W. SIERPIŃSKI.

O pewnem twierdzeniu z Teoryi mnogości i jego zastosowaniach do Analizy funkcyj nieciągłych.

Sur un théorème de la Théorie des ensembles et ses applications à l'Analyse des fonctions discontinues.

Twierdzenie. Zbiór (N) punktów przedziału $\delta = (a, b)$, nie należących do żadnego z przeliczalnej mnogości zbiorów zamkniętych

$$F_1, \ F_2, \ F_3, \ldots\ldots, \qquad (F)$$

jest skończony, przeliczalny, lub mocy continuum.

Dowód. Wystarczy oczywiście rozważyć tylko przypadek, kiedy zbiór (N) jest nieprzeliczalny. Nazywamy miejsce skupienia g danego zbioru punktem rzędu nieprzeliczalnego[1], jeżeli w każdym dowolnie małym przedziale, zawierającym wewnątrz g, znajduje się nieprzeliczalna mnogość punktów tego zbioru. Dowodzimy z łatwością, że wszystkie punkty danego zbioru, które nie są punktami rzędu nieprzeliczalnego, tworzą zbiór przeliczalny[2]. Wynika stąd, że każdy zbiór nieprzeliczalny zawiera nieprzeliczalną mnogość elementów, które są punktami rzędu nieprzeliczalnego.

Według tego twierdzenia, w zbiorze nieprzeliczalnym (N) możemy w każdym razie wskazać dwa różne jego elementy p_0 i $p_1 > p_0$, leżące wewnątrz przedziału (a, b) i będące punktami rzędu nieprzeliczalnego.

---

[1]) „Punkt von nicht abzählbarer Ordnung" (Schoenflies). Natomiast Lindelöf nazywa: „point de condensation".

[2]) Obacz: A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. II (Leipzig, 1908) p. 75.

Punkty p_0 i p_1 należą do zbioru (N), a więc nie należą do zbioru F_1. Skoro p_0 nie należy do zbioru zamkniętego F_1, to, jak wiadomo, przy dostatecznie małem ε, w przedziale $(p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon)$ nie będzie żadnego punktu zbioru F_1; podobnie dla punktu p_1. Możemy więc w każdym razie wyznaczyć przedziały $\delta_0 = (a_0, b_0)$ oraz $\delta_1 = (a_1, b_1)$, dla których

$$a < a_0 < p_0 < b_0 < a_1 < p_1 < b_1 < b$$

i które nie zawierają żadnego punktu zbioru F_1. W każdym z przedziałów δ_0 i δ_1 mamy punkt rzędu nieprzeliczalnego, a więc nieprzeliczalną mnogość punktów zbioru (N).

Możemy więc do każdego z przedziałów δ_0 i δ_1 zastosować to rozumowanie, które stosowaliśmy do przedziału δ, z tą różnicą, że weźmiemy zbiór F_2 zamiast zbioru F_1. Otrzymamy w ten sposób cztery nowe przedziały

$$\delta_{00}, \quad \delta_{01}, \quad \delta_{10}, \quad \delta_{11},$$

z których każdy zawierać będzie nieprzeliczalną mnogość elementów zbioru (N), ale żadnego elementu ze zbiorów F_1 i F_2; nadto, przedziały $\delta_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 0, 1)$ będziemy mogli wyznaczyć jeszcze w ten sposób, iż, gdy położymy ogólnie

$$\delta_{i\varkappa} = (a_{i\varkappa}, b_{i\varkappa}),$$

będzie:

$$a_0 < a_{00} < b_{00} < a_{01} < b_{01} < b_0 < a_1 < a_{10} < b_{10} < a_{11} < b_{11} < b_1 .$$

Względem każdego z przedziałów $\delta_{i\varkappa}$ powtórzyć możemy znowu nasze rozumowanie, biorąc zbiór F_3, co doprowadzi nas do nowych ośmiu przedziałów

$$\delta_{000}, \quad \delta_{001}, \quad \delta_{010}, \quad \delta_{011}, \quad \delta_{100}, \quad \delta_{101}, \quad \delta_{110}, \quad \delta_{111}$$

i t. d.

