

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{d_n\}$$

$$a + b \neq d$$

gdzie a, b, d są uogólnionymi granicami ciągów $\{a_n\}, \{b_n\}, \{d_n\}$. Przy-
puśćmy, że $\{a_n\}$ jest najpóźniejszym ze wszystkich trzech ciągów. Ponieważ
związek

$$\{a_n\} + \{b_n\} - \{d_n\} = 0$$

ma wszystkie własności związku (30), więc wnosimy z niego

$$a = d - b,$$

wbrew temu, co wyżej przypuściliśmy. —

Jasło, 14 listopada 1911.

M. WOLFKE.

Zastosowanie teorii Abbego do siatki dyfrakcyjnej.¹⁾

(Application de la théorie d'Abbe au réseau diffringent).

Wstęp.

Pomiędzy obrazem optycznym przedmiotów samoświejących i takich,
które świecą nie własnym światłem, zachodzi zasadnicza różnica, na donio-
słość której wskazał po raz pierwszy E. Abbe.

Mianowicie, promienie, które wychodzą z różnych punktów przedmio-
tów niesamoświejących, posiadają własność wywoływania pomiędzy sobą zja-
wisk interferencyi, o ile zostaną przez soczewkę w jednym punkcie zjedno-
czone; promienie zaś, wychodzące z różnych punktów przedmiotów samo-
świejących, nie posiadają tej własności. Gdy takie dwa promienie się spoty-
kają, tedy sumują się jedynie ich natężenia świetlne. Przy promieniach, które
interferują ze sobą, sumują się ich amplitudy geometrycznie i natężenie
światła wyrazi się przez kwadrat amplitudy wypadkowej.

Jeżeli np. posiadamy przedmiot niesamoświejący, obraz jego mikro-
skopowy może przyjąć najróżnorodniejsze formy, zależnie od tego, w jaki
sposób promienie świetlne w mikroskopie ze sobą interferować będą. Abbe
z badał te zjawiska systematycznie i rezultat doświadczalny tych badań został
w wielu podręcznikach Fizyki dokładnie opisany ²⁾ Matematyczna teoria tych
zjawisk została dopiero obecnie opracowana na podstawie lekcji Abbego. ³⁾

¹⁾ M. Wolfke, „Über die Abbildung eines Gitters bei künstlicher Begrenzung“.
Inaug. Diss. Wrocław, 1910. Annalen der Physik. (4) **34** p. 277—310 1911.

²⁾ Np. O. Lummer, „Müller-Pouillet“. Optyka. 1907.

³⁾ E. Abbe, „Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop“ opracowali O. Lum-
mer i Fr. Reiche. 1910.

W obecnej pracy podaję zastosowanie tej nowo opracowanej teorii Abbego do obrazu optycznego siatki dyfrakcyjnej.

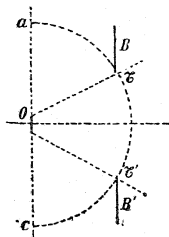
Jak wiadomo, obraz optyczny przedmiotów niesamoświecących powstaje w następujący sposób:

1. Światło, przechodząc przez przedmiot nieświecący, ulega uginaniu się i tworzy w ten sposób obraz ugięty, lub to co nazywamy obrazem pierwotnym. O ile przedmiot został oświetlony światłem równoległym, obraz pierwotny powstaje w płaszczyźnie ogniskowej obiektywu.

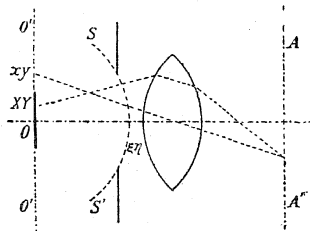
2. Fale świetlne, idące z obrazu pierwotnego, jednoczą się za pomocą okularu w płaszczyźnie obrazu, i tam, dzięki interferencji, wytwarzają obraz właściwy przedmiotu, lub to, co nazywamy obrazem wtórnym.

Jednakże nie wszystkie promienie obrazu pierwotnego mogą wziąć udział w tworzeniu obrazu wtórnego, gdyż część ich zostaje zatrzymana przez diafragmę obiektywu.

Niechaj np. na Fig. 1 O wyobraża przedmiot niesamoświecący, BB' — diafragmę, tedy z obrazu pierwotnego, który się na całej półkuli abc ułoży,



Rys. 1.



Rys. 2.

tylko ta część zostanie użyta, która się znajduje pomiędzy brzegami diafragmy bb' . Stąd widocznym jest, iż wielkość i kształt diafragmy muszą wywierać określony wpływ na ostateczny obraz optyczny przedmiotu.

Niechaj na Fig. 2, OO' — będzie płaszczyzną przedmiotu, AA' — płaszczyzną sprzężoną z płaszczyzną przedmiotu, czyli płaszczyzną obrazu optycznego, SS' — powierzchnia zamknięta, która w danym przypadku będzie kulą, opisaną promieniem e wokół przedmiotu. Niechaj przedmiot będzie bardzo mały w stosunku do promienia e . Punkty przedmiotu oznaczmy współrzędnymi XY . Punkty sprzężone płaszczyzny obrazu optycznego oznaczmy współrzędnymi x, y . Niechaj ξ i η będą współrzędne elementu kuli, a ξ' i η' niechaj będą: $\xi' = \frac{\xi}{e}$ i $\eta' = \frac{\eta}{e}$, czyli szerokość i wysokość biegu-

nowa elementu danego kuli. Wektor świetlny w określonym punkcie ξ, η obrazu pierwotnego, otrzyma następujące wyrażenie:¹⁾

$$(1) \quad S_1 = \frac{K}{\lambda} \int_{\text{Przedmiot}} dX dY \varphi(XY) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \psi(XY) + \frac{\xi'X + \eta'Y}{\lambda} \right],$$

gdzie K oznacza pewną stałą, λ — długość fali użytego światła, $\varphi(XY)$ — współczynnik przepuszczalności świetlnej przedmiotu, $\psi(XY)$ — zmianę fazy światła przy przejściu jego przez przedmiot, t — czas, T — peryod wahań świetlnych dla danej fali. Całkowanie musi być rozciągnięte na cały przedmiot.

Wektor świetlny w punkcie x, y płaszczyzny sprzężonej obrazu optycznego, wyrazi się tak:²⁾

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} S_2 &= \frac{K}{\lambda^2} \int_{\text{Otwór}} d\xi' d\eta' \int_{\text{Przedmiot}} dX dY \varphi(XY) \sin 2\pi \\ &\quad \left[\frac{t}{T} - \psi(XY) - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y-Y)}{\lambda} \right], \end{aligned} \right.$$

przyczem całkowanie musi się rozciągnąć na cały przedmiot i na cały otwór.

Obydwa powyższe równania stanowią podstawę i punkt wyjścia naszych dalszych rozważań nad obrazem optycznym siatki dyfrakcyjnej.

Z równań powyższych postaramy się znaleźć wyrażenia na natężenie światła w obrazie pierwotnym, które oznaczmy symbolem I_1 i na natężenie światła w obrazie wtórnym, I_2 .

Dla prostoty przyjmiemy, iż nasz przedmiot leży symetrycznie do osi głównej danego systemu optycznego, i niechaj rozciąga się w kierunku osi X od $-A$ do $+A$, w kierunku osi Y od $-B$ do $+B$. Dla siatki dyfrakcyjnej współczynnik przepuszczalności φ będzie się zmieniał tylko wzdłuż jednej osi, dajmy na to wzdłuż osi X , wzdłuż zaś osi Y pozostaje φ stałym. Następnie zakładamy, iż światło pada na nasz przedmiot prostopadłe do jego płaszczyzny, tak iż możemy funkcję ψ uważać za niezmienną. Tedy możemy dla ruchu światła S_1 w obrazie pierwotnym napisać:

$$(3) \quad S_1 = \frac{K}{\lambda} \int_{-B}^{+B} dY \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{\xi'X + \eta'Y}{\lambda} \right];$$

gdzie funkcja φ jest symetryczna i parzysta. W wyrażeniu (3) rozkładamy wstawę i całkujemy względem zmiennej Y ; otrzymamy:

¹⁾ E. Abbe, loc. cit. p. 89, wzór (72).

