$$(7) \qquad = \frac{\alpha^2}{\zeta_\varkappa(\lambda)\,\zeta_\varkappa(\nu)}\, x \log x$$

$$+ \frac{1}{\zeta_\varkappa(\lambda)\,\zeta_\varkappa(\nu)} \left(\alpha(2\beta-\alpha) - \frac{\lambda\alpha^2\zeta'(\lambda)}{\zeta(\lambda)} - \frac{\nu\alpha^2\zeta'(\nu)}{\zeta(\nu)}\right) x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right).$$

Für den besonderen Körper der vierten Einheitswurzeln, worin das Dirichlet'sche Ergebnis

$$[x]_\varkappa = \alpha x + O(\sqrt{x}) \qquad (\alpha = \pi)$$

(Spezialfall von (4)) vor einigen Jahren durch Sierpiński zu

$$(8) \qquad [x]_\varkappa = \alpha x + O(\sqrt[3]{x})$$

verschärft worden, — und voraussichtlich überhaupt für quadratische Körper mit negativer Diskriminante, auf welche das Sierpiński'sche Verfahren sichtlich unmittelbar anwendbar ist und dabei zum gleichen Ergebnis (8) führen wird, — lassen sich in der Folge die Schätzungsfehler $O\left(x^{\frac{3}{4}}\right)$ in (5), (6), (7) zu $O\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$ verschärfen.

W. SIERPIŃSKI.

Przyczynek do teoryi maximów i minimów.

(Contribution à la théorie des maxima et minima).

W pracy niniejszej pragnę podać prosty przykład funkcyi ciągłej, posiadającej wszędzie gęstą mnogość właściwych maximów i wszędzie gęstą mnogość właściwych minimów.

O funkcyi $f(x)$, określonej w pewnym przedziale (a, b), powiadamy, że posiada dla danej wartości x_0 wewnątrz tego przedziału właściwe maximum (względnie właściwe minimum), jeżeli istnieje taka liczba dodatnia δ, iż nierówności

$$0 < |x - x_0| \leqslant \delta$$

pociągają za sobą nierówność:

$$f(x) < f(x_0) \qquad (\text{względnie: } f(x) > f(x_0)).$$

Jeżeli zaś można powiedzieć tylko, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, przy której nierówności

$$0 < |x - x| \leqslant \delta$$

pociągają za sobą nierówność

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{względnie: } f(x) \geqslant f(x_0)),$$

to mówimy, że funkcya $f(x)$ daje dla $x = x_0$ niewłaściwe maximum (względnie minimum).

Powiadam, że funkcyą o pantachicznej mnogości właściwych maximów i właściwych minimów będzie funkcya

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n}, \qquad (1)$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza różnicę bezwzględną między liczbą x a najbliższą ($\equiv x$) całością.

Wobec takiej definicyi funkcyi $\varphi(x)$ mogłoby się na pierwszy rzut oka wydawać, że jest ona dwuwartościową dla tych liczb x, które leżą w samym środku między dwiema kolejnemi liczbami całkowitemi (t. j. dla liczb formy $k+\frac{1}{2}$, gdzie k oznacza całość). Możemy bowiem dla $x=k+\frac{1}{2}$ uważać za najbliższą całość równie dobrze liczbę k, jak liczbę $k+1$, a więc położyć

$$\varphi(x)=x-k, \quad \text{lub} \quad \varphi(x)=k+1-x.$$

Dwuznaczność ta jest jednak tylko pozorna, gdyż dla $x=k+\frac{1}{2}$ oba wypisane przed chwilą wzory dają jednę i tę samą wartość, mianowicie $\varphi(k+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Z definicyi funkcyi $\varphi(x)$ wynika też natychmiast, że stale

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \tfrac{1}{2},$$

a przytem $\varphi(x)=0$ tylko dla liczb całkowitych, zaś $\varphi(x)=\frac{1}{2}$ tylko dla $x=k+\frac{1}{2}$.

Wyprowadzimy jeszcze kilka prostych własności funkcyi $\varphi(x)$, na których wypadnie nam się później opierać.

Niech k oznacza liczbę całkowitą, zaś z liczbę rzeczywistą, taką iż

$$|z-k|<\tfrac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad k-\tfrac{1}{2}<z<k+\tfrac{1}{2}.$$

W myśl definicyi funkcyi $\varphi(z)$ będzie:

$$\varphi(z)=|z-k|,$$

gdyż najbliższą dla z całością jest tu oczywiście k.