Ogólnie, mając przedział

$$\delta_{c_1 c_2 \ldots c_n} = (a_{c_1 c_2 \ldots c_n}, \ b_{c_1 c_2 \ldots c_n}),$$

zawierający nieprzeliczalną mnogość punktów zbioru (N), a przytem nie zawierający punktów żadnego ze zbiorów

$$F_1, \quad F_2, \ldots . \quad F_n,$$

wyznaczymy zawsze dwa nowe przedziały

$$\delta_{c_1 c_2 \ldots c_n 0} = (a_{c_1 c_2 \ldots c_n 0}, \ b_{c_1 c_2 \ldots c_n 0}) \text{ oraz } \delta_{c_1 c_2 \ldots c_n 1} = (a_{c_1 c_2 \ldots c_n 1}, \ b_{c_1 c_2 \ldots c_n 1}),$$

które będą zawierały nieprzeliczalną mnogość punktów zbioru (N), a nie będą zawierały punktów żadnego ze zbiorów

$$F_1, \quad F_2, \ldots . \quad F_n, \quad F_{n+1}$$

i przytem takie, iż

$$a_{c_1 c_2 \ldots c_n} < a_{c_1 c_2 \ldots c_n 0} < b_{c_1 c_2 \ldots c_n 0} < a_{c_1 c_2 \ldots c_n 1} < b_{c_1 c_2 \ldots c_n 1} < b_{c_1 c_2 \ldots c_n} \qquad (*)$$

Niech teraz ξ oznacza daną liczbę przedziału (0, 1). Napiszmy ją w postaci ułamka nieskończonego w układzie dwójkowym:

$$\xi = (0, \ c_1 c_2 c_3 \ldots .)_2$$

Rozwinięcie takie będzie dla każdej liczby przedziału (0, 1) jedyne, pod warunkiem, że w razie $\xi > 0$ ma ono zawierać nieskończenie wiele cyfr 1.

Weźmy teraz pod rozwagę nieskończony ciąg przedziałów:

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \ldots ..,$$

kładąc ogólnie

$$d_n = \delta_{c_1 c_2 \ldots c_n}.$$

Każdy z naszych przedziałów jest oczywiście zawarty wewnątrz poprzedzającego i przytem d_n nie zawiera punktów żadnego ze zbiorów

$$F_1, \quad F_2, \ldots . \quad F_n.$$

Połóżmy, przez skrócenie

$$u_n = a_{c_1 c_2 \ldots c_n}, \quad v_n = b_{c_1 c_2 \ldots c_n}.$$

Wobec nierówności (*) ciąg u_n będzie stale rosnący, ciąg v_n stale malejący i będziemy mieli stale $u_n < v_n$. Ciągi u_n i v_n będą zatem zbieżne: oznaczając $\lim u_n = u$, $\lim v_n = v$, będziemy mieli $u \leqslant v$. Połóżmy

$$\frac{u+v}{2} = x.$$

Będziemy mieli stale $u_n < x < v_n$: punkt x będzie więc zawarty wewnątrz każdego z przedziałów d_n: nie będzie on zatem należał do żadnego ze zbiorów F_n. Wnosimy stąd, że punkt x będzie należał do zbioru (N).

Każdej liczbie ξ przedziału (0, 1) podporządkowaliśmy zatem oznaczony punkt x zbioru (N). Powiadam, że r ó ż n y m liczbom ξ i ξ' odpowiadają r ó ż n e punkty x i x'.

Niech, w samej rzeczy, będzie $\xi' > \xi$ i załóżmy, że liczby te różnią się dopiero w k-tym znaku swych rozwinięć dwójkowych. Możemy więc (w układzie dyadycznym) położyć

$$\xi = 0, \ c_1 c_2 \ldots c_{k-1} \, 0 \, c_{k+1} \, c_{k+2} \ldots .$$

$$\xi' = 0, \ c_1 c_2 \ldots c_{k-1} \, 1 \, c'_{k+1} \, c'_{k+2} \ldots .$$

Oznaczmy przez x i x' punkty zbioru (N), odpowiadające liczbom ξ i ξ'. Punkty te będą zawarte odpowiednio wewnątrz przedziałów

$$\delta_{c_1 c_2 \dots c_n 0} \text{ oraz } \delta_{c_1 c_2 \dots c_n 1}.$$

Mamy zatem:

$$x < b_{c_1 c_2 \dots c_n 0} < a_{c_1 c_2 \dots c_n 1} < x',$$

zatem $x \neq x'$.

Oznaczmy przez (X) zbiór tych wszystkich punktów zbioru (N), które podporządkowaliśmy liczbom ξ przedziału (0, 1). Z dowiedzionego wynika, że zbiór (X) oraz zbiór liczb przedziału (0, 1) są równej mocy. Stąd natychmiastowy wniosek, że (N) jest zbiorem mocy continuum.

Twierdzenie nasze zostało więc udowodnione.