²⁾ E. Abbe, loc. cit. p. 87, wzór (68).

$$S_1 = \frac{2K}{\lambda} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{2\pi\eta'} \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{\xi' X}{\lambda} \right],$$

lub też:

$$S_1 = A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

przyczem spólczynniki A_1 i B_1 mają następujące wartości:

$$A_1 = \frac{2K}{\lambda} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{2\pi\eta'} \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi\xi' X}{\lambda};$$

$$B_1 = -\frac{2K}{\lambda} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{2\pi\eta'} \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin \frac{2\pi\xi' X}{\lambda}.$$

Wobec tego, że funkcja $\sin(2\pi\xi' X)/\lambda$ jest symetryczna i nieparzysta, wyraz B_1 zniknie i natężenie światła I_1 obrazu pierwotnego wyrazi się następującym równaniem:

$$(4) \quad I_1 = A_1^2 = \frac{4K^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{(2\pi\eta')^2} \left[\int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi\xi' X}{\lambda} \right]^2.$$

Równanie to jest ogólnym równaniem natężenia światła obrazu pierwotnego dla przedmiotów symetrycznych.

Dla otrzymania natężenia światła obrazu wtórnego przyjmiemy, iż diaphragma leży zawsze symetrycznie do osi η' . Niechaj wartości graniczne diaphragmy będą wzdłuż osi y' : $-\beta'$ i $+\beta'$, a wzdłuż osi ξ' : α_1 i α_2 . Tedy wektor S_2 wyrazi się równaniem:

$$S_2 = \frac{K}{\lambda^2} \int_{-\beta'}^{+\beta'} d\eta' \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\xi' \int_{-B}^{+B} dY \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} - \frac{\eta'(y-Y)}{\lambda} \right].$$

Rozkładamy tu wstawę, podobnie, jak w wyrażeniu (3), i całkujemy względem Y ; otrzymamy:

$$S_2 = \frac{2K}{\lambda^2} \int_{-\beta'}^{+\beta'} d\eta' \cos \frac{2\pi\eta' y}{\lambda} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{2\pi\eta'} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right] + \frac{2K}{\lambda^2} \int_{-\beta'}^{+\beta'} d\eta' \sin \frac{2\pi\eta' y}{\lambda} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{2\pi\eta'} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right].$$

Widzimy, iż druga część tego wyrażenia znika, gdyż funkcja

$$\frac{\sin \frac{2\pi\eta' y}{\lambda} \sin \frac{2\pi\eta' B}{\lambda}}{2\pi\eta'}$$

jest symetryczna i nieparzysta. Jeżeli jako nową zmienną wprowadzimy $u = (2\pi\eta' B)/\lambda$, wtedy całka η' wyrazi się w formie:

$$\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\frac{2\pi B\beta'}{\lambda}}^{+\frac{2\pi B\beta'}{\lambda}} du \frac{\sin u}{u} \cdot \cos \frac{y}{B} u.$$

O ile przyjmiemy $B\beta'$ w stosunku do λ za dostatecznie wielkie, to możemy jako granice powyższej całki uważać $-\infty$ i $+\infty$. Wtedy, jak wiadomo, całka ta posiada wartość π , gdy $|y/B| < 1$; wartość zero, gdy $|y/B| > 1$ i równa jest $\pi/2$, gdy $y = \pm B$. W naszym przypadku całka ta będzie posiadała w granicach $+B > y > -B$ pewną wartość stałą, po za temi granicami będzie się równała zero. Jeżeli tę część płaszczyzny przedmiotu, która zawarta jest między rzędnymi $\pm B$ nazwiemy strefą przedmiotu,

to możemy na zasadzie powyższego twierdzić, iż w naszym przypadku światło ukaże się w obrazie wtórnym li tylko w strefie przedmiotu, po za nią zaś będzie panowała ciemność.

Na podstawie powyższego otrzymamy na S_2 następujące wyrażenie:

$$S_2 = \frac{K}{\lambda} \int_{a_1}^{a_2} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\xi'(x-X)}{\lambda} \right].$$

Przez rozłożenie wstawy otrzymamy:

$$S_2 = A \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

gdzie:

$$A_2 = \frac{K}{\lambda} \int_{a_1}^{a_2} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda};$$

$$B_2 = \frac{K}{\lambda} \int_{a_1}^{a_2} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda};$$

skąd natężenie I_2 będzie:

$$(5) \quad I_2 = \frac{K^2}{\lambda^2} \left\{ \left[\int_{a_1}^{a_2} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda} \right]^2 + \left[\int_{a_1}^{a_2} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin \frac{2\pi \xi'(x-X)}{\lambda} \right]^2 \right\}.$$

I. Obraz pierwotny.

Przedewszystkiem rozpatrzmy natężenie światła w obrazie pierwotnym dla naszej siatki dyfrakcyjnej.

Niechaj liczba szpał siatki będzie N . Szerokość jednej szpały $2a$, a szerokość ształu 2Δ . Tedy stała siatki γ będzie równa: $\gamma = 2(a + \Delta)$. Spółrzędne i -tej szpały oznaczmy przez p_i i q_i . Wtedy funkcja $\varphi(X)$, czyli współczynnik przepuszczalności światła, będzie miała wartość 1 pomiędzy brzegami szpał, t. j. między p_i i q_i , będzie zaś równała się zeru pomiędzy dwiema szpałami, t. j. między q_i i p_{i+1} .

Stąd natężenie I_1 będzie, na podstawie równania (4):

$$I_1 = \text{const.}_1 \left[\sum_{i=1}^N \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi \xi' X}{\lambda} \right]^2,$$

gdzie const._1 oznacza stałą.

Prosty rachunek daje nam:

$$(6) \quad I_1 = \text{const.}_1 \frac{4 \sin^2 \frac{2\pi \xi' \alpha}{\lambda}}{\left(\frac{2\pi \xi'}{\lambda} \right)^2} \left[\sum_{i=1}^N \cos \frac{2\pi \xi' \cdot \frac{p_i + q_i}{2}}{\lambda} \right]^2;$$

ponieważ jednak:

$$p_i + q_i = 2 \left(p_i + a \right),$$

lub też:

$$p_i + q_i = 2 \left(\gamma i - \frac{N+1}{2} \right).$$

to suma w wyrażeniu (6) będzie:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \cos \frac{2\pi \xi' \cdot \frac{p_i + q_i}{2}}{\lambda} &= \cos \frac{2\pi \xi' \cdot \frac{(N+1)\gamma}{2}}{\lambda} \sum_{i=1}^N \cos \frac{2\pi \xi' \gamma i}{\lambda} \\ &+ \sin \frac{2\pi \xi' \cdot \frac{(N+1)\gamma}{2}}{\lambda} \sum_{i=1}^N \sin \frac{2\pi \xi' \gamma i}{\lambda}. \end{aligned}$$

skąd po wykonaniu sumowania, otrzymamy:

$$I_1 = \text{const.}_1 \frac{4 \sin^2 \frac{2\pi \xi' \alpha}{\lambda}}{\left(\frac{2\pi \xi'}{\lambda} \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\pi \xi' \gamma}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi \xi' \gamma}{\lambda}}.$$

Wprowadzając nową zmienną ω :

$$\omega = \frac{2\pi \xi' \alpha}{\lambda},$$

otrzymujemy znane równanie:

$$(7) \quad I_1 = \text{const.}_1 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\gamma\omega}{2\alpha}}{\sin^2 \frac{\gamma\omega}{2\alpha}}.$$

Przebieg pierwszego czynnika $\sin^2 \omega / \omega^2$, jako funkcji wielkości ω , jest wyrażony na Fig. 3. Funkcja ta posiada przy $\omega=0$ wartość 1, potem

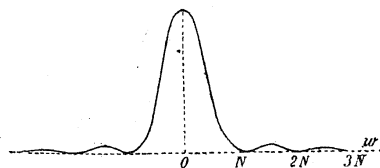


Fig. 3.

zmniejsza się, aby przy $\omega = \pm \pi$ stać się równą zero. Minima tej funkcji leżą w punktach $\omega = \pm k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Drugi czynnik jest znaną „funkcją siatkową”:

$$\frac{\sin^2 \frac{N\gamma\omega}{2\alpha}}{\sin^2 \frac{\gamma\omega}{2\alpha}}$$

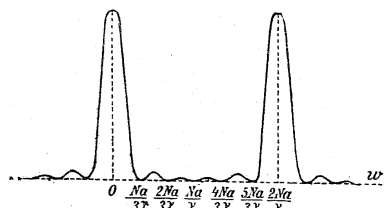
która posiada w punktach:

$$\omega = \frac{2\pi\alpha}{\lambda}, \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

główne punkty skrajne, z których każde dwa po sobie następujące są podzielone przez $N-1$ punktów

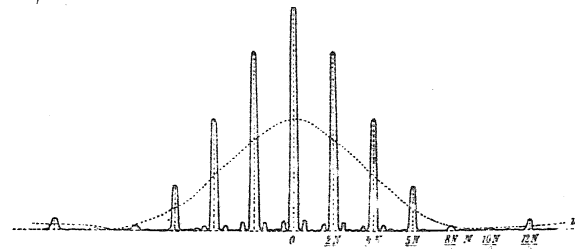
$$\omega = \frac{2\pi\alpha}{N\gamma}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots)$$

w których funkcja posiada wartość zero. W ten sposób między dwoma głównymi punktami skrajnymi funkcji leżą $N-2$ punkty podrzędne skrajne.

