HUGO STEINHAUS.

Kilka słów o uogólnieniu pojęcia granicy.

(Quelques remarques sur la généralisation de la notion de limite).

W artykule tym zakładamy — jak zresztą czyni to prawie cała Analiza współczesna — prawdziwość aksyomatów teoryi mnogości, to znaczy, ich niesprzeczność. Z tego wynika, że krytyka Poincarégo i Russela dosięga też i twierdzeń wypowiedzianych w tej nocie. Dopóki więc nie znajdzie się sposobu uratowania tego fundamentalnego pojęcia Analizy współczesnej, jakiem jest kontinuum, dopóty cały dorobek matematyczny dzisiejszy będzie będzie długiem, który przyszłość będzie miała spłacić. Niech nam będzie wolno powiększyć to zobowiązanie o jedno zastosowanie słynnego twierdzenia Zermela.

Pojęcie granicy ciągu zbieżnego jest ogólnie znane, jak również i sens równania

$$\lim_{n=\infty} s_n = s \tag{1}$$

jeżeli ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny. Wiadomo też, że oddawna próbowano uogólnić pojęcie granicy na przypadek rozbieżności ciągu $\{s_n\}$. Próby te przypomina Borel w monografii „Leçons sur les séries divergentes“.[1] Najprostszem uogólnieniem jest t. zw. „pierwsza średnia arytmetyczna“. Zamiast ciągu

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n \tag{2}$$

rozpatruje się ciąg

$$\frac{s_1}{1},\quad \frac{s_1+s_2}{2},\quad \frac{s_1+s_2+s_3}{3},\ \ldots,\ \frac{s_1+s_2+\ldots\, s_n}{n},\ \ldots \tag{3}$$

[1]) Paryż, 1901.

Może się zdarzyć, że ciąg (3) będzie zbieżny, chociaż ciąg (2) jest rozbieżny. Granicę ciągu (3) nazwiemy wtedy uogólnioną granicą ciągu (2). W ten sposób metoda pierwszej średniej arytmetycznej da nam liczbę $\frac{1}{2}$, jako uogólnioną granicę ciągu rozbieżnego:

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0 \ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

To uogólnienie, wprowadzone przez Cesàra i Höldera okazało się bardzo użytecznem. Féjer np. udowodnił, że szereg Fouriera, odpowiadający funkcyi ciągłej, da się zawsze „zsumować metodą pierwszej średniej arytmetycznej i daje na sumę wartość funkcyi“. [1]

Łatwo spostrzegamy, że pierwsza średnia arytmetyczna jest rzeczywiście uogólnieniem pojęcia granicy, bo ilekroć ciąg (2) jest zbieżny, tylekroć i ciąg (3) jest zbieżny. Zastanówmy się nad tego rodzaju metodami uogólnienia pojęcia granicy.

Zamiast ciągu

$$s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots\ldots, s_n \ldots\ldots \tag{5}$$

wprowadźmy ciąg

$$f_1(s_1),\ f_2(s_1,\ s_2), \ldots\ldots, f_n(s_1, \ldots\ldots, s_n), \ldots \tag{6}$$

Funkcye $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mają być dobrane niezależnie od ciągu (5) i mają być takie, aby spełniały zasadniczy postulat **A**:

Ilekroć szereg (5) jest zbieżny, tylekroć szereg (6) jest zbieżny i to zbieżny do tej samej granicy.

Będziemy oczywiście wymagali takiego doboru funkcyj $f_1, f_2, \ldots$, aby ciąg (6) był zbieżny nawet wtedy, gdy ciąg (5) jest rozbieżny.

Postulat ten nazwijmy postulatem **B**. Ale wypełnieniu tego postulatu stoi na zawadzie następujące twierdzenie:

I. Zawsze można znaleść taki ciąg (5), że ciąg (6) będzie rozbieżny. Rozpatrzmy ciąg

$$s_n = 1 \quad (n = 1, 2 \ldots) \tag{7}$$

Według postulatu **A** mamy dla ciągu (7)

$$\lim_{n=\infty} f_n(s_1, \ldots, s_n) = 1;$$

to znaczy, że istnieje liczba n_1 taka, że

$$f_{n_1}(s_1, \ldots, s_{n_1}) > \tfrac{2}{3} \tag{8}$$

Weźmy teraz pod uwagę ciąg

---

[1]) Por. np. Lebesgue: Séries trigonométriques, Paris 1906.