Możemy więc powiedzieć (wobec $\varphi(k)=0$), że

$$\varphi(z)-\varphi(k)=|z-k|, \quad \text{dla} \quad |z-k|<\tfrac{1}{2}. \tag{2}$$

Niech teraz k oznacza liczbę całkowitą, zaś z liczbę rzeczywistą, taką iż

$$|z-(k+\tfrac{1}{2})|<\tfrac{1}{2}.$$

Mamy tu więc

$$k<z<k+1.$$

Jeżeli $z \leqslant k+\frac{1}{2}$, to będzie oczywiście

$$\varphi(k+\tfrac{1}{2})-\varphi(z)=\tfrac{1}{2}-(z-k)=(k+\tfrac{1}{2})-z \geqslant 0,$$

jeżeli zaś $z>k+\frac{1}{2}$, to:

$$\varphi(k+\tfrac{1}{2})-\varphi(z)=\tfrac{1}{2}-(k+1-z)=z-(k+\tfrac{1}{2})>0.$$

W każdym więc razie jest:

$$\varphi(k+\tfrac{1}{2})-\varphi(z)=|z-(k+\tfrac{1}{2})|, \quad \text{dla} \quad |z-(k+\tfrac{1}{2})|<\tfrac{1}{2}. \tag{3}$$

Udowodnimy wreszcie, że dla wszelkich rzeczywistych x i y zachodzi nierówność:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |x-y| \tag{4}$$

Wobec jej symetryi względem x i y, wystarczy dla dowodu założyć, że $x \leqslant y$, a nawet że $x<y$, gdyż dla $x=y$ nierówność (4) jest spełniona oczywiście. Dalej, wobec

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant -\varphi(y) \leqslant 0$$

mamy zawsze

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant \tfrac{1}{2},$$

skąd wynika, że dla $|x-y| \geqslant \frac{1}{2}$ nierówność (4) będzie spełniona. Wystarczy więc dla dalszego dowodu założyć, że $|x-y|<\frac{1}{2}$ oraz $x<y$.

Rozróżnimy tu dwa przypadki.

1) Między liczbami $2x$ i $2y$ niema żadnej całości. Kładąc $E2x=p$, będziemy mieli:

$$p \leqslant 2x < 2y \leqslant p+1,$$

skąd

$$\frac{p}{2} \leqslant x < y \leqslant \frac{p+1}{2}.$$

Jeżeli p jest parzyste, to będzie oczywiście

$$\varphi(x)=x-\frac{p}{2}, \qquad \varphi(y)=y-\frac{p}{2},$$

zatem:

$$\varphi(x)-\varphi(y)=x-y.$$

Jeżeli natomiast p jest nieparzyste, to oczywiście mamy:

$$\varphi(x)=\frac{p+1}{2}-x, \qquad \varphi(y)=\frac{p+1}{2}-y,$$

skąd:

$$\varphi(x)-\varphi(y)=y-x.$$

W każdym więc razie w badanym przypadku:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y|.$$

2) Między $2x$ i $2y$ zawiera się liczba całkowita (oczywiście tylko jedna, gdyż $y-x \leqslant \frac{1}{2}$, skąd $2y-2x \leqslant 1$). Niech p oznacza ową całość. Będzie oczywiście:

$$p-1 \leqslant 2x < p < 2y \leqslant p+1,$$

czyli

$$\frac{p-1}{2} \leqslant x < \frac{p}{2} < y \leqslant \frac{p+1}{2}.$$

Jeżeli p jest parzyste, to

$$\varphi(x) = \frac{p}{2} - x, \qquad \varphi(y) = y - \frac{p}{2},$$

skąd

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)| + |\varphi(y)|$$

$$= \frac{p}{2} - x + y - \frac{p}{2} = y - x = |x - y|,$$

co przez zestawienie stron skrajnych daje nierówność (4).

Jeżeli p jest nieparzyste, to

$$\varphi(x) = x - \frac{p-1}{2}, \qquad \varphi(y) = \frac{p+1}{2} - y,$$

skąd

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \left(x - \frac{p-1}{2}\right) - \left(\frac{p+1}{2} - y\right) = \left(x - \frac{p}{2}\right) + \left(y - \frac{p}{2}\right),$$

zatem:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \left|x - \frac{p}{2}\right| + \left|y - \frac{p}{2}\right|$$

$$= \left(\frac{p}{2} - x\right) + \left(y - \frac{p}{2}\right) = y - x = |x - y|,$$

skąd znowu przez zestawienie stron skrajnych dostajemy (4).

Nierówności (4) dowiedliśmy więc dla wszystkich przypadków.

Z nierówności tej wynika natychmiast ciągłość funkcyi $\varphi(x)$ dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej. Aby więc dowieść ciągłości funkcyi $f(x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych, wystarczy już tylko dowieść, że szereg (1) jest zbieżny jednostajnie.