(Fig. 4. $N=6$).

Funkcja ta posiada zatem formę, wskazaną na Fig. 4.

Figura 5 wyobraża natężenie w obrazie pierwotnym dla przypadku, gdy $2\alpha/\gamma = 2/9$.

Fig. 5. $N=6; \frac{2\alpha}{\gamma} = \frac{2}{9}$.

Główne punkty skrajne natężenia światła są te maxima świetlne, które widzimy w ugiętym świetle siatki. Wartość tych maximów jest:

$$\text{const}_1^2 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} N^2.$$

Wartość zaś i -tego podrzędnego maxima, w stosunku do głównego maximum jest w przybliżeniu:

$$I_i = \text{const}_1 \frac{\sin^2 \omega_0}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 (2i+1)\pi};$$

gdzie:

$$\omega_0 = \pi + \frac{(2i+1)\pi}{2N}.$$

O ile założymy, że i jest w stosunku do N bardzo małe, N samo bardzo wielkie możemy napisać:

$$I_i = C \cdot \frac{4N^2}{(2i+1)^2\pi}.$$

Że zaś wartość głównego maximum jest CN^2 , to stosunek i -tego podrzędnego maximum do odpowiadającemu mu głównemu maximum, będzie równy

$$\frac{(2i+1)^2\pi^2}{4}.$$

Wartość ta jest od N niezależna i wynosi dla pierwszego podrzędnego maximum $1/22$. Widzimy zatem, iż najbliższe podrzędne maxima nie są nieskończenie małe w stosunku do ich głównego maxima, nawet w tym przypadku, gdy N nieskończenie rośnie.

II. Obraz wtórny przy difragmie symetrycznej.

Obecnie zatrzymamy się na obrazie wtórnym siatki dyfrakcyjnej w przypadkach, gdy diafragmy są symetrycznie położone względem osi głównej systemu optycznego.

W tym przypadku granice całkowania α'_1 i α'_2 w wyrażeniu (5) będą symetrycznymi wartościami, które możemy oznaczyć przez $+\alpha'$ i $-\alpha'$. Dla symetrycznych granic całkowania zniknie druga całka w wyrażeniu (5), gdyż funkcja

$$\sin \frac{2\pi \xi' (x - X)}{\lambda}$$

jest symetryczna i nieparzysta. W ten sposób natężenie światła I_2 obrazu wtórnego będzie:

$$I_2 = \frac{K^2}{\lambda^2} \left[\int_{-\alpha'}^{+\alpha'} d\xi' \int_{-\alpha}^{+\alpha} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi \xi' (x - X)}{\lambda} \right]^2.$$

Analogiczny rachunek, jak dla obrazu pierwotnego, daje nam w rezultacie:

$$I_2 = \text{const}_2 \left| \int_{-\frac{2\pi a \alpha'}{\lambda}}^{+\frac{2\pi a \alpha'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right|^2,$$

gdzie ω ma wartość $= 2\pi \xi' a / \lambda$.

Wobec tego, że funkcja całkowa jest symetryczna i parzysta, można napisać:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} I_2 &= 4 \text{const}_2 \left| \int_0^{\frac{2\pi a \alpha'}{\lambda}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right|^2, \end{aligned} \right.$$

lub też:

$$I_2 = 4 \text{const}_2 I^2,$$

gdzie powyższa całka została przez I oznaczona.

¹⁾ M. Wolfke, Annalen der Physik (4) 34 p. 277. 1911.

1-szy przypadek: Diafragma przepuszcza tylko środkowe maximum pierwotnego obrazu.

W tym przypadku wzór (8) przyjmie postać:

$$I_2 = 4 \text{const}_2 \left| \int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right|^2,$$

a całka I wyrazi się w następujący sposób:

$$I = \int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a}.$$

Wobec tego, że obszar całkowania $2\pi a / N\gamma$ bardzo mały jest w stosunku do π , możemy $\sin \omega / \omega$ przyjąć, jako stałe i równe 1, jak również zamiast $\sin \frac{\gamma \omega}{2a}$ wziąć argument. Tedy będzie całka I równa:

$$I = \frac{2a}{\gamma} \int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\omega} \cdot \cos \frac{x\omega}{a}.$$

Aby znaleźć przebieg całki I w zależności od zmiennej x , tworzymy pierwszą pochodną tej całki względem x . Ponieważ funkcja podcałkowa jest ciągła, mamy:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{2}{\gamma} \int_0^{\frac{2\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \sin \frac{N\gamma \omega}{2a} \cdot \sin \frac{x\omega}{a} = -4aN \cdot \frac{\sin \frac{2\pi x}{N\gamma}}{N^2\gamma^2 - 4x^2}.$$

Druga pochodna tej całki będzie:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -\frac{4aN}{(N^2\gamma^2 - 4x^2)^2} \left[\frac{2\pi}{N\gamma} (N^2\gamma^2 - 4x^2 \cos \frac{2\pi x}{N\gamma} + 8x \cdot \sin \frac{2\pi x}{N\gamma}) \right].$$

Widzimy, że pochodna całki $\frac{\partial I}{\partial x}$ w punkcie $x=0$ jest zerem. Druga pochodna jest w tym punkcie ujemna, zatem całka dana posiada w tym

punkcie maximum. Gdy x rośnie od zera do $x = \pm N\gamma/2$, pochodna $\frac{\partial I}{\partial x}$ pozostaje stale ujemną, co znaczy, że całka w wartości swej zmniejsza się stale.

Dopiero po za granicami siatki w punktach:

$$x = \pm z \cdot \frac{N\gamma}{2}, \quad (z = 2, 3, 4 \dots)$$

będzie $\frac{\partial I}{\partial x} = 0$; druga pochodna w punktach

$$x = \pm z N\gamma \quad (z = 1, 2, 3 \dots)$$

dodatnia; a w punktach

$$x = \pm \frac{2z+1}{2} \cdot N\gamma, \quad (z = 1, 2, 3 \dots)$$

ujemna — co znaczy, iż w pierwszych punktach całka będzie miała minima, a w drugich maxima.

Z rosnącym x , pochodna $\frac{\partial I}{\partial x}$ zmniejsza się stale i zbliża się do zera, co znaczy, że oscylacje peryodyczne całki zmniejszają się stale i całka w nieskończoności zbliża się do zera.

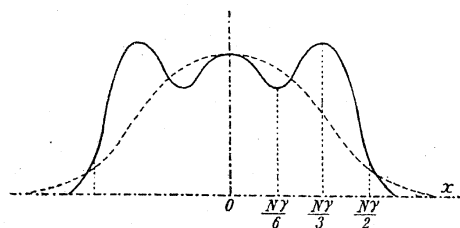


Fig. 6.

Przebieg całki I , jako funkcji wielkości x , jest wyrażony na Fig. 6, gdzie linia punktowana wskazuje natężenie światła.

Z powyższych rozważań dochodzimy do następującego rezultatu w danym przypadku:

Gdy przez diafragmę systemu optycznego przepuścimy tylko środkowe maximum obrazu pierwotnego, tedy otrzymamy jako obraz wtórny, zamiast danej siatki, powierzchnię prawie jednostajnie oświetloną — której jasność stopniowo od środka ku brzegom siatki się zmniejsza; z boków siatki

wystąpią słabe maxima, których natężenie będzie $1/25$ światła w środku siatki.

2-gi przypadek: Wpływ podrzędnych maximów. Jakiś to wykazali w końcu rozdziału I-go, maxima podrzędne nie są nieskończenie małe w stosunku do maximów głównych — to też ciekawem jest, jaki wpływ one na obraz siatki mogą wyrzucić, gdy je dołączymy do maximum głównego.

