VI. Połowy łuków dziennych gwiazd, z uwzględnieniem refrakcyi średniej.

δ	Połowa łuku dzienn.	δ	Połowa łuku dzienn.	δ	Połowa łuku dzien.	δ	Połowa łuku dzienn.
−38°	0h 37m.3	−19°	4h 19m.0	0°	6h 3m.8	+19°	7h 50m.0
−37	1 11.8	−18	4 25.3	+1	6 9.0	20	7 56.6
−36	1 34.2	−17	4 31.4	2	6 14.1	21	8 3.5
−35	1 52.0	−16	4 37.4	3	6 19.3	22	8 10.5
−34	2 7.1	−15	4 43.3	4	6 24.5	23	8 17.8
−33	2 20.5	−14	4 49.1	5	6 29.8	24	8 25.4
−32	2 32.6	−13	4 54.8	6	6 35.0	25	8 33.2
−31	2 43.6	−12	5 0.4	7	6 40.3	26	8 41.5
−30	2 53.9	−11	5 5.9	8	6 45.7	27	8 50.1
−29	3 3.5	−10	5 11.4	9	6 51.1	28	8 59.2
−28	3 12.6	−9	5 16.8	10	6 56.5	29	9 8.9
−27	3 21.2	−8	5 22.1	11	7 2.1	30	9 19.3
−26	3 29.4	−7	5 27.4	12	7 7.7	31	9 30.4
−25	3 37.3	−6	5 32.7	13	7 13.4	32	9 42.6
−24	3 44.8	−5	5 37.9	14	7 19.2	33	9 56.2
−23	3 52.1	−4	5 43.1	15	7 25.1	34	10 11.6
−22	3 59.1	−3	5 48.4	16	7 31.1	35	10 29.8
−21	4 5.9	−2	5 53.5	17	7 37.3	36	10 53.2
−20	4 12.6	−1	5 58.6	18	7 43.6	37°	11h 32m.7
−19°	4h 19m.0	0°	6h 3m.8	+19°	7h 50m.0		

K. ŻORAWSKI.

Notizen aus dem Gebiete der Differentialgeometrie.[1]

(Notatki z dziedziny Geometryi różniczkowej).

V. Eine Formulierung der allgemeinen Flächendeformation.

In dieser Note werden Flächendeformationen unter Annahme gewisser Transformationsformeln behandelt, die eine unmittelbare Folge der grundlegenden Betrachtungen über allgemeine Flächenabbildungen sind.

1. Man betrachte zwei Flächen S und S'. Sind diese Flächen Punkt für Punkt aufeinander abgebildet und sind die einander entsprechenden Punkte auf dasselbe Parameterpaar u, v bezogen, so können die Quadrate der einander entsprechenden Linienelemente dieser Flächen durch die Formeln:

$$\begin{aligned} ds^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ ds'^2 &= E'du^2 + 2F'du\,dv + G'\,dv^2 \end{aligned} \tag{1}$$

festgelegt sein. In der Theorie derartiger Abbildungen werden diejenigen Orthogonalsysteme von Kurven bestimmt, welche auch als Orthogonalsysteme

[1]) Unter diesem allgemeinen Titel habe ich einige differentialgeometrische Aufsätze auch im XVIII Bande dieser Zeitschrift (1907) S. 143—169 veröffentlicht. (Ob. Prace mat.-fiz. XVIII, str. 143—169).

abgebildet werden. Es seien die Gleichungen solcher orthogonaler Kurvenscharen:

$$\varphi(u, v) = \text{const.}, \qquad \bar{\varphi}(u, v) = \text{const.} \tag{2}$$

Führt man die Funktionen φ und $\bar{\varphi}$ als unabhängige Veränderliche in die Differentialformen (1) ein, so ergeben sich bekanntlich die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi} + \frac{d\bar{\varphi}^2}{\Delta\bar{\varphi}}, \\ ds'^2 &= \bar{\rho}\,\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi} + \rho\,\frac{d\bar{\varphi}^2}{\Delta\bar{\varphi}}, \end{aligned} \tag{3}$$

wo die Bezeichnung:

$$\Delta f = \frac{E\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + G\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}$$

in Anwendung gebracht worden ist und wo ρ und $\bar{\rho}$ Funktionen von u, v sind, denen der Quotient $\frac{ds'^2}{ds^2}$ für die erste und zweite der Kurvenscharen (2) gleich ist. Aus den Formeln (3) folgt die Beziehung:

$$ds'^2 = \rho\, ds^2 + (\bar{\rho} - \rho)\,\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi} \tag{4}$$

und wenn man die hier auftretenden Differentialformen in den Veränderlichen u, v darstellt, so kommt man auf die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} E' &= \rho E + (\bar{\rho} - \rho)\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{\Delta\varphi}, \\ F' &= \rho F + (\bar{\rho} - \rho)\,\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\Delta\varphi}, \\ G' &= \rho G + (\bar{\rho} - \rho)\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{\Delta\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Beziehung (4) oder die Formeln (5) können folgendermassen gedeutet werden. Es sei das Quadrat des Linienelementes der Fläche S eine gegebene Differentialform, also E, F, G gegebene Funktionen von u, v. Man

wähle die Kurvenschar $\varphi = \text{const.}$ und nehme für ρ und $\bar{\rho}$ bestimmte Funktionen von u, v an. Alsdann liefert die Beziehung (4) oder die Formeln (5) das Quadrat des Linienelementes einer Fläche S', welche aus der Fläche S durch eine gewisse Deformation entstanden gedacht werden kann. Diese Deformation wird in der Weise bewerkstelligt, dass man auf der Fläche S zwei gegeneinander orthogonale Kurvenscharen wählt und die Fläche derart deformiert, dass der Quotient $\frac{ds'^2}{ds^2}$ für diese gewählte Kurvenscharen gegebenen Funktionen von u, v gleich ist.

2. Wir leiten zunächst einige unmittelbare Schlüsse der Beziehungen (5) ab.

Es ist zunächst leicht zu sehen, dass

$$E'G' - F'^2 = \rho\bar{\rho}\,(EG - F^2).$$

Es können ferner unter Benutzung der bekannten Bezeichnungen:

$$\nabla(\Phi, \Psi) = \frac{E\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial\Psi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial u}}{EG - F^2},$$

$$\theta(\Phi, \Psi) = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - \frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial\Psi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

und unter Anwendung analoger Bezeichnungen für die Fläche S' die Beziehungen:

$$\nabla'(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\bar{\rho}}\,\nabla(\Phi, \Psi) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}}\right)\frac{\theta(\varphi, \Phi)\,\theta(\varphi, \Psi)}{\Delta\varphi},$$

$$\theta'(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\sqrt{\rho\bar{\rho}}}\,\theta(\Phi, \Psi)$$

konstatiert werden. Wenn man also für die Fläche S die Formeln:

$$\cos\Omega_{\Phi,\Psi} = \frac{\nabla(\Phi, \Psi)}{\sqrt{\Delta\Phi}\,\sqrt{\Delta\Psi}}, \qquad \sin\Omega_{\Phi,\Psi} = \frac{\theta(\Phi, \Psi)}{\sqrt{\Delta\Phi}\,\sqrt{\Delta\Psi}}$$

benutzt und für die Fläche S' analoge Formeln gelten lässt, so kommt man auf die Beziehungen:

$$\cos\Omega'_{\Phi,\Psi} = \frac{\rho\cos\Omega_{\Phi,\Psi} + (\bar\rho-\rho)\sin\Omega_{\varphi,\Phi}\sin\Omega_{\varphi,\Psi}}{\sqrt{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\Phi}+\bar\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\Phi}}\sqrt{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\Psi}+\bar\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\Psi}}}$$