Mamy stale

$$0 \leqslant \varphi(z) \leqslant \tfrac{1}{2},$$

skąd

$$0 \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^p}.$$

Dobierając więc do danego dodatniego ε liczbę μ tak wielką, iżby było

$$\frac{1}{3^\mu} \leqslant \varepsilon$$

będziemy dla $p > \mu$ mieli stale

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n}\right| < \varepsilon,$$

co dowodzi że szereg (1) jest zbieżny jednostajnie, i to nawet w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Szereg (1), jako jednostajnie zbieżny szereg funkcyj ciągłych, przedstawia zatem, w myśl znanego twierdzenia, funkcyę ciągłą.

Weźmy pod rozwagę zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które dadzą się przedstawić w postaci

$$\frac{l}{3^q}$$

gdzie l jest pewną liczbą całkowitą ($\gtreqless 0$), zaś q — pewną liczbą naturalną. Zbiór taki tworzy mnogość wszędzie gęstą. W samej rzeczy, mając dany przedział (a, b), dowolnie zresztą mały, możemy zawsze wyznaczyć liczbę naturalną q tak wielką, iżby było $\frac{1}{3^q} < b - a$. Znajdzie się wówczas oczywiście conajmniej jedna wartość całkowita l taka, iż będzie

$$a < \frac{l}{3^q} < b.$$

Powiadam, że dla wszystkich liczb naszego zbioru funkcya $f(x)$ dawać będzie **właściwe minimum**.

Niech x_0 oznacza jakąkolwiek liczbę naszego zbioru, a więc

$$x_0 = \frac{l}{3^q}$$

przy pewnem danem całkowitem l i naturalnem q.

Oznaczmy dalej przez N daną liczbę naturalną, dowolnie zresztą wielką i połóżmy

$$r = N + 2q.$$

Niech dalej x oznacza jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność

$$|x - x_0| \leqslant \frac{1}{3^r}.$$

Dla wskaźników n, spełniających nierówności:

$$q \leqslant n < r$$

będziemy mieli $n+1 \leqslant r$, zatem

$$|x - x_0| \leqslant \frac{1}{3^r} \leqslant \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{2 \cdot 3^n},$$

skąd

$$|3^n x - 3^n x_0| < \tfrac{1}{2}$$

i przeto, z uwagi że $3^n x_0 = 3^{n-q} \cdot l$ jest dla $n \geqslant q$ liczbą całkowitą, w myśl (2):

$$|\varphi(3^n x) - \varphi(3^n x_0)| = |3^n x - 3^n x_0|,$$

skąd

$$\frac{\varphi(3^n x)}{3^n} - \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} = |x - x_0|$$

oraz

$$\sum_{n=q}^{r-1} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} - \sum_{n=q}^{r-1} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} = (r-q)\,|x - x_0|. \tag{5}$$

Dalej, w myśl twierdzenia o module sumy i w myśl nierówności (4):

$$\left| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} - \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} \right| = \left| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x) - \varphi(3^n x_0)}{3^n} \right|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{q-1} \frac{|\varphi(3^n x) - \varphi(3^n x_0)|}{3^n} \leqslant \sum_{n=0}^{q-1} \frac{|3^n x - 3^n x_0|}{3^n} = q\,|x - x_0|,$$

skąd

$$\sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} - \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} \geqslant -q\,|x - x_0|. \tag{6}$$

Dla $n \geqslant q$ mamy oczywiście

$$\varphi(3^n x_0) = 0,$$

gdyż $3^n x_0 = 3^{n-q}\, l$ jest dla $n \geqslant q$ liczbą całkowitą.

Jest więc, wobec $r > q$:

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} = 0,$$

a że stale $\varphi(z) \geqslant 0$, więc

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} \geqslant 0.$$

Będzie zatem:

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} - \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} \geqslant 0. \tag{7}$$

Dodając stronami nierówności (6), (5) i (7), wobec wzoru (1) i wartości $r = N + 2q$, otrzymamy w jednej chwili:

$$f(x) - f(x_0) \geqslant N \cdot |x - x_0|, \quad \text{dla} \quad |x - x_0| \leqslant \frac{1}{3^{N+2q}}.$$

Z nierówności tej nietylko wnioskujemy natychmiast, że dla x_0 zachodzi właściwe minimum funkcyi $f(x)$, ale nadto, że funkcya ta nie posiada dla wartości x_0 oznaczonej pochodnej (obustronnej). Istnieją tylko pochodne jednostronne (lewostronna i prawostronna), ale i te są nieskończone, mianowicie:

$$f'_-(x_0) = -\infty, \qquad f'_+(x_0) = +\infty.$$

Możnaby stąd wyprowadzić wniosek, że dla krzywej $y = f(x)$ punkt o odciętej x_0 jest punktem zwrotnym 1-go rodzaju i że styczna w tym punkcie jest prostopadła do osi X-ów.