Przypuścmy, iż środkowe maximum obrazu pierwotnego posiada jeszcze dwa maxima podrzędne po obydwóch stronach, które również przez otwór diafragmy przechodzą; natężenie światła w obrazie wtórnym będzie:

$$I_2 = 4 \text{ const.}_2 \left| \int_0^{\frac{6\pi z}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma}{2a} \omega}{\sin \frac{\gamma}{2a} \omega} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right|^2.$$

Całkę tego wyrazu oznaczmy symbolem J_0 . Przyjmując w tym małym obrazie całkowym $\frac{\sin \omega}{\omega} = 1$ i zamiast $\sin \frac{\gamma\omega}{2a}$ biorąc argument, otrzymamy:

$$(9) \quad J_0 = \frac{2a}{\gamma} \int_0^{\frac{6\pi z}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\omega} \cdot \cos \frac{x\omega}{a}.$$

Tworząc pierwszą i drugą pochodną tej całki znajdujemy, iż całka ta posiada na powierzchni siatki trzy maxima w punktach:

$$x = 0; \quad \text{ i } \quad x = \pm \frac{N\gamma}{3}$$

i dwa minima w punktach:

$$x = \pm \frac{N\gamma}{6}.$$

Po za siatką oscyluje całka około osi x i zbliża się szybko do zera. Fig. 6 wykazuje przebieg natężenia światła, gdzie linia ciągła odpowiada danemu przypadkowi.

Z rezultatu tego widzimy, iż — pomijając słabe wahania światła w środku siatki, — wpływ podrzędnych maximów wyraża się tem, iż spadek natężenia światła przy brzegach siatki jest raptowniejszy.

3-ci przypadek: Obydwa i -te maxima.

Rozpatrzmy obecnie ten przypadek, gdy diafragma nasza przepuszcza światło tylko od dwóch symetrycznych maximów i -tego rzędu; przyczem przyjmujemy, iż każde z tych maximów posiada jeszcze po dwa podrzędne maxima z każdego boku.

Środek i -tego maximum znajduje się w punkcie

$$\omega = 2\pi a i / \gamma,$$

skąd granice całkowania będą:

$$\frac{2\pi a}{N\gamma}(Ni-3) \quad \text{ i } \quad \frac{2\pi a}{N\gamma}(Ni+3).$$

Natężenie światła I_2 będzie zatem w tym przypadku:

$$I_2 = \text{const.}_2 \left| \int_{-\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{+\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2\gamma}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right|^2 + \left| \int_{+\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{+\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2\gamma}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right|^2$$

Wobec tego, że maxima leżą symetrycznie i funkcja podcałkowa jest również symetryczna i jednocześnie parzysta, możemy napisać:

$$I_2 = 4 \text{ const.}_2 \left| \int_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2\gamma}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right|^2$$

Ponieważ peryod zmienności $\sin \omega / \omega$ jest duży w stosunku do przedziału całkowego, można wstawę uważać w granicach całki za stałą, skąd otrzymamy:

$$(10) \quad \begin{cases} I_2 = 4 \text{ const.}_2 J_i^2, \\ J_i = \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \int_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a}. \end{cases}$$

Wprowadzamy nową zmienną ω_1 , gdzie

$$\omega_1 = \pi i - \frac{\gamma\omega}{2a};$$

wtedy całka powyższa otrzyma następującą formę:

$$J_i = \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \frac{2a}{\gamma} \int_{-\frac{3\pi}{N}}^{+\frac{3\pi}{N}} d\omega_1 \cdot \frac{\sin N(\pi i - \omega_1)}{\sin(\pi i - \omega_1)} \cdot \cos \frac{2x(\pi i - \omega_1)}{\gamma},$$

lub też:

$$J_i = (-1)^{(N-1)i} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \frac{2a}{\gamma} \int_{-\frac{3\pi}{N}}^{+\frac{3\pi}{N}} d\omega_1 \cdot \frac{\sin N\omega_1}{\sin \omega_1} \cdot \cos \frac{2x(\pi i - \omega_1)}{\gamma}.$$

ω_1 jest w całym przedziale całkowania bardzo małe, dla tego możemy zamiast $\sin \omega_1$ wziąć argument; jednocześnie rozkładamy wstawę i otrzymujemy:

$$J_i = (-1)^{(N-1)i} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \frac{2a}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \int_{-\frac{3\pi}{N}}^{+\frac{3\pi}{N}} d\omega_1 \cdot \frac{\sin N\omega_1}{\omega_1} \cdot \cos \frac{2x\omega_1}{\gamma},$$

gdzie całka z funkcją $\sin \frac{2x\omega_1}{\gamma}$ zniknęła.

Wprowadzamy nową zmienną ω_2 , gdzie

$$\omega_2 = \frac{2a}{\gamma} \omega_1,$$

i otrzymujemy po dokonaniu przekształceń:

$$J_i = (-1)^{(N-1)i} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \frac{2a}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \int_{-\frac{6\pi a}{N\gamma}}^{+\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega_2 \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega_2}{2a}}{\omega_2} \cdot \cos \frac{x \omega_2}{a},$$

lub też wobec symetryczności funkcji podcałkowej:

$$J_i = (-1)^{(N-1)i} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \cdot \frac{2a}{\gamma} \int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega_2 \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega_2}{2a}}{\omega_2} \cdot \cos \frac{x \omega_2}{a}.$$

wreszcie:

$$J_i = (-1)^{(N-1)i} \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \cdot J_0,$$

gdzie J_0 jest całka oznaczona w wyrażeniu (9). Natężenie światła będzie zatem:

$$(11) \quad I_2 = 16 \text{ const}_2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right)^2 \cdot \cos^2 \frac{2\pi x i}{\gamma} \cdot J_0^2.$$

Gdy w wyrażeniu (11) zamiast x podstawimy $\gamma + x$, otrzymamy:

$$I_2 = 16 \text{ const}_2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right)^2 \cdot \cos^2 \frac{2\pi x i}{\gamma} \cdot J_0^2. \quad (\text{dla punktu } \gamma + x)$$

Wartość ta różni się od poprzedniej tylko wartością całki J_0 , że jednak całka ta w granicach siatki γ -stałej może być uważana jako stała, to możemy powiedzieć, iż we wszystkich przedziałach γ obraz będzie ten sam.

Widzimy zatem, iż przebieg natężenia światła będzie w danym przypadku w każdym przedziale γ określał się czynnikiem $\cos^2(2\pi x i)/\gamma$. Natężenie światła będzie miało zatem maxima w punktach:

$$x = \kappa \cdot \frac{\gamma}{2i} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots)$$

o wielkości

$$\text{Max. } I_2 = 16 \text{ const}_2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right)^2 \cdot J_0^2$$

a w punktach:

$$x = \frac{2\kappa + 1}{2} \cdot \frac{\gamma}{2i} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots),$$

będzie miało minima bezwzględne.

W jednym przedziale γ jest zatem $2i$ maximów.

W tym przypadku tedy obraz optyczny siatki będzie niepodobny do obrazu rzeczywistego, gdyż zamiast N szpalt, ujrzymy $2Ni$ szpalt; przyczem przebieg natężenia światła od maximum do minimum będzie odpowiadał czynnikiem $\cos^2 u$.

Położenie maximów jest niezależne od tego, czy N jest parzyste, czy nieparzyste.

4-y przypadek: Obydwa i -te maxima i środkowe.

Niechaj obecnie diafragma oprócz obydwóch i -tych maximów jeszcze i środkowe przepuszcza — tedy natężenie światła będzie:

$$I_2 = \text{const}_2 \int_{-\frac{6\pi a}{N\gamma}}^{+\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2\gamma}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x \omega}{a}$$

$$+ \int_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \Bigg]^2.$$

W tem wyrażeniu obydwie całki są nam już znane. Po odpowiednim przekształceniu otrzymujemy:

$$I_2 = 4 \text{ const.}_2 \left[1 + (-1)^{N(N-1)} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{\gamma}{2\pi a i}} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \right]^2 \cdot J_0^2.$$

Rozpatrzmy czynnik A :

$$(12) \quad A = 1 + (-1)^{(N-1)i} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{\gamma}{2\pi a i}} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma}.$$

Jego maxima i minima leżą w punktach:

$$x = \pm \kappa \frac{\gamma}{2i}, \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots)$$

i posiadają następujące wartości:

$$\begin{cases} \text{Max. } A = 1 + 2 \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}}, \\ \text{Min. } A = 1 - 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{\gamma}{2\pi a i}}. \end{cases}$$

Odległość dwu maximów jest γ/i , w jednym zatem przedziale γ znajdują się i maximów. Wobec tego jednak, iż czynnik A znajduje się w wyrażeniu natężenia światła w potęgze drugiej, może się zdarzyć, iż ujemne minima zamieniają się na maxima poboczne natężenia. To jest możliwe, gdy

$$\frac{\sin^2 \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin^2 \frac{\gamma \omega}{2a}} > \frac{1}{2}.$$

skąd warunki tej możliwości:

$$0,6 > \frac{2ai}{\gamma} > 0.$$

W tym przypadku w jednym przedziale γ będzie $2i$ maximów.