$$= \frac{\rho\cos\Omega_{\varphi,\Phi}\cos\Omega_{\varphi,\Psi} + \bar\rho\sin\Omega_{\varphi,\Phi}\sin\Omega_{\varphi,\Psi}}{\sqrt{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\Phi}+\bar\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\Phi}}\sqrt{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\Psi}+\bar\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\Psi}}},$$

$$\sin\Omega'_{\Phi,\Psi} = \frac{\sqrt{\rho\bar\rho}\sin\Omega_{\Phi,\Psi}}{\sqrt{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\Phi}+\bar\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\Phi}}\sqrt{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\Psi}+\bar\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\Psi}}},$$

aus welchen speziell die Beziehungen:

$$\cos\Omega'_{\varphi,\Phi} = \frac{\sqrt{\rho}\cos\Omega_{\varphi,\Phi}}{\sqrt{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\Phi}+\bar\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\Phi}}},$$

$$\sin\Omega'_{\varphi,\Phi} = \frac{\sqrt{\bar\rho}\sin\Omega_{\varphi,\Phi}}{\sqrt{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\Phi}+\bar\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\Phi}}}$$

sich ergeben.

3. Man wähle jetzt auf der Fläche S' zwei gegeneinander senkrechte Kurvenscharen:

$$\varphi'(u, v) = \text{const.}, \qquad \bar\varphi'(u, v) = \text{const.}$$

und man deformiere diese Fläche derart in eine Fläche S'', dass unter Benutzung für diese dritte Fläche analoger Bezeichnungen, der Quotient $\frac{ds''^2}{ds'^2}$ auf den gewählten Kurvenscharen zweien gegeben Funktionen ρ' und $\bar\rho'$ von u, v gleich ist. Alsdann hat man die Beziehung:

$$ds''^2 = \rho' ds'^2 + (\bar\rho'-\rho')\frac{d\varphi'^2}{\Delta'\varphi'}$$

und auf Grund der Formel (4) die Beziehung:

$$ds''^2 = \rho'\left[\rho\, ds^2 + (\bar\rho-\rho)\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi}\right]$$
$$+\frac{\rho\bar\rho(\bar\rho'-\rho')\Delta\varphi\,.\,d\varphi'^2}{\rho\Delta\varphi\,.\,\Delta\varphi' + (\bar\rho-\rho)\theta^2(\varphi,\varphi')}. \tag{6}$$

Diese Beziehung bestimmt eine Deformation der Fläche S in die Fläche S'' und aus dieser Beziehung folgen die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
E'' &= \rho'\left[\rho E + (\bar\rho-\rho)\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{\Delta\varphi}\right] + \frac{\rho\bar\rho(\bar\rho'-\rho')\Delta\varphi\,.\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\right)^2}{\rho\Delta\varphi\Delta\varphi' + (\bar\rho-\rho)\theta^2(\varphi,\varphi')},\\
F'' &= \rho'\left[\rho F + (\bar\rho-\rho)\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\Delta\varphi}\right] + \frac{\rho\bar\rho(\bar\rho'-\rho')\Delta\varphi\,.\,\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\frac{\partial\varphi'}{\partial v}}{\rho\Delta\varphi\Delta\varphi' + (\bar\rho-\rho)\theta^2(\varphi,\varphi')},\\
G'' &= \rho'\left[\rho G + (\bar\rho-\rho)\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{\Delta\varphi}\right] + \frac{\rho\bar\rho(\bar\rho'-\rho')\Delta\varphi\,.\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial v}\right)^2}{\rho\Delta\varphi\Delta\varphi' + (\bar\rho-\rho)\theta^2(\varphi,\varphi')}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Im allgemeinen bestimmt die Beziehung (6) oder die Relationen (7) keine konforme Abbildung der Flächen S und S''. Wir setzen voraus, dass dieser allgemeine Fall stattfindet und wir wollen uns damit beschäftigen derartige orthogonale Kurvenscharen:

$$\psi(u, v) = \text{const.}, \qquad \bar\psi(u, v) = \text{const.}$$

und solche Funktionen σ und $\bar\sigma$ der Veränderlichen ausfindig zu machen, dass die Beziehung:

$$ds''^2 = \sigma\, ds^2 + (\bar\sigma-\sigma)\frac{d\psi^2}{\Delta\psi}$$

besteht, oder dass die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} E'' &= \sigma E + (\bar{\sigma} - \sigma)\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2}{\Delta \psi}, \\ F'' &= \sigma F + (\bar{\sigma} - \sigma)\frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\Delta \psi}, \\ G'' &= \sigma G + (\bar{\sigma} - \sigma)\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2}{\Delta \psi} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

stattfinden. Anders gesagt, wir führen auf eine gewisse Art nacheinander zwei Flächendeformationen aus und wir fragen, wie dieselben durch eine einzige Deformation dieser Art ersetzt werden können.

Durch Elimination der Grössen σ und $\bar{\sigma}$ aus den Beziehungen (8) ergibt sich die Relation:

$$\begin{vmatrix} E'', & E, & \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \\ F'', & F, & \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ G'', & G, & \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Benutzt man aber die Beziehungen (7), so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\rho'(\bar{\rho}-\rho)}{\Delta \varphi}\begin{vmatrix} E, & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2, & \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \\ F, & \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, & \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ G, & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2, & \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$+\frac{\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi\Delta\varphi' + (\bar{\rho}-\rho)\theta^2(\varphi, \varphi')}\begin{vmatrix} E, & \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial u}\right)^2, & \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \\ F, & \frac{\partial \varphi'}{\partial u}\frac{\partial \varphi'}{\partial v}, & \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ G, & \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial v}\right)^2, & \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es besteht aber die Gleichheit:

$$\begin{vmatrix} E, & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2, & \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \\ F, & \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, & \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} \\ G, & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2, & \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} = (\sqrt{EG-F^2})^3\,\Delta(\varphi, \psi)\,\theta(\varphi, \psi)$$

und die Gleichheit, welche aus der letzteren dadurch folgt, dass φ durch φ' ersetzt wird. Man kommt demnach auf die Gleichung:

$$\rho'(\bar{\rho}-\rho)\nabla(\varphi, \psi)\,\theta(\varphi, \psi)\,[\rho\Delta\varphi\Delta\varphi' + (\bar{\rho}-\rho)\theta^2(\varphi, \varphi')]$$
$$+\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\Delta^2\varphi\,\nabla(\varphi', \psi)\,\theta(\varphi', \psi) = 0,$$

welche auch in der Form:

$$\rho'(\bar{\rho}-\rho)\cos\Omega_{\varphi,\psi}\sin\Omega_{\varphi,\psi}\,(\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\varphi'} + \bar{\rho}\sin^2\Omega_{\varphi,\varphi'})$$
$$+\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\cos\Omega_{\varphi',\psi}\sin\Omega_{\varphi',\psi} = 0 \tag{9}$$

dargestellt werden kann. Dies ist eine Gleichung zweiten Grades in bezug auf das Verhältnis der Differentialquotienten $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ und diese Gleichung bestimmt auf der Fläche S zwei orthogonale Kurvenscharen, über welche wir soeben gefragt haben. Für die Bestimmung der Koeffizienten σ und $\bar{\sigma}$ erhält man aus den Gleichungen (8) die Beziehungen:

$$\sigma = \frac{E''\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - 2F''\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} + G''\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2}{(EG-F^2)\,\Delta\psi},$$

$$\sigma + \bar{\sigma} = \frac{EG'' - 2F''F + GE''}{EG-F^2}.$$

Unter Anwendung der Beziehungen (7) ergibt sich aber leicht die Formel:

$$\Delta\varphi\,.\,\Delta\psi\,.\,\sigma = \rho'[\rho\,.\,\Delta\varphi\,.\,\Delta\psi + (\bar{\rho}-\rho)\theta^2(\varphi, \psi)]$$
$$+\frac{\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\Delta^2\varphi\,\theta^2(\varphi', \psi)}{\rho\Delta\varphi\Delta\varphi' + (\bar{\rho}-\rho)\theta^2(\varphi, \varphi')} \tag{10}$$

und die Formel:

$$\sigma+\bar{\sigma}=\rho'(\rho+\bar{\rho})+\frac{\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\,\Delta\varphi\,.\,\Delta\varphi'}{\rho\,\Delta\varphi\,\Delta\varphi'+(\bar{\rho}-\rho)\,\theta^2(\varphi,\ \varphi')}\,.$$