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n \leqq n_1, \\ 0 & \text{dla} \quad n > n_1. \end{cases} \tag{9}$$

Dla ciągu (9) daje postulat **A**:

$$\lim f_n(s_1, \ldots\ldots, s_n) = 0;$$

to znaczy, iż istnieje liczba n_2 taka, że

$$f_{n_2}(s_1, s_2 \ldots\ldots, s_{n_2}) < \tfrac{1}{3}; \tag{10}$$

przyczem można liczbę n_2 dobrać tak, aby była większa od n_1. Teraz będziemy rozpatrywali ciąg

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n \leqq n_1, \\ 0 & \text{,,} \quad n_1 < n \leqq n_2, \\ 1 & \text{,,} \quad n > n_2. \end{cases} \tag{11}$$

Dla tego ciągu otrzymamy znowu

$$\lim_{n=\infty} f_n(s_1, \ldots\ldots, s_n) = 1$$

i udowodnimy istnienie liczby n_3 większej od n_2 i takiej, że

$$f_{n_3}(s_1, \ldots\ldots, s_{n_3}) > \tfrac{2}{3} \tag{12}$$

przyczem liczby $s_1, \ldots\ldots, s_{n_3}$ są wyrazami ciągu (11). Zbudujmy teraz ciąg

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n \leqq n_1, \\ 0 & \text{,,} \quad n_1 < n \leqq n_2; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} 1 & \text{,,} \quad n_2 < n \leqq n_3, \\ 0 & \text{,,} \quad n_3 < n \leqq n_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & \text{,,} \quad n_4 < n \leqq n_5, \\ 0 & \text{,,} \quad n_5 < n \leqq n_6; \quad \text{i t. d.} \end{cases}$$

oznaczając liczby n_4, n_5, n_6 w analogiczny sposób jak n_1, n_2, n_3, spostrzeżemy, że dla ciągu (13) ciąg

$$f_1(s_1),\ f_2(s_1, s_2), \ldots$$

będzie rozbieżny, bo wyrazy:

$$f_{n_1},\ f_{n_3},\ f_{n_5} \ldots \quad \text{są większe niż } \tfrac{2}{3}$$

a wyrazy $f_{n_2},\ f_{n_4},\ f_{n_6}\ldots$ są mniejsze niż $\frac{1}{3}$.

Z tego wynika, że można znaleść ciąg, złożony z samych jedynek i zer taki, że metoda pierwszej średniej arytmetycznej nie da żadnego rezultatu. Ale można uciec się do drugiej średniej arytmetycznej, z ciągu (3) tworząc nowy ciąg w ten sam sposób, jak z ciągu (2) utworzyliśmy ciąg (3). Ta nowa metoda będzie oczywiście czyniła zadość postulatowi **A**, a więc twierdzenie I. będzie się do niej też stosowało. Co więcej w tensam sposób, jak udowodniliśmy twierdzenie I, można udowodnić następujące twierdzenie:

II. Jeżeli mamy dany przeliczalny zbiór uogólnień pojęcia granicy

$$
\begin{array}{llll}
f_{11}(s_1), & f_{12}(s_1, s_2)\ldots & f_{1n}(s_1,\ldots, s_n), & \ldots \\
f_{21}(s_1), & f_{22}(s_1, s_2)\ldots & f_{2n}(s_1,\ldots, s_n), & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_{n1}(s_1), & f_{n2}(s_1, s_2)\ldots & f_{nn}(s_1,\ldots, s_n), & \ldots
\end{array}
$$

z których każde polega na podstawieniu zamiast ciągu: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ nowego ciągu: $f_{i1}(s_1)$, $f_{i2}(s_1, s_2), \ldots, f_{in}(s_1 \ldots s_n)$, to można znaleść taki ciąg (s_n), że dla tego ciągu wszystkie zawiodą. Dodajmy, że ciąg ten może składać się ze samych zer i jedynek.

Ponieważ z drugiej średniej arytmetycznej można otrzymać trzecią, z trzeciej czwartą etc. i, jak łatwo się przekonać, wszystkie uogólnienia pojęcia granicy, w ten sposób otrzymane, będą spełniały założenia twierdzenia II, więc możemy powiedzieć:

III. Istnieje ciąg złożony z samych zer i jedynek, taki, że wszystkie średnie arytmetyczne w zastosowaniu do niego zawodzą.

Tu nasuwa się kwestya, czy nie można znaleść uogólnienia pojęcia granicy takiego jak (6), któreby było szersze, niż wszystkie średnie arytmetyczne. Mówimy, że pewne uogólnienie jest szersze niż inne, jeżeli mnogość ciągów, do których można je skutecznie stosować, obejmuje jako podmnogość [1]) zbiór wszystkich ciągów, do których można to inne uogólnienie skutecznie stosować.

