens *eine* Reziproke haben kann;[2] aber es braucht natürlich nicht notwendig

[1]) Betrachtet man neben jeder Mittelbildung die Matrix ihrer Coefficienten, so erweist sich der hier betrachtete Kalkül als identisch mit dem üblichen Matrizenkalkül; nur handelt es sich nicht um Matrizen mit endlicher Reihenzahl, sondern um diejenigen unendlichen Matrizen die ich zuerst in den Gött. Nachr. 1906 pag. 351-355 aufgestellt und später (Pal. Rend 28, 1909, pag. 88—96, Gött. Nachr 1910, pag. 489 ff.) unter dem Namen „*zeilenfinite Matrizen*" nach verschiedenen Richtungen behandelt habe.

[2]) Vgl Gött. Nachr. 1907, pag. 101—109, „Formalsätze über Reziproke"

immer eine zu existieren. Indessen wird sicher eine Reziproke vorhanden sein bei den Mittelbildungen vom Typus

$$(10)\qquad \begin{aligned} t_1 &= a_{11} s_1 &&, \quad a_{11} \neq 0 \\ t_2 &= a_{21} s_1 + a_{22} s_2 &&, \quad a_{22} \neq 0 \\ t_3 &= a_{31} s_1 + a_{32} s_2 + a_{33} s_3 &&, \quad a_{33} \neq 0 \\ &\cdots\cdots\cdots && \quad \cdots\cdots, \end{aligned}$$

und es bedeutet keine wesentliche Einschränkung, wenn man nur diesen Typus von Mittelbildungen betrachtet; sie bilden eine Untergruppe derer vom Typus (2).

Endlich mag $A \backsim B$ bedeuten, dass die beiden Mittelbildungen A, B im oben angegebenen Sinne *äquivalent* sind. Das Theorem von № 1 gestattet alsdann vorerst zu entscheiden, wann eine invertierbare Mittelbildung $A \backsim E$ ist. *Eine invertierbare Mittelbildung A ist dann und nur dann $\backsim E$, wenn sowohl A als auch A^{-1} den drei Bedingungen des obigen Theorems genügen.*

Man überlegt ebenso unmittelbar, dass aus $U \backsim E$, wenn B irgend eine Mittelbildung ist, $UB \backsim B$ folgt.

Sind nun A, B irgend zwei invertierbare Mittelbildungen, und ist $A \backsim B$, so folgt $AB^{-1} \backsim BB^{-1} = E$; ist umgekehrt $AB^{-1} \backsim E$, so folgt $(AB^{-1})\, B \backsim E . B$ oder $A \backsim B$. Beachtet man endlich, dass $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$ ist, so beantwortet sich die zu Anfang dieser № gestellte Frage:

Satz. *Zwei invertierbare Mittelbildungen A, B sind dann und nur dann äquivalent, $A \backsim B$, wenn die beiden Mittelbildungen AB^{-1} und BA^{-1} den drei Bedingungen des Theorems von № 1 genügen.*

Göttingen, d. 21 Dezember 1911.