Aus zwei letzteren unter Berücksichtigung der Beziehung:

$$\Delta\varphi'\,\Delta\psi-\theta^2(\varphi',\ \psi)=\nabla^2(\varphi',\ \psi)$$

ergibt sich die Relation:

$$\Delta\varphi\,.\,\Delta\psi\,.\,\bar{\sigma}=\bar{\rho}'\,[\bar{\rho}\Delta\varphi\,\Delta\psi+(\rho-\bar{\rho})\,\theta^2(\varphi,\ \psi)]$$

$$+\frac{\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\,\Delta^2\varphi\,\nabla^2(\varphi',\ \psi)}{\rho\,\Delta\varphi\,\Delta\varphi'+(\bar{\rho}-\rho)\,\theta^2(\varphi,\ \varphi')}\,. \tag{11}$$

Die Formeln (10) und (11) lassen sich auch anders darstellen, nämlich in der Form:

$$\sigma=\rho'\,(\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\,\psi}+\bar{\rho}\sin^2\Omega_{\varphi,\,\psi})$$

$$+\frac{\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\sin^2\Omega_{\varphi',\,\psi}}{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\,\varphi'}+\bar{\rho}\sin^2\Omega_{\varphi,\,\varphi'}}\,,$$

$$\bar{\sigma}=\rho'\,(\rho\sin^2\Omega_{\varphi,\,\psi}+\bar{\rho}\cos^2\Omega_{\varphi,\,\psi})$$

$$+\frac{\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\cos^2\Omega_{\varphi',\,\psi}}{\rho\cos^2\Omega_{\varphi,\,\varphi'}+\bar{\rho}\sin^2\Omega_{\varphi,\,\varphi'}}\,.$$

4. Wir wollen nun einige besonderen Fälle behandeln.

Wir fragen zunächst, wann die Beziehung (6) oder die Relationen (7) eine konforme Abbildung der Flächen S und S'' liefern. Im Falle der konformen Abbildung muss die Gleichung (9) bei beliebiger Funktion $\psi(u,\ v)$ bestehen. Setzt man zunächst $\psi=\varphi$ und ferner $\psi=\varphi'$ ein, so ergeben sich die Beziehungen:

$$(\bar{\rho}'-\rho')\cos\Omega_{\varphi',\,\psi}\sin\Omega_{\varphi',\,\varphi}=0\,,$$

$$(\bar{\rho}-\rho)\cos\Omega_{\varphi,\,\varphi'}\sin\Omega_{\varphi,\,\varphi'}=0\,.$$

Wenn keine der hier auftretenden trigonometrischen Funktionen gleich Null ist, so ergibt sich:

$$\bar{\rho}=\rho\,,\qquad\bar{\rho}'=\rho'\,,$$

d. h. es ist jede der zwei ausgeführten Abbildungen konform, es ist demnach auch die resultierende Abbildung eine konforme. Man betrachte nun den Fall $\sin\Omega_{\varphi',\,\varphi}=0$. Bei dieser Annahme kann die Beziehung (6) auf die Form:

$$ds''^2=\rho\rho'\,ds^2+\frac{\bar{\rho}\bar{\rho}'-\rho\rho'}{\Delta\varphi}\,d\varphi^2 \tag{12}$$

gebracht werden. Für die Konformität muss

$$ds''^2=\tau\,ds^2 \tag{13}$$

sein. Die Beziehung (13) muss identisch, also auch für $d\varphi=0$ bestehen, es folgt daher die Beziehung:

$$\tau=\rho\rho'$$

und es ergibt sich, dass im Falle $\sin\Omega_{\varphi',\,\varphi}=0$ für die Konformität noch die Bedingung:

$$\bar{\rho}\bar{\rho}'=\rho\rho'$$

erfüllt werden muss. Es bleibt noch den Fall $\cos\Omega_{\varphi,\,\varphi'}=0$ zu betrachten. Alsdann kann die Beziehung (6) in der Form:

$$ds''^2=\rho\rho'\,ds^2+\frac{\rho'(\bar{\rho}-\rho)}{\Delta\varphi}\,d\varphi^2+\frac{\rho(\bar{\rho}'-\rho')}{\Delta\varphi'}\,d\varphi'^2 \tag{14}$$

dargestellt werden. In Folge der Orthogonalität der Kurven $\varphi=\text{const.}$ und $\varphi'=\text{const.}$ kann man

$$ds^2=\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi}+\frac{d\varphi'^2}{\Delta\varphi'}$$

setzen und daher die Beziehung (13) in der Form:

$$(\tau-\rho\rho')\left(\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi}+\frac{d\varphi'^2}{\Delta\varphi'}\right)=\frac{\rho'(\bar{\rho}-\rho)}{\Delta\varphi}\,d\varphi^2+\frac{\rho(\bar{\rho}'-\rho')}{\Delta\varphi'}\,d\varphi'^2$$

darstellen. Man erhält daher die Beziehungen:

$$\tau-\rho\rho'=\rho'(\bar{\rho}-\rho)=\rho(\bar{\rho}'-\rho')\,,$$

aus welchen folgt, dass in dem gegenwärtig betrachteten Falle für die Konformität nur noch die Bedingung:

$$\rho'\bar{\rho}=\rho\bar{\rho}'$$

erfüllt werden muss.

Wir betrachten noch eine andere Frage. Wir haben die Fläche S'' aus der Fläche S dadurch erhalten, dass wir zunächst eine Deformation mit den Funktionen $\varphi,\ \rho,\ \bar{\rho}$ und darauf eine Deformation mit den Funktionen $\varphi',\ \rho',\ \bar{\rho}'$ ausgeführt haben. Wir denken nun die erste Deformation mit den Funktionen $\varphi',\ \rho',\ \bar{\rho}'$, darauf die zweite mit den Funktionen $\varphi,\ \rho,\ \bar{\rho}$ ausgeführt

und wollen uns damit beschäftigen, alle Fälle zu bestimmen, in welchen diese Aufeinanderfolge zweier Deformationen auf dieselbe Fläche S'' führt. Auf Grund der Formel (6) müssen sich alle diese Fälle aus der Gleichheit:

$$\rho'(\bar{\rho}-\rho)\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi}+\frac{\rho\bar{\rho}(\bar{\rho}'-\rho')\Delta\varphi\,.\,d\varphi'^2}{\rho\Delta\varphi\Delta\varphi'+(\bar{\rho}-\rho)\theta^2(\varphi,\varphi')}$$