Łatwo się przekonać, że uogólnienie, określone równaniami

$$f_1(s_1) = s_1, \quad f_2(s_1, s_2) = s_2^{(1)}, \quad \ldots, \quad f_n(s_1, \ldots, s_n) = s_n^{(n-1)} \tag{14}$$

gdzie $s_i^{(k)}$ oznacza i-ty wyraz k-tej średniej arytmetycznej nie spełnia zasadniczego postulatu **A**, a więc nie zasługuje na nazwę „uogólnienia pojęcia granicy".

[1]) W znaczeniu ściślejszem.

Weźmy pod uwagę ciąg zbieżny

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots \tag{15}$$

i utwórzmy jego n-tą średnią arytmetyczną

$$s_1^{(n)},\quad s_2^{(n)}\ldots\quad s_i^{(n)}\ldots\ldots$$

Zapomocą indukcyi udowodnimy z łatwością, że

$$s_1^{(n)} \geqq 1, \quad s_2^{(n)} \geqq \frac{2^n-1}{2^n}, \quad s_3^{(n)} \geqq \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \ldots\ldots, \quad s_{n+1}^{(n)} \geqq \frac{1}{2},$$

$$s_{n+2}^{(n)} \geqq 0, \quad s_{n+3}^{(n)} \geqq 0, \quad s_{n+4}^{(n)} \geqq 0\ldots\ldots \text{ dla wszystkich } n.$$

Z tego wynika, że ciąg (14) nie będzie zbieżny do zera, jeżeli za $s_1, s_2, s_3, \ldots$ weźmiemy wyrazy ciągu (15), a więc rzeczywiście postulat **A** nie jest spełniony.

Aby odpowiedzieć na naszą kwestyę, trzeba przypomnieć niektóre własności średnich arytmetycznych.

Jeżeli jakiś ciąg $\{s_n\}$ ma uogólnioną granicę, a mianowicie k-tą średnią arytmetyczną, to istnieje stała C taka że

$$|\, s_n \,| < C n^k \quad \text{dla wszystkich } n. \tag{16}$$

Dowód nie przedstawia żadnych trudności. Bardziej subtelną własnością średnich arytmetycznych jest uogólnienie twierdzenia Abela. Jeżeli ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny, to granica wyrażenia

$$(1-x)\,[s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \ldots + s_n x^{n-1} + \ldots],$$

gdy x przebiega wartości od zera do jedności, istnieje, a nadto

$$\lim_{x=1}\,(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^{n-1} = \lim_{n=\infty} s_n. \tag{17}$$

To twierdzenie Abela jest też wtedy prawdziwe, jeżeli ciąg $\{s_n\}$ jest rozbieżny, lecz posiada k-tą średnią arytmetyczną. Oczywiście po prawej stronie równania (17) trzeba zamiast $\lim s_n$ napisać ową uogólnioną granicę. Uogólnienie to zawdzięczamy dla $k=1$ Frobeniusowi, dla $k>1$ Hölderowi, który też wprowadził metodę średnich arytmetycznych do Analizy. [1])

[1]) Frobenius: Über die Leibniz'sche Reihe, Journal f. reine u. ang. Math. t. 89, 1880. Hölder: Grenzwerte etc. Math. Ann. t. 20, 1882.

Załóżmy, że ciąg $\{s_n\}$ posiada k-tą średnią arytmetyczną i że jego uogólniona granica jest równa s. Według twierdzenia H ö l d e r a mamy wtedy:

$$\lim_{x=1} (1-x) \sum_{p=1}^{\infty} s_p x^{p-1} = s. \tag{18}$$

Z tego wynika

$$\lim_{n=\infty} (1-x_n) \left[\sum_{p=1}^{n} s_p x_n^{p-1} + \sum_{p=n+1}^{\infty} s_p x_n^{p-1} \right] = s, \tag{19}$$

gdzie $\{x_n\}$ jest ciągiem liczb dodatnich, rosnących, o granicy równej jedności. Połóżmy