Z wyrażenia (12) widzimy, iż położenie maximów przy i parzystym od parzystości liczby N jest niezależne. Maxima leżą w punktach

$$x = \pm \kappa \cdot \frac{\gamma}{i}. \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots)$$

minima zaś, lub ewentualne maxima poboczne, w punktach:

$$x = \pm \frac{2\kappa+1}{2} \cdot \frac{\gamma}{i}. \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots)$$

O ile zaś i jest nieparzyste, położenie maximów jest zależne od parzystości liczby N . Przy parzystym N leżą maxima w punktach:

$$x = \pm \frac{2\kappa+1}{2} \cdot \frac{\gamma}{i}, \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots)$$

a minima w punktach:

$$x = \kappa \cdot \frac{\gamma}{i}. \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots)$$

Ponieważ siatka leży symetrycznie do osi y , to w ostatnim przypadku (N parzyste) leży w punkcie $x=0$, sztaba siatki; środki szpał leżą w punktach:

$$x = \pm \frac{(2i+1)}{2} \cdot \frac{\gamma}{i}, \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots)$$

a środki sztab w punktach:

$$x = \pm \kappa \cdot \frac{\gamma}{i}. \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots)$$

Widzimy z tego, że maxima natężenia światła odpowiadają środkom szpał, a minima środkom sztab.

Dla N nieparzystego leżą maxima przy

$$x = \pm \kappa \cdot \frac{\gamma}{i}, \quad (\kappa = 0, 1, 2 \dots)$$

a minima w punktach:

$$x = \pm \frac{2x+1}{2} \cdot \frac{\gamma}{i} \quad (x=0, 1, 2 \dots)$$

w tym jednak przypadku przy $x=0$ leży środek szpalty, tak iż znów środkiem szpalty odpowiadają maxima, a środkom sztab minima światła.

Przebieg natężenia światła pomiędzy maximami i minimami wyrazi się funkcją $(1 + C \cos u)^2$.

O ile zatem do obydwóch i -tych maximów dodamy środkowe, to liczba szpalt w obrazie optycznym siatki będzie równa

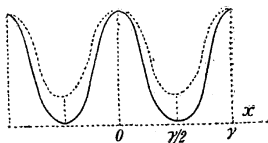
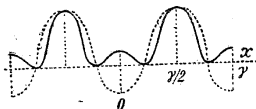


Fig. 7. ($i=1$; N nieparzyste $\frac{2a}{\gamma} > 0,6$).

Ni ; natężenie światła od maximum do minimum zmienia się stopniowo; maxima i minima są jednakowo szerokie i w pewnym przypadku występują nowe maxima zamiast minimów.



Rys. 1. ($i=1$, N parzyste $\frac{2a}{\gamma} > 0,6$).

Figura 7 i 8 wskazują przebieg natężenia światła dla $i=1$.

5-ty przypadek: Obydwa i -te i $2i$ -te maxima.

Gdy prócz obydwóch i -tych maximów, diafragma przepuszcza jeszcze i obydwą $2i$ -te, natężenie światła wyrazi się wzorem:

$$I_2 = 4 \text{ const.}_2 \left[\int_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right]^2$$

$$+ \int_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right]^2$$

Po dokonanych przekształceniach otrzymamy:

$$I_2 = 4 \text{ const.}_2 \left[(-1)^{i(N-1)} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} + 2 \cdot \frac{\sin \frac{4\pi a i}{\gamma}}{\frac{4\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{4\pi a i}{\gamma} \right]^2 \cdot J_0^2.$$

Rozpatrzmy czynnik A :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= (-1)^{i(N-1)} \cdot 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \\ &+ 2 \cdot \frac{\sin \frac{4\pi a i}{\gamma}}{\frac{4\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{4\pi x i}{\gamma} \end{aligned} \right.$$

Pierwsze dwie jego pochodne są:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= -\frac{1}{a} \cdot \sin \frac{2\pi a i}{\gamma} \cdot \sin \frac{2\pi x i}{\gamma} \left[(-1)^{i(N-1)} + 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \right], \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= -\frac{2\pi i}{\gamma a} \cdot \sin \frac{2\pi a i}{\gamma} \left[(-1)^{i(N-1)} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} + 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \cdot \cos \frac{4\pi x i}{\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Punkty skrajne będą zatem określone następującymi równaniami:

$$(-1)^{i(N-1)} + 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} = 0.$$

$$\sin \frac{2\pi x i}{\gamma} = 0,$$

Pierwsze z tych równań daje szereg punktów skrajnych w punktach:

$$(14) \quad x = \pm \frac{\gamma}{2i} \cdot (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

Te punkta skrajne nazywamy punktami skrajnymi pierwszego gatunku.

Drugie równanie może być sprowadzone do formy następującej:

$$(15) \quad \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} = - (1 - (-1)^{i(N-1)}) \cdot \frac{1}{8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma}}.$$

Punkty skrajne, które z tego równania wypływają, nazywamy punktami skrajnymi drugiego gatunku. Warunek konieczny, aby ostatnie równanie posiadało pierwiastki rzeczywiste, jest następujący:

$$(16) \quad \left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| \geq 1.$$

skąd wypływa:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{0,46}{i} > \frac{2a}{\gamma} > \frac{1,54}{i}, \\ \frac{1,46}{i} > \frac{2a}{\gamma} > \frac{0,54}{i}. \end{array} \right.$$

Jeżeli:

$$\left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| = 1,$$

wtedy obydwa gatunki punktów skrajnych zlewają się.

Jeżeli oznaczmy przez φ jeden z pierwiastków równania (15), gdzie $\varphi > 1$, wtedy odcięte punktów skrajnych drugiego gatunku wyrażają się jak następuje:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \pm (\varphi + 2\alpha) \frac{\gamma}{2i}, \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots) \\ x_2 = \pm (-\varphi + 2\alpha) \frac{\gamma}{2i}, \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots) \end{array} \right.$$

Widzimy, iż w tym przypadku mamy do czynienia z dwoma szeregami punktów skrajnych drugiego gatunku. Odległość dwóch takich punktów skrajnych każdego szeregu wynosi γ/i ; w każdym zatem przedziale γ otrzymamy $2i$ punktów skrajnych drugiego gatunku. Jakaśmy to z (14) widzieli, mamy również $2i$ punktów skrajnych pierwszego gatunku.

Rozpatrzmy teraz dwie możliwości:

1) Punkty skrajne drugiego gatunku są niemożliwe.

Z równania (16) widzimy, iż w tym przypadku będzie:

$$\left| 8 \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| < 1.$$

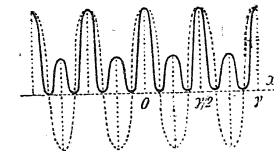
Pochodna druga $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$ będzie przytem zmieniała znak, tak iż w tym przypadku punkty pierwszego gatunku dają naprzemian to maximum, to minimum. Przyczem wartości maximów i minimów będą:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min. } A = \frac{\gamma}{\pi a i} \left| \sin \frac{2\pi a i}{\gamma} + \frac{\gamma}{2\pi a i} \left| \sin \frac{4\pi a i}{\gamma} \right|, \right. \\ \text{Min. } A = -\frac{\gamma}{\pi a i} \left| \sin \frac{2\pi a i}{\gamma} + \frac{\gamma}{2\pi a i} \left| \sin \frac{4\pi a i}{\gamma} \right|. \right. \end{array} \right.$$

Minima, jak to widzimy z (17), będą ujemne, tak iż w wyrażeniu natężenia światła zamienia się na nowe maxima. Wobec tego iż bezwzględne wartości minimów są mniejsze od bezwzględnych wartości maximów, to i nowe maxima natężenia światła będą mniejsze od poprzednich.