$$=\rho(\rho'-\rho')\frac{d\varphi'^2}{\Delta\varphi'}+\frac{\rho'\bar{\rho}'(\bar{\rho}-\rho)\Delta\varphi'\,.\,d\varphi^2}{\rho'\Delta\varphi'\Delta\varphi+(\bar{\rho}'-\rho')\theta^2(\varphi',\varphi)}$$

ergeben. Durch eine leichte Umformung lässt sich diese Gleichheit in der Form:

$$(\bar{\rho}-\rho)(\bar{\rho}'-\rho')\nabla^2(\varphi,\varphi')\left\{\frac{\rho' d\varphi^2}{\Delta\varphi[\rho'\nabla^2(\varphi,\varphi')+\bar{\rho}'\theta^2(\varphi,\varphi')]}\right.$$

$$\left.-\frac{\rho d\varphi'^2}{\Delta\varphi'[\rho\nabla^2(\varphi,\varphi')+\bar{\rho}\theta^2(\varphi,\varphi')]}\right\}=0$$

darstellen. Wenn man bemerkt, dass in der grossen Klammer die Koeffizienten bei $d\varphi^2$ und $d\varphi'^2$ immer positiv sind, so kommt man auf den Schluss, dass die in der grossen Klammer befindliche Differenz dann und nur dann gleich Null ist, wenn die Gleichungen $\varphi=\text{const.}$ und $\varphi'=\text{const.}$ dieselben Kurvenscharen bestimmen. Es kann also die Aufeinanderfolge zweier Deformationen ohne Einfluss auf das Endresultat dann und nur dann verändert werden, wenn eine (oder beide) dieser Deformationen konform ist, oder wenn die Gleichungen $\varphi=\text{const.}$ und $\varphi'=\text{const.}$ dieselben Kurvenscharen bestimmen, oder endlich wenn die durch diese Gleichungen definierten Kurvenscharen orthogonale Kurvenscharen sind.

VI. Über die Berechnung gewisser geometrischen Grössen für Kurvenscharen, welche auf der Fläche durch eine quadratische Differentialgleichung erster Ordnung definirt sind.

Der Inhalt dieser Note besteht in der Ausführung einiger elementaren flächentheoretischen Rechnungen unter Anwendung gewisser Invarianten.

1. Es sei in einer Ebene ein geradliniges Koordinatensystem ξ, η, man bezeichne mit θ den Winkel der positiven η-Axe mit der positiven ξ-Axe und man betrachte eine quadratische Form:

$$F=a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2.$$

Wenn man das Koordinatensystem ξ, η durch ein anderes geradliniges Koordinatensystem ersetzt, welches denselben Anfangspunkt besitzt, so wird dabei die quadratische Form F transformiert und die Grössen:

$$D=\frac{ac-b^2}{\sin^2\theta},\qquad W=\frac{a+c-2b\cos\theta}{2\sin^2\theta}$$

sind Invarianten. Für eine zweite Form:

$$\Phi=\alpha\xi^2+2\beta\xi\eta+\gamma\eta^2$$

hat man wieder die Invarianten:

$$\Delta=\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\sin^2\theta},\qquad \Omega=\frac{\alpha+\gamma-2\beta\cos\theta}{2\sin^2\theta}$$

und es tritt noch hinzu eine weitere von denselben unabhängige Invariante:

$$\mathfrak{W}=\frac{a\gamma+c\alpha-2b\beta}{2\sin^2\theta}.$$

Wir wollen noch bemerken, dass die Form:

$$F'=a'\xi^2+2b'\xi\eta+c'\eta^2,$$

in welcher

$$a'=\frac{a\cos\theta-b}{\sin\theta},\qquad 2b'=\frac{a-c}{\sin\theta},\qquad c'=\frac{b-c\cos\theta}{\sin\theta}$$

sind, eine kovariante Form von F ist. Wenn man analog den früheren Bezeichnungen die Invarianten:

$$D'=\frac{a'c'-b'^2}{\sin^2\theta},\qquad W'=\frac{a'+c'-2b'\cos\theta}{2\sin^2\theta}$$

bildet, so ergibt sich:

$$D'=D-W^2,\qquad W'=0$$

und man bemerke dabei, dass die Grösse D' auch in der Form:

$$D'=-\frac{1}{4\sin^4\theta}\{[2b-(a+c)\cos\theta]^2+(a-c)^2\sin^2\theta\}$$

dargestellt werden kann. Berechnet man $\mathfrak{W}$ für die Formen F und F', so ergibt sich Null.

Analoge Bezeichnungen und Sätze können auch für die Form Φ angeführt werden.

Diese Bemerkungen geben Anlass zur Bildung weiterer invarianter Ausdrücke, es sind nämlich auch die Grössen:

$$\mathfrak{W}' = \frac{a'\gamma + c'\alpha - 2b'\beta}{2\sin^2\theta} = -\frac{a\gamma' + c\alpha' - 2b\beta'}{2\sin^2\theta},$$

$$\mathfrak{W}'' = \frac{a'\gamma' + c'\alpha' - 2b'\beta'}{2\sin^2\theta}.$$

Invarianten. Diese Grössen sind aber sowohl wie D' und Δ' nicht von den D, W, Δ, Ω, $\mathfrak{W}$ unabhängig. Wir haben die Beziehung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos\theta \\ a & c & b \\ \alpha & \gamma & \beta \end{vmatrix} = 2\sin^3\theta\ \mathfrak{W}'$$

und sobald man beachtet, dass

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos\theta \\ a & c & b \\ \alpha & \gamma & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2\cos\theta \\ c & a & -2b \\ \gamma & \alpha & -2\beta \end{vmatrix} = 8\sin^6\theta \begin{vmatrix} 1 & W & \Omega \\ W & D & \mathfrak{W} \\ \Omega & \mathfrak{W} & \Delta \end{vmatrix},$$

so ergibt sich die Relation:

$$\mathfrak{W}'^2 = \begin{vmatrix} 1 & W & \Omega \\ W & D & \mathfrak{W} \\ \Omega & \mathfrak{W} & \Delta \end{vmatrix}.$$

Ferner, es kann leicht verifiziert werden, dass die Relation:

$$\mathfrak{W}'' = \mathfrak{W} - W\Omega$$

stattfindet.

2. Es sei eine reelle Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

und wir setzen voraus, dass hier x, y, z reelle Funktionen reeller Parameter u, v sind. Für dieses krummliniges Koordinatensystem wollen wir die Bezeichnungen annehmen, welche unter 2 meiner Abhandlung „Über Krümmungseigenschaften der Scharen von Linienelementen“ [1]) besprochen wurden. Unter Benutzung dieser Bezeichnungen können zwei Kurvenscharen auf der Fläche durch eine quadratische Gleichung:

[1]) Diese Zeitschrift Band XVII (1906) S. 41—76.

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0 \tag{1}$$

definiert sein, wo a, b, c Funktionen von u, v sind, die wir reell voraussetzen. Wir nehmen an, dass die Gleichung (1) keine Doppelschar darstellt, d. h. dass für dieselbe die Grösse D nicht identisch gleich Null ist, und ferner setzen wir voraus, dass diese Gleichung nicht die Scharen der Minimalkurven der Fläche definiert, d. h. dass für dieselbe die Grösse D' nicht identisch gleich Null ist. Für die Kurvenscharen der Gleichung (1) nehmen wir diejenigen Bezeichungen an, die unter 3 unserer erwähnten Abhandlung benutzt waren.