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots.) \tag{20}$$

i obliczmy drugą część wyrażenia (19), a mianowicie:

$$\lim_{n=\infty} (1-x_n) \sum_{p=n+1}^{\infty} s_p x_n^{p-1}. \tag{21}$$

Mamy ze względu na (16):

$$\left| (1-x_n) \sum_{p=n+1}^{\infty} s_p x_n^{p-1} \right| < C \,.\, (1-x_n) \sum_{p=n+1}^{\infty} p^k x_n^{p-1}$$

$$= C\,(1-x_n)\,[(n+1)^k x_n^n + (n+2)^k x_n^{n+1} + \ldots\ldots]$$

$$< C(1-x_n)[(n+1)(n+2)\ldots.(n+k)\,x_n^n + (n+2)(n+3)\ldots.(n+k+1)\,x_n^{n+1} + \ldots]$$

$$= C\,(1-x_n)\,\frac{d^k}{dx_n^k}\left[x_n^{n+k} + x_n^{n+k+1} + \ldots\right] = C\,(1-x_n)\,\frac{d^k}{dx_n^k}\,\frac{x_n^{n+k}}{1-x_n}$$

$$= C\,(1-x_n)\left[\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)\,x_n^n}{1-x_n} + \binom{k}{1}\frac{(n+2)(n+3)\ldots.(n+1)\,x_n^{n+1}}{(1-x_n)^2}\right.$$

$$\left. + \ldots + \binom{k}{k}\frac{k\,x_n^{n+k}}{(1-x_n)^{k+1}}\right] < C.\,k!\,(n+k)^k\,.\,k^2\,.\,\frac{x_n^n}{(1-x_n)^k}.$$

(Ostatnią nierówność otrzymujemy, powiększając wszystkie spółczynniki liczbowe i nadając ułamkom właściwym x_n $(1-x_n)$ możliwie małe (wielkie) wykładniki ze względu na to, że $x_n(1-x_n)$ figuruje w liczniku (mianowniku)).

Uwzględnijmy (20), a zobaczymy, że

$$\lim_{n=\infty} Ck!k.^2\,(n+k)^k\,\frac{x_n^n}{(1-x_n)^k} = \lim_{n=\infty} Ck!\,k^2\,(n+k)^k\,(\sqrt{n}+1)^k\,.\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n;$$

mamy jednak dla $n \geqq 1$

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^n = \left(\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}},$$

z czego wynika, że

$$\lim_{n=\infty} Ck!\,k^2\,(n+k)^k\,\frac{x_n^n}{(1-x_n)^k} = 0,$$

a zatem granicą wyrażenia (21) jest też zero. Możemy więc napisać (wedł. (19)):

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)\sum_{p=1}^{n} s_p\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^{p-1} = s. \tag{22}$$

Jeżeli określimy teraz uogólnienie pojęcia granicy typu (6), jak następuje:

$$f_n(s_1,\ s_2,\ s_3,\ldots,\ s_n) = \left(1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)\sum_{p=1}^{n} s_p\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)^{p-1},\ (n=1,\ 2,\ 3\ldots) \tag{23}$$

to, według równania (22), będziemy mogli wypowiedzieć następujące twierdzenie:

IV. I s t n i e j e u o g ó l n i e n i e p o j ę c i a g r a n i c y, n a l e ż ą c e d o t y p u (6), k t ó r e g o z a k r e s j e s t s z e r s z y n i ż z a k r e s j a k i e j k o l w i e k ś r e d n i e j a r y t m e t y c z n e j; u o g ó l n i e n i e t o j e s t o k r e ś l o n e p r z e z r ó w n a n i e (23).

To uogólnienie dzieli ze średniemi arytmetycznemi własność, lub też postulat **C**, który tu wypowiemy: jeżeli uogólniona granica ciągu $\{a_n\}$ jest a, a uogólniona granica ciągu $\{b_n\}$ jest b, to ciąg $\{a_n+b_n\}$ posiada uogólnioną granicę równą $a+b$. Mógłby ktoś zapytać, czemu wprowadzamy uogólnienie (23), skoro t. zw. sumowanie P o i s s o n a, określone przez (17), ma te-same własności. Otóż sumowanie P o i s s o n a operuje podwójnem przejściem do granicy i nie podpada pod typ (6).

Sumowanie P o i s s o n a posiada jednak jeszcze jednę własność, jak wykazał p. Harold B o h r, a mianowicie jest szersze niż w s z y s t k i e średnie arytmetyczne razem wzięte.[1] Innemi słowy istnieje taki ciąg $\{s_n\}$, dla któ-

[1]) Pierwszeństwo publikacyi tego twierdzenia ma p. L i t t l e w o o d: Proceedings of the London Math. Society Vol. 9., 1911.