Otrzymaliśmy więc zarazem przykład krzywej ciągłej, mającej pantachiczną mnogość punktów zwrotnych.

Weźmy teraz pod rozwagę zbiór liczb, które dadzą się przedstawić w postaci

$$\frac{l + \frac{1}{2}}{3^q}$$

przy pewnem całkowitem l i naturalnem q. Zbiór taki też oczywiście tworzy mnogość wszędzie gęstą.

Niech x_0 oznacza jakikolwiek dany element naszego zbioru, a więc

$$x_0 = \frac{l + \frac{1}{2}}{3^q}$$

przy pewnem danem całkowitem l i naturalnem q. Niech znowu N oznacza daną liczbę naturalną, dowolnie zresztą wielką, i połóżmy $r = N + 2q$.

Dla

$$|x - x_0| \leqslant \frac{1}{3^r}$$

i wskaźników n, spełniających nierówności:

$$q \leqslant n < r,$$

będzie, jak wiemy:

$$|3^n x - 3^n x_0| < \tfrac{1}{2}.$$

Lecz

$$3^n x_0 = 3^{n-q} l + \frac{3^{n-q}}{2} = k + \frac{1}{2},$$

gdzie k oznacza liczbę całkowitą, gdyż 3^{n-q} jest dla $n \geqslant q$ liczbą całkowitą nieparzystą.

Stąd, w myśl (3), kładąc $z = 3^n x$ oraz $k + \frac{1}{2} = 3^n x_0$, otrzymamy:

$$\varphi(3^n x_0) - \varphi(3^n x) = | 3^n x - 3^n x_0 |,$$

skąd:

$$\sum_{n=q}^{r-1} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} - \sum_{n=q}^{r-1} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} = (r-q) | x - x_0 |. \tag{8}$$

Dalej, znajdziemy jak wyżej:

$$\left| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} - \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} \right| \leqslant q | x - x_0 |,$$

skąd:

$$\sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} - \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} \geqslant -q | x - x_0 |. \tag{9}$$

Dla $n \geqslant r > q$ liczba $3^n x_0$ równa się całości $+\frac{1}{2}$, skąd $\varphi(3^n x_0) = \frac{1}{2}$ dla $n \geqslant r$, gdy tymczasem $\varphi(3^n x) \leqslant \frac{1}{2}$.

Jest więc dla $n \geqslant r$ stale:

$$\varphi(3^n x_0) \geqslant \varphi(3^n x),$$

skąd

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x_0)}{3^n} - \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n} \geqslant 0. \tag{10}$$

Dodając stronami nierówności (9), (8) i (10), otrzymamy:

$$f(x_0) - f(x) \geqslant N | x - x_0 |, \quad \text{dla} \quad | x - x_0 | \leqslant \frac{1}{3^{N+2q}}$$

skąd natychmiast wnosimy, że dla x_0 zachodzi właściwe maximum funkcyi $f(x)$. Jak wyżej, możnaby też wysnuć wniosek, że $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$, oraz wniosek co do zachowania się krzywej $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0.

Dowiedliśmy więc, że funkcya ciągła (1) posiada pantachiczną mnogość właściwych maximów i pantachiczną mnogość właściwych minimów.

Godnem uwagi jest, że gdybyśmy zamiast funkcyi (1) wzięli funkcyę, określoną wzorem

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n},$$

to dałoby się dowieść że $g(x)$ jest funkcyą ciągłą, posiadającą wszędzie gęstą mnogość właściwych minimów, ale nie mającą żadnego właściwego maximum. I takie więc funkcye istnieją.

Zauważymy wreszcie, że funkcya

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^{2n}}$$

dałaby w przedziale (0, 1) (zatem, wobec jej okresowości, w każdym przedziale skończonym) tylko skończoną mnogość extremów. Możnaby mianowicie dowieść (co zrobimy na innem miejscu), że krzywa $y = h(x)$ przedstawia w przedziale (0, 1) łuk paraboli $y = 2(x - x^2)$. [1]

RÉSUMÉ.

Je démontre que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n},$$

$\varphi(x)$ désignant la différence absolue entre le nombre x et l'entier le plus voisin ($\gtreqless x$), est continue et possède dans chaque intervalle fini une infinité des maxima et des minima proprement dits.

J'observe encore, que la fonction continue

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}$$

possède un ensemble partout dense des minima proprement dits, mais aucun maximum proprement dit.

[1]) Zob. moją notatkę: „O pewnej własności paraboli". Czasopismo mat.-fiz. Wektor, Sierpień 1911.