Die linke Seite der Gleichung (1) kann in zwei lineare Faktoren zerspaltet werden. Es sei nämlich:

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = (a^{(1)}\lambda + b^{(1)}\mu)(a^{(2)}\lambda + b^{(2)}\mu),$$

woraus die Relationen:

$$a = a^{(1)}a^{(2)}, \quad 2b = a^{(1)}b^{(2)} + a^{(2)}b^{(1)}, \quad c = b^{(1)}b^{(2)} \tag{2}$$

sich ergeben. Aus denselben folgt:

$$(a^{(1)}b^{(2)} - a^{(2)}b^{(1)})^2 = -4D\sin^2\theta.$$

Im Falle, wenn lineare Faktoren reell sind, können wir voraussetzen, dass

$$a^{(1)}b^{(2)} - a^{(2)}b^{(1)} > 0;$$

wäre nämlich diese Grösse negativ, so könnte man durch blosse Vertauschung der Indices 1 und 2 gerade die angenommene Ungleichung erhalten. Man kann also im reellen Falle schliessen:

$$a^{(1)}b^{(2)} - a^{(2)}b^{(1)} = 2\sin\theta\sqrt{-D} \tag{3}$$

wo rechter Hand der positive Wert der Quadratwurzel zu nehmen ist. Wenn die linearen Faktoren nicht reell sind, so können sie immer in der Weise bestimmt werden, dass

$$a^{(1)}\lambda + b^{(1)}\mu = L' + iL'', \quad a^{(2)}\lambda + b^{(2)}\mu = \eta(L' - iL'')$$

wo L' und L'' lineare Formen in bezug auf λ und μ sind, deren keine identisch gleich Null ist und deren Koeffizienten reell sind. In dem betrachteten Falle sind die Koeffizienten a und c beide von Null verschieden und besitzen beide dasselbe Vorzeichen; dieses Vorzeichen $\eta = \pm 1$ tritt nämlich in der zweiten der zuletzt angeführten Formeln auf. In dem betrachteten Falle soll auch die Gleichheit (3) gelten, wobei natürlich die früheren Bemerkungen über die Vorzeichen beider Seiten nicht zutreffen, aber unter der rechter Hand auftretenden Quadratwurzel ein bestimmter Wert derselben zu verstehen ist.

Aus der zweiten der Formeln (2) und der Formel (3) folgen nun die Beziehungen:

$$a^{(1)} b^{(2)} = b + \sin\theta \sqrt{-D}\,, \qquad a^{(2)} b^{(1)} = b - \sin\theta \sqrt{-D}\,, \tag{4}$$

die in der Folge in Anwendung gebracht werden.

Wir wollen nun für die Richtungskoeffizienten der positiven Halbtangenten der Kurvenscharen (1) die Werte:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= -\frac{b^{(1)}}{r^{(1)}}\,, \quad \mu^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{r^{(1)}}\,, \\ \lambda^{(2)} &= -\frac{b^{(2)}}{r^{(2)}}\,, \quad \mu^{(2)} = \frac{a^{(2)}}{r^{(2)}}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

annehmen, wo

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= \sqrt{a^{(1)2} + b^{(1)2} - 2\,a^{(1)} b^{(1)} \cos\theta}\,, \\ r^{(2)} &= \sqrt{a^{(2)2} + b^{(2)2} - 2\,a^{(2)} b^{(2)} \cos\theta} \end{aligned} \tag{6}$$

sind und im Falle $D < 0$, d. h. reeller Kurvenscharen in den letzteren Formeln positive Werte der Quadratwurzeln verstanden werden. Im Falle $D > 0$, d. h. imaginärer Kurvenscharen sind die unter den Quadratwurzeln stehenden Grössen miteinander konjugiert und wir können voraussetzen, dass die Quadratwurzeln selbst bestimmte und miteinander konjugierte Werte besitzen.

Für unseren Zweck ist es notwendig die Richtungskoeffizienten der betrachten Kurvenscharen direkt durch die Grössen a, b, c auszudrücken. Wir bemerken, dass auf Grund der Formeln (2), (4) und (6)

$$r^{(1)2}\, r^{(2)2} = -4\,D' \sin^4\theta$$

und dass aus den Formeln (5) die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)2} &= -\frac{(b^{(1)} r^{(2)})^2}{4\,D' \sin^4\theta}\,, & \lambda^{(2)2} &= -\frac{(b^{(2)} r^{(1)})^2}{4\,D' \sin^4\theta}\,, \\ \lambda^{(1)}\mu^{(1)} &= \frac{a^{(1)} b^{(1)} r^{(2)2}}{4\,D' \sin^4\theta}\,, & \lambda^{(2)}\mu^{(2)} &= \frac{a^{(2)} b^{(2)} r^{(1)2}}{4\,D' \sin^4\theta}\,, \\ \mu^{(1)2} &= -\frac{(a^{(1)} r^{(2)})^2}{4\,D' \sin^4\theta}\,, & \mu^{(2)2} &= -\frac{(a^{(2)} r^{(2)})^2}{4\,D' \sin^4\theta} \end{aligned}$$

sich ergeben. Wenn man hier in den Zählern die Werte der $r^{(1)2}$ und $r^{(2)2}$ explicite aufschreibt und dann die Formeln (2) und (4) und die unter 1 angenommenen Bezeichnungen in Anwendung bringt, so ergeben sich Ausdrücke von der Form:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{D - c\,W + \varepsilon c' \sqrt{-D}}{2\,D' \sin^2\theta}\,, \\ \lambda\mu &= \frac{-D\cos\theta + b\,W - \varepsilon b' \sqrt{-D}}{2\,D' \sin^2\theta}\,, \\ \mu^2 &= \frac{D - a\,W + \varepsilon a' \sqrt{-D}}{2\,D' \sin^2\theta}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$. Es folgen nämlich bei dem Pluszeichen die Ausdrücke für $\lambda^{(1)2}$, $\lambda^{(1)}\mu^{(1)}$, $\mu^{(1)2}$ und beim Minuszeichen die Ausdrücke für $\lambda^{(2)2}$, $\lambda^{(2)}\mu^{(2)}$, $\mu^{(2)2}$. Die Richtungskoeffizienten selbst erhält man aus diesen Formeln durch Wurzelausziehen und hat man früher die Grössen $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $a^{(2)}$, $b^{(2)}$ gewählt und durch dieselben auf Grund der Formeln (5) die Richtungskoeffizienten berechnet, so hat man noch Sorge zu tragen, dass die einen und die anderen Richtungskoeffizienten auch in bezug auf die Vorzeichen miteinander übereinstimmen.

Wir haben bei der Aufstellung dieser Betrachtungen vorausgesetzt, dass x, y, z reelle Funktionen reeller Parameter u, v sind, dass a, b, c reelle Funktionen von u, v sind und dass die Gleichung (1) keine der Scharen der Minimalkurven der Fläche definiert. Es erhellt von selbst, dass sobald nur sowohl keine der Scharen der Parameterlinien wie auch keine der Scharen der Gleichung (1) aus Minimalkurven der Fläche besteht, die hier durchgefürten Rechnungen auch auf solche Fälle sich beziehen, in denen einige oder sämtliche unserer Realitätsvoraussetzungen nicht zutreffen. Es ist aber auch klar, dass man dabei nicht gewisse Schlüsse ziehen kann, die gerade durch die Realitätsvoraussetzungen bedingt sind. Diese Bemerkung beachtend, werden wir die folgenden Betrachtungen bei allgemeinen Voraussetzungen ausführen.