rego zawodzą wszystkie średnie arytmetyczne, a jednak lewa strona równania (17) ma sens. Łatwo jednak zmodyfikować uogólnienie (23) tak, aby i ono miało tę własność. Weźmy pod uwagę ciąg (złożony z samych jedynek i zer), o którym mówiliśmy w twierdzeniu III. Nie trudno widzieć, że dla tego ciągu $\{s_n\}$ będziemy mieli

$$|f_n(s_1, s_2, \ldots, s_n)| \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Będziemy więc mogli wybrać z ciągu $f_1, f_2, f_3 \ldots$ ciąg częściowy zbieżny

$$f_{n_1}, \quad f_{n_2}, \quad f_{n_3} \ldots\ldots$$

Określmy teraz uogólnienie pojęcia granicy, jak następuje:

$$f_1 = 0, \tag{23'}$$

$$f_2 = 0,$$

$$f_{n_1} = \left(1 - \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1} + 1}\right) \sum_{p=1}^{n_1} s_p \left(\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_1} + 1}\right)^{p-1},$$

$$f_{n_1+1} = f_{n_1}, \quad f_{n_1+2} = f_{n_1} \ldots\ldots,$$

$$f_{n_2} = \left(1 - \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2} + 1}\right) \sum_{p=1}^{n_2} s_p \left(\frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_2} + 1}\right)^{p-1},$$

$$f_{n_2+1} = f_{n_2}, \quad f_{n_2+2} = f_{n_2} \ldots\ldots \qquad \text{i t. d. i t. d.}$$

Zakres tego uogólnienia obejmuje prócz wszystkich ciągów, do których można stosować (23), także i ów ciąg, złożony z samych jedynek i zer, dla którego wszystkie średnie arytmetyczne zawodzą.

Sumowanie Poissona jest przykładem nowego typu uogólnień pojęcia granicy.

Napiszmy podwójnie nieskończony ciąg funkcyj

$$\begin{array}{llll} f_{11}(s_1), & f_{12}(s_1, s_2) \ldots\ldots & f_{1k}(s_1, s_2, \ldots, s_k) \ldots \\ f_{21}(s_1), & f_{22}(s_1, s_2) \ldots\ldots & f_{2k}(s_1, s_2, \ldots, s_k) \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{i1}(s_1), & f_{i2}(s_1, s_2) \ldots\ldots & f_{i1}(s_1, s_2, \ldots, s_k) \ldots \end{array} \tag{24}$$

i określmy dla ciągu $\{s_n\}$ uogólnioną granicę s przez równanie

$$\lim_{i=\infty} \{ \lim_{k=\infty} f_{ik}(s_1 \ldots s_k) \} = s \tag{25}$$

Będziemy wymagali oczywiście aby postulat **A** był spełniony. Ale ten nowy typ pozwala również spełnić postulat **B** — czego dotychczas zrobić nie było można. Zdefiniujmy np. funkcye f_{ik} jak następuje:

$$f_{i1}(s) = 0, \ldots\ldots, \quad f_{ii}(s_1 \ldots, s_i) = 0,$$

$f_{ik}(s_1, \ldots\ldots, s_k)$ dla $k > i =$ się średniej arytmetycznej między największą a najmniejszą algebraicznie z liczb $s_{i+1} \ldots\ldots s_k$, jeżeli te liczby są wszystkie co do wartości bezwzględnej mniejsze od i,

$= 0$ — w razie przeciwnym.

Łatwo sprawdzić, że lewa strona równania (25) będzie zawsze miała sens, a nadto postulat **A** będzie spełniony przy tym wyborze funkcyi f_{ik}.

Na specyalną uwagę zasługuje przypadek, w którym funkcye f_{ik} są liniowe:

$$f_{ik} = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{ik}s_k + \ldots.$$

P. Toeplitz udowodnił, że tylko wtedy funkcye f_{ik} dadzą uogólnienie pojęcia granicy, t. zn. tylko wtedy spełniony będzie postulat **A**, jeżeli zachodzić będą związki:

1. $\lim_{i=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1,$

2. $\lim_{i=\infty} a_{ik} = 0,$

3. $\sum_{k=i}^{\infty} |a_{ik}|$ istnieje i jest ograniczona jako funkcya skaźnika i.

Ale co więcej, p. Toeplitz udowodnił, że te warunki są wystarczające.[1]

V. Opierając się na tych rezultatach, wykażemy bez trudności, że istnieje ciąg, złożony z samych jedynek i zer, dla którego uogólnienie (24) zawodzi, jeżeli funkcye f_{ik} są liniowe.

Wybieramy n_1 tak wielkie, aby suma $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_1 k}$ była większa niż $\frac{3}{4}$ — jest to możliwe według 1. —

[1]) Por. pracę p. Toeplitza w tomie niniejszym str. 113—119.

Kładziemy teraz $s_1 = s_2 = \dots = s_{m_1} = 1$, przyczem obiera się m_1 tak, aby było $\sum_{k=m_1+1}^{\infty} | a_{n_1 k} | < \frac{1}{12}$ — jest to możliwe według 3.