Wniosek. Jeżeli Φ jest zbiorem zamkniętym, leżącym w przedziale (a, b), to zbiór (N) punktów zbioru Φ, nie należących do żadnego z przeliczalnej mnogości zbiorów zamkniętych

$$F_1, \quad F_2, \quad F_3, \quad \dots\dots$$

jest skończony, przeliczalny, lub mocy continuum.

Dowód. Każdy zbiór zamknięty Φ, leżący w przedziale (a, b), możemy, jak wiadomo, uważać, jako zbiór wszystkich punktów, nie leżących wewnątrz żadnego z pewnej przeliczalnej mnogości przedziałów

$$D_n = (\alpha_n, \beta_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Zbiór zaś wszystkich punktów wewnętrznych przedziału D_n uważać możemy oczywiście jako zbiór punktów, należących do któregokolwiek ze zbiorów zamkniętych $\varphi_{n,k}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, gdzie $\varphi_{n,k}$ jest zbiorem wszystkich punktów, leżących wewnątrz lub na granicach przedziału

$$\varphi_{n,k} = \left(\alpha_n + \frac{\beta_n - \alpha_n}{2k}, \quad \beta_n - \frac{\beta_n - \alpha_n}{2k}\right).$$

Stąd wniosek, że zbiór zamknięty Φ uważać możemy jako zbiór wszystkich punktów przedziału (a, b), nie należących do żadnego ze zbiorów zamkniętych

$$\varphi_{n,k} \quad \text{dla} \quad \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \dots \\ k = 1, 2, 3, \dots, \end{array}$$

a więc do żadnego z pewnej przeliczalnej mnogości zbiorów zamkniętych.

Zbiór (N) będzie więc zbiorem wszystkich punktów przedziału (a, b), nie należących do żadnego ze zbiorów zamkniętych

$$\varphi_{n,k} \quad \text{oraz} \quad F_m,$$

których mnogość jest oczywiście przeliczalna.

Zbiór (N) spełnia zatem warunki udowodnionego twierdzenia, jest przeto skończony, przeliczalny, lub mocy continuum, co było do okazania.

Twierdzenie. Dla każdej funkcyi $f(x)$ nawpół ciągłej zgóry w przedziale (a, b), zbiór wszystkich rozwiązań równania $f(x) = k$ przy danem k, jest skończony, przeliczalny, lub mocy continuum.

Dowód. Funkcyę $f(x)$ nazywamy w przedziale (a, b) nawpół-ciągłą zgóry (semi-continue supérieurement), jeżeli przy wszelkiem danem k zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant k$ jest zamknięty [1]. Nazwijmy ten zbiór przy danem k przez Φ, zaś przez F_n oznaczmy zbiór zamknięty wszystkich rozwiązań nierówności

$$f(x) \geqslant k + \frac{1}{n}.$$

Zbiór wszystkich rozwiązań równania $f(x) = k$ będzie oczywiście zbiorem wszystkich tych punktów zbioru zamkniętego Φ, które nie należą do żadnego z przeliczalnej mnogości zbiorów zamkniętych F_n. Zbiór Φ będzie więc skończony, przeliczalny, lub mocy continuum, jak chcieliśmy dowieść.

Niech teraz $\varphi(x)$ oznacza funkcyę dowolną, określoną w przedziale (a, b), zaś $\omega(x)$ — jej oscylacyę w punkcie x [2]. Wiemy, że oscylacya jest funkcyą nawpół-ciągłą z góry. Stąd

Twierdzenie. Dla każdej funkcyi $\varphi(x)$ w przedziale (a, b) zbiór wszystkich punktów, w których oscylacya funkcyi jest równa jednej i tej samej liczbie k, jest skończony, przeliczalny lub mocy continuum.

W szczególności, dla $k = 0$ otrzymujemy:

Zbiór wszystkich punktów przedziału, w których funkcya jest ciągła, jest zawsze skończony, przeliczalny lub mocy continuum [3].

---

[1] R. Baire, który wprowadził pojęcie funkcyj nawpół-ciągłych, podaje inną definicyę (Obacz: Leçons sur les fonctions discontinues. Paris 1905, p. 71). Łatwo jednak dowieść, że jest ona równoważną podanej przez nas.

[2] Obacz: Baire, l. c. lub Borel: Leçons sur les fonctions de variables réelles. Paris 1905, p. 24.

[3] Obacz też mój komunikat: „Sur la puissance de l'ensemble des points de continuité d'une fonction". Sprawozdania Tow. Nauk. Warsz. 1911, zeszyt I.