3. Wir wollen zunächst den Wert der bilinearen Form:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{a}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + \mathfrak{b}\lambda^{(1)}\mu^{(2)} + \mathfrak{c}\mu^{(1)}\lambda^{(2)} + \mathfrak{d}\mu^{(1)}\mu^{(2)} \tag{8}$$

berechnen, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ Funktionen der Parameter u, v sind. Wenn man die Formeln (2), (4) und (5) in Anwendung bringt, so ergibt sich:

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2\sin^2\theta \sqrt{-D'}}\left[a\mathfrak{d} + c\mathfrak{a} - b(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) + \sin\theta\,(\mathfrak{b} - \mathfrak{c})\sqrt{-D}\,\right] \tag{9}$$

Wenn man sich die Werte der Richtungskoeffizienten in allgemeinster Weise

bestimmt denkt, so hat man im allgemeinen vier verschiedene Werte für F, die man aus (9) durch alle möglichen Wahlen der Vorzeichen bei den Quadratwurzeln erhalten kann. Der Wert (9) ist eine Folge der speziellen Annahmen, die unter 2 getroffen worden sind.

Nimmt man in (8)

$$\mathfrak{a} = a, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = b, \quad \mathfrak{d} = c$$

an, so ergibt sich nach (9) die Formel:

$$a\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + b\,(\lambda^{(1)}\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\lambda^{(2)}) + c\,\mu^{(1)}\mu^{(2)} = \frac{D}{\sqrt{-D'}}\,.$$

Es wird für die Folge bequem sein für die quadratische Form:

$$\Psi = n_1\xi^2 + 2m\xi\eta + n_2\eta^2$$

Bezeichnungen einzuführen, die denjenigen analog sind, welche unter **1** benutzt waren. Wir setzen nämlich:

$$n_1' = \frac{n_1\cos\theta - m}{\sin\theta}, \quad 2m' = \frac{n_1 - n_2}{\sin\theta}, \quad n_2' = \frac{m - n_2\cos\theta}{\sin\theta}$$

und bilden die Invarianten:

$$K = \frac{n_1 n_2 - m^2}{\sin^2\theta}, \quad M = \frac{n_1 + n_2 - 2m\cos\theta}{2\sin^2\theta},$$

$$K' = \frac{n_1' n_2' - m'^2}{\sin^2\theta} = K - M^2,$$

$$I = \frac{a n_2 + c n_1 - 2bm}{2\sin^2\theta},$$

$$I' = \frac{a' n_2 + c' n_1 - 2b'm}{2\sin^2\theta} = -\frac{a n_2' + c n_1' - 2bm'}{2\sin^2\theta},$$

$$I'' = \frac{a' n_2' + b' n_1' - 2b'm'}{2\sin^2\theta},$$

wo K das Gauss'sche Krümmungsmass, M die mittlere Krümmung der Fläche bezeichnet, und wo I' und I'' durch die übrigen Invarianten mit Hilfe der Formeln:

$$I'^2 = \begin{vmatrix} 1 & W & M \\ W & D & I \\ M & I & K \end{vmatrix},$$

$$I'' = I - WM$$

ausgedrückt werden können.

Wir wollen nun mit Hilfe der Formel (9) die Grössen:

$$\cos\theta^{(1,2)} = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + \mu^{(1)}\mu^{(2)} + \cos\theta\,(\lambda^{(1)}\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\lambda^{(2)}),$$

$$\sin\theta^{(1,2)} = (\lambda^{(1)}\mu^{(2)} - \mu^{(1)}\lambda^{(2)})\sin\theta$$

und die Grössen:

$$n^{(1,2)} = n_1\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + m\,(\lambda^{(1)}\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\lambda^{(2)}) + n_2\mu^{(1)}\mu^{(2)},$$

$$\tau^{(1,2)} = -\,[n_1\bar{\lambda}^{(1)}\lambda^{(2)} + m\,(\bar{\mu}^{(1)}\lambda^{(2)} + \bar{\lambda}^{(1)}\mu^{(2)}) + n_2\bar{\mu}^{(1)}\mu^{(2)}]$$

berechnen. Für die ersteren bekommt man:

$$\cos\theta^{(1,2)} = \frac{W}{\sqrt{-D'}}, \quad \sin\theta^{(1,2)} = \frac{\sqrt{-D}}{\sqrt{-D'}}$$

und beachtet man, dass

$$\tau^{(1,2)} = n_1'\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + n_2'\mu^{(1)}\mu^{(2)}$$

$$+ (m\cot g\,\theta - n_2\operatorname{cosec}\theta)\,\lambda^{(1)}\mu^{(2)} + (n_1\operatorname{cosec}\theta - m\cot g\,\theta)\,\mu^{(1)}\lambda^{(2)},$$

so ergeben sich für die letzteren die Formeln:

$$n^{(1,2)} = \frac{I}{\sqrt{-D'}}, \quad \tau^{(1,2)} = -\frac{I' + M\sqrt{-D}}{\sqrt{-D'}}\,.$$

Wir wollen uns ferner mit den Werten einer quadratischen Form:

$$\bar{\Phi} = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2$$

beschäftigen, wo α, β, γ Funktionen der Parameter u, v sind und wo λ, μ Richtungskoeffizienten bezeichnen, welche die Gleichung (1) befriedigen. Wenn man hier die Formeln (7) und die Bezeichnungen der Nummer 1 benutzt, so ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{D'}\,(D\Omega - W\mathfrak{W} + \varepsilon\mathfrak{W}'\sqrt{-D}), \tag{10}$$

wo $\varepsilon = +1$ der Kurvenschar mit dem Index 1 und $\varepsilon = -1$ der Kurvenschar mit dem Index 2 entspricht.

Wir nehmen insbesondere:

$$\alpha = a', \quad \beta = b', \quad \gamma = c'.$$

Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Spezialfalle die Form $\overline{\Phi}$ den Wert $\varepsilon\sqrt{-D}$ besitzt. Daraus folgt die Beziehung:

$$a\lambda\overline{\lambda} + b(\lambda\overline{\mu} + \mu\overline{\lambda}) + c\mu\overline{\mu} = -\varepsilon\sqrt{-D}. \tag{11}$$

Auf Grund der Formel (10) können Ausdrücke für die Normalkrümmung und die geodätische Torsion erhalten werden. Für die Normalkrümmung:

$$n = n_1\lambda^2 + 2m\lambda\mu + n_2\mu^2$$

ergibt sich nämlich:

$$n = \frac{1}{D'}(DM - WI + \varepsilon I'\sqrt{-D})$$

und für die geodätische Torsion:

$$\tau = -[n_1\lambda\overline{\lambda} + m(\lambda\overline{\mu} + \mu\overline{\lambda}) + n_2\mu\overline{\mu}],$$

die auch in der Form:

$$\tau = n_1'\lambda^2 + 2m'\lambda\mu + n_2'\mu^2$$

dargestellt werden kann, ergibt sich die Formel:

$$\tau = \frac{1}{D'}(WI' + \varepsilon I''\sqrt{-D}). \tag{12}$$

Aus der Formel (12) oder aus der Formel (11) kann der Satz über die geodätische Torsion der Haupttangentenkurven abgelesen werden. Man bekommt nämlich für diese Kurven:

$$\tau = \varepsilon\sqrt{-K}.$$

VII. Über gewisse Scharen von konformen Abbildungen der Flächen.

In dieser Note werden derartige Systeme von Biegungsinvarianten der Flächen betrachtet, welche auch bei gewissen Scharen von konformen Abbildungen unverändert bleiben.