Jakkolwiekbyśmy teraz określili następne s_k, będzie z pewnością:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_1 k}\, s_k > \frac{2}{3} \tag{26}$$

Teraz wyznaczamy $n_2 > n_1$ tak, aby było

$$\sum_{k=1}^{m_2} | a_{n_2 k} | < \frac{1}{6},$$

co jest możliwe według, 2, następnie wyznaczamy $m_2 > m_1$ tak, aby było

$$\sum_{k=m_2+1}^{\infty} | a_{n_2 k} | < \frac{1}{6}$$

i kładziemy

$$s_{m_1+1} = s_{m_1+2} = \dots = s_{m_2} = 0$$

Jakkolwiekbyśmy teraz określili następne s_k, będzie z pewnością:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_2 k}\, s_k < \frac{1}{3}. \tag{27}$$

Teraz określamy znowu $n_3 > n_2$ tak, aby było

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_3 k} > \frac{3}{4};$$

a nadto, aby było

$$\sum_{k=1}^{m_2} | a_{n_3 k} | < \frac{1}{24}$$

i określamy $m_3 > m_2$ tak, aby było

$$\sum_{k=m_3+1}^{\infty} | a_{n_3 k} | < \frac{1}{24}.$$

Teraz kładziemy:

$$s_{m_2+1} = s_{m_2+2} = \dots = s_{m_3} = 1,$$

skąd wynika:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_3 k}\, s_k > \frac{2}{3}. \tag{28}$$

Widzimy więc, że dla ciągu $\{s_n\}$

$$\underbrace{1,\ 1, \dots\ 1}_{m_1 \text{ razy}} \quad \underbrace{0,\ 0, \dots\ 0}_{m_2 - m_1 \text{ razy}} \quad \underbrace{1,\ 1, \dots\ 1}_{m_3 - m_2 \text{ razy}} \quad \underbrace{0 \dots}_{\text{etc.}}$$

granica wyrażenia

$$\lim_{i=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, s_k$$

nie istnieje, co wynika z nierówności (26), (27), (28)....

Sumowanie Poissona jest też przykładem dla co dopiero udowodnionego twierdzenia, jeżeli bowiem oznaczymy przez $\{x_n\}$ ciąg liczb dodatnich, rosnących, zbieżnych do jedności, to koniecznym warunkiem stosowalności sumowania Poissona będzie zbieżność wyrażenia

$$\lim_{i=\infty} (1 - x_i) \sum_{k=1}^{\infty} s_k\, x_i^{k-1} \tag{29}$$

Jest to przypadek funkcyi f_{ik} liniowych.

Możemy więc powiedzieć, że istnieje ciąg $\{s_n\}$, złożony z samych jedynek i zer taki, że funkcya

$$(1 - x) \sum_{k=1}^{\infty} s_k\, x^{k-1}$$

oscyluje ustawicznie między wartościami większemi niż $\frac{2}{3}$ i mniejszemi niż $\frac{1}{3}$, gdy x zbliża się od zera do jedności. Podobne uwagi możnaby wypowiedzieć o t. zw. „sommation exponentielle“ Borela. Możnaby również rozszerzyć nasze twierdzenie V na przypadek mnogości nieskończonej ale przeliczalnej takich uogólnień, gdzie funkcye f_{ik} są liniowe. Otrzymalibyśmy ciąg, złożony z samych jedynek i zer taki, że w zastosowaniu do niego zawiodłyby wszystkie te uogólnienia.

Innemi słowy uogólnienia liniowe typu rozważonego przez p. Toeplitza spełniają postulaty **A** i **C**, lecz nie mogą spełnić postulatu **B**.

Czy istnieje uogólnienie pojęcia granicy, któreby spełniało postulaty **A**, **B**, i **C**? Twierdzimy, że

VI, *takie uogólnienie istnieje.*

Do dowodu użyjemy twierdzenia Zermela, według którego wszelką mnogość można dobrze uporządkować.

Mówimy, że jakaś mnogość jest *dobrze uporządkowana*, jeżeli:

1) Można jej elementom nadać pewien porządek i to tak, aby zawsze z dwóch jej elementów α, β jeden był pierwszy, drugi następny—piszemy to:

$$\alpha \ll \beta$$

Pojęcie pierwszeństwa ma własności, wyrażające się jak następuje:
Jeżeli $\alpha \ll \beta$, to nie jest $\beta \ll \alpha$.
Jeżeli $\alpha \ll \beta$, $\beta \ll \gamma$, to także $\alpha \ll \gamma$.

2) Każda podmnogość tej mnogości ma element pierwszy.