Położenie maximów dla i parzystego jest niezależne od N , zaś dla i nieparzystego jest od N zależne.

W tym przypadku będziemy mieli $2i$ maximów w każdym przedziale γ , przyczem maxima te będą naprzemian jaśniejsze i ciemniejsze.



Rys. 9. $\left(i = 2, \varphi \begin{cases} > 0 \\ < \frac{\pi}{2} \end{cases} \right),$

Fig. 9 wyobraża przypadek $i = 2$.

2) Punkty skrajne drugiego gatunku są możliwe.
W tym przypadku będzie:

$$\left| 8 \cos \frac{2\pi ai}{\gamma} \right| > 1.$$

Wtedy pochodna druga dla wszystkich punktów skrajnych pierwszego gatunku będzie miała stały znak, tak iż wszystkie te punkty będą albo maxima, albo minima, zależnie od tego w której ćwiartce znajduje się kąt $2\pi ai/\gamma$.

O ile kąt ten będzie w pierwszej lub trzeciej ćwiartce, pochodna druga w punktach skrajnych pierwszego gatunku będzie ujemna, o ile zaś kąt ten będzie w drugiej lub czwartej ćwiartce, pochodna ta będzie dodatnia. W pierwszym zatem przypadku wszystkie punkty skrajne pierwszego gatunku będą maximami, zaś wszystkie punkty skrajne drugiego gatunku będą minimami. W drugim zaś razie, położenie będzie odwrotne.

Jeżeli kąt $2\pi ai/\gamma$ leży w pierwszej albo trzeciej ćwiartce, wtedy wielkość maximów będzie:

$$\text{Max. } A = 2 \left| \frac{\sin \frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \right| \left(\pm 1 + \left| \cos \frac{2\pi ai}{\gamma} \right| \right).$$

Maxima te, jak widać, będą miały kolejno dodatnie i wartości ujemne. Minima zaś, które będą leżały pomiędzy dwoma maximami, będą zawsze ujemne. Minima te leżą symetrycznie po obu stronach maximów, ale nie leżą jednak w środku pomiędzy dwoma maximami, lecz odległość ich od maximów, które leżą w punktach

$$x = \pm x \cdot \frac{\gamma}{2i} \quad (x = 0, 2, 4, 6 \dots)$$

będzie $\varphi\gamma/2i$, zaś od maximów:

$$x = \pm x \cdot \frac{\gamma}{2i} \quad (x = 1, 3, 5 \dots)$$

będzie $(1-\varphi)\gamma/2i$.

Ponieważ A wchodzi w wyrażenie natężenia światła w potęgze drugiej to minima ujemne zamieniają się na maxima świetlne, a ujemne maxima na minima. Stąd otrzymujemy następujący rezultat:

O ile kąt $2\pi ai/\gamma$ leży w pierwszej lub trzeciej ćwiartce, w obrazie siatki ujrzymy w każdym przedziale γ i silnych maximów świetlnych, jednakowo odległych i jednakowo silnych; po obu stronach każdego maximum znajdują się słabsze maxima, symetrycznie położone do poprzednich maximów. Pomiedzy dwoma słabymi maximami znajduje się słabe minimum, zaś słabsze maxima od poprzednich maximów są przedzielone silnymi minimami.

Figura 10 wskazuje ten przypadek, gdy $i = 2$.

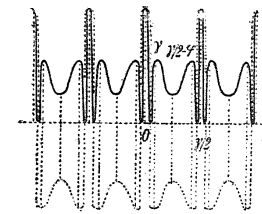


Fig. 10. $\left(i = 2, \varphi \frac{2\pi ai}{\gamma} < \frac{\pi}{2} \right)$.

Jeżeli zaś kąt $2\pi ai/\gamma$ leży w drugiej lub czwartej ćwiartce, wtedy, jak tośmy już zauważyli, wszystkie punkty skrajne pierwszego gatunku będą minimami, a wszystkie punkty skrajne drugiego gatunku maximami. Minima będą miały wartości:

$$\text{Min. } A = 2 \cdot \left| \frac{\sin \frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \right| \left(= 1 - \left| \cos \frac{2\pi ai}{\gamma} \right| \right).$$

Minima są w tym przypadku kolejno dodatnie i ujemne. Ponieważ ma-

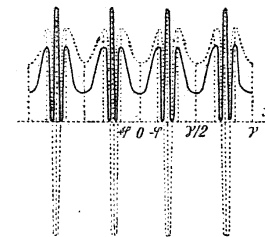


Fig. 11. $\left(i = 2, \varphi \frac{2\pi ai}{\gamma} > \frac{\pi}{2} \right)$.

ximum musi być zawsze większe od większego minimum z tych, pomiędzy którymi leży, to w tym przypadku maxima będą wszystkie dodatnie. Ujemne minima zamieniają się w wyrażeniu natężenia światła na maxima.

Stąd widzimy, że obraz siatki będzie w tym przypadku podobnie wyglądał, jak w przypadku poprzednim.

Figura 11 przedstawia obraz siatki w przypadku $i=2$.

6-y przypadek: Obydwa i -te, $2i$ -te maxima i środkowe maximum.

Obecnie rozpatrzmy przypadek, gdzie przez diafragmę przechodzą dwa i -te, dwa $2i$ -te i środkowe maximum. Natężenie świetlne będzie wtedy:

$$I_2 = 4 \text{ const.}_2 \left[\int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} + \int_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} + \int_{\frac{2\pi a(2Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(2Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{\lambda}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right]^2$$

Po wykonaniu przekształceniu otrzymujemy:

$$I_2 = 4 \text{ const.}_2 \left[1 + (-1)^{i(N-1)} \cdot 2 \frac{\sin \frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi xi}{\gamma} + 2 \cdot \frac{\sin \frac{4\pi ai}{\gamma}}{\frac{4\pi ai}{\gamma}} \cdot \cos \frac{4\pi xi}{\gamma} \right]^2 J_0^2.$$

$$(17) \left\{ \begin{aligned} A &= 1 + (-1)^{i(N-1)} \cdot 2 \frac{\sin \frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi xi}{\gamma} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{\sin \frac{4\pi ai}{\gamma}}{\frac{4\pi ai}{\gamma}} \cdot \cos \frac{4\pi xi}{\gamma}. \end{aligned} \right.$$

Pochodne tego czynnika są identyczne z pochodnymi czynnika (13) z poprzedniego przypadku. Punkty zatem skrajne będą wyznaczone przez pierwiastki równań

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \frac{2\pi xi}{\gamma} &= 0, \\ (-1)^{i(N-1)} + 8 \cos \frac{2\pi ai}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi xi}{\gamma} &= 0. \end{aligned} \right.$$

W tym przypadku otrzymujemy również punkty skrajne pierwszego i drugiego gatunku.

W przypadku, gdy punkty skrajne drugiego gatunku są niemożliwe, punkty skrajne pierwszego gatunku będą kolejno maximami i minimami.

Wartość dla minimum będzie:

$$\text{Min. } A = 1 - 2 \cdot \left| \frac{\sin \frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \right| + 2 \cdot \left| \frac{\sin \frac{4\pi ai}{\gamma}}{\frac{4\pi ai}{\gamma}} \right| + 2 \cdot \left| \frac{\sin \frac{4\pi ai}{\gamma}}{\frac{4\pi ai}{\gamma}} \right|,$$

Minima ujemne są zatem możliwe, gdy

$$\left| \frac{\sin \frac{2\pi ai}{\gamma}}{\frac{2\pi ai}{\gamma}} \right| > \frac{1}{2 \left(1 - \left| \cos \frac{2\pi ai}{\gamma} \right| \right)}.$$

Ta nierówność nie może być w ogólności rozwiązana i można tylko znaleźć określonym wartościom i odpowiadający stosunek $2a/\gamma$.

Obraz siatki będzie posiadał w tym przypadku w każdym przedziale γ i maximów. Przy określonych jednak warunkach mogą wystąpić dodatkowe maxima na miejscu minimów.

Figura 12 i 13 wskazują ten przypadek dla $i = 2$.

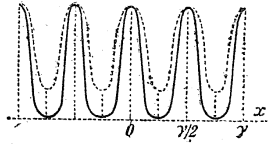


Fig. 12. $\left(i=2, \nless \frac{2\pi a i}{\gamma} \begin{cases} > 0 \\ < \frac{\pi}{2} \end{cases} \right)$.