1. Es seien:

$$ds^2 = \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\,du_i\,du_\varkappa \quad \text{und} \quad ds'^2 = \sum_{\lambda\mu} a'_{\lambda\mu}\,du'_\lambda\,du'_\mu$$

wo i, $\varkappa$ und λ, μ die Werte 1, 2 annehmen, die Quadrate der Linienelemente zweier Flächen und es mögen in Folge der Transformation:

$$u_1' = u_1'(u_1, u_2), \qquad u'_2 = u'_2(u_1, u_2) \tag{1}$$

die Beziehungen:

$$a_{i\varkappa} = \sum_{\lambda\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\varkappa} \quad (i, \varkappa = 1, 2) \tag{2}$$

bestehen, d. h. es sei in Folge dieser Transformation:

$$ds^2 = ds'^2. \tag{3}$$

Mit den Gleichungen (2) ist in bekannter Weise eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten verbunden. Bezeichnet man irgend welche dieser Differentialinvarianten für die erste Fläche mit I und dieselbe Differentialinvariante für die zweite Fläche mit I', so kann aus den Gleichungen (2) die Beziehung:

$$I = I' \tag{4}$$

abgeleitet werden. Aus den Gleichungen (3) und (4) kann die Beziehung:

$$I\,ds^2 = I'\,ds'^2 \tag{5}$$

gefolgert werden, welche also auch eine Folge der Gleichungen (2) ist. Es ist aber klar, dass umgekehrt aus der Beziehung (5) und aus den Gleichungen (1) unter den Funktionen $a_{i\varkappa}$ und $a'_{\lambda\mu}$ Beziehungen folgen müssen, welche sicher allgemeiner als die Beziehungen (2) sind. Diese allgemeineren Beziehungen zu erläutern ist der Zweck der gegenwärtigen Note.

2. Wir wollen zunächst eine etwas einfachere Frage beantworten. Es sei eine dritte Fläche, deren Quadrat des Linienelementes aus ds'^2 durch Einführung der Variablen u_1, u_2 vermöge der Gleichungen (1) folgt. Ist dieses Quadrat des Linienelementes:

$$d\overline{s}^2 = \sum_{i\varkappa} \overline{a}_{i\varkappa}\,du_i\,du_\varkappa,$$

so bestehen in Folge der Voraussetzung:

$$d\overline{s}^2 = ds'^2 \tag{6}$$

die Beziehungen:

$$\overline{a}_{i\varkappa} = \sum_{\lambda\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\varkappa} \quad (i, \varkappa = 1, 2) \tag{7}$$

und bezeichnet man die früher betrachtete Differentialinvariante für diese dritte Fläche mit $\overline{I}$, so hat man die Gleichheit:

$$\overline{I} = I'. \tag{8}$$

Auf Grund der Beziehungen (6) und (8) lässt sich nun aus der Relation (5) die Relation:

$$I\,ds^2 = \bar{I}\,d\bar{s}^2 \tag{9}$$

folgern, in welcher auf beiden Seiten dieselben unahhängigen Veränderlichen u_1, u_2 auftreten.

Die Relation (9) kann durch Einführung einer Funktion ρ^2 der Veränderlichen u_1, u_2 durch zwei Relationen ersetzt werden. Wir können nämlich die Beziehung:

$$d\bar{s}^2 = \rho^2\,ds^2 \tag{10}$$

und die Beziehung:

$$\bar{I} = \frac{1}{\rho^2}\,I \tag{11}$$

annehmen. Aus (10) folgen aber die Relationen:

$$\bar{a}_{11} = \rho^2 a_{11}\,, \qquad \bar{a}_{12} = \rho^2 a_{12}\,, \qquad \bar{a}_{22} = \rho^2 a_{22} \tag{12}$$

und es lässt sich auf Grund derselben die Beziehung (11) kurz in der Form:

$$I(\rho^2 a_{i\varkappa}) = \frac{1}{\rho^2}\,I(a_{i\varkappa}) \tag{13}$$

darstellen, wo mit $I(a_{i\varkappa})$ unsere Differentialinvariante, berechnet für Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ der Differentialform und mit $I(\rho^2 a_{i\varkappa})$ unsere Differentialinvariante, berechnet für $\rho^2 a_{i\varkappa}$ als Koeffizienten der Differentialform, bezeichnet wird. Es kann demnach unsere Frage derart beantwortet werden, dass zwischen den Funktionen $a_{i\varkappa}$ und $\bar{a}_{i\varkappa}$ die Beziehungen (12) bestehen, in welchen ρ^2 eine Funktion der Veränderlichen u_1, u_2 ist, welche die partielle Differentialgleichung (13) befriedigt.

3. Wir gehen nun zu den Relationen über, durch welche die Funktionen $a_{i\varkappa}$ mit den Funktionen $a'_{\lambda\mu}$ verbunden werden müssen. Unter Zugrundelegung der Transformationsgleichungen:

$$u_1' = u_1'(u_1, u_2)\,, \qquad u_2' = u'_2(u_1, u_2) \tag{1}$$

können diese Relationen in der Form:

$$\rho^2 a_{i\varkappa} = \sum_{\lambda\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\varkappa}\,. \quad (i, \varkappa = 1, 2) \tag{14}$$

dargestellt werden, wo ρ^2 eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$I(\rho^2 a_{i\varkappa}) = \frac{1}{\rho^2}\,I(a_{i\varkappa})$$

bezeichnet.

Wir wollen eine Eigenschaft unseres Gleichungensystems (1), (14), (13) näher besprehen.

Hat man die Funktionen u_1', u_2' gewählt und für ρ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (13) angenommen, so liefern die Relationen (14) die Funktionen $a'_{\lambda\mu}$. Man nehme nun zwei unabhängige Funktionen:

$$u_1'' = u_1''(u_1', u_2')\,, \qquad u_2'' = u_2''(u_1', u_2')\,, \tag{15}$$

man wähle für ρ'^2 eine Funktion der Veränderlichen u_1', u_2', welche die partiellen Differentialgleichung:

$$I'(\rho'^2 a'_{\lambda\mu}) = \frac{1}{\rho'^2}\,I'(a'_{\lambda\mu}) \tag{16}$$

befriedigt, wo die Bezeichnungen analog, wie in (13) zu verstehen sind, und man bestimme die Funktionen a''_{pq} aus den Gleichungen:

$$\rho'^2 a'_{\lambda\mu} = \sum_{pq} a''_{pq} \frac{\partial u''_p}{\partial u'_\lambda} \frac{\partial u''_q}{\partial u'_\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2)\,. \tag{17}$$

Wir bemerken, dass aus der Tatsache, dass I eine Differentialinvariante der Differentialform ds^2 ist, die Beziehungen:

$$I'(a'_{\lambda\mu}) = I(\rho^2 a_{i\varkappa})\,,$$

$$I'(\rho'^2 a'_{\lambda\mu}) = I(\rho^2 \rho'^2 a_{i\varkappa})$$

folgen, wo man in der letzten Beziehung rechter Hand ρ'^2 durch die Veränderlichen u_1, u_2 ausgedrückt zu denken hat. Wenn man also die Bezeichnung:

$$\rho_1^2 = \rho^2 \rho'^2$$

in Anwendung bringt und auch hier ρ'^2 durch die Veränderlichen u_1, u_2 ausgedrückt denkt, so wird man aus den früheren Beziehungen die Beziehungen:

$$u_1'' = \underline{u}_1''(u_1, u_2)\,, \qquad u_2'' = \underline{u}_2''(u_1, u_2)\,,$$

$$\rho_1^2 a_{i\varkappa} = \sum_{pq} a''_{pq} \frac{\partial \underline{u}''_p}{\partial u_i} \frac{\partial \underline{u}''_q}{\partial u_\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2)$$

$$I(\rho_1^2 a_{i\varkappa}) = \frac{1}{\rho_1^2}\,I(a_{i\varkappa})$$

ableiten können.