Korzystając z tego twierdzenia, możemy uporządkować d o b r z e mnogość wszystkich ciągów. Określimy teraz uogólnienie pojęcia granicy w ten sposób, że każdemu ciągowi przydzielimy jakąś liczbę, jako uogólnioną granicę. Pierwszemu ciągowi przydzielimy jako granicę liczbę zero, jeżeli ten ciąg jest rozbieżny pozostawimy mu i teraz jego granicę w zwykłem tego słowa znaczeniu, wogóle wszystkim ciągom zbieżnym pozostawimy ich zwyczajną granicę. Weźmy pod uwagę jakikolwiek ciąg rozbieżny $\{d_n\}$ i przypuśćmy, że już wszystkim ciągom poprzedzającym go („pierwszym") przydzieliliśmy uogólnioną granicę. Jeżeli zachodzi związek:

$$p_0\{d_n\}+p_1\{a_n^{(1)}\}+p_2\{a_n^{(2)}\}+\ldots\ldots+p_k\{a_n^{(k)}\}+\{c_n\}=0 \qquad (30)$$

(który wyraża symbolicznie, że równanie

$$p_0 d_n+p_1 a_n^{(1)}+p_2 a_n^{(1)}+\ldots\ldots+c_n=0$$

zachodzi dla wszystkich n), przyczem $\{c_n\}$ jest ciągiem zbieżnym, ciągi $\{a_n^{(1)}\},\ldots\ldots \{a_n^k\}$ są rozbieżne i poprzedzają $\{d_n\}$, liczby $p_0, p_1, \ldots, p_k$ są wymierne, a $p_0 \neq 0$, to jako uogólnioną granicę przydzielimy ciągowi $\{d_n\}$ liczbę d, którą należy wyznaczyć z równania

$$p_0 d+p_1 a^{(1)}+\ldots\cdot+p_k a^{(k)}+c=0, \qquad (31)$$

przyczem liczby $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ są uogólnionemi granicami ciągów $\{a_n^{(1)}\},\ldots,\{a_n^{(k)}\}$, a $c=\lim\{c_n\}$.

Jeżeli taki związek nie zachodzi, to będziemy uważali 0 za uogólnioną granicę ciągu $\{d_n\}$.

Łatwo wykazać, że w ten sposób można wyznaczyć uogólnioną granicę dla każdego ciągu. Gdyby bowiem istniała pewna mnogość ciągów, dla którychby tą drogą nie dało się wyznaczyć granicy, to według definicyi dobrego uporządkowania między temi ciągami byłby jeden pierwszy. Wszystkie ciągi, które go w uporządkowaniu mnogości wszelkich ciągów poprzedzają, [1] mają zatem określoną granicę, możnaby więc rozstrzygnąć, czy zachodzi związek (30), czy nie, i zastosować równanie (31), gdzie znamy już liczby $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$, względnie położyć zero jako uogólnioną granicę owego krytycznego ciągu; wyznaczylibyśmy więc jego granicę sprzecznie z założeniem.

---

[1]) Ta mnogość ma elementy, bo napewno należy do niej ciąg p i e r w s z y.

Ale można też wykazać, że granica w ten sposób wyznaczona jest jednoznacznie określona. Dla ciągów zbieżnych jest to oczywiste. Dla ciągów rozbieżnych określenie byłoby dwuznaczne, gdyby zachodził dla jednego i tego samego ciągu $\{d_n\}$, prócz związku (30), związek

$$\bar{p}_0\{d_n\}+\bar{p}_1\{a_n^{(1)}\}+\bar{p}_2\{a_n^{(2)}\}+\ldots+\bar{p}_k\{a_n^{(k)}\}+\{\bar{c}_n\}=0 \qquad (\overline{30})$$

i gdyby ten analogiczny związek dawał równanie

$$\bar{p}_0 d+\bar{p}_1 a^{(1)}+\ldots\ldots\ \bar{p}_k a^{(k)}+\bar{c}=0, \qquad (\overline{31})$$

z któregoby na d wynikała inna wartość niż obliczona z (31). Weźmy pod uwagę mnogość ciągów, dla których ta dwuznaczność zachodzi, i przypuśćmy, że $\{d_n\}$ jest pierwszym ciągiem w tej mnogości. Ponieważ $p_0 \neq \bar{p}_0 \neq 0$, możemy wyeliminować $\{d_n\}$ ze związków (30) i $(\overline{30})$, a otrzymamy nowy związek:

$$\frac{p_1}{p_0}\{a_n^{(1)}\}-\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0}\{a_n^{(1)}\}+\ldots+\frac{p_k}{p_0}\{a_n^k\}-\frac{\bar{p}_k}{\bar{p}_0}\{a_n^k\}+\ldots$$
$$+\frac{1}{p_0}\{c_n\}-\frac{1}{\bar{p}_0}\{\bar{c}_n\}=0. \qquad (32)$$