O ile jednak punkty skrajne drugiego gatunku są możliwe i o ile przytem kąt $2\pi a i / \gamma$ leży w pierwszej lub trzeciej ćwiartce,

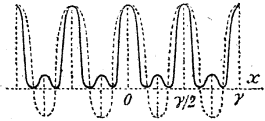


Fig. 13. $\left(i=2, \nless \frac{2\pi a i}{\gamma} \begin{cases} > 0 \\ < \frac{\pi}{2} \end{cases} \right)$.

wtedy podobnie, jak w przypadku 5-ym, wszystkie punkty skrajne pierwszego gatunku będą maximami, a punkty drugiego gatunku minimami. Maxima mają wartości:

$$\text{Max. } A = 1 + 2 \cdot \left| \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right| \left(-1 + \left| \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| \right).$$

W tym jednak przypadku maxima będą wszystkie dodatnie, skąd wypływa, że w każdym przedziale γ będzie $2i$ maximów; maxima te będą kolejno silniejsze i słabsze; może się również zdarzyć, iż ujemne minima zamieniają się w wyrażeniu natężenia światła na maxima świetlne.

Figura 14 i 15 wskazują ten przypadek dla $i = 1$.

W figurze 15 widzimy małe maxima poboczne.

Gdy jednak kąt $2\pi a i / \gamma$ leży w drugiej lub czwartej ćwiart-

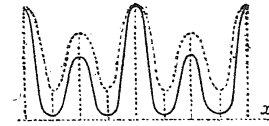


Fig. 14. $\left(i=1, \nless \frac{2\pi a i}{\gamma} \begin{cases} > 0 \\ < \frac{\pi}{2} \end{cases} \right) N \text{ nieparzyste}.$

ce, wtedy punkty skrajne pierwszego gatunku będą minimami, a punkty

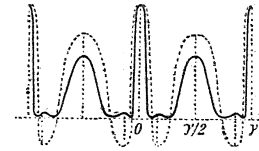


Fig. 15. $\left(i=a, \nless \begin{cases} > 0 \\ < \frac{\pi}{2} \end{cases} \right) (N \text{ nieparzyste}).$

drugiego gatunku maximami. Wartości minimów będą:

$$\text{Min. } A = 1 + 2 \cdot \left| \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right| \left(\pm 1 - \left| \cos \frac{2\pi a i}{\gamma} \right| \right).$$

W tym przypadku minima mogą być również ujemne, a wtedy zamieniają się w wyrażeniu natężenia światła na maxima świetlne.

W tym zatem przypadku w każdym przedziale γ znajduje się $2i$ maximów, mogą jednak występować przy określonych warunkach maxima poboczne.

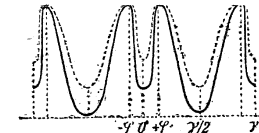


Fig. 16. $\left(i=1, \nless \frac{\pi 2 a i}{\gamma} \begin{cases} > \frac{\pi}{2} \\ < \pi \end{cases} \right) (N \text{ nieparzyste}).$

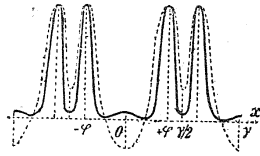


Fig. 17. $\left(i = 1, \neq \frac{2\pi a i}{\gamma} \begin{cases} > \frac{\pi}{2} \\ \leq \pi \end{cases} \right) (N \text{ parzyste}).$

Figura 16 i 17 wskazują ten przypadek dla $i = 1$. W figurze 17 widoczne są jeszcze małe maxima poboczne.

8. Przypadek ogólny.

Przypuśćmy obecnie, iż przez diafragmę przechodzą po dwa i -te, k -te, l -te, i t. d. maxima. W tym przypadku natężenie światła będzie:

$$I_2 = \text{const.}_2 \left[\sum_{j=i, k, l, \dots} \int_{\frac{2\pi a (Nj-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a (Nj+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cos \frac{x\omega}{a} \right]^2.$$

Po dokonaniu przekształceniu otrzymamy:

$$I_2 = \text{const.}_2 \left[\sum_{j=i, k, l, \dots} \left((-1)^{(N-1)j} 2 \frac{\sin \frac{2\pi a j}{\gamma}}{\frac{2\pi a j}{\gamma}} \cos \frac{2\pi x j}{\gamma} \right) \right].$$

Gdy wyraz powyższy rozwinie, otrzymamy wyrazy dwójakiego typu:

$$A_1 \cos^2 \frac{2\pi x j}{\gamma}; \quad \text{ i } \quad A_2 \cos \frac{2\pi x k}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x l}{\gamma}.$$

Gdy w wyrazach tych podstawimy $-x$ zamiast x , ani wielkość tych wyrazów, ani znak się nie zmienia, skąd wypływa, iż obraz siatki będzie symetryczny względem środka siatki.

Gdy przejdziemy od punktu x do punktu $\gamma - x$, symetrycznego w przedziale γ , wyrazy powyższe również się nie zmieniają, skąd wypływa, iż obraz siatki w ogólnym przypadku w każdym przedziale γ będzie symetryczny względem jego środka.

III. Obraz wtórny przy diafragmie asymetrycznej.¹⁾

Obecnie rozpatrzmy obraz wtórny w przypadkach, gdy diafragma jest niesymetrycznie położona względem osi głównej systemu optycznego.

W tym przypadku granice całkowania wyrazu (5) nie będą symetryczne i natężenie światła I_2 wyrazi się w następującym równaniu:

$$I_2 = \frac{K^2}{\lambda^2} \left\{ \left[\int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda} \right]^2 + \left[\int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \sin \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda} \right]^2 \right\}.$$

Obydwie całki w tym wyrazie możemy obliczyć analogicznie, jakśmy to uczynili dla obrazu pierwotnego.

W ten sposób otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \int_{-A}^{+A} dX \varphi(X) \cos \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda} &= \int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \cos \frac{2\pi \xi' (x-X)}{\lambda} \\ &= \int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi \xi' a}{\lambda}}{\frac{2\pi \xi' a}{\lambda}} \sum_{i=1}^{i=N} \cos \frac{2\pi \xi' (x - \frac{p_i + q_i}{2})}{\lambda} \\ &= \int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi \xi' a}{\lambda}}{\frac{2\pi \xi' a}{\lambda}} \cdot \frac{\sin \frac{N\pi \xi' \gamma}{\lambda}}{\sin \frac{\pi \xi' \gamma}{\lambda}} \cdot \cos \frac{2\pi \xi' x}{\lambda} \\ &= c \cdot \int_{a_1'}^{a_2'} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma \omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma \omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \end{aligned}$$

¹⁾ M. Wolfke. „Über die Abbildung eines Gitters bei asymmetrischer Abbildung“. Annalen der Physik (4). 37. p. 96—102. 1912.

jak również:

$$\begin{aligned}
 \int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \int_{-1}^{+1} dX \varphi(X) \sin \frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda} &= \int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \sum_{i=1}^{i=N} \int_{p_i}^{q_i} dX \sin \frac{2\pi\xi'(x-X)}{\lambda} \\
 &= \int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\xi'a}{\lambda}}{\frac{2\pi\xi'}{\lambda}} \sum_{i=1}^{i=N} \sin \frac{2\pi\xi'(x - \frac{p_i+q_i}{2})}{\lambda} \\
 &= \int_{a_1'}^{a_2'} d\xi' \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi\xi'a}{\lambda}}{\frac{2\pi\xi'}{\lambda}} \frac{\sin \frac{N\pi\xi'\gamma}{\lambda}}{\sin \frac{\pi\xi'\gamma}{\lambda}} \cdot \sin \frac{2\pi\xi'x}{\lambda} \\
 &= c \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \sin \frac{x\omega}{a},
 \end{aligned}$$

gdzie c oznacza stałą.

Stąd wyrażenie dla natężenia światła przyjmie formę następującą:

$$(19) \quad I_1 = \text{const}_1 \left\{ \left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right]^2 + \left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \sin \frac{x\omega}{a} \right]^2 \right\}$$

gdzie const_2 oznacza stałą.

Przypadek ogólny.