Dieses Ergebnis kann in folgender Weise erläntert werden.

Die Gleichungen (1), (14) und (13) definiren eine Schar von konformen Abbildungen der Fläche, die durch das Quadrat des Linienelementes ds^2 gegeben ist. Eine bestimmte dieser Abbildungen gibt eine Fläche mit einem bestimmten Quadrate des Linienelementes ds'^2. Wenn man von dieser zweiten Fläche durch eine Abbildung, welche auf dieselbe Weise wie die frühere Abbildung ausgeführt wird, zur dritten Fläche mit dem Quadrate des Linienelementes ds''^2 gelangt, so erhält man eine Fläche, welche derart auf die erste abgebildet ist, dass diese Abbildung in der durch die Gleichungen (1), (14) und (13) definirten Schar von Abbildungen enthalten ist.

4. Wir fragen nun nach Relationen, welche aus den Beziehungen (13) und (14) folgen und die Funktionen $a_{i\varkappa}$ und deren Ableitungen verschiedener Ordnungen nach u_1, u_2, die Funktionen $a'_{\lambda\mu}$ und deren Ableitungen verschiedener Ordnungen nach u'_1, u_2' enthalten und von anderen veränderlichen Grössen frei sind. Derartige Relationen müssen offenbar aus den Beziehungen:

$$I a_{i\varkappa} = I' \sum_{\lambda\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\varkappa} \quad (i,\ \varkappa = 2) \tag{18}$$

und aus Beziehungen, welche durch Differentiationen verschiedener Ordnungen letzterer Beziehungen folgen, durch Elimination der Ableitungen der Funktionen u_1', u_2' nach den Veränderlichen u_1, u_2 sich ergeben. Für $I = I' = 1$ sind aber diese Eliminationsresultate bekannt; es sind Gleichheiten von Differentialinvarianten der quadratischen binären Differentialform ds^2, welche für die urspründliche und die trasformierte Differentialform berechnet sind. Es erübrigt in diesen Gleichheiten die Funktionen $a_{i\varkappa}$ durch die Funktionen $I a_{i\varkappa}$ und die Funktionen $a'_{\lambda\mu}$ durch die Funktionen $I' a'_{\lambda\mu}$ zu ersetzen um zu allen Eliminationsresultaten desjenigen Systems zu gelangen, welches aus Gleichungen (18) und aus Gleichungen besteht, die aus (18) durch einfache und mehrfache Differentiationen sich ergeben. Diese Eliminationsresultate erscheinen alsdann auch in Invariantenform. Wir kommen auf diese Weise zu Ausdrücken, welche Differentialinvarianten der Differentialform $I ds^2$ genannt werden können.

Es ist ohne werteres klar, dass sobald wir mit den Gleichungen (18) noch eine oder mehrere Gleichungen von der Form:

$$\varphi(u_1,\ u_2) = \varphi'(u_1',\ u_2')$$

betrachten, alsdann auch Differentialparameter der Differentialform $I ds^2$ erhalten werden können.

Wir können auch zwei auf der Hand liegenden Sätze anführen. Es sind nämlich alle Differentialinvarianten der Differentialform $I ds^2$ zugleich auch

Differentialinvarianten der Differentialform ds^2. Es sind gleichfalls alle Differentialparameter der Differentialform $I ds^2$ auch Differentialparameter der Differentialform ds^2. Es ist derart aus der Gesammtheit der Differentialinvarianten und der Differentialparameter der Differentialform ds^2 eine besondere Klasse abgesondert worden, welche dadurch charakterisirt ist, dass sie alle diejenigen dieser Differentialinvarianten und Differentialparameter enthält, die gleichzeitig, in der früher angegebenen Weise, der Differrentialform $I ds^2$ zugehören.

5. Es mögen einige Beispiele betrachtet werden.

Die Differentialform ds^2 besitzt die Differentialparameter:

$$\Delta_1 \varphi = \frac{a_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2 - 2 a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + a_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} - a_{12}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_2}\right) + a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2},$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} - a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}\right] \right\}$$

und daraus folgt, dass der Differentialform $I ds^2$ die Differentialparameter:

$$\frac{\Delta_1 \varphi}{I}, \quad \frac{\nabla(\varphi, \psi)}{I}, \quad \frac{\Delta_2 \varphi}{I}$$

zugehören.

Für die Differentialform ds^2 haben wir die Differentialinvariante:

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)^2} \Bigg\{ & a_{11}\left[\frac{\partial a_{11}}{\partial u_2} \frac{\partial a_{22}}{\partial u_2} - 2 \frac{\partial a_{12}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{22}}{\partial u_2} + \left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u_1}\right)^2\right] \\ & + a_{12}\left[\frac{\partial a_{11}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{22}}{\partial u_2} - \frac{\partial a_{11}}{\partial u_2} \frac{\partial a_{22}}{\partial u_1} - 2 \frac{\partial a_{11}}{\partial u_2} \frac{\partial a_{12}}{\partial u_2} + 4 \frac{\partial a_{12}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{12}}{\partial u_2}\right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial a_{12}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{22}}{\partial u_1}\right] + a_{22}\left[\frac{\partial a_{11}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{22}}{\partial u_1} - 2 \frac{\partial a_{11}}{\partial u_1} \frac{\partial a_{12}}{\partial u_2} + \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial u_2}\right)^2\right] \\ & - 2(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial u_2^2} - 2 \frac{\partial^2 a_{12}}{\partial u_2 \partial u_1} + \frac{\partial^2 a_{22}}{\partial u_1^2}\right) \Bigg\} \end{aligned}$$

und man kann beweisen, dass dementsprechend für die Differentialform $I ds^2$ die Differentialinvariante:

$$\frac{1}{I}\,[K - \tfrac{1}{2}\Delta_2 (\log I)]$$

vorhanden ist.

Wir wollen schliesslich noch die folgende Bemerkung hinzufügen.

Jede zwei Flächen können aufeinander konform abgebildet werden. Wenn es sich aber um konforme Abbildungen gewisser besonderer Art handelt, so kann dies nicht der Fall sein. Im Zusammenhange mit den früheren Ausführungen kann nämlich die Frage behandelt werden, welchen Bedingungen zwei Flächen genügen müssen, damit sie derart aufeinander konform abgebildet werden könnten, dass die Gleichheit:

$$I\,ds^2 = I'\,ds'^2$$

bestehe. Die Antwort kann in analoger Weise wie für die Isometrie zweier Flächen erhalten werden. Auf die Einzelheiten gehen wir indessen nicht näher ein.

W. SIERPIŃSKI.

Dowód elementarny twierdzenia Weierstrass'a i wzoru interpolacyjnego Borel'a.

(Démonstration élémentaire du théorème de Weierstrass et de la formule d'interpolation de M. Borel).

W pracy niniejszej pragnę przedstawić w sposób jaknajbardziej elementarny dowód twierdzenia Weierstrassa (że każda funkcya, ciągła w danym przedziale, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów), tudzież ogólnego wzoru interpolacyjnego Borela.

1. Funkcya $|x|$ jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj wymiernych.

Twierdzenie. Dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$ mamy przy wszelkiem naturalnem n nierówność:

$$0 \leqslant |x| - x\,\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dowód. Połóżmy

$$|x| - x\,\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} = r_n.$$

Rozważymy osobno przypadki: $x \geqslant 0$, oraz $x < 0$.

1) $x \geqslant 0$. Mamy tu $|x| = x$, zatem:

$$r_n = \frac{2x}{(1+x)^n + 1}.$$