Ponieważ ciąg $\{d_n\}$ jest rozbieżny, więc z równań (30), $(\overline{30})$ można wyczytać, że przynajmniej jeden ze spółczynników $p_1, \ldots, p_n$ i jeden ze spółczynników $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_k$ jest różny od zera. Równanie (32) jest zatem związkiem tego samego rodzaju co (30), i wchodzą weń istotnie przynajmniej dwa ciągi rozbieżne. Jeden z tych dwóch ciągów—nazwijmy go $\{x_n\}$—jest napewno późniejszy niż drugi (wzgl. pozostałe) w uporządkowaniu mnogości wszystkich ciągów, a zatem będziemy mogli dla niego obliczyć granicę uogólnioną z równania (32), jeżeli wszędzie zamiast ciągów napiszemy ich uogólnione granice. Ale te uogólnione granice są już znane dla wszystkich ciągów figurujących w (32) i jeżeli je podstawimy, zobaczymy, że nowopowstałe równanie nie będzie spełnione— w przeciwnym razie bowiem równania (30), (31) nie byłyby sprzeczne, co założyliśmy. A zatem już dla ciągu $\{x_n\}$ zachodzi dwuznaczność, jakkolwiek ciąg $\{x_n\}$ poprzedza ciąg $\{d_n\}$. Jest to niedorzeczność, a zatem i ta część twierdzenia jest udowodniona.

Pozostaje jeszcze do rozpatrzenia, czy postulaty **A**, **B** i **C** są spełnione. Co do **A** i **B** to natychmiast widzimy, że tak jest. Gdyby postulat **C** nie był spełniony, mielibyśmy dla jakichś ciągów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{d_n\}$ [1])

---

[1]) Wypadek, że $\{a_n\}$, $\{b_n\}$' $\{c_n\}$ są zbieżne wszystkie trzy, jest trywialny,—że dwa są zbieżne, jest niemożliwy,—że jeden jest zbieżny, podpada pod nasze rozumowanie.

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{d_n\}$$

$$a \; + b \; \neq d$$

gdzie a, b, d są uogólnionemi granicami ciągów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{d_n\}$. Przypuśćmy, że $\{a_n\}$ jest najpóźniejszym ze wszystkich trzech ciągów. Ponieważ związek

$$\{a_n\} + \{b_n\} - \{d_n\} = 0$$

ma wszystkie własności związku (30), więc wnosimy z niego

$$a = d - b,$$

wbrew temu, co wyżej przypuściliśmy. —

Jasło, 14 listopada 1911.

M. WOLFKE.

Zastosowanie teoryi Abbego do siatki dyfrakcyjnej.[1]

(Application de la théorie d' Abbe au réseau diffringent).

Wstęp.

Pomiędzy obrazem optycznym przedmiotów samoświecących i takich, które świecą nie własnem światłem, zachodzi zasadnicza różnica, na doniosłość której wskazał po raz pierwszy E. Abbe.

Mianowicie, promienie, które wychodzą z różnych punktów przedmiotów niesamoświecących, posiadają własność wywoływania pomiędzy sobą zjawisk interferencyi, o ile zostaną przez soczewkę w jednym punkcie zjednoczone; promienie zaś, wychodzące z różnych punktów przedmiotów samoświecących, nie posiadają tej własności. Gdy takie dwa promienie się spotykają, tedy sumują się jedynie ich natężenia świetlne. Przy promieniach, które interferują ze sobą, sumują się ich amplitudy geometrycznie i natężenie światła wyrazi się przez kwadrat amplitudy wypadkowej.

Jeżeli np. posiadamy przedmiot niesamoświecący, obraz jego mikroskopowy może przyjąć najróżnorodniejsze formy, zależnie od tego, w jaki sposób promienie świetlne w mikroskopie ze sobą interferować będą. Abbe zbadał te zjawiska systematycznie i rezultat doświadczalny tych badań został w wielu podręcznikach Fizyki dokładnie opisany[2] Matematyczna teorya tych zjawisk została dopiero obecnie opracowana na podstawie lekcyj Abbego.[3]

[1]) M. Wolfke, „Über die Abbildung eines Gitters bei künstlicher Begrenzung". Inaug. Diss. Wrocław, 1910. Annalen der Physik. (4) **34** p. 277—310 1911.

[2]) Np. O. Lummer, „Müller-Pouillet". Optyka. 1907.

[3]) E. Abbe, „Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop" opracowali O. Lummer i Fr. Reiche. 1910.