Niechaj diaphragma przepuszcza szereg niesymetrycznie rozłożonych maximów, dajmy nato i -te, k -te, l -te.... i t. d. Wtedy natężenie światła I_2 wyrazi się następującym równaniem:

$$\begin{aligned}
 I_2 = \text{const}_2 \left\{ \left[\sum_{j=i, k, l, \dots} \int_{\frac{2\pi a(Nj-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Nj+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right]^2 + \right. \\
 \left. + \left[\sum_{j=i, k, l, \dots} \int_{\frac{2\pi a(Nj+3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Nj-3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \sin \frac{x\omega}{a} \right]^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Po dokonaniem przekształceniu otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 I_2 = 4 \text{const}_2 \left\{ \left[\sum_{j=i, k, l, \dots} \left((-1)^{(N-1)j} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a j}{\gamma}}{\frac{2\pi a j}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi x j}{\gamma} \right) \right]^2 + \right. \\
 \left. + \left[\sum_{j=i, k, l, \dots} \left((-1)^{(N-1)j} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi x j}{\gamma}}{\frac{2\pi x j}{\gamma}} \right) \right]^2 \right\} \cdot J^2,
 \end{aligned}$$

Po rozwinięciu otrzymamy z pierwszego nawiasu wyrazy typu

$$A_1 \cos^2 \frac{2\pi x j}{\gamma} \quad \text{ i } \quad A_2 \cos \frac{2\pi x k}{\gamma} \cdot \cos \frac{2\pi x l}{\gamma},$$

a z drugiego nawiasu:

$$B_1 \sin^2 \frac{2\pi x j}{\gamma} \quad \text{ i } \quad B_2 \sin \frac{2\pi x k}{\gamma} \cdot \sin \frac{2\pi x l}{\gamma}.$$

Widzimy natychmiast, iż wyrazy te pozostają bez zmiany, gdy zamiast x podstawimy $-x$, skąd wnioskujemy, iż obraz siatki i w tym przypadku będzie symetryczny do osi głównej systemu optycznego.

Gdy zaś zamiast x podstawimy $\gamma - x$, t. j. gdy przejdziemy do punktu symetrycznego w jednym przedziale γ do jego środka, wyrazy pozostają również bez zmiany. Mianowicie:

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 \cos^2 \frac{2\pi j}{\gamma} (\gamma - x) &= A_1 \cos^2 \left(2\pi j - \frac{2\pi j x}{\gamma} \right) = A_1 \cos^2 \frac{2\pi j x}{\gamma}; \\ A_2 \cos \frac{2\pi k}{\gamma} (\gamma - x) \cdot \cos \frac{2\pi l}{\gamma} (\gamma - x) \\ &= A_1 \cos \left(2\pi k - \frac{2\pi k x}{\gamma} \right) \cos \left(2\pi l - \frac{2\pi l x}{\gamma} \right) = A_2 \cos \frac{2\pi k x}{\gamma} \cos \frac{2\pi l x}{\gamma}. \\ B_1 \sin^2 \frac{2\pi j}{\gamma} (\gamma - x) &= B_1 \sin^2 \left(2\pi j - \frac{2\pi j x}{\gamma} \right) = B_1 \sin^2 \frac{2\pi j x}{\gamma}. \\ B_2 \sin \frac{2\pi k}{\gamma} (\gamma - x) \cdot \sin \frac{2\pi l}{\gamma} (\gamma - x) \\ &= B_2 \sin \left(2\pi k - \frac{2\pi k x}{\gamma} \right) \sin \left(2\pi l - \frac{2\pi l x}{\gamma} \right) = B_2 \sin \frac{2\pi k x}{\gamma} \cdot \sin \frac{2\pi l x}{\gamma}. \end{aligned} \right.$$

Znaczy się, iż obraz siatki jest również symetryczny do środka każdego przedziału γ .

Przykład: i -te maximum i środkowe.

Jako przykład rozpatrzmy ten przypadek, gdy przez diafragmę tylko i -te maximum zostaje przepuszczone i środkowe maximum.

Z równania (19) znajdujemy natężenie światła I_2 :

$$I_2 = \text{const}_2 \left\{ \left[2 \int_0^{\frac{6\pi a}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \cos \frac{x\omega}{a} \right]^2 + \left[\int_{\frac{2\pi a(Ni-3)}{N\gamma}}^{\frac{2\pi a(Ni+3)}{N\gamma}} d\omega \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{N\gamma\omega}{2a}}{\sin \frac{\gamma\omega}{2a}} \cdot \sin \frac{x\omega}{a} \right]^2 \right\}.$$

Całka zawierająca wyraz $\sin \frac{x\omega}{a}$ znika dla środkowego maximum, gdyż dla tego maximum granice całkowania pozostają symetryczne.

Po dokonaniem przekształceniu otrzymujemy:

$$I_2 = 4 \text{ const}_2 \left[\left(1 + (-1)^{(N-1)i} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \right)^2 \right. \\ \left. + \left((-1)^{(N-1)i} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \sin \frac{2\pi x i}{\gamma} \right)^2 \right] \cdot J^2 \\ = 4 \text{ const}_2 \left[1 + \left(\frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right)^2 + (-1)^{(N-1)i} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma} \right] J^2.$$

Rozpatrzmy czynnik A :

$$A = 1 + \left(\frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right)^2 + (-1)^{(N-1)i} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \cos \frac{2\pi x i}{\gamma}.$$

Pierwsza jego pochodna będzie:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -(-1)^{(N-1)i} \cdot 2 \cdot \frac{\gamma}{2\pi i} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \cdot \sin \frac{2\pi x i}{\gamma}.$$

Stąd widzimy, iż natężenie światła ma przebieg dostawy, z punktami skrajnymi w punktach:

$$x = x \cdot \frac{\gamma}{2i}, \quad (x = 0, 1, 2 \dots)$$

Wartości maximów i minimów będą:

$$\text{Max. } I_2 = 4 \text{ const}_2 \left[1 + \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right]^2;$$

$$\text{Min. } I_2 = 4 \text{ const}_2 \left[1 - \frac{\sin \frac{2\pi a i}{\gamma}}{\frac{2\pi a i}{\gamma}} \right]^2.$$

A zatem w każdym przedziale γ będzie i maximów. Położenie tych maximów jest niezależne od N , gdy i jest parzyste, gdy zaś i jest nieparzyste, wtedy położenie tych maximów jest od N zależne.

Widzimy zatem, iż obraz siatki w tym przypadku jest taki sam, jak w przypadku gdy obydwie i -te maxima razem ze środkowym działają, z tą różnicą tylko, iż obecnie maxima poboczne są niemożliwe.

Figura 18 wskazuje przebieg natężenia światła w tym przypadku:

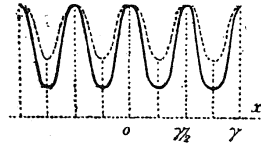


Fig. 18. ($i=2$).

ZAKOŃCZENIE.

Wszystkie te rezultaty teoretyczne były sprawdzone eksperymentalnie za pomocą mikroskopu i aparatu demonstracyjnego Abbego.

W przypadkach, gdy diafragma była położona symetrycznie do osi głównej systemu optycznego, obraz siatki odpowiadał w zupełności danym teoretycznym przezemnie znalezionym.

W przypadkach jednak, gdy diafragma była położona niesymetrycznie do osi głównej systemu optycznego, rezultaty doświadczalne zdawały się na razie przeczyć danym teoretycznym, gdyż obraz siatki obserwowany był w danym przypadku stale asymetryczny, gdy tymczasem teoria przewiduje zupełną symetrię. Ani rodzaj światła i sposób oświetlenia nie wpływa na zmianę obrazu. Dopiero gdy miał sposobność zbadać przeszło kilkadziesiąt przeróżnych siatek dyfrakcyjnych, znalazłem, że przyczyna tej asymetrii obrazu leży w większej lub mniejszej przezroczystości sztab siatki. Mianowicie te siatki, w których sztaby nie przepuszczały żadnego światła, dały obraz symetryczny i z teorią zupełnie zgodny, a te zaś,

w których sztaby były mniej lub więcej przezroczyste, dawały obraz mniej lub więcej asymetryczny.

W ten sposób widzimy, iż nowo opracowana teoria Abbego została w zupełności przez doświadczenie potwierdzona i jest zgodna z obserwowanymi zjawiskami.

Zaznaczyć jeszcze wypada, iż zjawiska przy siatkach przezroczystych zostały również przezemnie teoretycznie opracowane i dały rezultaty nadspodziewane dokładnie odpowiadające rezultatom obserwowanym.¹⁾

Jena, Instytut optyczny „Carl Zeiss“.

¹⁾ M. Wolfke. „Über die Abbildung eines durchlässigen Gitters“. Annalen der Physik (4) 37 p. 797—811; 1912.